

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATOLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

TATIANA ALBIERI BARBOSA

**A calculadora como “alavanca” para a generalização de expressões
algébricas relativas às progressões geométricas**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2013

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATOLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

TATIANA ALBIERI BARBOSA

**A calculadora como “alavanca” para a generalização de expressões
algébricas relativas às progressões geométricas**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
Mestre em Educação Matemática, sob a orientação
da Professora Doutora Sílvia Dias Alcântara Machado.*

São Paulo

2013

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Dedico essa dissertação á meus pais, *Rosana Dias Albieri Barbosa* e *Paulo Roberto Barbosa* que me deram todo conforto, apoio e incentivo durante minha vida, principalmente durante o mestrado e a realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

A *Deus*, por iluminar meu caminho rumo a meus objetivos, mostando-me as oportunidades surgidas e dando-me capacidade para conquistá-las.

Ao *Senhor Jesus Cristo* por me guiar e à *Nossa Senhora Aparecida* por interceder por mim durante toda a minha vida.

À *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado*, por me orientar durante essa pesquisa, pela sua paciência, dedicação, apoio, persistência e por estar sempre disposta a me auxiliar.

Às professoras, *Norma Suely Gomes Allevato* e *Maria José Ferreira*, por aceitarem participar da Banca deste trabalho e contribuírem com valiosas observações.

Ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq* – pela bolsa concedida que me possibilitou realizar o Mestrado.

À *diretora* da Escola Estadual de São Paulo, na época em que realizei a coleta de dados, pelo incentivo e contribuição à minha tarefa.

Aos *alunos voluntários* que muito contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

A meus *pais*, por estarem sempre ao meu lado, incentivando e apoiando meus estudos.

Ao meu namorado, *Wilson Pais Romão*, pelo incentivo e apoio durante a realização de todo o Mestrado.

À minha irmã, *Tainá Albieri Barbosa*, pela constante colaboração no desenvolvimento do meu trabalho.

A todos os *professores da universidade* que, de alguma forma, contribuíram para a construção do meu conhecimento.

À professora *Sandra Maria Pinto Magina* e ao grupo de pesquisa REPARE, principalmente a *Anne Karine Lopes* e a *Ana Paula Perovano*, pelo acolhimento, apoio, auxílio e carinho.

À *Mariza Antonia Machado de Lima* e ao *Gilberto Januário* pelo apoio, carinho e por estarem sempre dispostos a me ajudar.

Aos meus *colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA* - , que de alguma forma contribuíram para a construção deste trabalho.

À *Coordenação e Direção* da Escola Estadual de São Paulo pela compreensão e incentivo durante toda a realização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma pesquisa qualitativa de Mestrado que teve como objetivo investigar se e como estudantes do Ensino Médio observam regularidades e as generalizam, construindo expressões relativas às Progressões Geométricas com o recurso das calculadoras simples ou com impressora. Para a coleta de dados da pesquisa foram realizadas três sessões, com alunos voluntários da 1ª série do Ensino Médio de uma mesma Escola Estadual, da cidade de São Paulo, o que, de acordo com André (2005) caracteriza um estudo de caso. As análises realizadas foram baseadas, sobretudo, nas ideias de Devlin (2002), Mason (1996a e 1996b), Orton e Orton (1999), Silva, Loureiro e Veloso (1989) e Abelló (1997). Concluiu-se que a calculadora serviu como um instrumento que possibilitou aos alunos focar na resolução das atividades, e não nos cálculos a serem realizados. Ela serviu como “alavanca”, possibilitando aos alunos manipular os dados dos enunciados, perceber os padrões apresentados, estabelecer relações e dar sentido às mesmas, de forma generalizar os padrões, e expressá-los por meio de expressões algébricas.

Palavras-chave: generalização, expressões algébricas, progressão geométrica, calculadora.

ABSTRACT

This paper presents a Masters qualitative study which aimed to investigate if and how High School students observe regularities and generalize them, building expressions of Geometric Progressions with the use of simple calculators or with printer. To collect data for the research three sessions were held, with volunteer students from the first grade of High School from the same State School in the city of São Paulo, which according to André (2005) is a case study. The analyzes made were based mainly on the ideas of Devlin (2002), Mason (1996a and 1996b), Orton and Orton (1999), Silva, Loureiro and Veloso (1989) and Abelló (1997). It was concluded that the calculator was used as a tool that allowed students to focus on solving the activities, and not on the calculations to be performed. It was used as "leverage", enabling students to manipulate the statements data, perceive the presented patterns, establish relations and give sense to them in a way to generalize patterns, and express them as algebraic expressions.

Keywords: generalization, algebraic expressions, geometric progression, calculator.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Espiral de desenvolvimento de Mason (1996a).....	11
Figura 2 - Conteúdos e habilidades de Matemática do 1º bim. da 1ª série do EM.....	15
Figura 3 - Conteúdos e habilidades de Matemática do 3º bim. da 1ª série do EM.....	16
Figura 4 - Disposição da sala da 1ª sessão.....	37
Figura 5 - Calculadora Simples: CS.....	38
Figura 6 - Pôster sobre as CI.....	39
Figura 7 - Localização dos instrumentos no 2º momento da 1ª sessão.....	40
Figura 8 - Tempo de duração de cada atividade na 1ª sessão.....	41
Figura 9 - 1ª atividade da 1ª sessão.....	41
Figura 10 - Protocolo at. 1 item b de D2.....	43
Figura 11 - Protocolo at. 1 item b de T5.....	43
Figura 12 - Protocolo at. 1 item b de D6.....	44
Figura 13 - Protocolo at. 1 itens a e b da D1.....	44
Figura 14 - Protocolo at. 1 item c da CI de D1.....	45
Figura 15 - Protocolo at. 1 item c da D1.....	45
Figura 16 - Protocolo at. 1 item c de D6, T5 e D2.....	46
Figura 17 - 2ª atividade da 1ª sessão.....	47
Figura 18 - Protocolo at. 2 de D1.....	48

Figura 19 - Protocolo at. 2 de T5.....	48
Figura 20 - 3ª atividade da 1ª sessão.....	50
Figura 21 - Protocolo at. 3 de D1.....	51
Figura 22 - Protocolo at. 3 de D2.....	51
Figura 23 - Protocolo at. 3 de T5.....	52
Figura 24 - Protocolo 2 at. 3 de T5.....	52
Figura 25 - Protocolo at. 3 de D6.....	53
Figura 26 - Protocolo at. 3 da CI de D6.....	53
Figura 27 - 4ª atividade da 1ª sessão.....	55
Figura 28 - Protocolo at. 4 item a da CI de D1.....	55
Figura 29 - Protocolo at. 4 item a da CI de D2.....	56
Figura 30 - Protocolo at. 4 item a de D2.....	56
Figura 31 - Protocolo at. 4 item a da CI de T5.....	57
Figura 32 - protocolo at. 4 item a de T5.....	57
Figura 33 - Protocolo at. 4 item a da CI de D6.....	57
Figura 34 – Protocolo at. 4 item a de D6.....	58
Figura 35 - Protocolo at. 4 item b de D1.....	58
Figura 36 - Protocolo at. 4 tem b da CI de D2.....	58
Figura 37 - Protocolo at. 4 tem b de D2.....	59

Figura 38 - Protocolo at. 4 tem b da CI de T5.....	59
Figura 39 - Protocolo at. 4 tem b de T5.....	59
Figura 40 - Protocolo at. 4 tem b de D6.....	60
Figura 41 - Disposição das pessoas na 2ª sessão.....	63
Figura 42 - Localização dos instrumentos no 2º momento da 2ª sessão....	66
Figura 43 - Tempo de duração de cada atividade na 2ª sessão.....	67
Figura 44 - 1ª atividade da 2ª sessão.....	68
Figura 45 - Protocolo at. 1 item a de D3.....	69
Figura 46 - Protocolo at. 1 item b de D3.....	70
Figura 47 - Protocolo at. 1 item b de D4.....	72
Figura 48 - Protocolo at. 1 item b de D5.....	73
Figura 49 - Protocolo 2 at. 1 item b de D5.....	73
Figura 50 - Protocolo at. 1 item a de D7.....	74
Figura 51 - Protocolo at. 1 item b de D7.....	74
Figura 52 - Protocolo at. 1 item a de I1.....	75
Figura 53 - Protocolo at. 1 da CI de I1.....	75
Figura 54 - Protocolo at. 1 item b de I1.....	75
Figura 55 - 2ª atividade da 2ª sessão.....	75
Figura 56 - Protocolo at. 2 item a de D3.....	79
Figura 57 - Protocolo at. 2 item b de D3.....	79

Figura 58 - Protocolo at. 2 item c de D3.....	80
Figura 59 - Protocolo at. 2 item a da CI de D4.....	81
Figura 60 - Protocolo at. 2 item a de D4.....	81
Figura 61 - Protocolo at. 2 item b da CI de D4.....	81
Figura 62 - Protocolo at. 2 item b de D4.....	82
Figura 63 - Protocolo at. 2 item c de D4.....	82
Figura 64 - Protocolo at. 2 de D5.....	83
Figura 65 - Protocolo at. 2 item a de D5.....	83
Figura 66 - Protocolo at. 2 item b de D5.....	84
Figura 67 - Protocolo at. 2 item c de D5.....	84
Figura 68 - Protocolo at. 2 item a e b de D7.....	85
Figura 69 - Protocolo at. 2 item c de D7.....	85
Figura 70 - Protocolo at. 2 item a de I1.....	76
Figura 71 - Protocolo at. 2 da CI de I1.....	76
Figura 72 - Protocolo at. 2 item b de I1.....	76
Figura 73 - Protocolo at. 2 item c de I1.....	76
Figura 74 - 3ª atividade da 2ª sessão.....	88
Figura 75 - Protocolo at. 3 item a de D3.....	89
Figura 76 - Protocolo at. 3 item b de D3.....	89
Figura 77 - Protocolo da at. 3 item c de D3.....	90

Figura 78 - Protocolo da at. 3 item d de D3.....	90
Figura 79 - Protocolo da at. 3 item a da CI de D4.....	91
Figura 80 - Protocolo da at. 3 item a de D4.....	91
Figura 81 - Protocolo da at. 3 item b da CI de D4.....	92
Figura 82 - Protocolo at. 3 item b de D4.....	92
Figura 83 - Protocolo at. 3 item c de D4.....	92
Figura 84 - Protocolo at.3 item d de D4.....	92
Figura 85 - Protocolo at. 3 item a de D5.....	93
Figura 86 - Protocolo at. 3 item b de D5.....	94
Figura 87 - Protocolo at. 3 item c de D5.....	95
Figura 88 - Protocolo at. 3 item d de D5.....	95
Figura 89 - Protocolo at. 3 item a de D7.....	96
Figura 90 - Protocolo at. 3 item b de D7.....	96
Figura 91 - Protocolo at. 3 item c da CI de D7.....	97
Figura 92 - Protocolo at. 3 item c de D7.....	97
Figura 93 - Protocolo at. 3 item d de D7.....	97
Figura 94 - Protocolo at. 3 item a da CI de I1.....	98
Figura 95 - Protocolo at. 3 item a de I1.....	98
Figura 96 - Protocolo at. 3 item b da CI de I1.....	98
Figura 97 - Protocolo at. 3 item b de I1.....	99

Figura 98 - Protocolo at. 3 item c da CI de I1.....	99
Figura 99 - Protocolo at. 3 item c de I1.....	99
Figura 100 - Protocolo at. 3 item d de I1.....	100
Figura 101 - Disposição das pessoas na 3ª sessão.....	103
Figura 102 - Resoluções da at. 1 item a e b da 2ª sessão.....	104
Figura 103 - At. 3 da 2ª sessão adaptada para a institucionalização.....	105
Figura 104 - Resoluções da at. 3 adaptada.....	106
Figura 105 - Localização dos instrumentos no 2º momento da 3ª sessão..	108
Figura 106 - Tempo de duração de cada atividade na 3ª sessão.....	108
Figura 107 - 1ª atividade da 3ª sessão.....	109
Figura 108 - Protocolo at. 1 da CI de D8.....	110
Figura 109 - Protocolo at.1 de D8.....	110
Figura 110 - Protocolo at.1 de D9.....	113
Figura 111 - Protocolo at.1 da CI de I2.....	114
Figura 112 - Protocolo at.1 de I2.....	114
Figura 113 - 2ª atividade da 3ª sessão.....	115
Figura 114 - Protocolo at.2 de D8.....	117
Figura 115 - Protocolo at. 2 item a da CI de D8.....	117
Figura 116 - Protocolo at. 2 item a de D8.....	118
Figura 117 - Protocolo at. 2 item b de D8.....	118

Figura 118 - Protocolo at. 2 de D9.....	119
Figura 119 - Protocolo at. 2 item a de D9.....	120
Figura 120 - Protocolo at. 2 item b de D9.....	123
Figura 121 - Protocolo at.2 item a da CI de I2.....	123
Figura 122 - Protocolo at. 2 item a de I2.....	124
Figura 123 - Protocolo at. 2 item b de I2.....	124
Figura 124 - 3ª atividade da 3ª sessão.....	125
Figura 125 - Protocolo at.3 item a da CI de D8.....	126
Figura 126 - Protocolo at.3 item a de D8.....	126
Figura 127 - Protocolo at. 3 item b de D8.....	127
Figura 128 - Protocolo at. 3 item a de I2.....	128
Figura 129 - Protocolo at. 3 item a da CI de I2.....	128
Figura 130 - Protocolo at.3 item b de I2.....	129

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resumo dos resultados da at. 3 da 1ª sessão.....	54
---	----

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	ix
LISTA DE TABELAS.....	xvi
APRESENTAÇÃO.....	1
Capítulo I - PROBLEMÁTICA e OBJETIVO.....	3
Capítulo II - IDEIAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS.....	7
2.1 GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES.....	7
2.1.1 Na Educação Matemática.....	7
2.1.2 O que dizem documentos oficiais recentes a respeito do pensamento algébrico em geral e da generalização de padrões especificamente?.....	13
2.2 A CALCULADORA NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA.....	17
2.2.1 O uso da calculadora no ensino da Matemática segundo pesquisadores da Educação Matemática.....	17
2.2.2 O que dizem os documentos oficiais a respeito do uso da calculadora?.....	20
2.3 COMO AS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS RELATIVAS ÀS PROGRESSÕES E O USO DA CALCULADORA SÃO ABORDADOS NO CADERNO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA ELABORADO PELA SEESP?.....	22
2.4 O ESTUDO DE CASO ETNOGRÁFICO.....	27
Capítulo III - EXPERIMENTAÇÃO.....	31
3.1 PREPARAÇÃO DA PESQUISA EMPÍRICA.....	31
3.2 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA EMPÍRICA.....	36
3.2.1 1ª sessão- 22 de maio de 2012.....	36

3.2.2 2ª sessão- 29 de maio de 2012.....	62
3.2.3 3ª sessão- 05 de junho de 2012.....	102
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	133
REFERÊNCIAS.....	141
ANEXOS.....	145

APRESENTAÇÃO

Em meu trabalho como professora de Ensino Fundamental II da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEESP – tive contato com os relatórios do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP – (SÃO PAULO, 2011), os quais apontavam o baixo desempenho dos alunos do Ensino Médio em relação à Álgebra, o que me instigou a buscar mais informações sobre o assunto.

Neste mesmo período, no Mestrado, participava do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA –, especificamente do projeto “Tecnologias da informação e Educação Matemática”. Nesse projeto, tive contato com pesquisas sobre o uso de tecnologias em geral e, em especial, do uso de calculadora em sala de aula de Matemática.

Meu interesse em buscar informações sobre o desempenho dos estudantes em relação à Álgebra, e no uso de tecnologias no ensino e na aprendizagem da Matemática, levou-me a buscar outras pesquisas do GPEA, especificamente as de Perez (2006) e de Carvalho (2008), relacionadas a outro projeto “Sobre a observação e generalização de padrões: uma atividade transversal”, as quais me inspiraram a abordar a questão da construção pelos alunos das expressões relativas às progressões geométricas.

Assim, realizei a pesquisa aqui relatada, com a intenção de investigar se e como estudantes do Ensino Médio observam regularidades e as generalizam, construindo expressões relativas às Progressões Geométricas com o recurso das calculadoras simples ou com impressora.

Desta forma, no primeiro capítulo apresento a problemática e a justificativa para a delimitação do objetivo acima citado.

No segundo capítulo, apresento o referencial teórico-metodológico da pesquisa. Início com o que se entende por generalização de padrões na Educação Matemática; a ressonância da importância do desenvolvimento do pensamento algébrico em geral e, particularmente, da generalização nos documentos oficiais; como é avaliado o uso da calculadora no ensino e na aprendizagem da Matemática tanto do ponto de vista de pesquisadores da Educação Matemática quanto de alguns dos documentos oficiais que tratam do ensino e da aprendizagem dessa disciplina; a descrição de como as expressões algébricas relativas às progressões e, o uso da calculadora, são abordados no caderno do professor de Matemática da SEESP, referentes à Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008). Finalizo comentando a opção metodológica desta pesquisa.

No terceiro capítulo trago a experimentação propriamente dita, com a descrição da preparação da pesquisa, as características da Instituição onde a pesquisa foi desenvolvida, o perfil dos alunos voluntários e, por fim, a descrição e a análise das sessões realizadas para coleta de dados.

Nas considerações finais, sintetizo as análises e reflexões, procurando responder as questões que delimitaram o objetivo desta pesquisa.

Capítulo I

PROBLEMÁTICA e OBJETIVO

O meio científico da Educação Matemática Brasileira vem alertando a comunidade sobre a falta e a consequente necessidade de pesquisas que enfoquem o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. A álgebra tem sido “acusada” de provocar o fracasso escolar de grande parte dos estudantes do nível médio, em Matemática, conforme pode ser constatado nas análises dos resultados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP, de 2010.

Um dos primeiros tópicos de álgebra do Ensino Médio envolve o estudo de sequências, mais especificamente de Progressões Aritméticas e Geométricas. Esses assuntos favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois provocam a observação de regularidades, o que, por sua vez, propicia a expressão oral e escrita da generalização algébrica. Além disso, a introdução do registro algébrico, que possibilita estabelecer a correspondência biunívoca entre cada elemento de uma progressão com o lugar que nela ocupa, parece não causar problemas de compreensão aos alunos e pode facilitar a analogia com correspondências biunívocas entre o conjunto dos naturais e conjuntos discretos.

Noto que a prática dos professores do Nível Médio, revelada nas conversas da “sala dos professores” sobre o assunto, atesta que a forma usual do enfoque dado às progressões, é puramente receituária. Explico: o professor fornece as fórmulas, os alunos decoram-nas e as aplicam a questões modelos. Ora, isso não contribui para que os alunos aprendam a generalizar em Matemática, mas sim que, ao esquecer uma das fórmulas, desistam de resolver um problema relacionado ao

assunto, conforme atestam algumas pesquisas do Grupo de pesquisa em Educação Algébrica – **GPEA** – como as de Perez (2006) e Carvalho (2008).

Carvalho (2008) realizou uma pesquisa, cujos sujeitos eram considerados pela professora de Matemática da classe à qual pertenciam, como alunos com baixo desempenho naquela disciplina. Pois bem, após participarem de atividades constantes de uma sequência didática, com o objetivo de criar condições para que o aluno construísse expressões relativas a progressões aritméticas, esse autor constatou que a interferência provocada pela pesquisa propiciara aos alunos condições para a generalização, melhora do desempenho em Matemática e no aumento do interesse destes em relação à disciplina.

Ao perceber a importância da construção algébrica de expressões que representavam um termo geral de uma progressão aritmética de forma autônoma no processo de aprendizagem dos alunos, conjecturei que seria possível que o mesmo ocorresse com expressões análogas da progressão geométrica.

Por outro lado, vários pesquisadores como Ponte (1989), Abelló (1997), Selva e Borba (2010), Bianchini e Machado (2010), e Pizysieznig (2011) dentre outros, concluíram que o uso de tecnologias em geral e, mais especificamente, da calculadora, têm constituído instrumento motivador para os estudantes de Matemática. No entanto, é preciso ressaltar que, embora já se discuta e se sugira o uso das calculadoras, desde antes de 1990, as escolas brasileiras ainda insistem em ignorá-las.

As pesquisas apontam que o estudante, ao utilizar a calculadora, revela um sentido crítico apurado em relação aos resultados e às operações utilizadas, além de se adequar ao contexto, identificar propriedades numéricas, estabelecer generalizações e determinar padrões numéricos. Segundo Lopes (1997), isso ocorre, pois, com a calculadora, os alunos não estão focados na execução de cálculos o que lhes possibilita olhar para as variáveis envolvidas no problema, levantar hipóteses, familiarizar-se com padrões e fatos de forma a utilizá-los como ponto de referência para novas situações.

Na pós-graduação participo do **GPEA** e, especificamente, do projeto “Educação algébrica e o uso de tecnologias”. Esse projeto tem o objetivo de:

[...] investigar, os conhecimentos da álgebra escolar de alunos e de professores em formação continuada, por simulação, conhecimentos esses possibilitados e construídos pelo uso de tecnologias. No âmbito de nossas pesquisas entende-se por tecnologia todos os tipos de instrumentos que o professor pode lançar mão para subsidiar seu ensino e que o aluno pode utilizar em seu processo de aprendizagem seja para conjecturar, calcular ou validar suas ações. (GPEA, 2011)

As pesquisas em andamento e as já finalizadas deste projeto, como as de Bianchini e Machado (2010), Pizysieznig (2011) e Soares (2012), têm revelado que, ao utilizar a calculadora em atividades matemáticas, o estudante apresenta uma melhora na compreensão dos assuntos básicos da própria Matemática, e declara que a aula fica mais interessante.

A ênfase do uso de tecnologias para a aprendizagem do estudante de Matemática, especificamente do uso da calculadora como uma ferramenta motivadora, que propicia uma maior autonomia, retira o foco de atividades puramente calculatórias, direcionando-o a um desenvolvimento mais amplo de sua estrutura cognitiva em relação ao pensamento algébrico, suscitaram-me as seguintes questões:

- O aluno do ensino médio, não familiarizado com a generalização, uma das principais características do pensamento algébrico, pode ser levado à construção de expressões relativas às Progressões Geométricas?
- O uso da calculadora auxilia na construção de expressões relativas ao estudo das Progressões Geométricas?

Em vista dessas questões, estabeleci como **objetivo desta pesquisa**, investigar se e como estudantes do Ensino Médio observam regularidades e as generalizam, construindo expressões relativas às Progressões Geométricas com o recurso das calculadoras simples ou com impressora.

Capítulo II

IDEIAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Neste capítulo, apresento, primeiramente, o que se entende por generalização de padrões na Educação Matemática e prossigo com a ressonância da importância do desenvolvimento do pensamento algébrico em geral e, particularmente, da generalização nos documentos oficiais. Em seguida, apresento como é avaliado o uso da calculadora no ensino e na aprendizagem da Matemática, tanto do ponto de vista de pesquisadores da Educação Matemática, quanto de alguns dos documentos oficiais que tratam do ensino e da aprendizagem dessa disciplina. Prossigo com a descrição de como as expressões algébricas relativas às progressões, e o uso da calculadora, são abordados no caderno do professor de Matemática da SEESP, referentes à Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008). Finalizo, comentando a opção metodológica desta pesquisa.

2.1 GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

2.1.1 Na Educação Matemática

Ao observar o modo de se vestir, de falar, de comer e tantos outros, de determinada pessoa ou grupo de pessoas, procura-se buscar quais características revelariam a sua origem, isto é procura-se perceber uma regularidade que permita identificar um padrão do tipo de vestimenta, da linguagem, ou da alimentação de um determinado grupo.

Essa atitude comum a todo indivíduo foi a mesma que orientou a construção das ciências: quando Newton tinha 23 anos, ao observar maçãs caírem de uma árvore, compreendeu que a mesma força que fazia as frutas caírem, mantinha a Lua em sua órbita em torno da Terra. Essa observação da regularidade: todas as maçãs caem em direção ao chão, à terra, deu origem ao estabelecimento de um padrão: a Lei da Gravidade dos corpos com massa.

As observações, sejam elas sobre formas harmônicas, notas musicais que geram uma melodia, sejam do comportamento de determinada colônia de bactérias, são atividades realizadas em diferentes áreas e contextos, com a intenção de perceber se tais regularidades existem e quais são as que contribuem para se estabelecer um padrão que permita compreender e, em certos casos, prever tais fenômenos.

Da mesma forma, a Matemática procura observar as *regularidades* em certos conjuntos para descrevê-los, caracterizá-los, generalizando *um padrão*, que leve ao estabelecimento de definições e teoremas. Pela observação da regularidade de que todo número inteiro pode ser fatorado em um produto de números primos, chegou-se à generalização desse padrão estabelecido pelo Teorema Fundamental da Aritmética.

Devlin (2002) explica por que considera a Matemática como a ciência dos padrões, dizendo que o trabalho de um matemático é:

[...] examinar “padrões” abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo a nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. (DEVLIN, 2002, p.09)

Nessa obra, com o intuito de “transmitir o conceito moderno de matemática”, Devlin apresenta seis temas denominados por ele como genéricos, que tratam “de padrões de contagem, padrões de raciocínio e de comunicação, padrões de movimento e mudança, padrões de forma, padrões de simetria e regularidade e padrões de posição (topologia)”. (DEVLIN, 2002, p.09)

Esse autor comenta, ainda, a falta de interesse e o declínio na capacidade matemática dos alunos, detectados por professores e pesquisadores no mundo todo. Ele explica a ocorrência desses problemas como consequência do fato de que, cada vez mais, a ênfase no estudo da Matemática é posta no estudo de uma lista de procedimentos, fórmulas, equações e métodos, em detrimento do real significado desse estudo. Entender o porquê estudar a Matemática, para que estudar tais números, utilizar tais fórmulas e equações ou desenvolver determinados métodos foi deixado de lado. Os alunos “não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões – padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza”. (DEVLIN, 2002, p.206)

Devlin (idem) prossegue enfatizando que, para muitos, a álgebra não passa de um conjunto de números e letras separados por sinais, ou fórmulas, equações de 1º e 2º grau e sistemas de equações em que se deve encontrar o valor desconhecido ou a incógnita. Poucos são os que relacionam a álgebra com padrões, o que é negativo para o estudo de Matemática, pois sua descoberta poderia assumir um papel fundamental na aprendizagem dos alunos, motivando-os e mudando a forma de pensar sobre a Matemática e, mais especificamente, a álgebra.

Dessa forma, esse autor afirma que o tema “padrões no ensino” deve ser trabalhado como atividades para resolução de problemas, de preferência como tarefa de investigação, o que pode se tornar uma abordagem poderosa da álgebra.

Outro pesquisador da Educação Matemática, John Mason (1996a e 1996b) também defende o trabalho com padrões no ensino de Matemática. Ele comenta que o futuro do ensino da álgebra depende da importância que o professor atribui ao pensamento matemático, principalmente ao processo de generalização. Segundo ele,

A essência do pensamento matemático é o reconhecimento, apreciação, expressão e manipulação da generalidade. Isso implica ao mesmo tempo particularizar e generalizar, assim como conjecturar e justificar. (MASON, 1996b, p.8) [...] A generalização é o “batimento cardíaco” da matemática, e aparece de várias formas. Se os professores não percebem a sua presença, e não tem o hábito de fazer com que os estudantes trabalhem expressando suas próprias generalizações, então o pensamento matemático não está acontecendo. [...] A razão na expressão da generalidade de padrões

numéricos é somente para fornecer experiências que iluminem o processo. (MASON, 1996a, p. 65)¹

O autor indica que um dos meios para o desenvolvimento da tomada de *consciência de generalidade* é entender a diferença entre “olhar por meio de”, isto é, ver a generalidade no particular e “olhar através de”, isto é, ver o particular no geral. Dessa forma, assim como é importante que os alunos frequentemente sejam instigados a reconhecer padrões para depois generalizá-los, é de igual importância observar as generalidades para então encontrar particularidades.

Assim, de acordo com Mason (1996a), a facilidade em manipular generalidade gera a confiança em desenvolver expressões e perceber diferentes expressões para uma mesma coisa. Para ele a evolução da Matemática ocorre por meio da resolução de problemas, vinda de uma sistematização de regras que geram uma rotina de procedimentos. Sua preferência é pelas atividades figurativo-numéricas, pois por meio delas é possível a visualização, a manipulação de figuras, a formação de regras que mostrem como encontrar termos posteriores e a busca de padrões que levem diretamente às fórmulas.

Portanto, Mason (*idem*) afirma que, ao perceber diferentes padrões de regularidades e descrevê-los surgem as oportunidades de se confrontarem as diferentes soluções, o que evidencia a existência de diferentes formas de ver um problema e suas soluções.

No entanto é importante notar o que Orton e Orton (1999) comentam sobre a capacidade de observar regularidades e generalizar padrões:

Encontrar termos em padrões numéricos torna-se tão mais difícil quanto mais distante o termo requerido está do último termo dado. Mais alunos podem continuar um padrão do que explicar essa situação,
As regras de padrão numérico são descritas por uma grande proporção de alunos com relação às diferenças entre termos. Geralmente, as explicações orais das regras... são dadas por mais alunos do que podem fornecer a explicação por escrito. (ORTON E ORTON, 1999, p.105)²

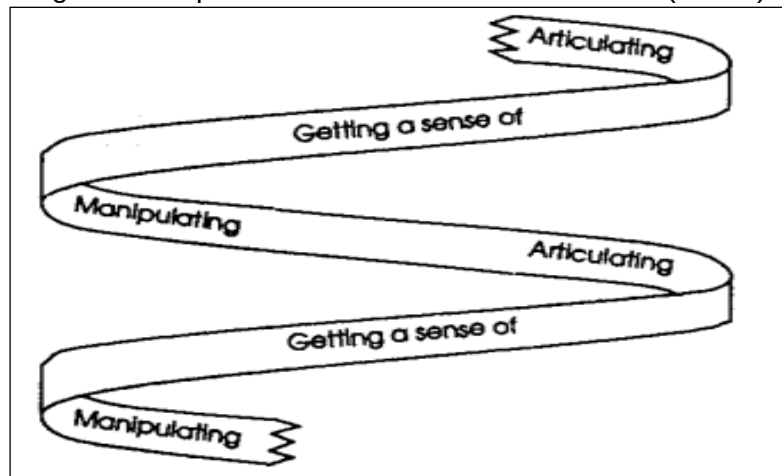
¹ Generalization is the heartbeat of mathematics, and appears in many forms. If teachers are unaware of its presence, and are not in the habit of getting students to work at expressing their own generalization, then mathematical thinking is not taking place.[...] The reason for emphasizing expression of generality in number patterns is only to provide experiences which highlight the process.

Os mesmos autores descrevem as dificuldades encontradas no caminho para a generalização:

Primeiro, [...] a incompetência aritmética algumas vezes impede o progresso. Segundo, a fixação por uma abordagem recursiva pode obstruir seriamente o progresso na direção de uma regra universal. Em terceiro lugar, um número considerável de estudantes são levados a métodos impróprios, tais como o produto da diferença e o atalho. Finalmente [...] o fato de que alguns alunos adotam métodos idiossincráticos de formas imprevisíveis. (ORTON E ORTON, 1999, p. 120)³

Com o intuito de explicar o processo pelo qual os alunos passam, ao resolver atividades de observação e generalização de padrões, Mason (1996a) propôs uma espiral de desenvolvimento com as seguintes expressões: **manipulando, dando sentido a e articulando**.

Figura 1 - Espiral de desenvolvimento de Mason (1996a).



Fonte: Mason (1996a, p.82).

De acordo com o autor, essa espiral tenta relacionar informações semelhantes e, ao mesmo tempo diferentes; então, quando o padrão é percebido, ocorre uma nova manipulação por meio de um processo circular desenvolvendo, assim, a confiança e a facilidade. Em relação às fases da espiral o autor explica:

²Finding terms in number patterns gets progressively more difficult the further the terms are from those given in the question. More pupils can continue a pattern than can explain it. Number pattern rules are described by a large proportion of pupils in relation to differences between terms. Generally, oral explanations of rules ... are given by more pupils than can write an explanation. . (Tradução de Ferreira, 2009).

³First, [...] arithmetical incompetence sometimes prevents progress. Second, the fixation with a recursive approach can seriously obstruct progress towards the universal rule. Third, a considerable number of students are tempted into inappropriate methods, such as difference product and short-cut. recursive approach can seriously obstruct progress towards the universal rule. Finally [...] the fact that idiosyncratic methods are adopted by individual pupils in unpredictable ways. (Tradução de Ferreira, 2009).

- Manipulando (*manipulating*). A manipulação, seja ela de objetos físicos, mentais ou simbólicos, fornece a base para compreender padrões, relações, generalidades e etc.
- Dando sentido a (*getting a sense of*) é o processo de levar os padrões, as relações e as generalizações à articulação. O esforço de levar isso para a articulação é um avanço e, enquanto se desenvolve a articulação, o sentido também muda.
- Articulando (*articulating*). Quando se chega à articulação, a sua relação com as ideias muda; a forma vigente na qual você vê as coisas muda, isto é, há uma mudança na forma e na estrutura da sua observação; o que antes era abstrato se torna, crescentemente, confiantemente manipulável.⁴ (MASON, 1996a,p. 81-82).

Na medida em que as situações se desenvolvem, elas se tornam cada vez mais articuladas e tais articulações tornam-se expressões do pensamento, que vão servir como elementos manipuláveis para a abstração.

Portanto, de acordo com as ideias de Devlin (2002), Orton e Orton (1999) e de Mason (1996a; 1996b, 2001) pode-se dizer que a generalização de padrões auxilia no desenvolvimento algébrico dos alunos, ao propiciar que eles criem expressões algébricas dando sentido à utilização dos símbolos, ou seja, tal generalização propicia a construção de conceitos matemáticos, resultando, assim, no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

⁴ Manipulation (whether of physical, mental, or symbolic objects) provides the basis for getting a sense of patterns, relationships, generalities, and so on; the struggle to bring these to articulation is on-going one, and that as articulation develops, sense-of also changes; as you become articulate, your relationship with the ideas changes; you experience an actual shift in the way you see things, that is, a shift in the form and structure of your attention; what was previously abstract becomes increasingly, confidently manipulable. (Tradução da autora)

2.1.2 O que dizem documentos oficiais recentes a respeito do pensamento algébrico em geral e da generalização de padrões especificamente?

Julgo importante contrastar os conhecimentos construídos pela área de pesquisa da Educação Matemática com as recomendações oficiais brasileiras sobre os assuntos pesquisados, pois, no GPEA visamos estudar, principalmente, os assuntos matemáticos que tratam do ensino e da aprendizagem da Matemática no ambiente escolar. Dessa forma, por um lado obtive informações sobre o currículo prescrito para a rede estadual de São Paulo, contexto no qual pretendia angariar os sujeitos da pesquisa, e por outro lado, o contraste feito me fornecia dados sobre o que poderia auxiliar a generalização pretendida e o que é sugerido diretamente que o professor pratique em sua sala de aula. Por essas razões é importante esclarecer o ponto de vista expressado nos documentos oficiais em relação ao assunto desta pesquisa.

Os **PCN** do Ensino Fundamental – EF – (BRASIL, 1998) afirmam que:

No decorrer do trabalho com os números é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levam os alunos a fazer algumas generalizações, e compreender por aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra. (BRASIL, 1998, p. 68).

Em síntese, os **PCN** (BRASIL, 1998) direcionados ao Ensino Fundamental, sugerem que a observação de padrões, em atividades que envolvem números, favorece a exploração das primeiras noções de álgebra.

Os **PCN+** (BRASIL, 2002), dedicados ao Ensino Médio - **EM** - quando tratam do tema *Álgebra: números e funções* apresentam a sugestão de que o professor, ao trabalhar com sequências com seus alunos, relacione essas sequências com funções, de tal modo que essa relação provoque e permita a análise de diferentes funções. De acordo com esse documento:

O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente por que permitem explorar regularidades. [...] O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas sequências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. (BRASIL, 2002 p. 121)

Vale observar que os PCN (BRASIL, 1998) e os PCN+ (BRASIL, 2002) aparentemente buscaram em pesquisas de Educação Matemática, base para afirmar que a identificação de padrões auxilia a construção de conceitos algébricos, fazendo com que os alunos descubram relações, encontrem conexões, façam generalizações e previsões.

Dado o fato de que, preferencialmente, as pesquisas de campo do GPEA são realizadas com alunos das escolas públicas, e que os Estados são os principais responsáveis pelo Ensino Médio, julgo oportuno esclarecer o que apresentam os documentos oficiais da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEESP. Pelo currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO 2010), distribuído aos professores da rede em 2010, baseado na proposta curricular da SEESP de 2008 (SÃO PAULO, 2008), os alunos da 1ª série do Ensino Médio devem estudar números e sequências no 1º bimestre, de forma a desenvolver as seguintes habilidades constantes na figura 2, na qual negritei o que é mais específico ao assunto focado nesta dissertação:

Figura 2 - Conteúdos e habilidades de Matemática do 1º bim. da 1ª série do EM.

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdo	Habilidades
1º Bimestre	Números Números e sequências: #Conjuntos numéricos #Regularidades numéricas: sequências #Progressões aritméticas e progressões geométricas⁵	#Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível. #Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos. #Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos. #Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos físicos ou geométricos.

Fonte: São Paulo (2010, p. 65).

Dessa forma, Progressão Geométrica – PG –, e a construção de algumas de suas expressões estão no bojo do assunto “Números e sequências” e, provavelmente, a PG é estudada conjuntamente com a Progressão Aritmética – PA – durante o primeiro bimestre.

O currículo de 2010 da SEESP (SÃO PAULO, 2010) indica que a aprendizagem de *Números e sequências* refletirá na aprendizagem dos conteúdos dos próximos dois bimestres: no 2º bimestre, a PA refletirá no estudo de função polinomial de 1º grau e no 3º bimestre, a PG refletirá, conforme se pode constatar pela figura 3⁶, no estudo de função exponencial:

⁵ **Progressão geométrica – PG** - Uma sequência de números será geométrica, se o quociente entre um termo (a partir do segundo) e o anterior for sempre constante, essa constante será a razão (q) da PG. (MELLO, J. L. Pastore. 2001, p.30)

⁶ Nesse quadro negritei o específico ao assunto da pesquisa.

Figura 3 - Conteúdos e habilidades de Matemática do 3º bim. da 1ª série do EM.

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	Relações Função exponencial e logarítmica #Crescimento exponencial #Função exponencial: equações e inequações #Logaritmos: def. e propriedades #Funções logarítmicas: equações e inequações	#Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento. #Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos. # Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial. #Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos.

Fonte: São Paulo (2010, p. 66)

O caderno do professor de Matemática de 2009, volume 3, da 1ª série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2009c), também baseado na proposta curricular de 2008 da SEESP, retoma a ideia de PG ao apresentá-la como um exemplo de função exponencial. Assim, é o conteúdo de PG tratado no 1º bimestre que contextualiza o estudo de funções exponenciais, relacionando-as de forma a atribuir sentido ao papel delas dentro e fora da Matemática.

Dessa forma, fica evidente a importância dada pela proposta curricular de 2008 (SÃO PAULO, 2008) e pelo currículo de Matemática da SEESP de 2010 (SÃO PAULO, 2010) ao estudo de progressões geométricas para a continuidade do estudo de conteúdos matemáticos da 1ª série do Ensino Médio.

2.2 A CALCULADORA NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

2.2.1 O uso da calculadora no ensino da Matemática, segundo pesquisadores da Educação Matemática

O uso da calculadora no ensino e na aprendizagem da matemática vem sendo estudado, há algum tempo, na Educação Matemática.

Em Portugal, Silva, Loureiro e Veloso na obra *Calculadoras na Educação Matemática* dão argumentos sobre sua importância. Para eles a calculadora é uma ferramenta que possui grandes potencialidades educativas. O uso da calculadora “[...] pode contribuir para um ensino da Matemática em que a ênfase seja colocada na compreensão, no desenvolvimento de diversas formas de raciocínio e na resolução de problemas”. (SILVA, LOUREIRO e VELOSO, 1989, p. 3)

Segundo os autores, o uso da calculadora na resolução de problemas permite que os alunos se livrem de excessivos cálculos com papel e lápis focando assim na resolução do problema. Tal uso possibilita a realização de cálculos de forma diferente ao desenvolver a capacidade de estimação e cálculo mental, além do espírito crítico e de atitudes investigativas necessários em inúmeros assuntos da Matemática. Os autores afirmam que, quando a calculadora é disponibilizada no processo de atividades

[...] de resolução de problemas, de exploração e investigação, conjectura e demonstração assume-se neste processo como ferramenta indispensável, mas também como potencial objecto de identificação de novos problemas, donde resultam novas ideias e novos conceitos. (SILVA, LOUREIRO e VELOSO, 1989, p. 6)

Albergaria e Ponte (2008), ao investigarem o conhecimento dos alunos do 6º ano de escolaridade, acerca da escolha do processo de cálculo na resolução de tarefas diversas e da sua relação com o desenvolvimento de número, verificaram que:

[...] os alunos que privilegiaram o uso da calculadora na resolução das tarefas revelaram um sentido crítico apurado em relação aos resultados obtidos, operações utilizadas e adequações ao contexto, ao contrário do aluno que usou, sobretudo os algoritmos de papel e lápis. (ALBERGARIA E PONTE, 2008, p. 98)

Segundo esses autores, a calculadora propicia ao aluno “[...] desenvolver o seu raciocínio matemático na identificação de propriedades numéricas, estabelecimento de generalizações e determinação de padrões numéricos.” (ALBERGARIA E PONTE, 2008, p. 102)

Embora Loureiro declare que, desde 1990, venha chamando a atenção de professores sobre a importância do uso da calculadora nas aulas de Matemática, percebe, por parte deles, certa resistência ao uso dessa ferramenta. Segundo ela “os professores de uma maneira geral recusam usar a calculadora, é uma espécie de ponto de honra, “Calculadora, eu”? Não obrigada!” (LOUREIRO, 2004, p.23)

Melo (2008) realizou uma pesquisa que visou investigar a prática de seis professores atuantes na Educação Básica, que frequentavam um curso de formação continuada, quanto ao uso de calculadora. O autor obteve os seguintes resultados:

- 1- Três dos seis professores declararam utilizar a calculadora em suas aulas de Matemática, apresentando as seguintes vantagens sobre seu uso:

[...] agilidade; fácil acesso; melhor comportamento da sala; novidade para a maioria dos alunos; maior envolvimento dos alunos com a Matemática; mais facilidade dos alunos para os cálculos; aulas mais interessantes; situações com cálculos exatos não são mais necessárias; pouca oposição ao seu uso; maior precisão nos cálculos; aprendizagem mais eficiente; mais tempo livre para outros conteúdos. (MELO, 2008, p. 73-74).

- 2- As desvantagens, desafios e dificuldades apontadas pelos entrevistados foram:

[...] material para seleção de atividades; falta de formação na graduação; desejo de usar a calculadora em cálculos simples, por preguiça; falta de apoio da direção; falta de apoio dos pais; falta de apoio dos colegas de profissão; início das atividades com a calculadora. (MELO, 2008, p. 96)

Bianchini e Machado (2010), ao apresentarem parte de um trabalho de assessoria realizado com professores do EF de uma escola particular de São Paulo, com o intuito de implantar a calculadora como mais um instrumento auxiliar no ensino e na aprendizagem da Matemática, narram que, no primeiro encontro com os professores perguntaram

[...] se algum entre eles havia experimentado trabalhar com calculadora com seus alunos; todos foram unânimes em estranhar a pergunta, e afirmaram que nunca haviam tentado trabalhar tal instrumento com seus alunos do Fundamental II [...] (BIANCHINI E MACHADO, 2010, p. 183)

Ao explorar pesquisas que tratam do uso da calculadora nas aulas de Matemática, suas vantagens e desvantagens, as autoras propuseram aos professores explorar juntos alguns assuntos matemáticos trabalhados por eles no EF, utilizando a calculadora como ferramenta auxiliar. Assim, após realizar um trabalho de sensibilização dos professores com atividades de familiarização com a calculadora, as autoras destacam que os professores ficaram motivados em aplicar as atividades em suas aulas, e em estudar textos relacionados ao tema, o que revelou um envolvimento daqueles profissionais com a proposta de inserção da calculadora em sala de aula.

O descrito acima sobre as pesquisas de Melo (2008) e Bianchini e Machado (2010), permite conjecturar que, assim como em Portugal, também na cidade de São Paulo os professores da Educação Básica não têm o costume de incorporar a calculadora como um instrumento facilitador para a aprendizagem matemática.

Pizysieznig (2011), em sua pesquisa de mestrado, investigou a concepção de divisibilidade de alunos do 6º ano do EF por meio de uma abordagem com calculadora. Esse autor comenta que o processo de apropriação da tecnologia, é:

[...] tradicionalmente problemático, apresentando dificuldades e contratempos de ordem didática, pedagógica e técnica, problemas esses contornáveis a partir da familiarização com a tecnologia e do planejamento de situações didáticas conduzidas por objetos claros [...] (PIZYSIEZNIG, 2011, p. 36)

Assim, para superar as desvantagens da introdução da calculadora na sala de aula é necessário que se dedique um tempo à familiarização com essa tecnologia e que se planeje situações didáticas adequadas para tanto. De acordo com os

pesquisadores citados, o uso da calculadora nas aulas de Matemática, como auxiliar no ensino e na aprendizagem, contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Além disso, a calculadora pode auxiliar no desenvolvimento do senso crítico em relação às operações e seus resultados, dentro de um determinado contexto e, na resolução de problemas, faz com que os alunos se preocupem menos com os cálculos, permitindo uma maior folga de tempo para a investigação e reflexão sobre o problema proposto. Dessa forma, o uso criterioso da calculadora potencializa o desenvolvimento de sujeitos críticos e reflexivos capazes de tomar decisões e propor novos desafios.

Para tanto, os professores de Matemática precisam tomar ciência do papel da calculadora como uma ferramenta auxiliar no ensino e na aprendizagem da matemática. E, cabe a eles familiarizarem-se com a ferramenta, verificarem a disposição dela no estabelecimento de ensino, para então, incluí-la no planejamento, de forma a elaborarem situações de familiarização com o instrumento e de aprendizagem com atividades que propiciem sua utilização. Assim, com o plano de aula estabelecido e fundamentado, é possível diminuir a rejeição e os preconceitos sobre o uso dessa ferramenta.

2.2.2 O que dizem os documentos oficiais a respeito do uso da calculadora?

Os PCN_EM (BRASIL, 1999), ao abordarem o tema Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias sugerem que:

[...] A tecnologia no aprendizado escolar deve constituir-se também em instrumento da cidadania, para a vida social e para o trabalho [...] É preciso identificar na Matemática, nas Ciências Naturais, nas Ciências Humanas, Comunicações e nas Artes, os elementos de tecnologia que lhe são essenciais e desenvolvê-los como conteúdos vivos, como objetivos da educação e, ao mesmo tempo, como meios para tanto. (BRASIL, 1999, p. 264)

No que diz respeito ao ensino e aprendizagem da Matemática “[...] a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que

permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.” (BRASIL, idem, p. 258)

No quadro das “Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática” os PCN_EM (BRASIL, 1999), dos quatro itens elencados para a “Contextualização socio-cultural” o último é: “utilizar adequadamente calculadora e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades” (Ibid, p. 259).

O currículo da SEESP de 2010 (SÃO PAULO, 2010), ao tratar das relações entre Educação e Tecnologia, com base nos PCN, apresenta dois significados, distintos, porém complementares para tecnologias:

1. o de educação tecnológica básica com o objetivo de “[...] preparar os alunos para viver e conviver em um mundo no qual a tecnologia está cada vez mais presente [...]” (SÃO PAULO, 2010, p. 22);
2. o da compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos da produção, que:

[...] faz da tecnologia a chave para relacionar o currículo ao mundo da produção de bens e serviços, isto é, aos processos pelos quais a humanidade – e cada um de nós – produz os bens e serviços de que necessita para viver. (SÃO PAULO, 2010, p.22)

A calculadora aparece nesse documento como um instrumento que *pode* e *deve* ser utilizado:

[...] crescentemente, de modo crítico, aumentando a capacidade de cálculo e de expressão, contribuindo para que deleguemos às máquinas tudo o que diz respeito aos meios criticamente apreendidos e possibilitando ao estudante uma dedicação àquilo que não pode ser delegado à máquina, por mais sofisticado que pareçam, como é o caso dos projetos, dos valores, dos fins da educação. (SÃO PAULO, 2010, p.35).

Ao tratar do uso de tecnologias, especificamente o uso da calculadora no ensino e na aprendizagem da matemática do EM, os documentos oficiais aparentam tomar como base pesquisadores da Educação Matemática, ao comentarem que o uso da calculadora possibilita o desenvolvimento crítico e reflexivo do aluno, além de aumentar sua capacidade de cálculo e de expressão, facilitando, assim, o entendimento de problemas que possuem dados reais e requerem maior foco nos processos “dando sentido a”, e “articulando” que no “manipulando” para a resolução.

Dessa forma, tais documentos sugerem que cabe aos professores de Matemática possibilitar aos alunos o desenvolvimento de competências e habilidades que relacionem os conteúdos matemáticos à sua própria realidade e ao mundo do trabalho por meio da utilização de tecnologias, especificamente da calculadora, possibilitando ao aluno entender quando, onde e por que utilizar tal ferramenta.

Pelo exposto, é possível dizer que esses documentos oficiais corroboram as conclusões dos pesquisadores da educação matemática sobre a contribuição que o uso adequado da calculadora pelos estudantes pode agregar à sua aprendizagem matemática.

2.3 COMO AS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS RELATIVAS ÀS PROGRESSÕES E O USO DA CALCULADORA SÃO ABORDADOS NO CADERNO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA ELABORADO PELA SEESP?

O caderno do professor de Matemática da 1ª série do EM, volume 1, (SÃO PAULO, 2009b) referente ao 1º bimestre, trata do assunto “Números e Sequências”, no qual se encontra o objeto matemático dessa pesquisa. Esse assunto é abordado em quatro situações de aprendizagens: 1- “Conjuntos numéricos; regularidades numéricas e/ou geométricas”; 2- “Progressões aritméticas ou progressões geométricas”; 3- “Soma dos termos de uma PA ou de uma PG finita; aplicações à Matemática Financeira”; 4- “Limite da soma dos infinitos termos de uma PG infinita”, nas quais procura observar como o uso da calculadora opera em cada uma delas, e como se dá a determinação das expressões relativas às progressões.

A situação de aprendizagem 1 é dividida em duas etapas. Na primeira etapa, explora-se a construção dos conjuntos numéricos e algumas de suas propriedades; em seguida são apresentadas algumas sequências numéricas e figurativas, com o intuito de se identificarem determinados padrões de regularidades para, então, expressá-los na língua materna. Ainda nessa etapa, são apresentadas algumas sequências e pede-se que se encontrem os próximos termos, caso elas mantenham

a regularidade observada. Ao final dessa etapa pede-se que as regularidades observadas sejam expressas em linguagem matemática.

Na segunda etapa, dadas as condições, sejam em língua materna ou em linguagem matemática, devem-se obter as sequências numéricas relativas a cada condição, para, então, por meio da resolução de problemas, determinar o termo geral de algumas sequências.

A situação de aprendizagem 2 trata das progressões, PA e PG, e da expressão de seus termos gerais, priorizando:

[...] o desenvolvimento dos conteúdos e a apresentação de situações problemas, sob o prisma do reconhecimento da regularidade da sequência e da generalização intuitiva do termo geral, colocando em segundo plano, portanto, a simples substituição de valores em fórmulas decoradas (SÃO PAULO, 2009b, p. 22-23).

Vale ressaltar que PA e PG não são tratadas nessa situação de aprendizagem de forma independente, como geralmente ocorre nos livros didáticos. São apresentados problemas algumas vezes compostos por PA, outras vezes por PG e, em outras vezes, pelos dois tipos de sequência. De acordo com São Paulo (2009b), a escolha por esse tipo de abordagem se deu, pois:

[...] o fato de que o raciocínio principal envolvido em um ou em outro tipo de sequência é o mesmo, ou seja, um valor constante é o passo que permite obter um termo a partir do anterior. O fato de que em um caso esse passo é adicionado, enquanto no outro é multiplicado é algo que compõe o raciocínio secundário do estudo, cujo reconhecimento não costuma trazer qualquer dificuldade adicional aos alunos (SÃO PAULO, 2009b, p. 23).

Os quatro primeiros problemas propostos nessa situação de aprendizagem tratam das progressões de forma implícita, pedindo os próximos termos da sequência, os termos mais distantes dos apresentados e, por fim, a expressão do termo geral ou a “fórmula matemática”. Só após trabalhar com esses quatro problemas é que se sugere ao professor definir, a partir de uma discussão com seus alunos, o que é uma PA e o que é uma PG, de forma a identificar, dentre as sequências já estudadas, aquelas que possuem as características que atendem a cada definição, de modo a permitir que os alunos construam, por si mesmos, as expressões dos termos gerais de cada uma das progressões.

No final dessa situação de aprendizagem, é apresentado o “Tratamento das progressões sob o ponto de vista funcional” relacionando a expressão do termo geral ou de “recorrência” com a noção de função. Nesse momento é sugerido ao professor que construa a representação gráfica de cada uma das progressões, PA e PG, explicando que o domínio da função é formado pelos índices dos termos de cada sequência, e o conjunto imagem é formado pelos termos referente a elas. Assim, sugere-se que o professor explique aos alunos que o estudo da representação gráfica de uma PA será retomado durante o estudo da função polinomial de 1º grau, e que a representação gráfica de uma PG será retomada durante o estudo da função exponencial.

A situação de aprendizagem 3, ao tratar da soma dos termos das progressões finitas e suas aplicações na matemática financeira, é dividida em duas etapas. São Paulo (2009b), antes de iniciar a primeira etapa afirma que:

O cálculo dos termos de uma PA ou de uma PG é um bom momento para retomar e aprofundar com os alunos a noção de algoritmo em Matemática. Isso por que podemos entender o cálculo da soma de qualquer desses dois tipos de sequência como realizado a partir de certa ordenação de procedimentos que conduzem, com eficiência, ao resultado procurado (SÃO PAULO, 2009b, p. 36).

Então, é sugerido ao professor que, antes da construção e utilização da fórmula da soma dos termos de uma PA, é importante desenvolver estratégias para tal, por meio da exploração da “propriedade da equidistância dos extremos”. Após trabalhar com essas estratégias, e quando julgar oportuno, o professor pode sugerir que os alunos “[...] generalizem as estratégias que adotam particularmente, em uma ou outra sequência, para uma sequência aritmética qualquer” (SÃO PAULO, 2009b, p. 37) de forma a encontrar a expressão que pode ser usada para encontrar o termo geral de qualquer PA.

Sobre a soma dos termos de uma PG, São Paulo (2009b, p.37) afirma que “No caso de ser necessário obter a soma dos termos de uma PG” o professor novamente poderá utilizar a ideia de um algoritmo, de forma a agilizar o cálculo e mostrar aos alunos como fazê-lo em alguns casos específicos.

É sugerido que o próprio professor oriente os alunos a construírem a expressão da soma dos termos de uma PG em função da razão e do enésimo

termo. Sua justificativa é a de que essa expressão tem mais significado para os alunos do que a expressão escrita apenas em função da razão e do número de termos da sequência. Dessa forma, é sugerido que o professor, antes de mostrar aos alunos a segunda expressão para a soma dos termos de uma PG, trabalhe com alguns problemas que exijam a utilização da primeira expressão.

Na primeira etapa, são apresentados problemas para os quais os alunos necessitem encontrar a expressão do termo geral de uma PA ou de uma PG, expressadas por meio de sequências numéricas e figurativas.

Na segunda etapa dessa situação de aprendizagem, são apresentados cinco problemas que abordam assuntos da matemática financeira, capital e taxa de juros simples e compostos. Para a resolução desses problemas é necessário um conhecimento prévio sobre PG, especificamente sobre a soma de seus termos.

Dado que o trabalho com as taxas e o cálculo da soma, é considerado trabalhoso, propõe-se para o professor que os alunos possam utilizar a calculadora durante a resolução de problemas para:

[...] agilizar a obtenção do resultado, sem qualquer perda significativa para o conceito. O importante, aqui, não é saber calcular uma potência, coisa que os alunos já devem saber, mas sim a obter a expressão numérica que conduz ao resultado desejado (SÃO PAULO, 2009b, p. 45).

Ainda sobre o uso da calculadora, ao apresentar as considerações sobre a avaliação a ser elaborada pelo professor, seu uso é justificado da seguinte maneira:

Gostaríamos, ainda, de ressaltar o fato de que a obtenção de soma de termos de uma PG exige, via de regra, o cálculo de uma potência na qual, muitas vezes, a base não é um número inteiro. As aplicações das progressões à Matemática Financeira são exemplos clássicos dessas situações. Nesse caso, visando a que o aspecto da compreensão conceitual não seja sobrepujado pela dificuldade aritmética, sugerimos ao professor que permita o uso de calculadoras, inclusive científicas, até mesmo nas avaliações individuais (SÃO PAULO, 2009b, p. 50).

Por fim, na situação de aprendizagem 4, ao tratar da soma dos infinitos termos de uma PG, são propostos “problemas algébricos e geométricos” com o intuito de investigar tal soma, com razão real entre -1 e 1. A noção de continuidade e de infinito é abordada de “forma intuitiva” no desenrolar do assunto.

Também no final dessa situação de aprendizagem, ao apresentar as considerações sobre a avaliação a ser elaborada pelo professor, é feito o seguinte comentário:

Com relação aos instrumentos pensados para a avaliação dos conceitos trabalhados no período, valem, aqui, as considerações feitas na Situação de Aprendizagem anterior, a respeito da permissão ao uso de calculadoras ou a informação sobre o resultado das potências de expoentes elevados (SÃO PAULO, 2009b, p. 58).

Assim, o caderno do professor sugere que, para encontrar o termo geral de uma progressão, o estudante deve ser levado a observar as regularidades, encontrar um padrão e expressá-lo, a princípio na linguagem materna, para então, fazê-lo algebricamente. E, para chegar à expressão da soma dos termos de uma progressão, é sugerido oferecer aos alunos ferramentas para calcular a soma dos termos de determinadas sequências, PA ou PG, para então sugerir que encontrem a expressão que indique a soma dos termos de qualquer PA ou de qualquer PG.

Essas sugestões são coerentes com as conclusões das pesquisas e as considerações dos documentos oficiais já descritos.

Porém, em relação ao uso da calculadora no ensino e na aprendizagem dos alunos, o caderno do professor limita-se a sugerir seu uso nas situações de aprendizagem 3 e 4, para facilitar os cálculos com potências. Assim o caderno do professor não sugere, a quem vai ensinar, que o uso da calculadora pode auxiliar na observação de regularidades e na construção da expressão do termo geral das sequências. Desse ponto de vista, parece haver um descompasso entre o que sugerem os documentos oficiais e as pesquisas sobre a utilização da calculadora no ensino de Matemática, e o que o caderno sugere quando a calculadora pode ser utilizada.

2.4 O ESTUDO DE CASO ETNOGRÁFICO

O objetivo desta pesquisa de **investigar se e como estudantes do Ensino Médio observam regularidades e as generalizam, construindo expressões relativas às Progressões Geométricas com o recurso das calculadoras simples ou com impressora**, induziu-me a realizar uma pesquisa empírica, de cunho qualitativo.

André (2005, p.19), ao discorrer sobre o estudo de caso do tipo etnográfico, o define como “um estudo em profundidade de um fenômeno educacional, com ênfase na sua *singularidade* e levando em conta os princípios e métodos da etnografia”⁷.

O fenômeno estudado neste trabalho é relativo à reação de alunos de uma 1ª série do Ensino Médio, de uma mesma escola, frente a situações propostas para a construção de expressões relativas a progressões geométricas. As situações criadas têm, ainda, a particularidade de possibilitar aos alunos o uso de calculadoras.

André (idem) acrescenta que o caso pode ser escolhido para conhecer em profundidade o particular e prossegue comentando que:

O interesse do pesquisador ao selecionar uma determinada unidade é compreendê-la enquanto uma unidade. Isso não impede, no entanto, que ele esteja atento ao seu contexto e às suas inter-relações, enquanto um todo orgânico e à sua dinâmica enquanto um processo, uma unidade de ação. (ANDRÉ, 2005, p.24).

No que se refere aos métodos da etnografia para que um estudo seja caracterizado como do tipo etnográfico em educação deve atender, antes de tudo, o princípio básico da etnografia: “a relativização, para o que se faz necessário o estranhamento e a observação participante.” (ANDRÉ, 2005, p. 25)

A relativização se refere ao distanciamento do observador de seu universo, de sua sociedade, para centralizar-se apenas no universo pesquisado. Esses provocam no pesquisador um estranhamento, ou seja, “um esforço deliberado de

⁷ Grifo da autora da dissertação

distanciamento da situação investigada para tentar aprender os modos de pensar, sentir, agir [...] as práticas, produções culturais dos sujeitos ou grupos estudados.” (ANDRÉ, 2005, p. 26)

A observação participante ocorre quando o pesquisador estabelece uma interação com a situação observada e estudada “afetando-a e sendo por ela afetado.” (ANDRÉ, 2005, p. 26)

O estudo de caso etnográfico, nesta pesquisa, foi utilizado com o intuito de conhecer uma instância particular, compreender profundamente essa instância em sua complexidade e totalidade, e retratar a situação de forma clara o mais próximo possível da realidade.

Ao compreender em profundidade um caso estudado André (2005) afirma ser possível entender outros casos, por meio de uma generalização naturalística.

A generalização naturalística se dá no âmbito do leitor que, com base nas descrições feitas pelo autor do estudo e na sua própria experiência, fará associações e relações com outros casos, generalizando seus conhecimentos. (ANDRÉ, 2005, p. 63)

Ao “fornecer informações bem detalhadas do contexto em estudo, de modo que o leitor tenha base suficiente para fazer julgamento da possibilidade de transferência para outro contexto” (ANDRÉ, 2005, p. 63) o autor está construindo uma descrição densa. E, é essa descrição que pode proporcionar ao leitor analisar e estabelecer, quando possível, relações entre o presente estudo e outros casos observados em experiências próprias de modo que possa generalizar seus conhecimentos e relacionar o caso particular observado a novos estudos a serem realizados.

Para a coleta de dados o pesquisador se aproxima das pessoas e:

Registra,..., descrição de pessoas, eventos e situações interessantes; opiniões e falas de diferentes sujeitos; tempo de duração de atividades; representações gráficas de ambientes. Além disso, recolhe documentos formais e informais, legais e pessoais,..., grava em áudio e vídeo. (ANDRÉ, 2005, p. 27.)

O pesquisador, na pesquisa etnográfica, leva em conta que os significados podem ser expressos tanto diretamente pela linguagem como indiretamente pelas

ações. Nesse tipo de pesquisa, como o pesquisador é o instrumento principal na coleta e análise dos dados, ele mantém um esquema aberto e flexível que lhe permite rever os pontos críticos da investigação e, se necessário, incluir novos instrumentos ou aprofundar questões durante o desenrolar da pesquisa.

André (2005), seguindo indicações de Nisbett e Watts (1987) caracteriza o desenvolvimento do estudo de caso em três fases, as quais podem requerer a conjugação de duas ou três delas em determinados momentos, ou uma ênfase maior em uma delas, ou outra situação.

A **fase exploratória** é aquela em que predomina a definição do caso, as questões relacionadas a ele, o estabelecimento dos contatos iniciais para a “entrada em campo”, a localização dos sujeitos da pesquisa, e o estabelecimento dos procedimentos e instrumentos da coleta.

A **fase da delimitação do estudo e da coleta de dados**, pois “não é possível explorar todos os ângulos do fenômeno num tempo razoavelmente limitado” (ANDRÉ, 2005, p.31).

A **fase de análise sistemática dos dados e da elaboração do relatório**, André (idem, p.54) enfatiza que a análise está presente nas várias fases da pesquisa, mas que ela se torna mais sistemática e mais formal após o encerramento da coleta de dados.

Capítulo III

EXPERIMENTAÇÃO

Início este capítulo com a descrição da preparação da pesquisa empírica, apresentando as características da instituição onde a pesquisa foi desenvolvida, Escola Estadual da cidade de São Paulo, e o perfil dos voluntários, alunos da 1ª série do Ensino Médio. Finalizo com a descrição e a análise das sessões realizadas para coleta de dados.

3.1 PREPARAÇÃO DA PESQUISA EMPÍRICA

Nesta pesquisa, a fase exploratória constituiu-se, principalmente, de uma revisão bibliográfica, tanto sobre pesquisas do GPEA relativas ao projeto “Tecnologias da Informação e Educação Matemática”, como de pesquisas de outras fontes, sobre o uso de tecnologias em geral e, em especial, do uso de calculadora em sala de aula de Matemática. Essa literatura me levou a considerar outras pesquisas do GPEA e, especificamente, a de Perez (2006) e de Carvalho (2008), relacionadas a outro projeto do GPEA “Sobre a observação e generalização de padrões: uma atividade transversal”, que me inspiraram a abordar a questão da construção, pelos alunos, das expressões relativas às progressões geométricas.

É preciso dizer que a busca por pesquisas em educação matemática, que tivessem como objeto matemático as PG, revelaram-se um tanto infrutíferas, pois com as palavras-chave: Progressões Geométricas, Progressão Geométrica, Generalização de padrão, não obtive nenhuma dissertação ou tese pelo site da

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - no 1º semestre de 2012.

É importante ressaltar que a revisão não se limitou ao início do projeto de pesquisa, tendo perdurado até as análises finais.

Para a delimitação do estudo, tive que rever algumas teorias sobre construção de conhecimento e, mais especificamente, sobre o papel da generalização de padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico; quando optei por utilizar, principalmente, as ideias de Mason (1996a-1996b), Devlin (2002) e Orton e Orton (1999).

Para a coleta de dados, decidi realizá-la em uma escola pública, visando obter dados relativos a um locus acessível à maior parte da população da cidade. Dessa forma, iniciei a análise dos documentos oficiais, para me aprofundar sobre o que os PCN e o currículo prescrito pela SEESP diziam sobre os assuntos correlatos a meu objetivo, para me inteirar sobre o contexto hipotético no qual faria minha pesquisa.

Decidi realizar minha pesquisa na escola pública da rede estadual da cidade de São Paulo, onde trabalhava desde 2011 dando aula no Ensino Fundamental, e estava familiarizada com a rotina diária da escola.

Na época, a escola funcionava nos três períodos: manhã, tarde e noite. No período da manhã estudavam os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e das três séries do Ensino Médio. No período da tarde estudavam os alunos do 6º ao 8º ano do Ensino Fundamental. E, o período da noite, era frequentado pelos alunos das três séries do Ensino Médio.

No final de 2011, ao conversar com a Diretora sobre minha pesquisa, fui autorizada a realizá-la na escola, tendo obtido sua aquiescência e a assinatura na documentação a ser entregue ao Comitê de Ética.

Procurei, então, a Coordenadora do Ensino Médio para viabilizar a divulgação entre os alunos do Ensino Médio de minha pesquisa e da necessidade de obter a adesão de voluntários. Obtive licença para contatar a professora de cinco turmas das oito existentes no período matutino da 1ª série do Ensino Médio.

No contato com a professora indicada, ela contou que iria entrar de licença prêmio no final do 1º bimestre e que ficaria difícil ceder algumas de suas aulas durante 2012; aventamos, no entanto, a possibilidade de realizar a pesquisa no período da tarde, extraescolar.

A professora, ao responder minha questão sobre a época em que introduziria o conteúdo de “Números”⁸, explicou que em 2011 esse conteúdo, indicado para ser trabalhado no 1º bimestre, tinha necessitado de todo o 1º semestre para ser tratado e, mesmo assim, os alunos não conseguiram atingir os objetivos esperados. Contou que no planejamento de 2012, ela e outra professora das primeiras séries, resolveram trabalhar com gráficos no 1º bimestre, deixando “Números” para o 2º bimestre de 2012.

O fato de que o currículo praticado pela professora diferia do prescrito, obrigou-me a rever o cronograma como também ampliar o objetivo da pesquisa, pois não só o estudo de progressões passara para o 2º bimestre como seria tratado conforme o antigo padrão: primeiro somente PA e depois PG. Assim, decidi iniciar a experimentação no segundo bimestre de 2012, antes do período em que os sujeitos iniciassem o trabalho com PG.

O objetivo da pesquisa foi modificado na medida em que percebi que PG não seria tratada conjuntamente com PA, e que a professora iria fornecer as expressões relativas a esta. Esse fato me garantia que, em tese, os alunos que se propusessem a ser voluntários de minha pesquisa não teriam conhecimento das “fórmulas” da PG, o que me obrigava a dedicar mais tempo das sessões para a observação de padrões e descrição de regularidades.

Quanto ao uso da calculadora, a professora citada declarou que ela e a outra professora das primeiras séries do ensino médio, não tinham o hábito de utilizá-las em sala de aula. Isso não me surpreendeu, pois sabia que não havia calculadoras disponíveis na escola, o que reforçou a necessidade de dedicar uma parte da sessão inicial à familiarização dos eventuais voluntários com o uso das calculadoras.

⁸ Conteúdo previsto para o primeiro bimestre da 1ª série do EM no Currículo de Matemática da SEESP e constante dos cadernos do professor e do aluno distribuídos pela SEESP em 2011 e 2012.

Na fase em que fiz, principalmente, a delimitação do estudo e tomei decisões sobre a coleta de dados, decidi realizar essa coleta durante três sessões de 50 minutos cada: a **1ª sessão** destinada à familiarização com a calculadora e a observação de regularidades em sequências; a **2ª sessão** para realização de atividades relativas à construção de expressões dos termos gerais de determinadas progressões geométricas e a **3ª sessão** para a realização das atividades relativas à construção de expressões da soma dos termos de determinadas progressões geométricas finitas.

Redigi o projeto de pesquisa, estabelecendo objetivo, teoria e método, cronograma previsto, além de ter redigido o termo de consentimento livre e esclarecido para ser assinado pelos responsáveis pelos estudantes voluntários que aceitassem participar da pesquisa.

Providenciado o aval do comitê de ética da PUC-SP, e no 2º bimestre de 2012, quando a professora contatada anteriormente, voltou de licença, obtive a permissão para, durante suas aulas de Matemática, divulgar a pesquisa e obter voluntários para sua realização no período da tarde.

No dia 8 de maio 2012, fui às salas de aula das turmas de primeira série A, B, C, D e E, e apresentei-me como professora de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental. Contei que fazia Mestrado em Educação Matemática, na PUC de São Paulo e apresentei uma síntese do projeto de minha pesquisa, enfatizando que o assunto PG seria estudado por eles nesse bimestre durante as aulas de Matemática. Expliquei que precisava da cooperação deles para a realização da pesquisa e que, quem tivesse interesse em participar, seria voluntário, o que significava que eles não receberiam nenhum tipo de remuneração. Disse, também, que eles não teriam gastos para participar da pesquisa, pois os voluntários após o horário normal de aula almoçariam no refeitório da escola, e os encontros começariam às 13h.

No final, solicitei aos interessados que colocassem seus nomes na lista, especificando a série, telefone e os dias e horários vespertinos disponíveis na semana. Disse, também, que para preservar a identidade de cada um dos voluntários seus nomes não seriam revelados e, para tanto, seriam utilizados nomes fictícios.

Dentre as cinco salas, com cerca de 220, alunos, 21 deles se propuseram como voluntários da pesquisa: quatorze da 1ª B, dois da 1ª C e quatro da 1ª E. É interessante observar que a sala que forneceu mais voluntário foi aquela conhecida como sendo a menos disciplinada das 1ªs séries do matutino.

Dos 21 voluntários, selecionei os dezesseis que indicaram ter a tarde de terça-feira disponível.

Na semana seguinte, entreguei, aos 16 alunos selecionados, o 'termo de consentimento livre e esclarecido', com as datas das três sessões a serem realizadas, e a informação de que, se necessário, haveria entrevista com o voluntário, para ser assinado pelos seus responsáveis, solicitando que o trouxessem assinado na semana seguinte. Recebi no prazo determinados doze 'termos' assinados. E combinei com os voluntários que na data estabelecida para a primeira sessão, eu os encontraria no refeitório, para que pudéssemos subir juntos para a sala onde ocorreria a sessão.

Dessa forma, considerando as ideias de Bogdan e Biklen (1994) de que o ambiente é fonte direta (de dados) da pesquisa e é papel do pesquisador criar os meios que possibilitem perceber a perspectiva dos sujeitos participantes. Assim, para a realização das sessões escolhi uma sala localizada no piso superior da escola, que no período da tarde não era utilizada. A escolha recaiu sobre essa sala por se tratar de uma sala ampla e tranquila, e que, estando localizada no final de um corredor, em princípio não sofreria barulho de passagem de alunos.

Além dessa escolha e visando à criação de alguns dos meios citados, providenciei 12 CS - calculadoras simples -, e 2 CI - calculadora com impressora - do acervo do GPEA; pôster com imagem de uma CI; duas câmeras filmadoras; dois áudio gravadores; canetas esferográficas.

A utilização de câmeras filmadoras, audiogravadores e CI tiveram por objetivo registrar as falas, os gestos e os cálculos realizados pelos sujeitos, durante a realização das atividades.

Para filmagem e audiogravação foi solicitada autorização dos sujeitos de pesquisa.

A disposição dos instrumentos foi planejada da seguinte maneira:

- Câmeras filmadoras fixadas sobre a mesa de duas duplas, sem focar os rostos para preservar suas identidades. Audiogravadores na mesa de outras duas duplas.
- CI: ficariam com duas duplas, que não estivessem sendo filmadas ou audiogravadas.
- CS: para o restante das duplas.

Obtive a aquiescência de dois colegas do GPEA para funcionarem como observadores das sessões, por conhecerem o projeto da pesquisa e a função da observação.

Vale ressaltar que considero como protocolo todos os registros: filmagens, audiograções, papel impresso com registro das CI e tudo o que for escrito pelos voluntários durante a realização de cada atividade.

3.2 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA EMPÍRICA

3.2.1 1ª sessão- 22 de maio de 2012

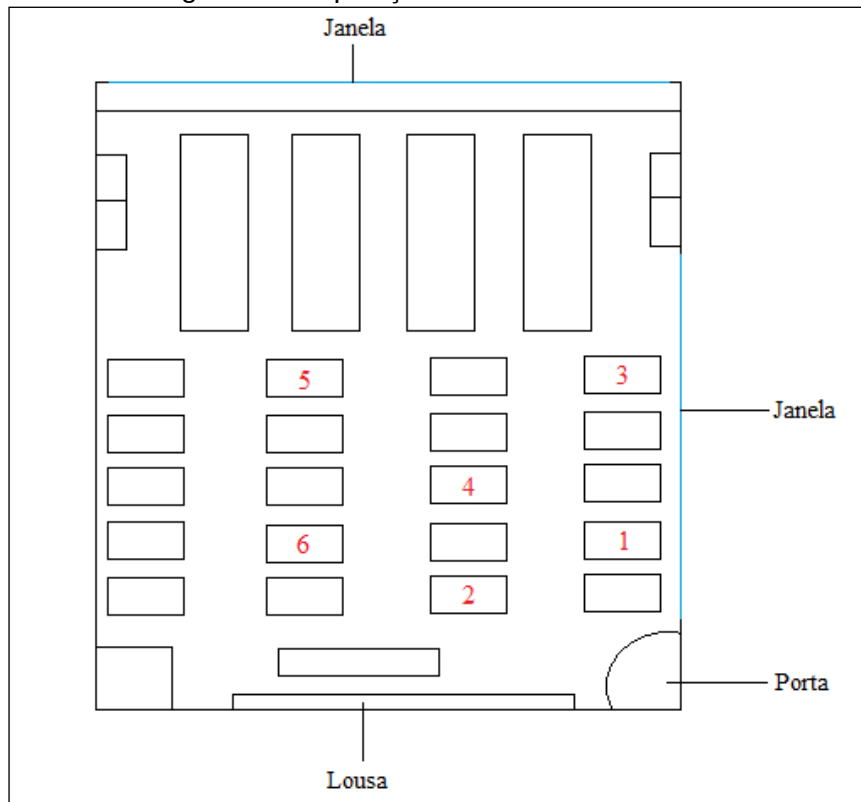
Essa sessão foi destinada à familiarização com a calculadora e a observação de regularidades em sequências.

Descrição da 1ª sessão

A descrição dessa sessão foi baseada nas observações feitas pelas observadoras e pesquisadora, na transcrição das audiograções quando possível, pois houve interferência de som conforme explicação abaixo, e observação das filmagens.

Preparamos o ambiente, organizando o material, marcando os lugares para os sujeitos se sentarem em duplas, com folhas numeradas de 1 a 6. A figura 4 ilustra a disposição marcada para as seis duplas na sala escolhida.

Figura 4 - Disposição da sala da 1ª sessão.



Faltando dez minutos para as 13 horas, fui ao refeitório, onde encontrei sete dos doze voluntários que haviam se comprometido a comparecer às 3 sessões. Os voluntários presentes explicaram que dois colegas voluntários tinham ido almoçar em casa e que três outros haviam sido liberados mais cedo pela Direção, por causa da falta do professor das duas últimas aulas da manhã, e haviam dito que não voltariam mais para a escola.

Entramos na sala preparada já com oito voluntários, sendo três meninas e cinco meninos. Solicitei que sentassem em duplas nos lugares marcados.

Iniciei a sessão agradecendo a presença e lembrando a todos o objetivo da pesquisa além de apresentar as duas observadoras.

A sala que, ao entrarmos, oferecia um ambiente tranquilo, passou, então, a sofrer o efeito do barulho vindo da sala ao lado onde um professor passou a usar microfone.

Solicitei que os voluntários colocassem os celulares sobre a mesa e deixassem o restante do material guardado na mochila, explicando que as observadoras recolheriam os celulares⁹, para que eles não caíssem na tentação de utilizá-los durante o experimento.

O objetivo dessa sessão era de, primeiramente, familiarizar os sujeitos com a calculadora CS propriamente dita e, em seguida, continuar com a familiarização, introduzindo a CI e atividades de observação de regularidades em sequências.

O 1º Momento visava à familiarização dos sujeitos com as funções das calculadoras. Dessa forma, comecei levantando algumas questões sobre a calculadora e seu uso, os sujeitos afirmaram que não tinham o hábito de utilizar a calculadora em sala de aula, a não ser em certas aulas de Física. Todos afirmaram que usavam a calculadora do celular para realizar “cálculos com decimais e raízes”, para validar seus cálculos e “para não fazer contas no papel”. Enquanto isso, uma observadora colocava à frente de cada voluntário uma CS. A figura 5 apresenta a imagem de uma CS.

Figura 5 - Calculadora Simples: CS.



Recorri, então, ao pôster, elaborado por Pizysieznig (2011), cuja foto consta na figura 6, perguntando se sabiam as funções das teclas: ON, OFF, C, AC, +, x, ÷,

⁹ Conforme anexo A.

- e =. Todos responderam que conheciam, ao mesmo tempo em que exploravam, individualmente, as respectivas CS. Finalizada essa fase, passei a segunda fase da familiarização.

Figura 6 - Pôster sobre as CI.¹⁰



Fonte: Pizysieznig (2011)

Iniciei, perguntando aos voluntários se poderia filmá-los e audiogravá-los enquanto eles realizavam as atividades que estavam sendo entregues. Todos concordaram. Disse, também, que cada dupla possuía uma calculadora em sua mesa para que, quando julgassem necessário, a utilizassem durante a realização das atividades. Informei que isso ocorreria durante as três sessões previstas. A figura 7 apresenta a localização dos instrumentos durante o segundo momento da 1ª sessão.

¹⁰ O pôster do GPEA foi elaborado por Pizysieznig para sua pesquisa de mestrado defendido em 2011.

Figura 7 - Localização dos instrumentos no 2º momento da 1ª sessão.

D1	Roberto e Danilo	CI e audiogravador.
D2	Matheus e Gustavo	CI e audiogravador.
T5	João, Gabriela e Cristian	CS e filmadora.
D6	Janete e Luana	CS e filmadora.

A 1ª atividade foi entregue às 13h15min, momento em que chegou mais um voluntário o qual foi por mim posicionado junto à dupla alocada na posição 5, pois ela estava sendo filmada; a terna então foi denominada T5. Portanto, eram nove voluntários, três meninas de 15 anos e seis meninos sendo um de 18 anos, um de 16 anos e os demais com 15 anos.

Após um tempo, cada uma das duplas alocadas nas posições 1, 2 e 6, denominadas D1 e D2 e D6, me chamou, perguntando qual o nome das figuras do seguinte ciclo     ... constantes da 1ª atividade, e respondi-lhes que eram cubo e cilindro. As mesmas duplas me chamaram quando faziam a 3ª atividade, comentando que o enunciado dos dois primeiros tipos de sequência, I crescente e II decrescente, estavam confusos e, como percebi que, realmente, havia um erro de digitação, corriji para cada dupla o enunciado.

Quando cada uma das três primeiras atividades era finalizada, a recolhíamos e entregávamos, à dupla ou à terna, a próxima atividade.

Quando cada uma das duplas ou a terna terminou a quarta atividade, agradei a presença de cada um deles e confirmei a data e o horário da próxima sessão, para o dia 29 de maio.

Os registros de uma das observadoras permitiram compor a figura 8 sobre o tempo de cada dupla e da terna em algumas atividades.

Figura 8 - Tempo de duração de cada atividade na 1ª sessão¹¹.

Atividade	Horário de início	D1	D2	T5	D6
1	13h15min	x	x	x	x
2	13h20min		x		
	13h23min	x			
	13h34min				x
3	13h30min			x	
	13h40min				x
4	13h32min		x		
	13h40min			x	
	13h48min				x
Término	13h40min		x		
	13h44min	x			
	13h46min			x	
	13h54min				x

Descrição e análise das atividades da 1ª sessão

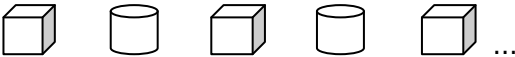
A seguir, apresento o objetivo de cada atividade, a atividade em si, após o que, faço a análise dos protocolos.

1ª atividade

O objetivo dessa atividade era apresentar uma sequência de figuras de forma a provocar a observação e generalização de um padrão. Para motivá-los, usei uma sequência figurativa cíclica, de fácil percepção. A figura 9 apresenta a 1ª atividade da 1ª sessão.

Figura 9 - 1ª atividade da 1ª sessão.

Observe a sequência de figuras



Supondo que a lei de formação dessa sequência continue a mesma:

- Qual será a próxima figura?
- Qual será a 17ª figura?
- Qual será a 12.015ª?

¹¹ Di para i=1,2,6 indicam duplas e T5 a única terna.

No **item a**, todas as duplas e a terna, como esperado, encontraram o próximo termo. Os protocolos da dupla D1 e da terna T5 apresentam o registro da figura de um cilindro, e os das duplas D2 e D6 o registro da palavra cilindro.

Na terna T5, assim que João leu alto o enunciado disse: “São duas sequências diferentes” e Gabriela registrou essa fala no protocolo. Isso parece indicar que, para eles, em uma sequência todos os termos deveriam ser iguais.

Vale observar que, pela pergunta à pesquisadora sobre o nome de cada figura da sequência, e pela observação da filmagem da terna T5, conclui-se que nenhum dos sujeitos se recordava da denominação dos sólidos geométricos: cubo e cilindro. É preciso acrescentar que, na gravação da dupla D2, ouve-se a voz de Gustavo repetindo várias vezes os termos: “quadrado” e “redondo” e a de Matheus dizendo que as figuras não têm esse nome. Na gravação da dupla D1 também se ouvem os termos quadrado e redondo. No entanto todos, independentemente de conhecerem o nome dos sólidos geométricos, responderam corretamente que a próxima figura seria o cilindro (D2 e D6) ou apresentaram o desenho do cilindro (D1 e T5).

A gravação da conversa da dupla D1 mostra que Roberto denominou as figuras de redondo e quadrado, chamou a pesquisadora e apontando para a figura do cilindro perguntou se o seu nome é cilindro, o que a pesquisadora confirmou. Logo depois se ouve Roberto dizendo: “Esse é o quadrado, não, esse é o cubo porque está em 3D”. Assim, considero que os sujeitos, talvez por não tratarem há algum tempo com sólidos geométricos tenham se esquecido da nomenclatura.

No **item b**, todos registraram que a 17ª figura é o cubo, cada grupo usou o mesmo tipo de registro utilizado no item a: figura de um cubo D1 e T5 e palavra cubo D2 e D6.

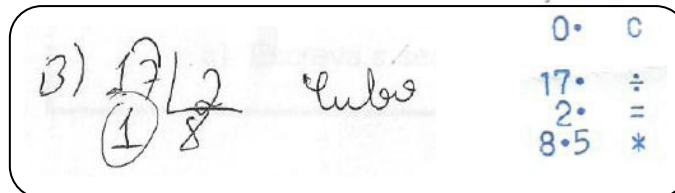
É importante dizer que nesse item apenas D1 não deu mostras de ter utilizado a calculadora. Os demais grupos utilizaram as calculadoras para validar suas hipóteses.

Os protocolos da dupla **D2** revelam que após ler o enunciado ocorreu o seguinte:

Gustavo: - *É o quadrado. Vamos fazer a conta só pra garantir.*
 Matheus: - *Não é quadrado, é cubo (usa a CI que registra $17:2 = 8,5$).*

Gustavo, então, registrou o algoritmo da divisão no protocolo conforme consta na figura 10.

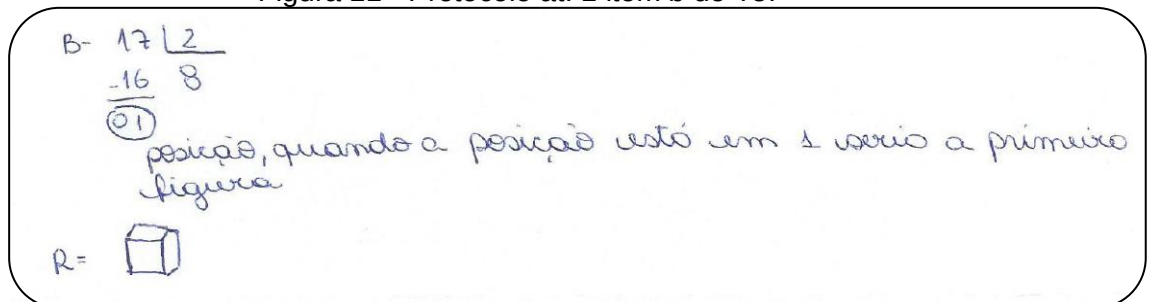
Figura 10 - Protocolo at. 1 item b de D2.



A terna **T5** procedeu da seguinte forma:

João: - (lê em voz alta o enunciado e faz um cálculo pela CS, em seguida dita para Gabriela que faz os registros no protocolo)
Coloca aí 17 dividido por 2, faz a conta: 8 vezes dois 16 e sobra um. (conforme registro da figura 11)

Figura 11 - Protocolo at. 1 item b de T5.



Assim, nota-se que essa dupla se referiu ao resto como sendo a posição da figura, ou seja, como o ciclo era de duas figuras se o resto fosse igual a um na divisão entre o número ordinal relativo à posição da figura e o número dois a resposta seria o cubo, caso contrário o resto dessa divisão fosse zero, ciclo seria completo, o sólido geométrico seria o cilindro.

Quanto ao uso da CS, de acordo com a filmagem de T5 e o diálogo apresentado, Matheus pareceu validar com a CS o cálculo realizado mentalmente, para então registrá-lo no papel.

A filmagem da dupla **D6** revela o seguinte diálogo entre a dupla:

Luana: - *Fazer pelo resto é mais fácil. 17: 2. (calcula na CS)*
 Janete: - *Porque você está fazendo essa conta?*
 Luana: - *Olha! (Apontando para os dois primeiros termos da sequência conta em voz alta até 17).*

Luana associou o 17 que é ímpar ao cubo, e explicou para a colega por meio de contagem. A figura 12 apresenta o protocolo do item b de D6.

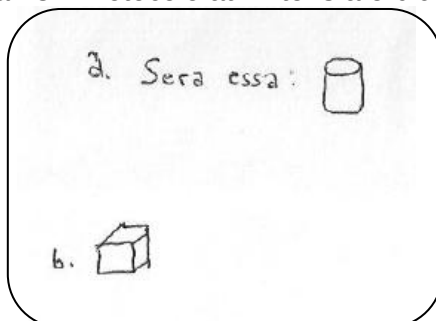
Figura 12 - Protocolo at. 1 item b de D6.

Q. - R: 17ª termo será o cubo

A dupla **D1** observou a sequência e realizou os cálculos mentalmente, indicando o cubo como resposta.

Vale observar que a gravação da discussão da dupla D1 indica que ambos os membros continuavam denominando o cubo por quadrado e, inclusive, não apresentavam o termo cubo em suas respostas conforme consta na figura13.

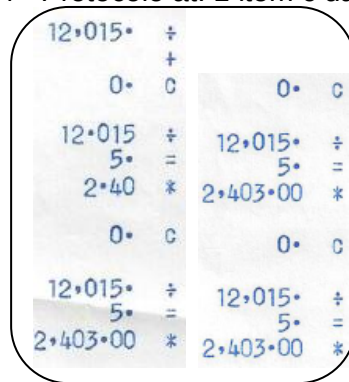
Figura 13 - Protocolo at. 1 itens a e b da D1.



No **item c**, todos responderam que o cubo era a 12015ª figura. Cada grupo usou o mesmo tipo de registro utilizado no item a e no item b: figura de um cubo D1 e T5 e palavra cubo D2 e D6.

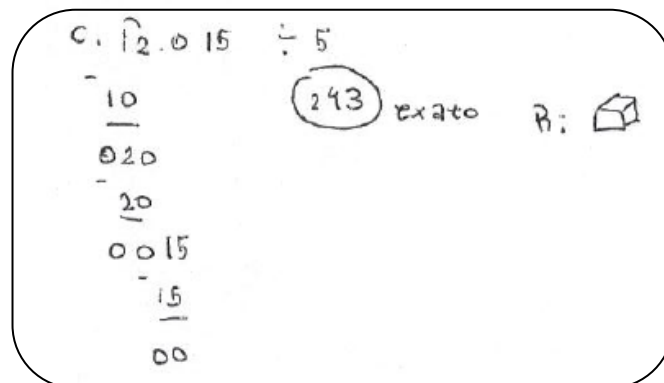
Dentre os quatro grupos, apenas **D1** usou uma estratégia diferente das que havia utilizado no item a) e b). Após a leitura do enunciado um dos membros da dupla realizou o seguinte cálculo registrado na CI, conforme figura 14.

Figura 14 - Protocolo at. 1 item c da CI de D1.



Nota-se que a dupla ignorou o fato de que o ponto na CS representa a vírgula nos registros usuais brasileiros. Ao terminar os cálculos na CI, Danilo comentou com o parceiro que a calculadora não era útil, e passam a realizar os cálculos utilizando caneta e papel. Ao desistir da CI os elementos da dupla registraram no protocolo a divisão presente na figura 15:

Figura 15 - Protocolo at. 1 item c da D1.



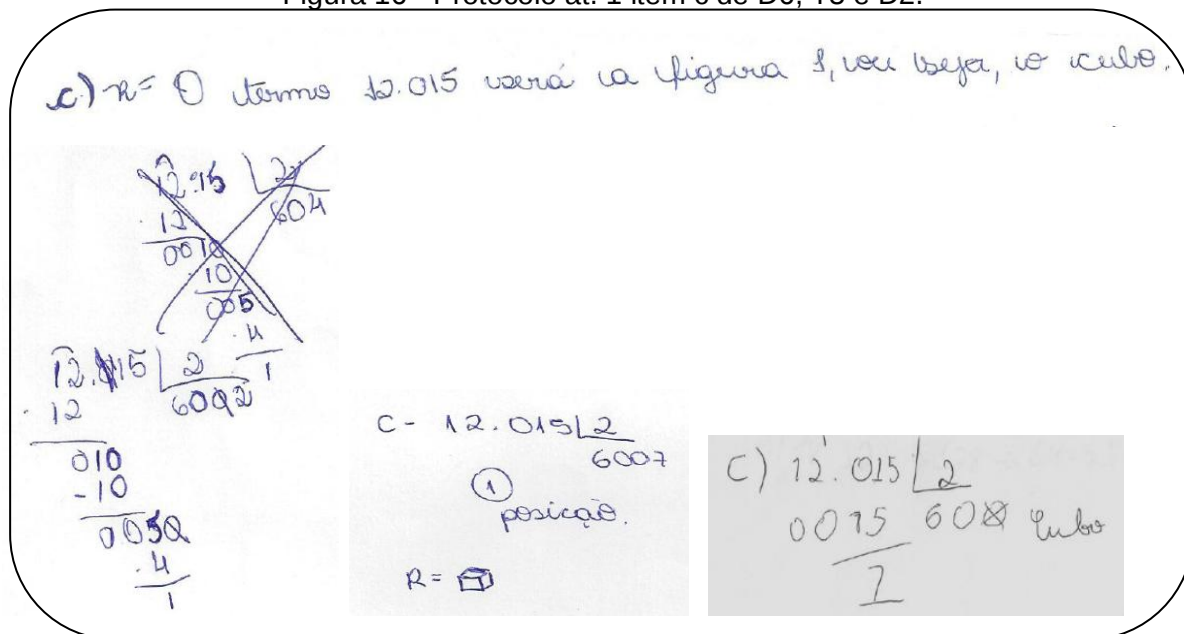
Conforme as figuras 14 e 15 a dupla, no item c, interpretou a sequência como tendo ciclo 5, revelando uma estratégia idiossincrásica conforme Orton e Orton (1999).

Isso parece indicar que os elementos da dupla não tinham realizado as atividades que antecedem o assunto de PA e PG dos cadernos do aluno de Matemática, volume 1, (SÃO PAULO, 2009a) oferecidos pela SEESP. Tal caderno aborda, no início do estudo, sequências figurativas análogas às dessa atividade.

Em relação à utilização da calculadora por D1, concluo que ela foi utilizada tanto como instrumento de cálculo como instrumento de validação de cálculos realizados pelos voluntários.

As duplas **D2**, **D6** e a terna **T5** chegaram ao resultado correto, “por linhas tortas”. Explico: após mostrar os registros dos protocolos de D6, T5 e D2 respectivamente na figura 16:

Figura 16 - Protocolo at. 1 item c de D6, T5 e D2.



Constata-se por esses protocolos que os sujeitos não dominavam o algoritmo usual da divisão, e as gravações permitem afirmar que nestes casos a calculadora serviu como instrumento de verificação, isto é, mostrou-se útil para chegarem ao resultado correto. Ou seja, pode-se dizer que a calculadora facilitou os cálculos dos alunos, vantagem essa apresentada por professores na pesquisa de Melo (2008).

Após a análise dos protocolos de cada dupla, conclui-se que o objetivo dessa atividade foi atingido por todos os grupos. No **item a**, todos observaram a sequência e obtiveram a figura seguinte. No **item b** os grupos estabeleceram uma estratégia para encontrar a 17ª figura, e no **item c** cada grupo a generalizou de forma a encontrar a 12015ª figura.

Pode-se dizer, então, que o processo pelo qual os grupos passaram para resolver essa atividade se deu conforme a espiral de desenvolvimento de Mason (1996a). A manipulação foi iniciada pelos sujeitos no **item a**, que, para encontrarem a resposta para o **item b**, deram sentido à observação estabelecendo a relação entre cada termo da sequência e a posição que ocupava, levando-os, assim, à

articulação entre a observação e a relação estabelecida, para então, generalizá-la e encontrarem a resposta do **item c**.

2ª atividade

O objetivo dessa atividade era fazer com que os sujeitos construíssem uma sequência numérica, segundo uma lei explícita de formação. Provocar o que Mason (1996a) sugere: observar generalidade (a lei) para encontrar a particularidade (a sequência). Adaptei então, uma questão de mesma finalidade das Olimpíadas Brasileiras de Matemática – OBMEP. A figura 17 apresenta a 2ª atividade da 1ª sessão.

Figura 17 – 2ª atividade da 1ª sessão.

É possível formar uma sequência de números que termina em 1 se a sequência começar com qualquer número natural não nulo e seguir repetidamente as instruções abaixo:

- Se o número for ímpar, soma-se 1;
- Se o número for par divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 11, forma-se a seguinte sequência:

11 → 12 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1

Nessa sequência aparecem sete números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 7. Além disso, como ela começa com o número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 127.

Fonte: Adaptado Brasil (2012, p. 30)

Nessa atividade todos os grupos conseguiram registrar a sequência correta respeitando a lei de formação.

As duplas D1 e D2 realizaram primeiramente o cálculo mental de cada passo, após o que validaram cada cálculo pela CI. A figura 18 apresenta o protocolo de D1 para essa atividade.

Figura 18 - Protocolo at. 2 de D1.

Handwritten work for Figure 18. On the left, a sequence of numbers: $127 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. On the right, a vertical division: $128 \div 2$, with intermediate steps 64 , 32 , 16 , 8 , 4 , 2 , 1 , and a final 0 at the bottom.

De acordo com os protocolos de **D1** pude observar que a dupla realizou primeiramente o cálculo mental, em seguida realizou a divisão $128:2$ no papel e seguiu com o cálculo mental de cada passo, para então validar cada cálculo pela CI, conforme já citado.

Os protocolos de terna **T5** apresentam os passos da terna para encontrar a sequência desejada. A figura 19 apresenta os registros de T5.

Figura 19 - Protocolo at. 2 de T5.

Handwritten work for Figure 19. It shows two sequences of numbers. The top sequence is $11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, with operations $+1$, $\times 2$, $\div 2$, $+1$, $\div 2$, $\div 2$ above the arrows. The bottom sequence is $127 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, with operations $+1$, $\div 2$, $\div 2$, $\div 2$, $\div 2$, $\div 2$, $\div 2$, $\div 2$ below the arrows. Below the sequences, it says "Tem complemento nove" and "Comprimeto".

A terna realizou primeiramente os cálculos da sequência apresentada, como exemplo na atividade, e depois calculou a sequência pedida via CS. Além disso, registrou também o comprimento da sequência, embora não tivesse sido solicitado.

A filmagem da dupla **D6** revela que Luana leu a atividade e começou a usar a CS, enquanto Janete estabeleceu o seguinte diálogo com ela:

Janete: - Não entendi o que você está fazendo...

Luana: - Olha: como 127 é impar, somo um, como 128 é par divido por dois; olha...olha...Entendeu?

Janete: - Ah! Tá.

Após esse diálogo Luana retomou os cálculos desde o início e Janete registrou cada valor encontrado por Luana.

Essa atividade possibilitou evidenciar que todos os grupos observaram a generalidade e chegaram à particularidade, conforme era minha intenção ao construí-la, o que foi feito conforme sugestão de Mason (1996a).

Em relação ao uso da calculadora as duplas D1 e D2 realizam os cálculos na CI, para validar seus cálculos. Os grupos T5 e D6 utilizaram as CS para realizar os cálculos necessários para encontrar a sequência desejada. Tais fatos mostram que os grupos T5 e D6 podem ter desejado utilizar a calculadora para essa atividade por preguiça, uma vez que os cálculos são considerados simples, e reforçou uma das desvantagens do uso da calculadora, apontada por professores na pesquisa de Melo (2008).

3ª atividade

O objetivo dessa atividade era fazer com que os sujeitos atentassem, em suas observações, às diferentes características de sequências numéricas, de forma a conduzi-los a uma observação não idiossincrática. Para essa atividade optei pela apresentação de diferentes tipos de sequências numéricas: progressão aritmética (PA), progressão geométrica (PG) e sequência cíclica. Adaptei então, uma atividade de Carvalho (2008) que possuía um objetivo similar a este. A figura 20 apresenta essa atividade.

Figura 20 – 3ª atividade da 1ª sessão.

Observe as sequências abaixo e indique quais, das cinco características a seguir, cada uma delas possui:

Características

- I. Crescente: começa com determinado número e o número seguinte é sempre maior do que o anterior.
- II. Decrescente: começa com determinado número e o termo seguinte é sempre menor que o anterior.
- III. Os termos se repetem ciclicamente.
- IV. A diferença entre um termo e o anterior é constante ou
A partir do segundo termo da sequência todo termo é obtido somando uma constante ao termo anterior.
- V. Um termo é obtido multiplicando o termo anterior por um número constante.

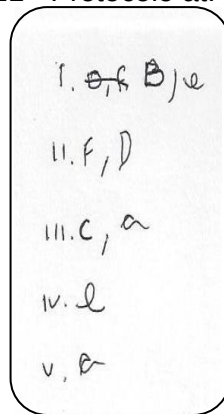
Sequências

- a) 1, 1, 1, 1, 1 ...
- b) 0, 4, 8, 12, 16 ...
- c) 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5 ...
- d) 9, 6, 3, 0, -3 ...
- e) 11, 22, 44, 88, 176 ...
- f) 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$...

Fonte: Adaptada de Carvalho (2008, p.49)

A dupla D1 optou por associar cada característica às sequências. Os outros associaram cada sequência às suas características. A figura 21 apresenta o protocolo de D1 para essa atividade.

Figura 21 - Protocolo at. 3 de D1.

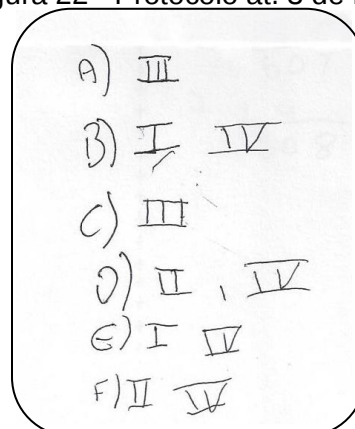


Essa dupla D1 observou competentemente as características de crescimento, decrescimento e de haver ciclo nas sequências. É interessante notar que, justamente quanto à percepção de que as sequências tinham a característica de PA ou de PG, a dupla parece não ter compreendido a definição dada da característica de uma PA, pois indicou exatamente a sequência que tem a característica de uma PG! Quanto à característica de PG a dupla indicou a sequência 1,1,1,... que realmente é uma PG de razão 1, mas, limitou-se a indicar essa.

Quanto aos outros grupos, D2, D6 e T5, todos associaram cada sequência às suas características.

O protocolo da dupla D2, consta da figura 22 a seguir:

Figura 22 - Protocolo at. 3 de D2.



Gustavo, da dupla D2, ao observar novamente a sequência $b = 0, 4, 8, 12, \dots$ argumentou: “O dobro de quatro é oito. Oh, é igual a essa... a e, onze mais onze dá

vinte e dois, vinte e dois mais vinte e dois dá quarenta e quatro”. Neste caso, o fato de Gustavo pensar na multiplicação como soma de parcelas, induziu-o a confundir a PA com a PG.

Essa dupla observou as sequências de modo pertinente, e tentou esgotar as características de cada uma das sequências. A dupla detectou as duas PA. Nessa atividade a dupla não utilizou a calculadora.

O protocolo da terna T5 apresenta o que as figuras 23 e 24 registram.

Figura 23 - Protocolo at. 3 de T5.

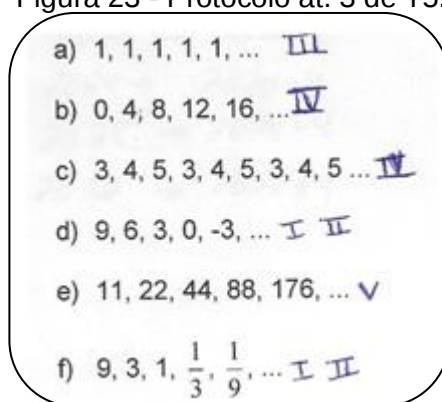
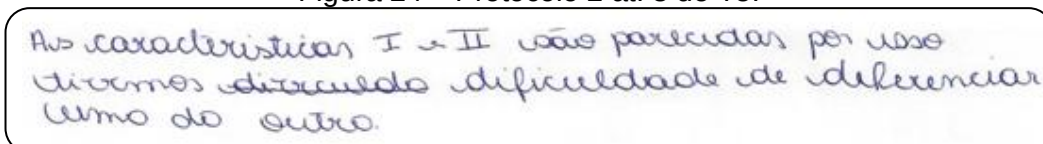


Figura 24 – Protocolo 2 at. 3 de T5.



Vale, neste caso, uma observação: na realidade, a primeira característica, I, foi impressa com um erro, ao invés de maior saiu menor. A terna foi o único grupo que, ao perceber a “confusão”, não me chamou para comentar sobre o caso.

Assim, como nenhum elemento da terna teve a iniciativa de solicitar uma explicação, levei em conta somente se os elementos da terna caracterizaram as sequências como cíclica PA e PG.

Nessa terna ocorreu o seguinte diálogo:

Cristian: - Para mim (a característica IV) é (relacionada às sequências) **b** e **d**.

João: - Não. Só a **b**.

O diálogo retrata o fenômeno da liderança do grupo, pois o grupo acatou a decisão de João e Cristian, embora estivesse certo, não soube argumentar. Outra razão pode ter sido o fato de que Cristian estava repetindo pela terceira vez a 1ª série, o que pode ter feito com que João não levasse em conta suas observações.

Os registros da dupla D6 constam nas figuras 25 e 26 a seguir.

Figura 25 - Protocolo at. 3 de D6.

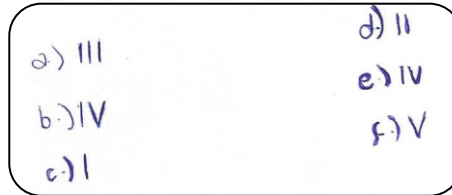
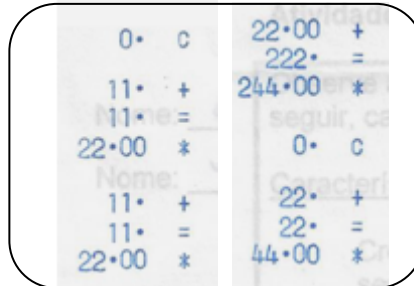


Figura 26 - Protocolo at. 3 da CI de D6.



Conforme transcrição da filmagem da dupla D6, Luana, referindo-se à sequência do item c: 3, 4, 5, 3, 4, 5, ... fala: “três, quatro, cinco,...é, essa também é” (crescente), o que as levou a indicar como crescente a sequência.

Ao se deparar com a sequência e: 11, 22, 44, 88, 176, ... a dupla D6 usou a CI¹² para verificar as características da sequência, conforme a figura 26. No entanto, embora tivessem percebido que $11+11=22$, $22+22=44$, ... parece que a dupla pensou na multiplicação como soma de parcelas; não há indícios de que tivessem percebido ser uma PG de razão 2, pois a filmagem mostra Luana dizendo “vamos colocar qualquer uma”, e colocaram V (PG).

Ao observar a sequência f: 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ... a dupla D6 teve o seguinte diálogo:

¹² A dupla D2 já havia terminado de fazer todas as atividades e então substitui a CS de suas mesas pela CI.

Luana: - *Essa aqui é multiplicação. Ah! É regra de três.*
 Janete: - *Menina inteligente!*
 Luana: - *Meu primo que me ensinou.*

Tal diálogo indica a descontração da dupla ao realizar as atividades e, aparentemente, Luana se referiu à proporcionalidade entre, por exemplo, 9, 3 e 1 e $1/3$...

Na tabela 1, a seguir, apresento o resumo dos resultados apresentados pelas duplas.

Tabela 1 - Resumo dos resultados da at. 3 da 1ª sessão.

¹³	Tipo	D1	D2	T5	D6
A	III, IV, V	III, V, IV	III, V, IV	III, V, IV	III, V, IV
B	IV, I	I, IV	IV, I	IV, I	IV, I
C	III	III	III	II ou IV ?	I
D	IV, II	II IV	IV, II	I, II, IV	II, IV
E	V, I	IV, I	IV, I	V, I	IV, I
F	V, II	II, V	IV, II	I, II, V	V, II

Os dados apresentados indicam que as características de sequência crescente e decrescente não ofereceram maior dificuldade, a não ser para a terna T5, pelas razões já apontadas. No entanto, as características das sequências PA e PG não foram bem interpretadas, poucos sujeitos perceberam a característica de uma PA, frustrando minha previsão de que, como os sujeitos já tinham iniciado o estudo de PA, eles identificariam, com facilidade, as duas PA apresentadas.

Refletindo sobre a redação dada à característica IV: “A diferença entre um termo e o anterior é constante ou a partir do segundo termo da sequência todo termo é obtido somando uma constante ao termo anterior”, conjecturo que talvez se tivesse oferecido ao invés dessa redação aquela constante no caderno do aluno: “Uma progressão aritmética é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de números a_n , em que a diferença entre cada termo a_{n+1} e seu antecedente a_n é uma constante” (SÃO PAULO, 2009a, p.21), eles teriam tido mais êxito na identificação das PA.

¹³ Em preto e vermelho o que cada grupo considerou, em azul o que deixaram de considerar.

4ª atividade

O objetivo dessa atividade era, dada a lei de formação de forma implícita, induzir os sujeitos à construção de uma sequência numérica.

A escolha dessa atividade deveu-se ao fato de se tratar de uma tarefa de investigação, conforme sugerido por Devlin (2002), de problema baseado no cotidiano (anos bissexto), que envolve a resolução de uma PA, assunto em estudo nas aulas regulares, no momento da resolução dessa sessão. A figura 27 apresenta a 4ª atividade, da 1ª sessão.

Figura 27 - 4ª atividade da 1ª sessão.

Cada ano possui 365 dias, com exceção dos anos bissextos que possuem 366.

Para saber se um ano é bissexto devemos verificar se ele é divisível por 4, pois anos bissextos ocorrem de 4 em 4 anos, desde 44 a. C.

Desde 1582, todo ano divisível por 100 não é bissexto, com exceção dos que são divisíveis por 400 também.

- a) O ano em que cada um de vocês nasceu foi bissexto?
- b) 2012 é um ano bissexto, quais serão os próximos 5 anos bissextos?

Fonte: Adaptado de Castaldi (2010a, p. 70)

Ao iniciar essa atividade T5 contou com a CI, pois a dupla D1 já havia entregado a última atividade e pôde disponibilizá-la.

No **item a**, a dupla D1 conforme transcrição da audiogravação, após descobrir que ambos nasceram em 1997, um deles registrou na CI os cálculos mostrados pela figura 28:

Figura 28 - Protocolo at. 4 item a da CI de D1.

$$\begin{array}{rcl} 97 & \div & \\ 4 & = & \\ 24.25 & * & \\ \hline 1.997 & \div & \\ 4 & = & \\ 499.25 & * & \\ 499.25 & + & \end{array}$$

O sujeito que estava com a CI calculou primeiramente $97:4= 24,25$. Nesse momento, ouve-se o companheiro dizendo: não faz 1997 por quatro. Baseados no

resultado do cálculo de $1997:4=499,25$ deram como resposta: "Não, pois é 1997 que não é divisível por 4".

A dupla D2, após descobrir que seus componentes nasceram um em 1997 e o outro em 1996, registrou na CI os cálculos mostrados pela figura 29:

Figura 29 - Protocolo at. 4 item a da CI de D2.

$$\begin{array}{r} 0 \cdot C \\ 1997 \cdot \div \\ 4 \cdot = \\ 499.25 * \\ 0 \cdot C \\ 1996 \cdot \div \\ 4 \cdot = \\ 499 * \end{array}$$

O sujeito que estava com a CI registrou o ano de seu nascimento, 1997, e calculou $1997:4=499,25$ enquanto o outro registrava o resultado no papel. Em seguida, calculou o ano do companheiro, 1996, e calculou $1996:4=499$ e o companheiro registrou no papel. A resposta consta na figura 30.

Figura 30 - Protocolo at. 4 item a de D2.

$$\begin{array}{r} 1997 \overline{) 4} \\ 499.25 \end{array} \quad \text{Não é bissexto}$$

$$\begin{array}{r} 1996 \overline{) 4} \\ 499 \end{array} \quad \text{e bissexto}$$

É interessante notar que essa dupla soube interpretar a função do ponto da CI como a vírgula dos decimais.

João, da terna T5, leu alto o enunciado, e logo após iniciou-se uma discussão:

Gabriela: - *Não entendi.*

Cristian: - *Eu também não.*

João: - *Um ano é bissexto quando dá para dividir por 4, por exemplo eu nasci em 1997, tenho que saber se dá para dividir por quatro.*

Gabriela: - *Eu também nasci em 1997.*

Cristian: - *Eu em 1994.*

Após isso, Gabriela registra os cálculos na CI e as respostas no protocolo conforme figuras 31 e 32.

Figura 31 - Protocolo at. 4 item a da CI de T5.

$$\begin{array}{rcl}
 0 & + & \\
 1.997 & \div & \\
 2 & = & \\
 998.5 & * & \\
 0 & 0 & \\
 1.994 & \div & \\
 4 & = & \\
 498.5 & * & \\
 0 & 0 & \\
 1.997 & + & \\
 4 & = & \\
 499.25 & * &
 \end{array}$$

Figura 32 - protocolo at. 4 item a de T5.

A- 1994 não é bissexto
1997 não é bissexto

Os cálculos mostram que, para decidir se 1997 era divisível por 4, primeiramente Gabriela sentiu necessidade de verificar se era divisível por 2, o bastaria para dizer que não era divisível por 4; no entanto, após fazer o cálculo de 1994, ela sentiu necessidade de verificar, novamente, se 1997 era divisível por 4. Isso parece evidenciar o desconhecimento dos critérios de divisibilidade por 2 e por 4.

Janete e Luana, da dupla D6, verificaram que ambas nasceram em 1997. Luana, com a CI, fez os seguintes cálculos conforme consta na figura 33.

Figura 33 - Protocolo at. 4 item a da CI de D6.

$$\begin{array}{rcl}
 44.00 & * & \\
 0 & 0 & \\
 1.997 & \div & \\
 4 & = & \\
 499.25 & * & \\
 1.582 & \div & \\
 100 & + & \\
 0 & 0 & \\
 1.582 & \div & \\
 400 & = & \\
 3.96 & * &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 1.997 & \div & \\
 1.997 & \div & \\
 100 & = & \\
 0.01 & * & \\
 1.997 & \div & \\
 400 & = & \\
 4.99 & * & \\
 1.997 & \div & \\
 4 & = & \\
 499.25 & * &
 \end{array}$$

Luana, no final, pede a Janete para registrar no protocolo do papel, que 1997 não foi um ano bissexto.

Figura 34 – Protocolo at. 4 item a de D6.

a) 1997 $\Rightarrow$ não foi um ano bissexto

Fica uma indagação sobre por que Luana realizou tantos cálculos entre os dois cálculos de $1997:4$.

Em relação ao item **b**, a dupla D1 iniciou falando um para o outro: 2012 mais 4 , 2016, mais 4 , 2020, etc... após o que, registram no protocolo a sequência da figura 35.

Figura 35 - Protocolo at. 4 item b de D1.

ex. 2016, 2020, 2024, 2028 e 2032

Nota-se que a dupla encontrou os elementos da sequência com facilidade; no entanto, ainda não haviam se apropriado do registro algébrico usual para sequências.

A dupla D2 realizou os cálculos dos termos solicitados mentalmente, após o que validou os resultados na CI, verificando se os termos obtidos eram divisíveis por 4 [ver figura 36] e, em seguida, registrou os resultados da validação no protocolo, conforme consta nas figuras 36 e 37.

Figura 36 - Protocolo at. 4 tem b da CI de D2.

2.012. $\div$		2.024. $\div$	
4. =		4. =	
503. *		506. *	
		0. 0	
503. =		2.028. $\div$	
125.75 *		4. =	
0. 0		507. *	
2.016. $\div$		0. 0	
4. =		2.032. $\div$	
504. *		4. =	
		508. *	
0. 0		508. +	
2.020. $\div$			
4. =			
505. *			
0. 0			
2.024. x			
0. 0			

Figura 37 - Protocolo at. 4 tem b de D2.

Handwritten calculations for finding leap years:

$$\begin{array}{r} 2012 \div 4 = 503 \text{ e bissexto} \\ 2016 \div 4 = 504 \\ 2020 \div 4 = 505 \\ 2024 \div 4 = 506 \\ 2028 \div 4 = 507 \\ 2032 \div 4 = 508 \end{array}$$

Essa dupla já mostrou uma postura matemática de argumentação e também, uma utilização pertinente da CI, pois facilitou os cálculos que elas julgavam necessário mostrar, isto é a dupla se valeu de uma das vantagens do uso da calculadora.

Na terna T5, após seus elementos terem se inteirado da questão, Gabriela realizou cálculos na CI conforme figura 38.

Figura 38 - Protocolo at. 4 tem b da CI de T5.

Handwritten calculations on a calculator screen:

$$\begin{array}{l} 2008 \div 4 = 502 \\ 502 \times 4 = 2008 \\ 2008 + 4 = 2012 \\ 2012 \div 4 = 503 \\ 2012 + 4 = 2016 \end{array}$$

Tendo verificado que 2008 foi realmente um ano bissexto, a terna somou na calculadora 2012 mais 4 para ver o próximo ano bissexto. A partir desses cálculos João registrou no protocolo o que é apresentado na figura 39.

Figura 39 - Protocolo at. 4 tem b de T5.

Handwritten calculations showing the sequence of leap years:

$$\begin{array}{l} B - 2016 \\ 2016 - 2012 + 4 \\ 2020 \rightarrow 2016 + 4 \\ 2024 \rightarrow 2020 + 4 \\ 2028 \rightarrow 2024 + 4 \\ 2032 \rightarrow 2028 + 4 \end{array}$$

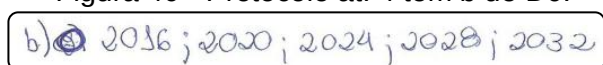
Após lerem o enunciado, Janete e Luana, da dupla D6, iniciaram o seguinte diálogo:

Janete: - *2012 é um ano bissexto? Não, não é.*

Luana: - *Não é... É sim. Então...*

E seguiram contando em voz alta “2013, 2014, ... 2016”, e registraram no protocolo. Prosseguiram com os cálculos até encontrarem próximos cinco anos bissextos e os registraram, conforme mostra a figura 40.

Figura 40 - Protocolo at. 4 tem b de D6.



b) 2016 ; 2020 ; 2024 ; 2028 ; 2032

Dessa forma, o objetivo dessa sessão foi atingindo. Todos os grupos conseguiram encontrar a sequência numérica desejada, interpretando as informações implícitas apresentadas no enunciado do problema. Assim, o processo pelo qual os grupos passaram para resolver essa atividade se deu conforme a espiral de desenvolvimento de Mason (1996a): a manipulação mental das informações apresentadas no enunciado propiciou aos voluntários a compreensão do padrão apresentado, dando sentido à relação estabelecida entre o ano apresentado e o padrão, para, então, encontrar os próximos cinco anos e formar a sequência desejada.

A calculadora nessa atividade foi utilizada para a realização das divisões no item a, e no item b para verificar algumas informações do enunciado e validar os resultados encontrados pelos grupos por meio do cálculo mental.

Considerações sobre a 1ª sessão

O objetivo dessa sessão foi o de, primeiramente, familiarizar os sujeitos com a calculadora CS propriamente dita e, em seguida, continuar com a familiarização, introduzindo a CI e atividades de observação de regularidades em sequências.

Em relação à familiarização dos sujeitos com as funções da calculadora, percebi que, na primeira atividade, a dupla D1 confundiu a função do ponto visualizado na calculadora; no entanto, nas outras atividades essa dupla já

interpretou o ponto como vírgula. Para evitar essa confusão nas próximas sessões, resolvi introduzir na institucionalização que previa para o início da 2ª sessão um item sobre a função do ponto na calculadora.

Outro assunto que ficou claro nesta primeira sessão foi a dificuldade da maior parte dos sujeitos da pesquisa, no registro do algoritmo da divisão e do aparente desconhecimento dos alunos sobre os critérios de divisibilidade mais simples como, ser divisível por 2, por 4 etc. Resolvi, então, introduzir na institucionalização uma reflexão sobre o algoritmo da divisão dos números inteiros.

Não posso deixar de comentar que a terna foi o único grupo que, em nenhum momento, levantou dúvida sobre as atividades. Interpretei isso pelo fato de estarem em três, e por João ter demonstrado ascendência sobre os outros dois, esses não julgaram necessário esclarecer qualquer dúvida.

Sobre a disposição dos grupos na sala de experimentação, detectei a interferência do som do microfone do professor da sala ao lado nas gravações dos grupos que se encontravam próximos da janela. Dessa forma, decidi posicionar os grupos, nas sessões posteriores, o mais distante possível da janela do lado direito da sala.

Em relação à formação dos grupos, foi possível observar que na terna, nem sempre os três sujeitos participaram da resolução das atividades. Isso me levou a decidir por posicionar um dos sujeitos de pesquisa isoladamente.

3.2.2 2ª sessão - 29 de maio de 2012

Esta sessão teve como objetivo propor atividades que propiciassem aos sujeitos da pesquisa a construção de uma expressão para o termo geral de uma PG.

De acordo com os resultados obtidos pela análise dos dados coletados na 1ª sessão, considerei necessário institucionalizar¹⁴ algumas questões relativas ao algoritmo da divisão de números inteiros, bem como a função das teclas (.) ponto e (,) vírgula das calculadoras, antes de iniciar as atividades objetivadas.

Assim, previ 15 minutos da sessão para a institucionalização, e o restante para a feitura das atividades.

Descrição da 2ª sessão

Chegamos, a observadora e eu – pesquisadora – à sala designada para a ocorrência da coleta de dados, qual seja, a mesma sala da 1ª sessão, meia hora antes do horário marcado para a chegada dos sujeitos da pesquisa.

Preparamos o ambiente, organizando o material, marcando os lugares para que os sujeitos se sentassem em quatro duplas e um deles sozinho. Escolhemos os lugares distantes da janela, para evitar que o som vindo da sala ao lado prejudicasse as gravações das conversas entre as duplas.

Dez minutos antes da hora marcada, às 12h50, os nove sujeitos da pesquisa já se encontravam à porta da sala.

Os sujeitos entraram na sala descontraidamente, cumprimentando-nos simpaticamente; alguns perguntaram se as duplas teriam que ser as mesmas da sessão anterior, e respondemos que a decisão seria deles, apenas deveriam escolher os locais marcados.

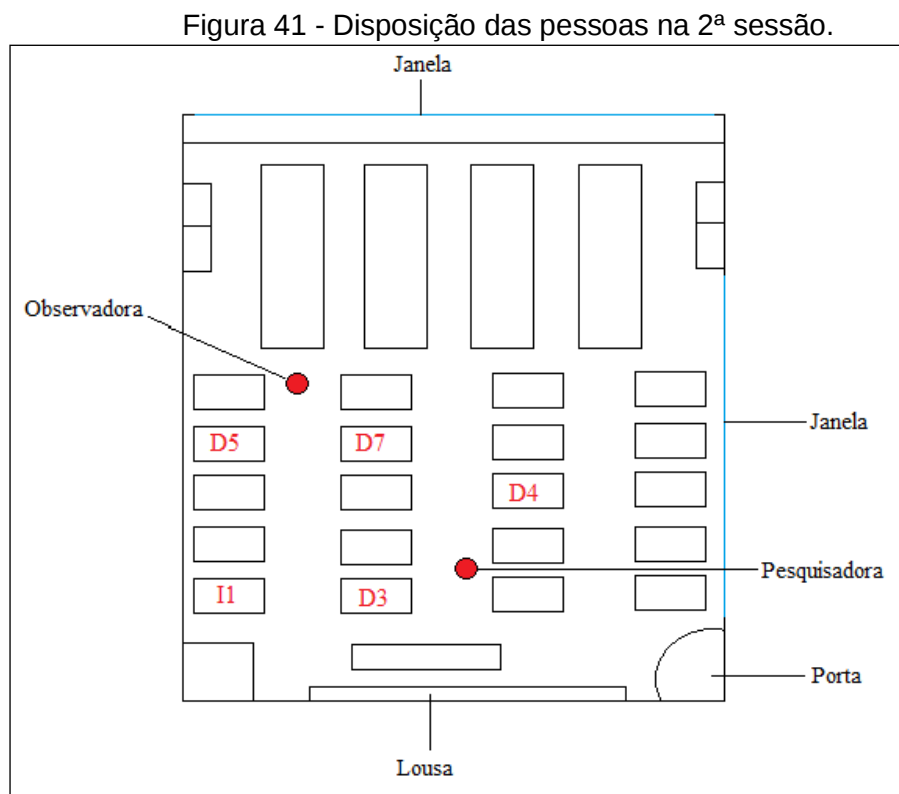
Cristian sentou-se no lugar indicado para duplas. Matheus se dirigiu à carteira ao lado de Cristian e, imediatamente, os dois começaram a discutir. Cristian, rapidamente, levantou-se e foi sentar-se na carteira individual. Matheus então

¹⁴ Momento em que usando um painel com as resoluções dos sujeitos o pesquisador por meio de discussão, sintetiza e explicita os principais resultados sobre um determinado objeto matemático.

chamou Danilo, que estava procurando onde se sentar, e desabafou: “ninguém aguenta ficar perto desse menino!”, referindo-se a Cristian.

Dirigi-me a Cristian e perguntei o que havia acontecido, ele respondeu – “nada, está tudo bem”, acrescentando: “tudo bem, eu já estou acostumado”.

A figura 41 mostra a disposição das pessoas na sala da 1ª sessão da 2ª fase.



Cristian ficou sozinho na carteira indicada por I1, e as duplas ficaram sentadas da seguinte maneira: Roberto e Gustavo na D3, Danilo e Matheus na D4, João e Gabriela na D5 e Janete e Luana na D7.

Após o tempo de acomodação dos sujeitos, como todos haviam chegado antes da hora marcada, a sessão pôde ser iniciada antes do previsto.

Agradei a presença de todos, enquanto a observadora recolhia os celulares e entregava a cada um dos alunos uma calculadora simples (CS)¹⁵.

¹⁵ Conforme Anexo B

É importante observar que a sala propiciava no início um ambiente tranquilo, perturbado logo em seguida pela discussão entre dois alunos, descrita acima. Após um tempo, teve início o som do microfone do professor da sala ao lado, o qual não pareceu perturbar as atividades da nossa sala.

No final da sessão, no momento em que cada sujeito se despedia, eu agradecia e o lembrava do horário e local da próxima sessão.

Descrição da Institucionalização

A descrição baseou-se nas anotações da pesquisadora e da observadora.

Iniciei, então, questionando os voluntários sobre a função da **tecla do ponto** nas calculadoras utilizadas na sessão anterior. Alguns sujeitos lembraram que na calculadora do computador e de seus celulares havia a tecla da vírgula. Expliquei, então, que antes de fazer qualquer cálculo com uma calculadora é importante conhecer suas características, isto é, explorar a função das teclas. E lembrei-os de que, nas calculadoras que estavam sendo utilizadas na pesquisa, a função da tecla ponto (.) era separar a parte inteira da parte decimal de um número real.

Logo após a observadora ter recolhido as calculadoras das carteiras, prossegui com a institucionalização. A seguir, reproduzo os diálogos ocorridos entre a pesquisadora (P) e a classe (C):

- P: - (após escrever na lousa 12:2) *Como resolver essa divisão?*
 C: - *Coloca o seis em baixo do dois. Seis vezes dois, doze, coloca o doze debaixo do doze. Doze menos doze, zero. Acabou.*
 P: - (após escrever na lousa 120:2) *E esta como resolver?*
 C: - (Gustavo) *Sessenta.*
 P: - *Dá sessenta, mas como resolver pelo algoritmo?*
 C: - *Seis vezes dois, doze, coloca o doze debaixo do doze. Desce o zero e coloca um zero debaixo do dois do outro lado. Zero vezes dois, zero então coloca zero.*
 P: - *Vamos ver como Gustavo chegou rapidamente no sessenta?*
 C: - (Gustavo) *É só aumentar um zero!*
 P: - (tenta reproduzir na lousa o raciocínio de Gustavo) *Cento e vinte dividido por dois é sessenta porque sessenta vezes dois é cento e vinte, portanto o resto é zero.*
 P: - (após escrever na lousa 1200:2). *E agora?*
 C: - *Dá seiscentos. Seiscentos vezes dois, mil e duzentos. Mil e duzentos menos mil e duzentos, zero. Acabou.*
 P: - (após escrever na lousa 1201:2). *E neste caso?*

Após um tempo...

- C: - *Seiscentos vezes dois, mil e duzentos. Sobra um. Coloca a vírgula depois do seiscentos e zero do lado do um. Dez dividido por dois dá cinco, coloca o cinco depois da vírgula. Cinco vezes dois, dez. Dez menos dez, zero. Acabou.*
- P: - *Poderia ser assim? E vai explicando conforme registra o seguinte na lousa:*

$$\begin{array}{r}
 1.201 \quad | \quad 2 \\
 - 1.200 \\
 \hline
 10 \quad 600 \\
 - 10 \quad + 0,5 \\
 \hline
 10 \quad 600,5 \\
 - 10 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

- C: - *Legal!*
- C: - (Matheus) *Ai! Não precisa fazer assim... do outro jeito é mais fácil.*
- P: - (após escrever na lousa 12010:2). *E esta divisão?*
- C: - *Coloca o seiscentos de baixo do dois. Seiscentos vezes dois, mil e duzentos sobra um. Mil duzentos e um menos mil e duzentos, um. Desce o zero do lado do um. Dá cinco. Coloca o cinco do lado do seiscentos. Cinco vezes dois, dez. Dez menos dez, zero.*
- P: - *Poderia ser de outra forma? E vai explicando conforme registra o seguinte na lousa:*

$$\begin{array}{r}
 12.010 \quad | \quad 2 \\
 - 12.000 \\
 \hline
 10 \quad 6.000 \\
 - 10 \quad + 5 \\
 \hline
 10 \quad 6.005 \\
 - 10 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

- C: - *Poderia. Legal!*
- P: - (após escrever na lousa 12015:2). *E esta aqui, como podemos dividir ?*
- C: - *Coloca o seiscentos debaixo do dois. Seiscentos vezes dois, mil e duzentos. Mil duzentos e um menos mil e duzentos, sobra um. Desce o cinco. Coloca o sete do lado do seiscentos. Sete vezes dois, quatorze. Quinze menos quatorze, um. Coloca a vírgula do lado do sete. Coloca um zero do lado do um. Agora coloca o cinco depois da vírgula. Cinco vezes dois dez. Dez menos dez, zero. Acabou.*

De acordo com a observadora, durante a institucionalização, os sujeitos que mais participaram foram Cristian e a dupla formada por João e Gabriela.

Descrição e análise da experimentação propriamente dita

As descrições a seguir basearam-se nas transcrições das gravações, nos protocolos dos sujeitos e nas observações anotadas pela observadora e pela pesquisadora.

Iniciei a experimentação, perguntando se podia filmá-los e audiogravá-los e, como todos aquiesceram, a observadora passou a entregar as calculadoras, filmadoras e gravadores, pelas carteiras. A figura 42 apresenta a distribuição do material.

Figura 42 - Localização dos instrumentos no 2º momento da 2ª sessão.

I1	Cristian	CI e filmadora
D3	Roberto e Gustavo	CS e filmadora
D4	Danilo e Matheus	CI e audiogravador
D5	João e Gabriela	CS e audiogravador
D7	Janete e Luana	CS e filmadora

Às 13h20 entreguei a 1ª atividade e uma caneta esferográfica a cada dupla e ao voluntário que se sentou só.

Ao término de cada atividade, os sujeitos levantavam as mãos e eu recolhia os protocolos e lhes entregava a atividade seguinte.

As 13h45, ao receber a 3ª atividade, Matheus da D4 perguntou: “Esta é a última? Porque tenho treino no Ibirapuera às 14h30”; então, lhe assegurei que terminaríamos as atividades no tempo previsto.

Quando o sinal bateu, às 13h50, os sujeitos ainda estavam resolvendo a 3ª atividade. Assim, decidi que não entregaria a 4ª atividade e permiti que os que quisessem terminar a 3ª atividade ali, o fizessem.

Abaixo a figura 43 construído pela observadora, mostra o “ritmo” da resolução de cada atividade pelos sujeitos da pesquisa.

Figura 43 - Tempo de duração de cada atividade na 2ª sessão.

Atividade	Horário de início	I1	D3	D4	D5	D7
1	13h20min	x	x	x	x	x
2	13h32min	x			x	x
	13h37min		x			
	13h40min			x		
3	13h42min	x			x	
	13h44min					x
	13h45min		x	x		
4	não foi entregue					
Término	13h50min			x		
	13h55min		Gustavo teve que ir embora			
	13h58min				x	x
	13h59min	x				
	14h03min		x			

1ª atividade

Essa atividade foi elaborada visando retomar o padrão usual de registro matemático dos termos de uma sequência, ao mesmo tempo em que solicitava que os sujeitos indicassem determinados termos de modo a fazer com que eles mesmos percebessem o padrão e encontrassem uma forma de expressar o termo mais distante dos apresentados. Na figura 44 consta a atividade.

Figura 44 - 1ª atividade da 2ª sessão.

Observe a sequência abaixo:

5, 10, 20, 40, 80...

Essa sequência também pode ser representada da seguinte forma, com $n \in \mathbb{N}$:

Lugar do termo	Termo
a_1	5
a_2	10
a_3	20
a_4	40
...	...
a_n	
...	...

- a) Qual é o próximo termo, isto é, o termo a_6 ?
 b) Qual é o 21º termo?

A filmagem da dupla **D3** mostra que ao ler o enunciado da atividade ocorreu o seguinte diálogo:

Gustavo: - Já começou com PA . Aí, a 1 e 2.

Roberto: - Olha, n pertence aos naturais. A gente está aprendendo isso. O a_6 é muito fácil.

Gustavo: - A gente já aprendeu isso. É revisão da sala de aula.

Roberto: - Eu sei.

Gustavo: - Vai sempre somando o dobro do anterior. Ó!!
 Quarenta , oitenta...

Roberto: - (enquanto registra na tabela da atividade) vezes
 dois, vezes dois. Aqui soma cinco?

Gustavo:- Não.

Roberto: - Tá, a_5 é quarenta vezes dois , oitenta.

Após relerem o enunciado:

Gustavo:- Muito fácil!

Roberto:- Faz aqui, ó! a_6 é quarenta vezes dois, oitenta. Ó, o a_6 , aqui vai somando o dobro... Bom, o primeiro aqui eu já sei fazer oh. Você vai multiplicando aqui. É n vezes dois. Não pera aí deixa eu ver um negócio... é o dobro. Pertence aos naturais, tá. O n ... Tá, ó oitenta ali parou.

Gustavo:- Nossa vai dar mais de cinco mil e não sei o que...

Roberto:- Quarenta vezes quatro. Não é, lógico que não é. Cinco mais cinco, dez mais dez, vinte mais vinte... Vamos fazer assim, oh. Vamos colocar vezes dois, vezes dois, vezes dois... pode?

Gustavo: Sim.

A figura 45 apresenta o protocolo com os registros de D3 para o item a.

Figura 45 - Protocolo at. 1 item a de D3.

Lugar do termo	Termo
a_1	5
a_2	10
a_3	20
a_4	40
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$? =$

Handwritten notes and calculations to the right of the table:

- Arrows pointing from 5 to 10, 10 to 20, and 20 to 40, each labeled $\times 2$.
- Handwritten: $A) a_6 = 160$ (with 160 circled).
- Handwritten: $80 \times 2 = 160$ (with 160 circled).

Embora os elementos da dupla tivessem identificado, no início, a sequência com uma PA, aos poucos, dialogando chegaram à conclusão de que bastava multiplicar o termo anterior por dois para obter o termo seguinte. Assim concluíram que $a_6 = 160$. Implicitamente, eles recorreram à razão da PG para obter o a_6 , porém não deram mostras de estranhar o fato. Detectamos, no caso, a confusão de multiplicação com soma de parcelas.

Para o item b, a filmagem da dupla revelou, após a leitura do enunciado, o seguinte diálogo:

Gustavo:- É só botar a fórmula da PA.

Gustavo:- (após registrar a fórmula no protocolo) Nós estamos tentando realizar por PA, mas não tá dando certo.

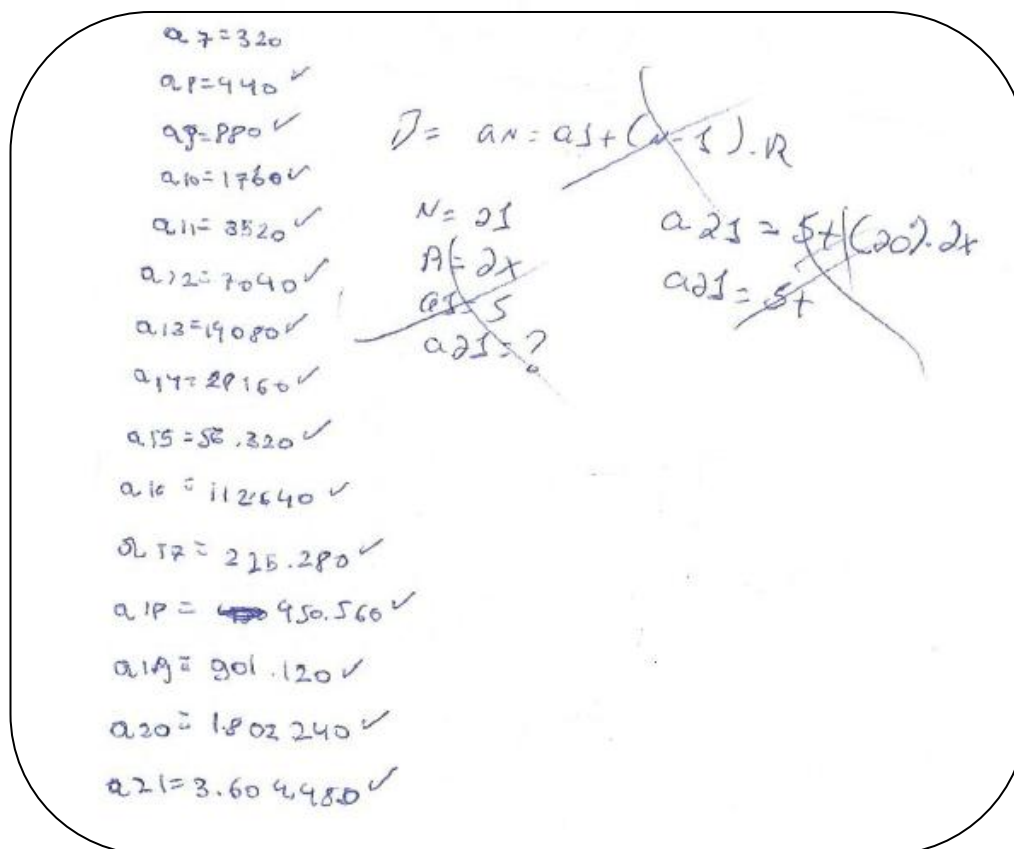
Roberto:- Isso aqui não é uma PA. A professora ensinou a gente fazer a_2 menos a_1 para ver se é PA, só. Isso aqui não é PA... Calma, a gente ainda não está acostumado a trabalhar com ela entendeu? A gente ainda não está acostumado.

Gustavo:- Então faz um $\times$ aí.

Roberto:- Você que aprendeu isso, a gente ainda não. Não, vamos raciocinar de outro jeito.

A figura 46 apresenta o protocolo com os registros realizados pela dupla para o item b.

Figura 46 - Protocolo at. 1 item b de D3.



Após analisar os protocolos da dupla notei, que seus componentes tentaram usar a “fórmula geral” do enésimo termo de uma PA. Eles perceberam que não era possível utilizá-la e decidiram continuar multiplicando os termos por 2 até encontrarem o 21º termo. A gravação de D3 mostra que a dupla realizou os cálculos mentalmente até o 9º termo, e a partir do 10º termo os fizeram na calculadora. Esse fato fez com que D3 cometesse um equívoco e indicasse o 8º termo calculado mentalmente como 440, quando deveria ser $320 \times 2 = 640$, formando, assim, uma nova sequência diferente da solicitada. No entanto, a ideia dos termos da sequência e a forma de registrar o 21º termo: $a_{21} = 3.604.480$ é o registro algébrico usual dos termos de uma sequência.

A gravação de **D4** mostra que, no item a, os parceiros tiveram o seguinte diálogo:

Danilo: - É uma PA.

Matheus: - Deixa eu ver. Não, não é PA.

Danilo: - É, ao quadrado.

Matheus: - Não é ao quadrado. Quanto é cinco vezes cinco?

Danilo: - Vinte e cinco.

Matheus: - *Então, tem que achar a fórmula. É vezes dois. Faz na calculadora.*
 Danilo: - (faz o cálculo mentalmente) *É cento e sessenta.*

No início do diálogo, Danilo deu mostras de estar considerando a multiplicação como soma de parcelas, conforme já tinha deixado explícito na atividade 3, da 1ª sessão. Nesse diálogo Matheus tentou mostrar a Danilo que a característica apresentada por ele não era a da sequência dessa atividade, e apresentou sua versão da regularidade que observara.

Após encontrarem o valor de a_6 , a dupla seguiu para o item b, conforme o diálogo a seguir:

Matheus: - *Pera.*
 Danilo: - *320.*
 Matheus: - *Pera....*
 Danilo: - *Essa fórmula. Tem que achar a fórmula.* (segue com os cálculos na CI)
 Matheus: - *A gente não tá conseguindo achar a fórmula.*
 Danilo: - *Da PA?*
 Matheus: - *Não é PA. Isso é sequência.*
 Danilo: - *Então né... deixa eu ver.*
 Matheus: - *Não tem outro jeito, é só usando a fórmula. Isso aí é muito grande.*

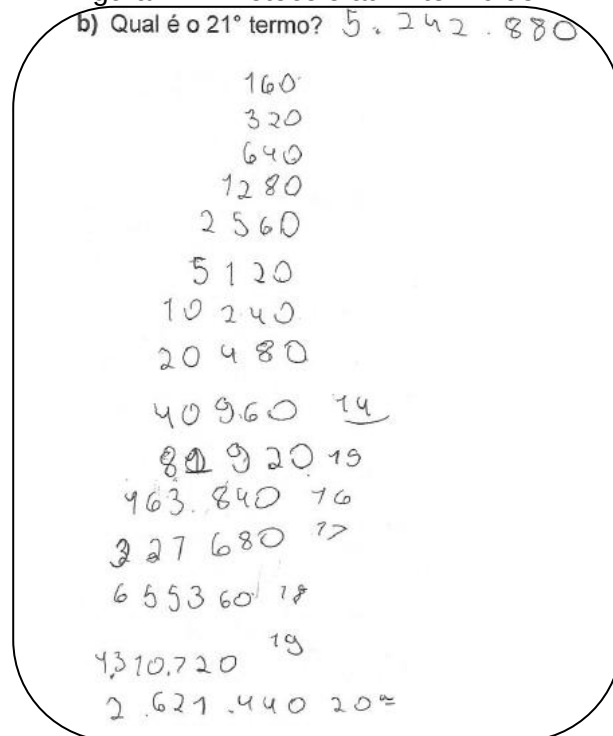
Danilo segue realizando os cálculos na calculadora.

Matheus: - *Não tem como achar a fórmula?*
 Danilo: - *Mano, não é assim....É por dois, ó..*
 Matheus: - *Deixa eu ver.* (começa a realizar os cálculos na calculadora). *É demorado isso daí..... Eu já to no 14 já.*
 Danilo: - *O que?*
 Matheus: - *Aqui eu to no 14 já.... 1, 2, 3, 4, ..., 7,8,...* (segue realizando os cálculos na CI) *O número tá muito grande. Eu to me confundindo. Espera a gente parou aqui... 6, ,7, 8, ,... a gente tá no 17.Espera. 7, 8,9,10, 11, 12, 13, 14, ...*
 Danilo: - *Aqui não é 21...*
 Matheus: - *Espera....327680....*
 Danilo: - *O 18 é 655360.*
 Matheus: - *4310720.*
 Danilo: - *Falta mais um.*
 Matheus: - *2621440 e 5242880. Pronto professora. Pronto professora, acabou.*

Nesse diálogo, parece que Danilo não se convenceu de que a sequência apresentada não era uma PA. Matheus, por sua vez, pareceu incomodado com o fato de ter que realizar os cálculos até o 21º termo e insistiu na ideia de encontrar

uma “fórmula” para realizar os cálculos. Após algum tempo tentando encontrar a “fórmula”, a dupla decidiu realizar os cálculos na Cl. A Figura 47 apresenta os registros da dupla para esse item.

Figura 47 - Protocolo at. 1 item b de D4.



Na figura 47, é possível observar que a dupla começou a indicar a ordem de cada termo, somente a partir do 14º termo, evidenciando a criação da estratégia de resolução para chegar à solução final correta: 5.242.880.

A gravação da dupla **D5** revela a fala de João sobre o item a:

João: - (lê o enunciado em voz alta) *Então ele quer o a_6 ; a_6 é igual a 80 vezes 2; A (o item) a, coloca aí: 80 vezes 2 que é igual a 160.*

Gabriela registrou no protocolo: a) $80 \times 2 = 160$.

Quanto a resolução do item b, a gravação testemunha o seguinte diálogo:

João: - ... *vinte e um, não pera aí. Oitenta, é, então está certo. A gente pega o último termo e multiplica por dois... A sequência é dois elevado a n... $a_6 = 160$, $a_7 = 320$...*

Gabriela: - *É só ir multiplicando por dois.*

João: - *Não, espera. Estamos fazendo errado.*

Neste momento, João pareceu buscar uma expressão que representasse a sequência. Após o diálogo, a dupla refez os cálculos na CS e registrou os termos, conforme apresenta a figura 48.

Figura 48 - Protocolo at. 1 item b de D5.

Handwritten list of terms in a sequence:

- $B = 0.6 - 160$
- $a_7 - 320$
- $a_8 - 640$
- $a_9 - 1280$
- $a_{10} - 2560$
- $a_{11} - 5120$
- $a_{12} - 10,240$
- $a_{13} - 20,480$
- $a_{14} - 40,960$
- $a_{15} - 81,920$
- $a_{16} - 163,840$
- $a_{17} - 327,680$
- $a_{18} - 655,360$
- $a_{19} - 1310720$
- $a_{20} - 2621440$
- $a_{21} - 5242880$ (circled)

Nesse protocolo, é possível observar que a dupla registrou os termos e os relacionou com seus respectivos valores encontrados, além de ter utilizado a notação algébrica usual para os termos de uma sequência: $a_{21} = 5242880$.

Ao terminar a atividade, a dupla chamou a pesquisadora e entregou a atividade. Porém, a audiogravação apresenta a seguinte fala de João: “- A fórmula pode ser essa ou essa, ó!” e registra o que segue na figura 49:

Figura 49 – Protocolo 2 at. 1 item b de D5¹⁶.

Handwritten expressions:

$$2^{n+1} = 4 \quad 2^{n-1}$$

O registro da figura 49 evidencia a tentativa de D5 de generalizar para encontrar a expressão do n -ésimo termo dessa PG, que seria $a_n = 5 \times 2^{n-1}$.

A filmagem de **D7** apresenta o seguinte diálogo no item a:

¹⁶ Esse registro se encontrava em folha avulsa que servia para indicar o número da dupla na mesa.

Luana:- (ao ler o enunciado em voz baixa) *Multiplica por dois.*
 Janete:- *O quê? Não entendi.*
 Luana:- *Aqui, é só multiplicar por dois.* (apontando para a sequência)
 Janete:- *Ah, tá.*

Após esse diálogo, por cálculo mental, Luana registra no protocolo o que mostra a figura 50.

Figura 50 - Protocolo at. 1 item a de D7.

$$a_7 a_6 = 160$$

A filmagem de D7 mostra que, após ler o item b, a dupla entabula o seguinte diálogo:

Luana: - *Tá. Vezes...vezes dois...vezes dois...* (realizando cálculos na CS)
 Janete: - (marca nos dedos enquanto Luana realiza os cálculos) *Dois. Três. Quatro... Quinze ...Já deu 20.*

Esse diálogo retrata que ambas compartilharam os cálculos, realizando um verdadeiro trabalho em grupo: enquanto Luana realiza os cálculos na CS, Janete marca o número de vezes que Luana multiplicava por 2. Quando Janete contou vinte vezes, Luana parou e registrou o que consta na figura 51.

Figura 51 - Protocolo at. 1 item b de D7.

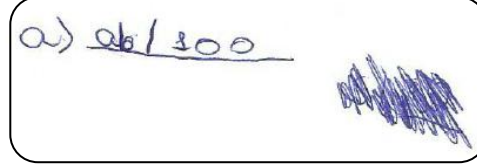
$$a_{21} = 5.242.880$$

A dupla D7, assim com as duplas D3 e D5, utilizou a notação algébrica usual para os termos de uma sequência: $a_{21} = 5242880$.

Como o **I1** ficou sozinho e não me chamou durante toda a sessão, a não ser para entregar a atividade e pegar a seguinte, tive condição de descrever apenas o que mostra a filmagem do sujeito. Ao receber a atividade, Cristian leu o enunciado em voz baixa e observou por um tempo a tabela apresentada, primeiramente apontando com a caneta os termos da sequência e depois apontando para os índices. Em seguida fez alguns cálculos na CI e voltou a ler o enunciado. Após isso, voltou a observar a tabela, apontando com a caneta os termos da sequência.

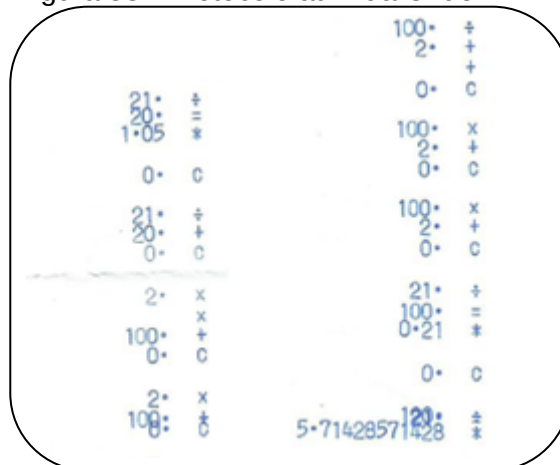
Realizou novamente os cálculos na CI, e registrou como resposta do item a o que consta na figura 52.

Figura 52 - Protocolo at. 1 item a de I1.



Após esse registro, I1 leu o item b e retornou para a observação da tabela, mais uma vez apontando com a caneta para os termos da sequência e depois para os índices de cada termo. Cristian voltou a realizar cálculos na CI. A figura 53 apresenta o protocolo da atividade 1.

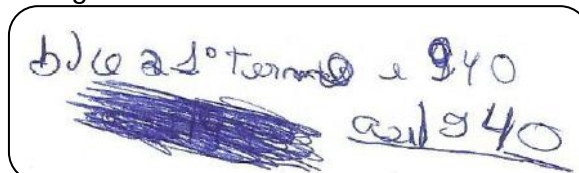
Figura 53 - Protocolo at. 1 da CI de I1.



Nessa figura, I1 parece ter relacionado a sequência apresentada a uma PG, pois ao realizar os cálculos na calculadora dividiu os índices 21 por 20, que parece indicar que procurava a razão da PG. Cheguei a essa conclusão por saber que Cristian fazia, pela terceira vez, a 1ª série do EM e, portanto, podia estar se lembrando de alguma coisa sobre PG.

Por fim, após realizar tais cálculos I1 registrou para o item b, o que consta na figura 54.

Figura 54 - Protocolo at. 1 item b de I1.



Nessa atividade, as quatro duplas D3, D4, D5 e D7 não só encontraram o próximo termo a_6 da sequência, quanto o 21º termo. Apenas Cristian que realizou a atividade de forma solitária não encontrou nem a_6 , nem a_{21} . Vale ressaltar que a dupla D3 cometeu um equívoco ao realizar uma conta mentalmente, o que não comprometeu seu processo de desenvolvimento.

No caso de Cristian, permito-me conjecturar que por ele já ter tido algum contato com o trabalho com progressões, não tenha tentado resolver a questão por ter conhecimento de que para tal existiria uma “regra”, mas da qual não se lembrava.

As quatro duplas demonstraram ter passado pelo processo descrito por Mason “manipulando, dando sentido a, articulando, manipulando...”, manipulando a sequência apresentada no enunciado, dando sentido à relação estabelecida entre cada termo e sua posição, articulando a observação e a relação estabelecida de forma a generalizar e encontrar o termo mais distante.

A calculadora foi utilizada pelas duplas como auxiliar nas operações que, de outra forma, feitas “à mão” no papel, seriam trabalhosas e desviariam o foco da resolução. As calculadoras foram utilizadas no principalmente na resolução do item b, para verificar a regularidade da sequência apresentada, confirmando, assim, o que afirmam Silva, Loureiro e Veloso (1989) sobre o uso da calculadora de que essa serve para que os sujeitos se livrem dos excessivos cálculos com papel e lápis e se foquem na resolução do problema.

2ª atividade

Essa atividade apresenta uma sequência de figuras representadas por um fractal, e visa provocar que os sujeitos percebam a relação entre cada figura da sequência com o seu lugar na mesma, e cheguem a generalizar para a n ésima figura da sequência. A figura 55 apresenta a 2ª atividade dessa sessão.

Figura 55 - 2ª atividade da 2ª sessão.

Observe a sequência de figuras abaixo:



Essa sequência foi criada pelo matemático polonês *Waclaw Sierpinski* (1882-1969). Nela todos os triângulos são regulares e, a partir da 2ª figura, cada nova figura é construída pela união dos pontos médios dos lados de cada triângulo preto.

Essa sequência também pode ser representada da seguinte maneira:

nº	figura
a_1	
a_2	
...	...
a_n	
...	...

Observe que a_3 é igual a 3 vezes o número de triângulos pretos de a_2 .

- Quantos triângulos pretos existirão na próxima figura, isto é, a_6 ?
- Indique quantos triângulos pretos existem em cada uma das figuras, sétima, oitava e nona.
- Existe uma relação entre a_n e o número de triângulos pretos pertencentes a cada uma das figuras? Se sim, explique qual é essa relação.

Fonte: Adaptado de Castaldi (2010a, p.53)

A filmagem de **D3** mostra o seguinte diálogo da dupla, após receber a atividade:

Gustavo: - *Ah esse aqui é zica mano. Olha aí, é facinho!*

Roberto: - *Pera aí, deixa eu pôr o nome.*

Gustavo, assim que visualizou a sequência de figuras no enunciado da atividade, mesmo sem ter lido o enunciado, demonstrou sua “empolgação” com o fato. A dupla seguiu lendo o enunciado, após o que se estabeleceu o seguinte diálogo:

Roberto: - *Nove. Três vezes três é nove. Ta certo. É três ao quadrado. Então aqui é quatro ao quadrado. Não, aí é nove ao quadrado.*

Gustavo: - *Não, pera aí. Três mais... três mais um.*

Roberto: - *Quatro.*
 Gustavo: - *Então eu acrescento três vezes. Então aqui vai ser nove vezes.*
 Roberto: - *Não pera aí... pera aí... É nove ao quadrado. Nove ao quadrado é quanto? 81. Então.... 1,2,3,4,...*
 Gustavo: - *Não vai dar 81, você é louco!*
 Roberto: - *É 18.*
 Gustavo: - *Então, olha pelo lado de fora, conta. 1,2, 3...9. Deu nove. É nove.*
 Roberto: - *Nove vezes três, 18...27.*
 Gustavo: - *Três ao quadrado é nove. Então vai ser nove quadradinhos do lado de fora. Nove ao quadrado, oitenta e um. Então vai ser oitenta e um quadradinhos do lado de fora.*
 Roberto: - *Não. Calma cara eu to tentando entender, olha aqui. Aqui é seis, não é nove. Nove, nove e nove. Três vezes nove?*
 Gustavo: - *Vinte e sete.*
 Roberto: - *Vinte e sete vezes três?*
 Gustavo: - *Oitenta e um.*
 Roberto: - *Então aqui...*
 Gustavo: - *Pode ser ao quadrado também. É quase a mesma coisa.*
 Roberto: - *Ta louco. Aqui da nove, nove e nove. Ai, nada vê! Aqui, é a mesma coisa. Ah, não.*

A dupla leu o enunciado e observou a tabela com as figuras da sequência. Em seguida observou a sequência de figuras e contou os triângulos de cada uma para verificar se os valores correspondiam ao informado na tabela. D3 contou os triângulos pretos da quinta figura e decidiu verificar novamente a 1ª figura, seguindo com o seguinte diálogo:

Roberto: - *Três vezes um, três. Três vezes três, nove. Nove vezes três, vinte e sete. Olha aqui.*
 Gustavo: - *Saquei, saquei... esquece. (lê o item a) A5 é oitenta e um?*
 Roberto: - *É. (registra no protocolo)*
 Gustavo: - *Não tô entendendo nada.*
 Roberto: - *Olha... (e conta os triângulos pretos de cada figura).*
 Gustavo: - *Então é os quadradinhos pretos e não os brancos?*
 Roberto: - *(após reler o item a) Sim.*
 Gustavo: - *Então qual seria a figura a₆? Oitenta e um vez três?*
 Roberto: - *Exatamente.*
 Gustavo: - *(após realizar os cálculos na CS) Duzentos e quarenta e três.*

Esse diálogo mostra que a dupla percebeu que, para encontrar o número de triângulos pretos de uma figura qualquer, bastava multiplicar o número de triângulos pretos da figura anterior por 3. A figura 56 apresenta os registros feitos por Roberto para o item a dessa atividade.

Figura 56 - Protocolo at. 2 item a de D3.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 \Delta \\
 a_2 &= 3 \Delta \\
 a_3 &= 9 \Delta \\
 a_4 &= 27 \Delta \\
 a_5 &= 81 \Delta
 \end{aligned}$$

$a_6 = 243$
 81
 $\times 3$
 243

Para o item b, a filmagem da dupla apresenta o seguinte:

Gustavo: - a_7 é setecentos e vinte e nove. Por que agora é a b.

Roberto: - a_8 ?

Gustavo: - (faz na CS) Setecentos e vinte e nove, pera aí.
 Setecentos e vinte e nove vezes três é igual a dois mil
 cento e oitenta e sete.

Roberto: - Vezes três?

Gustavo: - 6561.

A dupla seguiu a mesma estratégia do item a, multiplicou a_6 por três na CS encontrando a_7 e registrou no protocolo; em seguida, realizou o mesmo procedimento para encontrar e registrar a_8 e a_9 . A figura 57 mostra os registros da dupla para esse item.

Figura 57 - Protocolo at. 2 item b de D3.

$$\begin{aligned}
 b, a_7 &= 729 \\
 a_8 &= 2187 \\
 a_9 &= 6561
 \end{aligned}$$

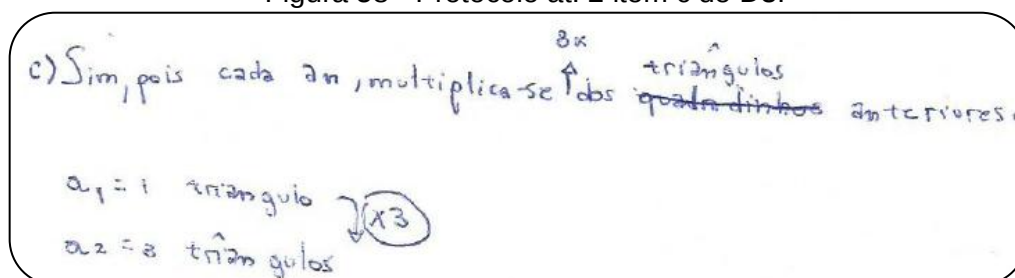
Após lerem o enunciado do item c, D3 dialogou:

Roberto: - a_n oh! a_n é n vezes três oh. 4 vezes 7, 28. Menos 1. Não
 pera aí. (pega a CS) 5 vezes 3 é igual a 15. Então a
 fórmula é difícil de entender, por que 3 ao quadrado?

- Gustavo: - Três, e vezes o n .
 Roberto: - Isso, nove ao quadrado já não é. Então a_n é o que? Aqui oh! a_1 com o número de triângulos pretos; a_3 é igual a 9. Sim por que cada a_n vai multiplicando 3. Três pelo número de triângulos pretos, não é? Então... Sim, pois cada a_n multiplica-se três quadradinhos pretos. Não é?
 Gustavo: - Sim, 3 quadradinhos pretos dos anteriores.
 Roberto: - Multiplica-se 3 quadradinhos pretos dos anteriores, não é?
 Gustavo: - Sim.
 Roberto: - (enquanto registra no papel) Dos quadradinhos!? Dos triângulos. Vamos por exemplo?
 Gustavo: - Vamos.
 Roberto: - (após registrar no papel) Matemática é mais fácil, né?
 Gustavo: - É.

Nesse diálogo, D3 tentou encontrar a relação entre um termo a_n com o número de triângulos pretos dessa figura. É importante observar que a dupla não teve dúvida de que existia uma forma matemática de expressar a relação exposta no item c. A figura 58 apresenta a resposta ao item c, registrada pela dupla no protocolo.

Figura 58 - Protocolo at. 2 item c de D3.



Ao responder o item c, a dupla confirma as ideias de Orton e Orton (1999) de que é mais fácil os alunos continuarem um padrão do que explicá-lo, e que é mais fácil a maioria dos alunos apresentar a explicação oral de uma regra do que explicá-la por escrito.

Ao receber a atividade, Matheus da dupla **D4** diz “Falta só mais dez minutos”. Após ler o enunciado, a dupla dialogou:

- Matheus: - Nossa! (realiza os cálculos mentalmente) Três mais três, ... nove; nove mais nove, dezoito, dezoito mais ... nove, vinte e sete; vinte e sete mais nove, trinta e seis, setenta e dois; setenta e dois vezes três...
 Danilo: - Duzentos e dezesseis. (realizou o cálculo na CI conforme a figura 59)

Figura 59 - Protocolo at. 2 item a da CI de D4.

$$\begin{array}{rcl} 72 & \times & \\ 3 & = & \\ 216 & * & \end{array}$$

Matheus utiliza soma de três parcelas ao invés de multiplicar por três, o que o levou a se confundir quanto ao número de triângulos pretos do 5º termo: $27+9=36$, $36+36=72$. Nesse momento ele percebeu que era o número de triângulos pretos da figura anterior vezes 3: 72×3 , após o que, para o sexto termo, Danilo realizou o cálculo na CI, e informou a Matheus que registrou no protocolo o que consta na figura 60.

Figura 60 - Protocolo at. 2 item a de D4.

$$216$$

Para o item b, a dupla segue com o seguinte diálogo:

Matheus: - 216 vezes 3.
 Danilo: - (realiza o cálculo na CI) 648.
 Matheus: - *Veze 3.... Vai rápido.*
 Danilo: - 1944.
 Matheus: - 1944?
 Danilo: - É.
 Matheus: - *Veze 3.*
 Danilo: - 5832.
 Matheus: - *O quê?*
 Danilo: - 5832.

A figura 61 apresenta o protocolo da CI de D4 para esse item.

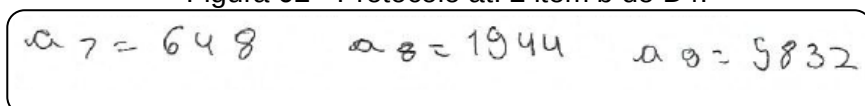
Figura 61 - Protocolo at. 2 item b da CI de D4.

$$\begin{array}{rcl} 216 & \times & \\ 3 & = & \\ 648 & * & \\ 0 & 0 & \\ 648 & \times & \\ 3 & = & \\ 1944 & * & \\ 0 & 0 & \\ 1944 & \times & \\ 3 & = & \\ 5832 & * & \\ 0 & 0 & \end{array}$$

Essa figura mostra que D4 realizou na CI a multiplicação de a_6 por três, para encontrar a_7 , em seguida multiplicou a_7 por três para encontrar a_8 e seguiu multiplicando a_8 por três para encontrar a_9 .

A figura 62 apresenta a resposta registrada por D4, no protocolo para o item b.

Figura 62 - Protocolo at. 2 item b de D4.



$a_7 = 648 \quad a_8 = 1944 \quad a_9 = 5832$

Vale observar que a dupla, embora equivocada sobre o número de triângulos pretos do quinto termo, raciocinou corretamente para encontrar os três termos solicitados. Após ler o item c, a dupla dialogou:

Matheus: -É a fórmula do a_n .

Danilo: - *Esqueci....A fórmula do termo anterior é a_n vezes n menos um.*

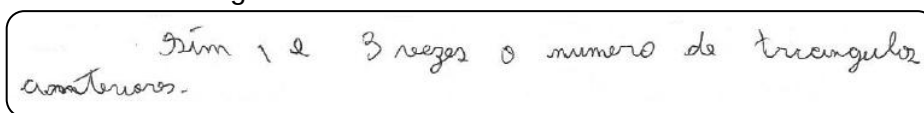
Matheus: -*Ah, eu sei. Precisa responder a fórmula ou pode responder por extenso?*

Danilo: - *Pode responder por extenso. Aqui, ó...*

Matheus: - *Põe aí. Sim, é três vezes o número de triângulos anteriores. Pronto. Acabei.*

Neste diálogo, a dupla tentou encontrar a expressão que relacionasse o a_n ao número de triângulos pretos de cada figura. A figura 63 apresenta o registro de D4 para o item c.

Figura 63 - Protocolo at. 2 item c de D4.



Sim, é 3 vezes o numero de triangulos anteriores.

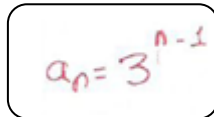
É importante ressaltar que a dupla não tem dúvidas de que há uma forma de expressar a relação exposta no item c. Porém, ao responder o item, assim como D3, deu mostras do que afirmam Orton e Orton (1996, p. 105): “mais alunos podem continuar um padrão do que explicar essa situação” e que, geralmente, é mais fácil os alunos apresentarem as explicações orais (no caso o que a dupla chama de responder por extenso) do que fornecer a explicação por escrito.

João da dupla **D5** leu o enunciado em voz alta e a dupla estabeleceu o seguinte diálogo:

João: - *Começando do a_3 . O a_3 vezes 3. Aqui tem 3, aqui tem 9.*
 Gabriela: - *Não pera aí, aqui tem 3, aqui tem 7.*
 João: - *Não, aqui tem 9. a_n é 3 elevado a n .*
 Gabriela: - *Não.*
 João: - *Por que não?*
 Gabriela: - *Por que não. Aqui é 27 e aqui eu não sei.*
 João: - *Então, pera aí. Vamos contar desde o início da sequência.*
 Permanecem em silêncio.
 Gabriela: - *79.*
 João: - *É tem alguma coisa a ver com 3.*
 Gabriela: - *Tipo assim, 27...*
 João: - *Então, pera aí. Aqui, multiplica por 3, 3 vezes 3... 3 elevado a n . Então aqui menos um... isso. Ou seja, ficou 2, então dá 9. Ah moleque, descobri! Escreve aí... a_n é igual a 3 elevado a $n - 1$!*

Gabriela registrou no protocolo o que consta na figura 64.

Figura 64 - Protocolo at. 2 de D5.

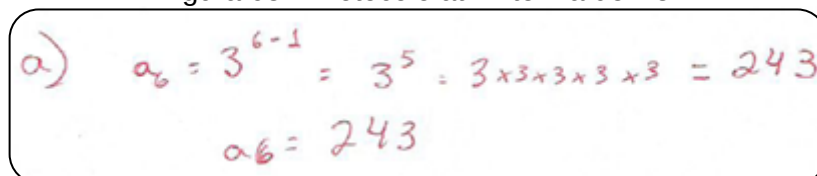


$$a_n = 3^{n-1}$$

João deu mostras de ter se apropriado de uma das características do pensamento algébrico ao buscar, mesmo sem ser provocado explicitamente, a generalização antes de pensar nos casos particulares.

Em seguida, a dupla leu o item a, e João disse a Gabriela: - “Coloca aí: a_6 é igual a 3 elevado a 6 menos 1. Igual a 3 elevado a 5. Igual a 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3. (realizou o cálculo na CS) Igual a 243. a_6 é igual a 243”. Gabriela registrou no protocolo o que segue na figura 65.

Figura 65 - Protocolo at. 2 item a de D5.



$$\begin{aligned} a) \quad a_6 &= 3^{6-1} = 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243 \\ a_6 &= 243 \end{aligned}$$

A dupla segue para o item b, com João ditando para Gabriela:

João: - *Agora, a_7 igual a 3 elevado a 7 menos 1. Igual a 3 elevado a 6. Igual a 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3, igual a*

729. Agora, a_8 igual a 3 elevado a 8 menos 1. Igual a 3 elevado a 7. Igual a 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3, igual a 2187. E a_9 igual a 3 elevado a 9 menos 1. Igual a 3 elevado a 8. Igual a 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3. Igual a 6561. (realiza os cálculos na CS).

Gabriela registra o que consta na figura 66.

Figura 66 - Protocolo at. 2 item b de D5.

b) $a_7 = 3^{7-1} = 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$
 $a_8 = 3^{8-1} = 3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2187$
 $a_9 = 3^{9-1} = 3^8 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 6561$

Para o item c, Gabriela leu o enunciado e João seguiu dizendo: “A relação é a fórmula. Escreva por extenso. Sim, a relação é... aí coloca a fórmula. a_n igual a 3 elevado a n menos 1. Isso. Acabou”. Gabriela registrou o que segue na figura 67.

Figura 67 - Protocolo at. 2 item c de D5.

c) sim, a relação é $A_n = 3^{n-1}$

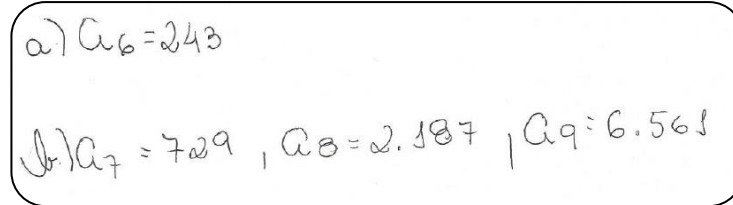
A filmagem de **D7** mostra o seguinte diálogo após Janete ler alto o enunciado:

- Luana: - *Espera. Um. Um, dois, três. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove. (lê o enunciado novamente) Oh, a_1 tem um. A_2 tem três. A_3 tem nove.*
- Janete: - *Volta lá no próximo triângulo.*
- Luana: - *Tá. Um, dois, três ...vinte e sete. Esse aqui tem que ser 27 vezes três. Que dá...81. Vamos ver, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete....oitenta e um. Então vamos...*
- Janete: - (após pegar a folha com a atividade) *A, o a_6 é...*
- Luana: - *81 vezes 3, 243. (calcula na CS).*
- Janete: - *B, a_7 ...*
- Luana: - *729.*
- Janete: - *a_8 ...*
- Luana: - *2187.*
- Janete: - *a_9 ...*
- Luana: - *6561.*

Esse diálogo revela que a dupla observou a sequência, a manipulou para verificar a quantidade de triângulos pretos de cada figura e percebeu a regularidade apresentada. Dessa forma, a dupla utilizou a mesma estratégia para responder aos

itens a e b. A figura 68 mostra as respostas registradas pela dupla para esses dois itens.

Figura 68 - Protocolo at. 2 item a e b de D7.



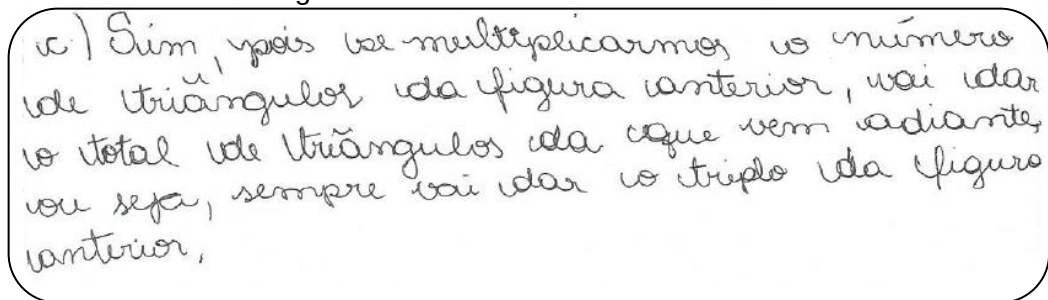
Handwritten responses in a rounded rectangular box:

a) $A_6 = 243$

b) $A_7 = 729$, $A_8 = 2.187$, $A_9 = 6.561$

Para o item c, Janete leu o enunciado em voz alta e Luana seguiu dizendo, “deixa que eu faço, dá aqui”, pegou a folha de respostas e registrou em silêncio, o que consta na figura 69.

Figura 69 - Protocolo at. 2 item c de D7.



Handwritten response in a rounded rectangular box:

c) Sim, pois se multiplicarmos o número de triângulos da figura anterior, vai dar o total de triângulos da que vem adiante, ou seja, sempre vai dar o triplo da figura anterior.

Os protocolos da dupla informam que a Luana apenas leu o item e escreveu no papel com suas palavras a relação estabelecida.

A resposta apresentada ao item c comprova a afirmação de Orton e Orton (1999) de que uma grande parte dos alunos descrevem as regras de padrões numéricos com relação às diferenças dos termos.

Para essa atividade sigo com a descrição dos atos de **I1** apresentados pela filmagem. Cristian leu o enunciado em voz baixa, seguiu observando a sequência e contou os triângulos pretos de cada figura, em voz baixa e apontando com a caneta para cada uma delas. Apontou com a caneta o item a, registrou o que consta na figura 70.

Figura 70 - Protocolo at. 2 item a de I1.

a) exclusão do Triângulo preto

Após o registro, I1 leu o item b em voz baixa e seguiu observando a sequência, contou novamente, em voz baixa e após apontar com a caneta os triângulos negros de cada termo, realizou os seguintes cálculos na CI mostrados na figura 71.

Figura 71 - Protocolo at. 2 da CI de I1.

0	•	C
440	•	÷
21	•	=
20.9523809523		*
0	•	C
21	•	x
440	•	=
9.240	•	*

Após realizar esses cálculos, Cristian registrou no protocolo o que segue na figura 72.

Figura 72 - Protocolo at. 2 item b de I1.

b) na figura a2, 100 triângulos, a3 20 triângulos
e na a3 150 triângulo pretos.

Depois de reagir da mesma forma que nas resoluções dos itens anteriores registrou no protocolo o que consta na figura 73.

Figura 73 - Protocolo at. 2 item c de I1.

c) não, porque os triângulos são todos iguais

A descrição propiciada pela filmagem e protocolos de Cristian não me permitiram interpretar o processo de observação e, muito menos, o de generalização do sujeito. Ouso concluir que ele se sentiu obrigado a responder qualquer coisa, sem se preocupar em dar significado a suas resoluções.

Essa atividade visou provocar que os sujeitos percebessem a relação entre cada figura da sequência com o seu lugar nela, e chegassem a generalizar para a n -ésima figura da sequência.

Após analisar os protocolos dos grupos e observar suas estratégias de resolução, concluiu-se que as quatro duplas atingiram o objetivo dessa atividade, e demonstraram ter passado pelo processo descrito por Mason (1996a) em sua espiral de desenvolvimento: “manipulando, dando sentido a, articulando, manipulando...”.

As duplas D3, D4 e D7 iniciaram a atividade manipulando as figuras apresentadas no enunciado; perceberam a regularidade apresentada, estabeleceram a relação entre a quantidade de triângulos pretos a_6, a_7, a_8, a_9 e as respectivas figuras. Em seguida, articulando suas ideias com a relação estabelecida durante a resolução dos itens a e b, as duplas generalizaram e expressaram com suas palavras a relação entre a_n e o número de triângulos pretos pertencentes ao n -ésimo termo.

É interessante notar que a dupla D5 fez o caminho inverso das demais duplas. A dupla iniciou manipulando as figuras apresentadas no fractal, e tendo percebido o padrão, generalizou-o diretamente, chegando à expressão algébrica do n -ésimo termo, após o que, por dedução, indicou o número de triângulos pretos de cada termo solicitado.

Quanto ao uso da calculadora, as duplas a utilizaram para facilitar os cálculos nos itens a e b, evidenciando uma das vantagens de seu uso comentada por Silva, Loureiro e Veloso (1989), que é a de se livrar dos excessivos cálculos com papel e lápis para focar na resolução da atividade.

3ª atividade

Essa atividade foi elaborada visando apresentar dados de uma PG, de forma implícita, para que os sujeitos percebessem que as informações apresentadas no enunciado estão relacionadas com uma sequência numérica, para, então, encontrar determinados termos da sequência e expressar a relação entre um a_n qualquer e o a_1 . A figura 74 apresenta essa atividade.

Figura 74 - 3ª atividade da 2ª sessão.

Para construir um condomínio em São Pedro, uma construtora dividiu um terreno em lotes com áreas diferentes. O lote nº 1 possui 81 m^2 , o lote nº 2 possui duas vezes a área do lote nº 1, o lote nº 3 possui duas vezes a área do lote nº 2, e assim segue até o lote de nº 15.

- a) Encontre a medida da área de cada um dos lotes o nº 2, nº 3 e nº 4.
- b) O lote de nº 15 tem $1.327.104 \text{ m}^2$. Qual é a medida da área do lote de nº 14?
- c) Qual é o número do lote que mede 165.888 m^2 ?
- d) Como pode ser representada a relação entre a medida da área do lote nº 1 e a medida das demais áreas?

A gravação de **D3** revela o diálogo a seguir:

Roberto: - (lê alto o enunciado e calcula mentalmente) 2 vezes 81?

162m²...ó, Nº 1, nº 1 tem 81m².

Gustavo: - *Você está fazendo muito rápido. Você está fazendo só pra você.*

Roberto: - *Vem cá então.*

Gustavo: - *Olha como a folha tá.*

Roberto: - (ao virar a folha) *Você acabou de ler,ó!*

Gustavo: - *Então, eu não acabei de ler!*

É importante observar o interesse de Gustavo em ler o enunciado, isso demonstra sua vontade em participar da resolução da atividade. Segue o diálogo da dupla após Gustavo ler o item a, em voz alta:

Roberto : - *Oh, 1º lote tem área 81, o segundo tem 162 e o terceiro lote tem... e assim por diante. O lote nº 2 tem 162, o lote nº3 tem então 3 vezes 162 e o nº 4 tem 4 vezes*

Gustavo: - (realiza os cálculos na CS) *Oh, 486. E o outro...*

Roberto: - *Nº2 é 162. Certo?*

Gustavo: - *Certo.*

Roberto: - *Nº 3, é 162 vezes 2. Não, vezes 3.*

Gustavo: - *400 e alguma coisa.*

Roberto: - *Ah, legal!*

Gustavo: - *Como que é 162 vezes?*

Roberto: - *Vezes 3.*

Gustavo: - *486.*

Roberto: - *O nº 4 é 4 vezes.*

Gustavo: - *4 vezes o...*

Roberto: - *O 486.*

Gustavo: - *Sério?*

Roberto: - *Sim. Ué, tá ali explicando no problema, cara.*

Gustavo: - *É 486 né, vezes 4?*

Roberto: - *É.*

Gustavo: - *1944. Que mais?*

Roberto: - *Não, acabou. Era só isso que ele queria saber no problema a.*

Nesse diálogo, é possível observar que Roberto cometeu um equívoco ao afirmar que o lote de número três seria três vezes cento e sessenta e dois, ou seja, três vezes o lote de número dois, e ao realizar o cálculo 486 vezes 4, para encontrar o 4º lote. A figura 75 mostra a resposta apresentada pela dupla para esse item.

Figura 75 - Protocolo at. 3 item a de D3.

$$\begin{aligned}
 &m^2_1 = 81 \text{ m}^2 \\
 &a) \left\{ \begin{aligned} m^2_2 &= 162 \text{ m}^2 \\ m^2_3 &= 486 \text{ m}^2 \\ m^2_4 &= 1944 \text{ m}^2 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Para o item b, após ler o enunciado, a dupla estabeleceu o seguinte diálogo:

Roberto: - A área... a área de um quadrado.
 Gustavo: - Vai ser isso aqui dividido por 14?
 Roberto: - Faz aí... 1 ponto 327 ponto 104 dividido por 14.
 Gustavo: - Tá dando errado.
 Roberto: - Faz de novo. Faz aí.
 Gustavo: - (repete o cálculo na CS) Eita, olha o que deu!
 Roberto: - Vamos fazer sem ponto.
 Gustavo: - Ah. Não é ponto aqui. É vírgula, esqueceu? Vamos fazer sem ... você é louco... ele vai fazendo sozinho.
 Roberto: - (pega a CS e realiza o cálculo) Pronto.
 Gustavo: - É vírgula isso aqui, mano!

Esse diálogo revela que a dupla se confundiu ao tentar dividir a área do lote nº 15, 1.327.104m², por 14. Vale ressaltar que Roberto se confundiu com a função “ponto” na CS e Gustavo lembrou que nessa calculadora o ponto tem função de “vírgula”. Assim, mesmo percebendo que havia algo errado, a dupla seguiu com o cálculo, registrando o seguinte resultado para o item b, presente na figura 76.

Figura 76 - Protocolo at. 3 item b de D3.

$$b = 94793.142 \text{ m}^2 \quad n = 14$$

No item c, após ler o enunciado D3 dialoga:

Gustavo: - Divide por 13.
 Roberto: - Por 13? Pera aí. 13 é esse, né. Divide por 12, até dá esse aqui.
 Gustavo: - Por onze?

Roberto: - Não precisa. Ah não, divide por 11... Por 10... Por 9...
 Por 8... Por 7... por 6... por 5... por 4...
 Gustavo: - Mas é número com vírgula. Pera aí.
 Roberto: - É, não dá. 165888.
 Gustavo: - 165 dividido por ...
 Roberto: - 888 dividido por 2. Porque é metros quadrados.
 Gustavo: - 82 944.
 Roberto: - Esse é o lote? Esse é o número?
 Gustavo: - Para aí. Faz isso aqui oh. 1327104, 14, vai, vai vendo
 ...dividido por 13, dividido por 12...
 Roberto: - Qual é o nº?
 Gustavo: - 165.
 Roberto: - Não? Já deu errado.
 Gustavo: - Não. Eu tenho que ir embora.
 Roberto: - Fala pra ela se ela deixa fazer na próxima aula.
 Gustavo: - Não. (chama a pesquisadora) Eu tenho que ir embora,
 tenho inglês as duas e meia. Falta só a d.
 Pesquisadora: - Tudo bem. Roberto você gostaria de terminar a
 atividade?
 Roberto: - Eu sozinho?
 Pesquisadora: - Sim.
 Roberto: - Pode ser.

Após esse diálogo, Gustavo foi embora e Roberto permaneceu só. De acordo com a imagem, Roberto realizou alguns cálculos na CS e registrou-os no protocolo o que consta na figura 77.

Figura 77 - Protocolo da at. 3 item c de D3.

C.º nº 7, pois eu fui dividindo 13, 12, 11, e vendo que chega perto de 165.888.

Em seguida, Roberto leu o item d em voz baixa, realizou alguns cálculos na CS, e registrou o que consta na figura 78.

Figura 78 - Protocolo da at. 3 item d de D3.

d) $n=1 = 81$ $\times 2$ R: Que vais multiplicando por 2 - 1 ex1
 $n=2 = 162$ $\times 2$
 $n=3 = 486$ $\times 2$
 $n=4 = 1944$

Vale observar que o exemplo apresentado por Roberto, é a resposta apresentada por D3 ao item a. Os cálculos realizados para encontrar as áreas apresentadas não foram lote nº 3 = $162 \times 2 = 324$, nem lote nº 4 = $486 \times 2 = 972$. Esse exemplo não condiz com a resposta apresentada por ele, para expressar a relação apresentada no item c.

A gravação de **D4** mostra o seguinte diálogo da dupla ao receber a atividade:

Matheus: - *A gente tem 5 minutos.*

Pesquisadora: - *Não tem problema.*

Matheus: - *É que eu tenho treino duas e meia. Tem mais outra depois dessa?*

Pesquisadora: - *Não.*

Matheus: - *Então vamos rápido.*

Matheus: - (após lerem o enunciado) *2 vezes 81? Faz.*

Danilo: - (calcula na CI) *Dá 162.*

Matheus: - *Próximo.*

Danilo: - (calcula na CI) *324.*

Matheus: - *Não meu filho. O lote nº 2 possui duas vezes a medida do lote nº 1, 81 vezes 2. Aí, o lote nº 3 possui 2 vezes o lote nº 2.*

Danilo: - *162 vezes 2, dá 324. O 4 fica 324 vezes 2. Dá 648.*

A figura 77 mostra o protocolo com registros da CI, para o item a.

Figura 79 - Protocolo da at. 3 item a da CI de D4.

81 •	x		
2 •	=	162 •	x
162 • 00	*	2 •	=
		324 • 00	*
0 •	0	0 •	0
162 •	x	324 •	x
2 •	=	2 •	=
324 • 00	*	648 • 00	*

A resposta registrada para o item a pela dupla consta na figura 80.

Figura 80 - Protocolo da at. 3 item a de D4.

nº 2 162 m² nº 3 324 m² nº 4 648 m²

Após o diálogo, a dupla leu o item b e realizou os cálculos na CI, conforme apresenta a figura 81.

Figura 81 - Protocolo da at. 3 item b da CI de D4.

$$\begin{array}{rcl} 1,327,104 & \div & \\ 2 & = & \\ 663,552.00 & * & \end{array}$$

Em seguida, Matheus registra no protocolo o que consta na figura 80.

Figura 82 - Protocolo at. 3 item b de D4.

Nº 14663552 M2

Nas figuras 80 e 82, é possível observar que a dupla D4 registra o número dos lotes e suas respectivas áreas em metros quadrados.

Para o item c, a gravação de D4 mostra que, após ler o enunciado em voz baixa a dupla realizou os cálculos na CI e registrou nos protocolos o que mostra a figura 83.

Figura 83 - Protocolo at. 3 item c de D4.

$$\begin{array}{rcl} 663,552.00 & \div & \\ 2 & = & \\ 331,776.00 & * & \\ 331,776.00 & \div & \\ 2 & = & \\ 663,552.00 & * & \end{array}$$

Nº 12

Após esse registro, a dupla leu em voz baixa o item d, e enquanto Matheus escrevia no protocolo, D4 estabeleceu o seguinte diálogo:

Danilo: - (enquanto observa o que Matheus escreveu) *Quê?*

Matheus: - *Não, oh!. O que vem antes é metade desse ou o que vem agora é o dobro desse. Entendeu? Eu tenho que ir agora. Acabei.*

A figura 84 apresenta a resposta de D4 para o item d.

Figura 84 - Protocolo at.3 item d de D4.

O lote anterior tem a metade do próximo lote ou o próximo lote tem duas vezes a área do próximo

Ao observar a resposta apresentada pela dupla ao item d, fica evidente que os sujeitos ao descreverem as regras de padrões numéricos, relacionaram--nas mostrando conhecer a correlação entre as operações de multiplicação e divisão de números reais positivos, por meio da comparação (sobre a distinção entre os termos) entre um termo e seu sucessor e vice-versa o que vem ao encontro dos comentários de Orton e Orton (1999).

A gravação da dupla **D5** mostra que após Gabriela ler o enunciado em voz alta a dupla apresentou o seguinte diálogo:

João: - *Então espera. Se ele pega o n^o do lote que é n . Ó, ele tá multiplicando por 2 não é? Você multiplica por 2. Então seria 2 elevado a n ? Não, seria 81 elevado a n . Não, n menos 1? Não. 81 vezes 2.*

Gabriela: - 162.

João: - 81 mais 81. Não. Pera aí, o lote 2 tem 2 vezes o lote 1. Duas vezes 81.

Gabriela: - 81 mais 81?

João: - É. Pera aí. 81 vezes 2, tá certo.

Gabriela: - 81 vezes 2?

João: - É. É a mesma coisa. 81 vezes 2 é a mesma coisa que 81 mais 81.

Gabriela: - Olha, 81 mais 81 é... (calcula na CS)

João: - 162. (registra no papel)

Gabriela: - Pera aí que eu erreí.

João: - Oh, o a_1 é 81. O a_2 é o 81 vezes 2. O a_3 é 81 vezes 3, 243. O a_4 é 81 vezes 4, 324. Multiplicado por 2.

Gabriela: - Aí da 648.

João: - Não, pera aí. 81 vezes 2, 162. 162 vezes 2, 324.

Gabriela: - Então, 324... 648.

João: - Oi?

Gabriela: - 648... 1296.

A figura 85 apresenta o registro da dupla para o item a.

Figura 85 - Protocolo at. 3 item a de D5.

Handwritten mathematical protocol for item a of D5. The sequence of terms is as follows:

- $a_1 = 81$
- $a_2 = 162$ (calculated as $a_1 \times 2$)
- $a_3 = 324$ (calculated as $a_2 \times 2$)
- $a_4 = 648$ (calculated as $a_3 \times 2$)
- $a_5 = 1296$ (calculated as $a_4 \times 2$)

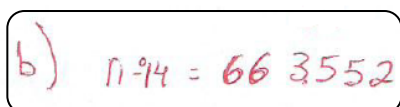
The calculations are written in red ink on a white background, with the terms a_2, a_3, a_4, a_5 and the multipliers $\times 2$ clearly visible.

Em seguida, a gravação de D5 apresenta o seguinte diálogo após a leitura do item b:

João: - *Então coloca aí: 1327104 dividido por 2.*
 Gabriela: - *(faz na calculadora) 663552. Então, o lote 14...*
 João: - *Lote 15.*
 Gabriela: - *Lote 14. (registra no protocolo).*
 João: - *Agora só falta fazer os itens c e d.*

A figura 86 mostra a resposta registrada por D5.

Figura 86 - Protocolo at. 3 item b de D5.



b) $11.94 = 66\ 3552$

A figura 84 mostra que Gabriela registrou os metros quadrados do 14º lote corretamente, porém sem registro da unidade de medida.

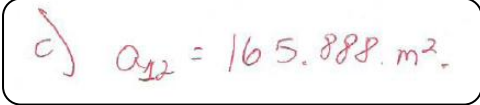
A gravação de D5 informa que, após Gabriela ler o item c em voz alta, a dupla estabeleceu o seguinte diálogo:

João: - *Você tem que pegar esse aqui oh. O 14.*
 Gabriela: - *O 14 não é 663552?*
 João: - *É precisa da fórmula. Vai precisar da fórmula pra achar.*
 Gabriela: - *Coloca o décimo...*
 João: - *Não. Coloca o décimo só.*
 Gabriela: - *Não, espera. (lê o item d em voz alta).*
 João: - *Escreve.*
 Gabriela: - *Multiplicando n?*
 João: - *Não. Multiplicando n elevado a 2.... Não, ó.... é alguma coisa assim... O primeiro lote é 81. O segundo... então deixa eu pensar. Quanto é 81 vezes 81.*
 Gabriela: - *(faz na CS) 6561.*
 João: - *Aqui é 81 vezes 3. 81 vezes 3.*
 Gabriela: - *O que? 81 vezes 3. 243.*
 João: - *243?*
 Gabriela: - *É.*
 João: - *162 vezes 2?*
 Gabriela: - *324.*
 João: - *81 vezes 3, faz na calculadora.*
 Gabriela: - *81 vezes 3? 243.*
 João: - *162 vezes 2?*
 Gabriela: - *Oxi... espera.*
 João: - *Tá faz.*
 Gabriela: - *324.*
 João: - *Eu to pensando assim, oh... A gente tem que achar a fórmula.*
 Gabriela: - *Oh a_5 é 1296. (Calculando na CS) Então a_6 é 2592.*

João: - O lote 2 vai ser 2 vezes o lote 1. Então ele soma. 12... então ele dá....165888.
 Gabriela: - É o a_{12} .
 João: - Cê fez... qual conta você fez? Então vamos achar a fórmula.
 (refaz os cálculos na CS)

Nesse diálogo, é possível observar a estratégia de D5, utilizada para resolver os itens c. A figura 87 apresenta a resposta registrada pela dupla para o item c.

Figura 87 - Protocolo at. 3 item c de D5.



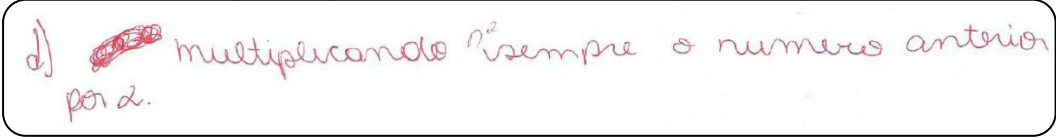
c) $a_{12} = 165.888.m^2$.

Após responder o item c Gabriela lê em voz alta o item d e a dupla segue dialogando:

Gabriela: - Ó...
 João: - Cada lote vezes 2, n elevado a 2. Escreve aí.
 Gabriela: - O quê?
 João: - Multiplicando sempre, multiplicando n elevado a 2 sempre o número anterior a 2.
 João: - Professora, professora! Acabamos.

A figura 88 mostra a resposta apresentada por D5 para o item d.

Figura 88 - Protocolo at. 3 item d de D5.



d) ~~multiplicando~~ multiplicando sempre o numero anterior por 2.

A gravação da dupla mostra que a precipitação de João e sua dificuldade em ouvir o que sua companheira de dupla fala, concomitantemente com sua clara ascendência na dupla, provocou uma série de confusões na determinação da generalização implicada.

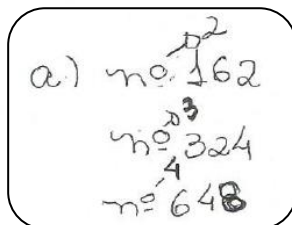
A filmagem de **D7** mostra que, após ler o enunciado em voz baixa, a dupla estabeleceu o seguinte diálogo:

Luana: - É só multiplicar por dois. Faz aí... 81 vezes 2.
 Janete: - (faz os cálculos na CS) 162.
 Luana: - Vezes 2.
 Janete: - 324.
 Luana: - Vezes dois.
 Janete: - 648.

Luana: - *Espera. 648. Nº 2, nº 3 e nº 4.*

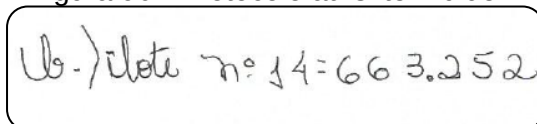
A figura 89 apresenta o protocolo com a resposta da dupla para o item a.

Figura 89 - Protocolo at. 3 item a de D7.



Após registrar a resposta para o item a, a dupla leu em voz baixa o item b. Luana seguiu realizando cálculos na CS, e disse: “663552”. Janete registrou no protocolo o que consta na figura 90.

Figura 90 - Protocolo at. 3 item b de D7.



Os protocolos do item b, de D7, mostram que Luana encontrou o valor correto na CS, porém, Janete se enganou ao registrar o número das centenas.

A seguir apresento o diálogo da dupla ocorrido durante a resolução do item c:

Janete: - *A é qual? 14 né. É só fazer 66...*

Luana: - *Eu sei fazer dá aqui.* (pega a CS)

Nesse momento a dupla recebe a CI que substitui a CS¹⁷

Luana: - *Eu sei fazer.*

Janete: - *Oh, o que se fez aqui? 663252 dividido por 2.* (realiza os cálculos na CI)

Luana: - *Aí, depois é só a gente contar.*

Janete: - *Aí, já deu.* (E aponta para a folha). *Não, não deu não.*

Luana: - *Amiga.*

As duas olham para a calculadora e refazem os cálculos na CI.

Janete: - *Já está bem próximo daqui. Vai ser 16581.*

Luana: - (olha no papel da calculadora) *Aqui, 14, 13, 11. Opa, não aqui, ó, 14, 13, 12. Esse é o 12.*

¹⁷ A dupla D4 que estava com a CI já havia entregue a última e, assim, possibilitou a troca.

Janete: - Coloca aí, ó

Luana: - É só colocar assim: Seria aproximadamente o lote de número 12.

A figura 91 apresenta o protocolo da CI na atividade 3 item c de D7.

Figura 91 - Protocolo da at. 3 item c da CI de D7.

$$\begin{array}{rcl}
 663 \cdot 252 & \div & \\
 2 \cdot & = & \\
 331 \cdot 62 & * & \\
 663 \cdot 252 & \div & 331 \cdot 62 \div \\
 2 \cdot & = & 2 \cdot = \\
 331 \cdot 62 & * & 165 \cdot 81 * \\
 331 \cdot 62 & \div & 165 \cdot 81 \div \\
 2 \cdot & = & 2 \cdot = \\
 165 \cdot 81 & * & 82 \cdot 90 * \\
 165 \cdot 81 & + & 0 \cdot 0
 \end{array}$$

A figura 92 apresenta a resposta registrada pela dupla no item c.

Figura 92 - Protocolo at. 3 item c de D7.

c.) Seria aproximadamente o lote de nº 12

Vale observar que, ao registrar o valor da área do lote na CI, a dupla digitou o ponto entre 663 e 252, mostrando não ter atentado de que o ponto na CI tem a função da vírgula, nos decimais. No entanto, a dupla continuou interpretando os registros da CI como milhar até chegar no 82,90 e só aí parece ter percebido que não dava um valor exato.

Para o item d, a dupla leu o enunciado em voz baixa, e Luana registrou no protocolo o que consta na figura 93.

Figura 93 - Protocolo at. 3 item d de D7.

d.) Que todas áreas para dar seu resultado final, tem que ser multiplicada por 2.

Após analisar os protocolos da dupla, concluiu que entenderam a regra, mas não conseguiram responder a questão, apenas repetiram a regra de formação dada no enunciado.

A filmagem de Cristian mostra que ele leu o enunciado em voz baixa e realizou os seguintes cálculos na CI conforme consta na figura 94.

Figura 94 - Protocolo at. 3 item a da CI de I1.

$$\begin{array}{rcl}
 81 & \cdot & x \\
 2 & & = \\
 162 & & * \\
 162 & & x \\
 2 & & x \\
 324 & & = \\
 324 & & * \\
 324 & & \div \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Em seguida, o sujeito registrou no protocolo o que mostra a figura 95.

Figura 95 - Protocolo at. 3 item a de I1.

não sei :(
162, 324

Ao observar as figuras 94 e 95 percebi que, embora Cristian tivesse registrado como resposta: “Não sei” – ele calculou a área do lote nº 2, 162 e do lote nº 3, 324, omitindo a unidade de medida.

Na filmagem, consta que Cristian seguiu realizando novos cálculos na CI, conforme mostra a figura 96.

Figura 96 - Protocolo at. 3 item b da CI de I1.

$$\begin{array}{rcl}
 324 & \cdot & x \\
 15 & & = \\
 4.860 & & * \\
 0 & & 0 \\
 81 & \cdot & x \\
 2 & & + \\
 0 & & 0 \\
 1.327.104 & & \div \\
 14 & & = \\
 0.09479314285 & & * \\
 0 & & 0 \\
 0 & & 0 \\
 1.327.104 & & \div \\
 81 & & x \\
 4 & & = \\
 0 & & *
 \end{array}$$

Isso feito, registrou no protocolo o que apresenta a figura 97.

Figura 97 - Protocolo at. 3 item b de I1.

b) 83, 142, 85

A figura 94 mostra que Cristian, assim como na 1ª atividade dessa sessão, parece ter relacionado a sequência apresentada a uma PG, pois, ao realizar os cálculos na calculadora, dividiu o valor da área do lote nº 15, 1.327.104 m², pelo número do lote anterior, 14, aparentando lembrar que para encontrar o antecessor de um termo é necessário realizar uma divisão. Porém, essa divisão deveria ser realizada entre a área do lote nº 15 e a razão da PG, ou seja, $1.327.104 : 2$.

Vale observar que no registro apresentado na figura 95, Cristian não utilizou os valores registrados pela CI, para esse item.

A filmagem de Cristian mostra que ele seguiu lendo em voz baixa o item c da atividade, e realizou os seguintes cálculos na CI, conforme mostra a figura 98.

Figura 98 - Protocolo at. 3 item c da CI de I1.

324. x
2. =
648. x
648. x
2. =
1.296. x
0. 0
52. 0
0. 0

De acordo com esse protocolo, Cristian seguiu calculando as áreas dos lotes nº 4 e nº 5, e pareceu ter desistido de continuar com os cálculos para determinar qual lote possuía 165.888 m². A filmagem mostra que após tais cálculos, Cristian registrou no protocolo o que mostra a figura 99.

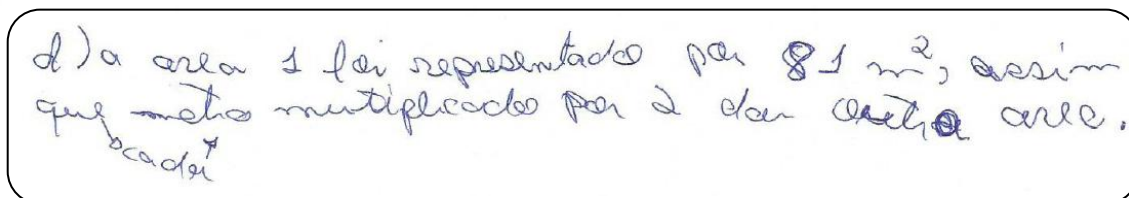
Figura 99 - Protocolo at. 3 item c de I1.

c) é o lote

Vale ressaltar que esse valor não foi registrado pela CI durante a resolução desse item.

Após esse registro, a filmagem mostra que o sujeito seguiu lendo em voz baixa o item d, e o respondeu, conforme o registro na figura 100.

Figura 100 - Protocolo at. 3 item d de I1.



Assim, Cristian tentou repetir com suas palavras o que o enunciado dizia, mostrando confundir a unidade de medida “cada metro” com a palavra área.

Essa atividade visou apresentar dados de uma PG, de forma implícita, para que os sujeitos percebessem que as informações apresentadas no enunciado estão relacionadas com uma sequência numérica, para, então, encontrar determinados termos da sequência e expressar a relação entre um a_n qualquer e o a_1 .

Após observar e analisar os protocolos concluí que as duplas D4, D5 e D7 perceberam a regularidade apresentada, e no item a, encontraram as áreas dos lotes nº 2, nº 3 e nº 4. No item b, ao dividirem a área do lote nº 15 por 2, as mesmas duplas estabeleceram a relação entre um termo e seu antecessor, seguindo a mesma estratégia para o item c, ao calcular o nº do lote de área 165.888m^2 .

No item d, para expressar a relação entre a_1 e os demais termos da sequência, apenas D4 estabeleceu uma relação, registrando, com suas palavras, a relação entre um termo qualquer e seu antecessor, assim como a relação entre um termo qualquer e seu sucessor.

Quanto ao uso da calculadora, as duplas a utilizaram para facilitar os cálculos realizados nos itens a, b e c.

4ª atividade¹⁸

Os sujeitos não realizaram esta atividade.

¹⁸ Conforme Anexo C.

Considerações sobre a 2ª sessão

O objetivo dessa sessão foi propor atividades que propiciassem aos sujeitos da pesquisa a construção de uma expressão para o termo geral de uma PG.

Após realizar a análise dos protocolos e estratégias utilizadas pelos grupos para realizar as atividades propostas nessa sessão, percebi que os sujeitos não estavam acostumados a expressar os padrões encontrados em determinadas sequências por meio de uma expressão algébrica. Das quatro duplas e um sujeito, a dupla D5, na 2ª atividade realizada, foi a única que apresentou a expressão algébrica que representava a lei de formação de determinada sequência.

Esse fato, responde a minha primeira questão de pesquisa, pois, mostra que é possível que o aluno do ensino médio, não familiarizado com a generalização, uma das principais características do pensamento algébrico, possa ser levado à construção de expressões relativas às Progressões Geométricas.

Em relação às respostas registradas pelos sujeitos nas três atividades, percebi que alguns dos sujeitos não costumavam responder as questões propostas de forma clara, algumas vezes indicavam apenas valores numéricos sem dar sentido ao número apresentado ou sem apresentar as unidades de medida.

Assim, resolvi introduzir uma institucionalização na próxima sessão, que os fizesse refletir sobre diferentes estratégias para chegar à expressão do enésimo termo da PG e sobre a importância de registrar as respostas de forma clara e objetiva.

3.2.3 3ª sessão - 05 de junho de 2012

Esta sessão teve por objetivo propiciar aos sujeitos de pesquisa a construção da expressão algébrica da soma dos termos de uma PG finita com o auxílio da calculadora.

De acordo com os resultados obtidos pela análise dos dados coletados na 2ª sessão, decidi realizar uma institucionalização que fizesse com que os alunos refletissem sobre diferentes estratégias para chegar à expressão do n ésimo termo da PG e sobre a importância de registrar as respostas de forma clara e objetiva.

Assim, previ 15 minutos da sessão para a institucionalização, e o restante do tempo para a feitura das atividades.

Descrição da 3ª sessão

Fomos, a observadora e eu – pesquisadora – à sala designada para a ocorrência da coleta de dados, ou seja, a mesma sala da 1ª e da 2ª sessões, meia hora antes do horário marcado para a entrada dos sujeitos de pesquisa. Ao chegarmos, cinco dos sujeitos já estavam esperando na porta, para começarmos a sessão. Disseram também, que os demais tinham ido embora, pois haviam sido liberados mais cedo e avisaram que não voltariam mais à escola.

Vale ressaltar que, nesse dia chuvoso, os alunos tinham realizado a prova da 1ª fase das Olimpíadas Brasileiras de Matemática, no período da manhã das 7h30 às 10h30, sendo liberados ao seu término.

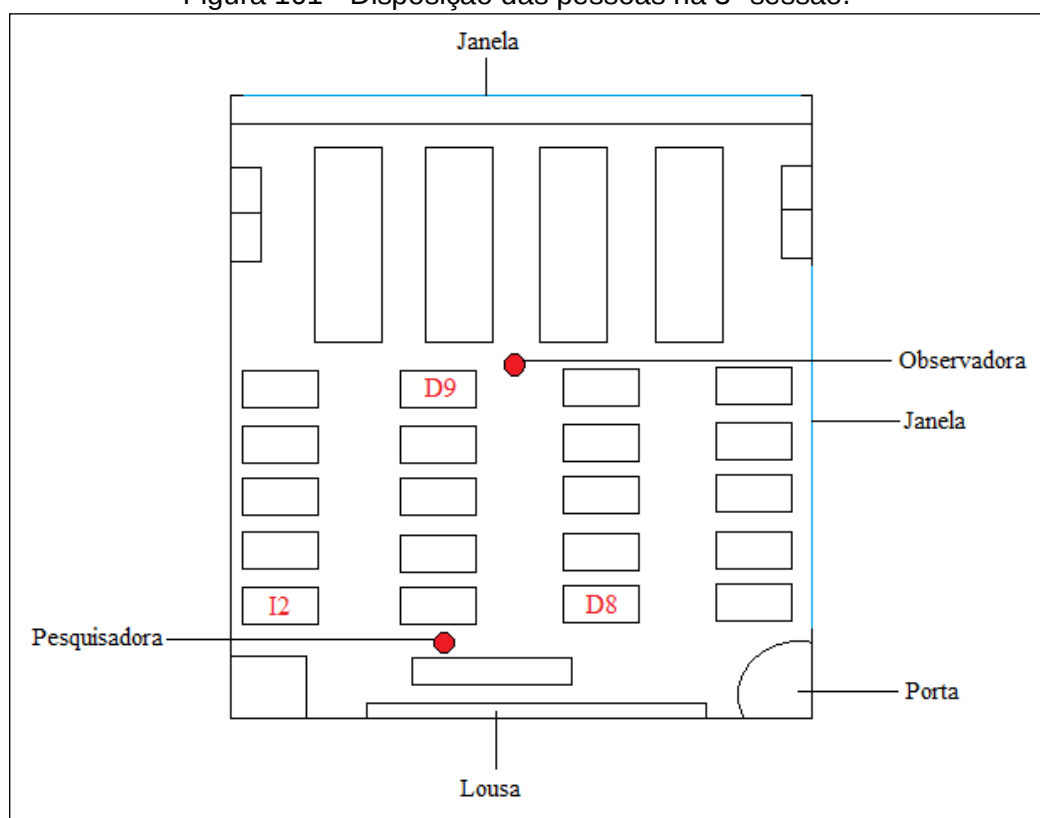
Agradei a informação, e disse que realizaríamos a sessão com sete pessoas, observadora, pesquisadora e os cinco voluntários. Eles perguntaram se poderiam jogar bola no corredor com os alunos do período da tarde, enquanto não começasse a sessão. Respondi que sim e que quando estivesse tudo pronto, eles seriam chamados.

Preparamos o ambiente, organizando o material e registrando na lousa as resoluções das atividades a serem debatidas durante a institucionalização. Às 12h50, todos os cinco voluntários já se encontravam à porta da sala. Convidados a

entrar o fizeram animadamente, cumprimentando-nos e perguntando se poderiam se sentar onde quisessem. Respondi que deveriam agrupar-se em duas duplas e um deles sozinho e se sentarem de modo que um grupo não atrapalhasse o outro com seus diálogos.

Quando todos haviam se acomodado, agradei a presença, enquanto a observadora recolhia os celulares. A figura 101 mostra a disposição das pessoas na sala da 3ª sessão.

Figura 101 - Disposição das pessoas na 3ª sessão.



É importante observar que a sala propiciava no início um ambiente tranquilo. Após um tempo teve início o som do microfone do professor da sala ao lado, o qual, porém, não pareceu perturbar as atividades da sala.

No final, quando cada sujeito se despedia, eu agradecia pela colaboração e perguntava se caso eu precisasse tirar alguma dúvida sobre a resolução das atividades, poderia entrar em contato para marcarmos uma entrevista. Todos responderam que sim.

Descrição da Institucionalização

A descrição se baseou nas anotações da pesquisadora e da observadora.

Iniciei perguntando quem pretendia fazer faculdade. Todos responderam que pretendiam, então, prossegui comentando sobre o vestibular e a importância de se responder as questões de forma clara e objetiva. Expliquei, também que iríamos observar algumas respostas referentes a duas atividades.

Li para eles, em voz alta, o enunciado da primeira atividade da sessão anterior: “Observe a sequência 5, 10, 20, 40, 80, etcetera *que pode também ser representada assim*”. Nesse momento, mostrei uma folha de sulfite com a tabela em tamanho ampliado. A seguir, pedi que observassem as respostas apresentadas para os itens: a) qual o próximo termo, isto é a_6 ?; b) qual o 21º termo?

Na figura 102 está representado o que estava registrado na lousa.

Figura 102 - Resoluções da at. 1 item a e b da 2ª sessão.

<u>Resolução 1</u> a) O próximo termo depois do a_5 é 160. b) O 21º é 5.242.880.	<u>Resolução 2</u> Fez na calculadora: a) $a_6 = 80 \times 2 = 160$ $a_6 = 160$ b) $a_{21} = 5.242.880$ $a_7 = 2 \times 160$ · · · $a_{21} = a_{20} \times 2$
<u>Resolução 3</u> $a_1 = 5$ $a_2 = 10 = 2 \times 5$ $a_3 = 20 = 2 \times 10 = 2 \times 2 \times 5$ $a_4 = 40 = 2 \times 20 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ $a_5 = 80 = 2 \times 40 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5$ $a_6 = 160 = 2^5 \times 5$ a) $a_6 = 160$ b) $a_{21} = 2^{20} \times 5$	<u>Resolução 4</u> a) 160 b) 5.242.880

Analizamos cada uma das respostas apresentadas na ordem em que estavam no painel. A seguir reproduzo os diálogos entre a pesquisadora (P) e a classe (C):

P: – (após reler o item a e o item b) *A resolução 1, responde a questão a e “a” questão “b” dessa atividade?*

C: – *Sim.*

P: – *Qualquer pessoa que ler consegue entender o que está sendo respondido?*

C: – *Sim.*

P: – *E a resolução 2?*

C: – *Também.*

P: – *E a resolução 3?*

C: – *Também está boa.*

P: – *E a última, a resolução 4?*

C: – *Não.*

P: – *Por quê?*

C: – *Porque não fala nada só coloca os números. Não dá pra gente saber que números são esses.*

P: – *Muito bom. É isso mesmo, não dá para nós respondermos apenas números sem apresentar o que eles representam senão, a resposta fica sem sentido.*

De acordo com os registros da observadora, durante esse diálogo, os elementos dos grupos conversavam e lembravam que haviam respondido a essa atividade na sessão anterior, e mostravam um para o outro a resposta do painel que se assemelhava com a registrada por eles.

Prossegui lendo o enunciado adaptado da atividade 3, da 2ª sessão pois troquei a razão original da PG que era 2 por 5 e restringi as questões a 3, dos 4 itens. Dessa forma a atividade discutida ficou conforme a figura 103.

Figura 103 - At. 3 da 2ª sessão adaptada para a institucionalização.

Para construir um condomínio em São Pedro, uma construtora dividiu um terreno em lotes com áreas diferentes. O lote nº 1 possui 81 m², o lote nº 2 possui cinco vezes a área do lote nº 1, o lote nº 3 possui cinco vezes a área do lote nº 2, e assim segue até o lote de nº 15.

a) Encontre a área do lote de nº 3.

b) O lote de nº 15 tem 494.384.765.625 m². Qual é a área do lote de nº14?

c) Como pode ser representada a relação entre a área do lote nº 1 e as demais áreas?

Lí a atividade em voz alta, para os grupos. E, pedi, então, que observassem as respostas apresentadas para essa atividade que estavam na lousa, conforme apresenta a figura 104.

Figura 104 - Resoluções da at. 3 adaptada.

<u>Resolução 1</u> a) nº3: 2025 m² b) nº14: 98.876.953.125m² c) Que vai multiplicando por 5.	<u>Resolução 2</u> a) O lote nº 3 tem 2025m² de área. b) O lote nº 14 tem 98.876.953.125m² de área. c) A relação entre a área do lote nº 1 e as demais áreas é $a_n = a_{n-1} \times 5$. Fez na calculadora: nº 2 = 405 nº 3 = 405 x 5 . . . nº 14 = nº 13 x 5
<u>Resolução 3</u> a) $a_3 = 2.025m^2$ b) $a_{14} = 98.876.953.125m^2$ c) A área do lote anterior tem sempre a área do lote seguinte dividido por 5.	<u>Resolução 4</u> $a_1 = 81$ $a_2 = 405 = 81 \times 5 = 81 \times 5^1$ $a_3 = 2.025 = 405 \times 5 = 81 \times 5 \times 5 = 81 \times 5^2$. . . $a_{14} = 81 \times 5^{14-1} = 81 \times 5^{13}$. . . $a_n = 81 \times 5^{n-1}$ a) $a_3 = 2.025m^2$ b) $a_{14} = 81 \times 5^{13}m^2$ c) A relação entre o lote nº 1 e as demais áreas pode ser escrita como $a_n = a_1 \times 5^{n-1}$.

Analizamos cada uma das resoluções e respectivas respostas apresentadas na ordem em que estavam no painel. A seguir, reproduzo os diálogos entre a pesquisadora (P) e a classe (C):

P: – (após ler o item a) *A resolução 1, responde ao item “a” de forma clara?*

C: – *Sim.*

P: – *E ao item b? (rele o item b)*

C: – *Sim.*

P: – *E ao item c? (rele o item c)*

C: – *Sim.*

P: - *Ah, então aí está relacionando a área do lote nº 1 com as demais áreas?*

- C: – Não.
- P: – *E como nós sabemos que relação é essa apresentada?*
- C: – *É, não dá pra saber.*
- P: – *Pois é, não está claro. Vamos ver a resolução 2. O item a foi respondido de forma clara?*
- C: – Sim.
- P: – *E o item b?*
- C: – Também.
- P: – *E o item c?*
- C: – *Essa resposta foi completa.*
- P: – *Foi, mas a relação apresentada é a que foi pedida no enunciado? (relê o enunciado)*
- C: – Não. *Ele não usa a_1 na fórmula.*
- P: – *Ah, ele não utiliza a_1 para expressar a relação. Vamos ver a resolução 3. Item a?*
- C: – Sim.
- P: – *Item b?*
- C: – Também.
- P: – *Item c?*
- C: – *Ele explica melhor o que está no c da 1.*
- P: – *Pois é, mas ele responde a questão? (relê a questão do item c)*
- C: – Não.
- P: – *Por quê?*
- C: – *Por que ele não fala de a_1 . Ele fala como calcular o próximo termo.*
- P: – *Ah, entendi. E a última resolução? A resolução 4...item a?*
- C: – Sim.
- P: – *Item b?*
- C: – Sim.
- P: – *E o item c?*
- C: – Agora sim.
- P: – *Agora sim ele conseguiu expressar a relação apresentada em função de a_1 . Eu gostaria que vocês observassem que nos itens a e b das quatro resoluções são apresentadas as unidades de medida. Isso é muito importante, tudo bem?*
- C: – Sim.

De acordo com a observadora, durante essa institucionalização, os sujeitos relacionaram as expressões apresentadas no painel com o termo geral da PG, pois comentavam entre eles que estavam vendo isso nas aulas regulares de Matemática.

Descrição e análise da experimentação propriamente dita

As descrições a seguir basearam-se nas transcrições das gravações, nos protocolos dos sujeitos e nas observações anotadas pela observadora e pela pesquisadora.

Iniciei, então, a experimentação, perguntando se podia filmá-los e audiogravá-los e, como todos concordaram, a observadora passou a entregar as

calculadoras, filmadoras e gravadores, pelas carteiras. A figura 105 apresenta a distribuição do material.

Figura 105 - Localização dos instrumentos no 2º momento da 3ª sessão.

I2	Gustavo	CI e filmadora.
D8	Cristian e João	CI e filmadora.
D9	Roberto e Danilo	CS e filmadora.

Às 13h20, entreguei a 1ª atividade e uma caneta esferográfica a cada dupla e ao voluntário que se sentou só.

Ao término de cada atividade, os sujeitos levantavam as mãos e eu recolhia os protocolos e entregava a atividade seguinte.

Os registros da observadora permitiram compor a figura 106 sobre o tempo de cada grupo em algumas atividades.

Figura 106 - Tempo de duração de cada atividade na 3ª sessão.

Atividade	Horário de Início	I2	D8	D9
1	13h20min	x	x	x
2	13h26min		x	
	13h28min	x		
	13h31min			x
3	13h41min		x	não realizaram a atividade
Término	13h50min		x	x
	13h55min	x		

1ª atividade

Essa atividade teve por objetivo proporcionar aos sujeitos realizar a soma dos dez termos de uma PG, implícita, para que fosse possível encontrar uma solução para o problema proposto. A figura 107 apresenta essa atividade.

Figura 107 - 1ª atividade da 3ª sessão.

Com o término do inverno, a loja TONA MODA estava com dificuldades de vender seu casaco de dez botões que havia sido um sucesso de vendas. Para terminar com o seu estoque, colocou o seguinte cartaz na vitrine:

- Compre os botões de nosso casaco de dez botões e ganhe o casaco.
- O botão 1 custa apenas R\$ 0,05 e cada botão seguinte custa o triplo do anterior.

Determine o preço que uma pessoa acabará pagando pelo casaco com os botões, caso aceite a oferta e compre os dez botões do casaco.

Fonte: Adaptado São Paulo (2011, p.188)

A filmagem de **D8** revela o seguinte diálogo da dupla, após ler o enunciado em voz baixa:

João: - *Ó! O primeiro é zero vírgula zero cinco. O segundo é zero vírgula quinze.*

Cristian: - *Não, é dez. Para!*

João: - *Veze três, é o triplo. Oh! Zero vírgula zero cinco vezes, ó... (começando a calcular na CI) zero ponto zero cinco vezes três, oh deu zero quinze. Aí vai só multiplicando por três. Le o enunciado. ... Aí você faz assim, ó... (escreve no protocolo) Vai fazendo assim, óh... Pera aí... vai dar zero quarenta e cinco...aqui pô! (indica onde Cristian deve escrever) Aqui em baixo você coloca a₄ é igual a zero quarenta e cinco vezes três. Um e trinta e cinco. Vai zero cinco.... aqui....*

Cristian: - *Tá, vai, continua.*

João: - *É igual a um e trinta e cinco vezes três. Dá quatro e cinco.... Não zero cinco... coloca o zero aqui depois da vírgula. (pega a caneta da mão de Cristian e escreve no protocolo) ó aqui você vai colocar...*

Cristian: - *Eu não. Você!*

João: - *Vai, coloca doze vírgula quinze. (devolve a caneta e o protocolo a Cristian) Aqui também doze vírgula quinze.... é igual a doze vírgula quinze... isso. Trinta e seis vírgula quarenta e cinco....Isso, daí você vai colocar cento e nove vezes trinta e cinco.*

Cristian: - *Veze?*

João: - *Não, vírgula trinta e cinco.... Tá.... aqui a mesma coisa.... Trezentos e vinte e oito.*

Cristian: - *Quanto?*

João: - *Trezentos e vinte e oito vírgula zero cinco.*

Cristian: - *Zero cinco?*

João: - *Zero cinco.... Novecentos e oitenta e quatro... aqui você coloca a mesma coisa...Novecentos e oitenta e quatro...oitenta e quatro. Vírgula quinze.... Nossa acabou em tudo isso?! (relê o enunciado)*

Cristian: - *Acabou?*

João: - *Não....ó... dez botões pode colocar... (aponta para o protocolo).*

Cristian: - *Professora! Acabamos.*

João: - Não, eu esqueci uma coisa pera aí coloca aí... o preço que a pessoa pagará pelos dez botões é de novecentos e oitenta e quatro, vírgula... Não... dá aqui. (pega o protocolo e a caneta da mão de Cristian)

Cristian: - Pronto?

João: - Pronto.

O diálogo evidencia João assumindo a responsabilidade da atividade, e do meio para o fim Cristian aceitando escrever o que João mandava, sem maior discussão. A figura 108 apresenta a o registro da CI de D8 para essa atividade.

Figura 108 - Protocolo at. 1 da CI de D8.

0.05 x	1.35 x	36.45 x
3. =	3. =	3. =
0.15 *	4.05 *	109.35 *
0.15 x	4.05 x	109.35 x
3. =	3. =	3. =
0.45 *	12.15 *	328.05 *
0.45 x	12.15 x	328.05 x
3. =	3. =	3. =
1.35 *	36.45 *	984.15 *

A dupla utilizou a CI para facilitar os cálculos e encontrar o preço de cada um dos 10 botões. A figura 109 apresenta a resposta registrada pela dupla a essa atividade.

Figura 109 - Protocolo at.1 de D8.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0,05 \\
 a_2 &= 0,15 = 0,05 \cdot 3 = 0,15 \\
 a_3 &= 0,15 \cdot 3 = 0,45 \\
 \cancel{a_4} &= \cancel{0,45} \\
 a_4 &= 0,45 \cdot 3 = 1,35 \\
 a_5 &= 1,35 \cdot 3 = 4,05 \\
 a_6 &= 4,05 \cdot 3 = 12,15 \\
 a_7 &= 12,15 \cdot 3 = 36,45 \\
 a_8 &= 36,45 \cdot 3 = 109,35 \\
 a_9 &= 109,35 \cdot 3 = 328,05 \\
 a_{10} &= 328,05 \cdot 3 = 984,15 \\
 R &= \text{O Preço que a pessoa pagara nos 10 botões} \\
 &\text{de } 984,15.
 \end{aligned}$$

Os protocolos de D8 indicam que João realizou os cálculos na CI para achar o valor de cada botão, e ao obter o valor do décimo botão, talvez pressionado por Cristian, deu como resposta ao valor do casaco o valor do 10º botão, indicando a falta de hábito em retornar ao enunciado para verificar a resposta dada.

A filmagem de **D9** mostra que após ler o enunciado em voz baixa, a dupla estabeleceu o seguinte diálogo:

Roberto: - *Ó,, É só colocar aqui. Um botão é equivalente a 0,05....É elevado a um.....olha é que nem o esquema dali.*

Danilo: - *Vai dá zero ponto cinco.*

Roberto: - *zero ponto zero cinco é igual a ...*

Danilo: - *10 vezes 10 vezes 10...*

Roberto: - *(após registrar no protocolo) 0,05 vezes 3 que é igual a 0,15.*

Danilo: - *Que isso veio? O que você está fazendo?*

Roberto: - *A professora mandou fazer assim. (escreve no protocolo)*

Danilo: - *(calcula na CS) É 0,45. ...Aqui ó! zero ponto quinze vezes cinco é zero ponto setenta e cinco.*

Roberto: - *Pera aí. Zero ponto quinze vezes cinco é zero setenta e cinco.*

Danilo: - *Zero ponto quinze vezes cinco é zero ponto setenta e cinco.*

Roberto: - *Você errou hein....*

Danilo: - *Por que errei?*

Roberto: - *Oh, vamos ver. (faz na CS) Zero, zero cinco ... aí errei pera....era ponto. Zero ponto zero cinco vezes três é...*

Danilo: - *Ah, é vezes três. Você falou cinco.*

Roberto: - *É, eu falei. (registra no protocolo) Deixa eu ver uma coisa...(pega a CS).*

Danilo: - *Você está fazendo esse bagulho errado. É zero ponto zero cinco...*

Roberto: - *A professora disse que é assim, ó... zero ponto zero cinco vezes três não é? Agora aqui, zero quinze vezes três é igual a zero vírgula zero cinco vezes zero vírgula zero cinco não é?*

Danilo: - *É três não é?*

Roberto: - *Zero cinco, zero cinco, zero cinco?*

Danilo: - *Não cara! Você errou o bagulho.*

Roberto: - *Errei.*

Danilo: - *Tá errado. ó, é assim. Primeiro eu pego o zero vírgula zero cinco. O segundo é zero vírgula zero cinco elevado a dois.*

Roberto: - *Não é.*

Danilo: - *É ele vezes ele mesmo.*

Roberto: - *Não é. É sempre o triplo oh. (relê o enunciado em voz alta) Então eu to errando tudo aqui. E agora o que eu faço? Errei tudo... Então é zero vírgula zero cinco vezes três.*

Danilo: - *(após calcular na CS) Zero quinze.*

Roberto: - *Vezes três.*

Danilo: - *Zero quarenta e cinco... Um vírgula trinta e cinco.*

Roberto: - *Hum?*

Danilo: - *Depois de zero quarenta e cinco é um e trinta e cinco.*

Roberto: - *Vezes três.... Um ponto três cinco vezes três.*
 Danilo: - *Quatro vírgula zero cinco.*
 Roberto: - *Vezes três.*
 Danilo: - *Doze ponto quinze.*
 Roberto: - *Vezes três.*
 Danilo: - *Doze ponto quinze vezes três dá trinta e seis ponto quarenta e cinco.*
 Roberto: - *É... vezes três.*
 Danilo: - *Cento e nove vírgula trinta e cinco....*
 Roberto: - *Pera aí.*
 Danilo: - *Como que é trezentos e vinte e oito vírgula ...*
 Roberto: - *Agora eu esqueci. Cento e nove vírgula trinta e cinco vezes três.*
 Danilo: - *Trezentos e vinte e oito vírgula zero cinco.*
 Roberto: - *Vezes três.*
 Danilo: - *Pera aí.*
 Roberto: - *Vai dar quanto?*
 Danilo: - *Eu apaguei aqui. Trezentos e vinte e oito vírgula zero cinco vezes três, novecentos e oitenta e quatro vírgula quinze.*
 Roberto: - *Pronto. Agora aqui tá falando que ... (relê o enunciado) Ele vai comprar dez botões e um é sempre o triplo do anterior... então... nossa tem que somar isso tudo!*
 Danilo: - *Na verdade,não.*
 Roberto: - *Não, por quê?*
 Danilo: - *Isso é mais difícil. Vai pagar o...*
 Roberto: - *Novecentos e oitenta e quatro vírgula quinze. É né...*
 Danilo: - *É, tá na nóia você. Aí você coloca ele vai gastar novecentos e oitenta e quatro vírgula quinze... bota isso.*
 Roberto: - *Pera. (observa o protocolo)*
 Danilo: - *Coloca aí, ele vai gastar...*
 Roberto: - *Tá.*
 Danilo: - *Acabou aí?*
 Roberto: - *Acabei.*

Vale ressaltar que Roberto percebeu que para encontrar o valor do casaco deveria calcular a soma dos valores dos 10 botões, porém acabou seguindo a ideia de Danilo, e registrou o que consta na figura 110.

Figura 110 - Protocolo at.1 de D9.

$1 \text{ botão} = 0,05$
 $2 \text{ botões} = 0,05 \times 3 = 0,15$
 $3 \text{ botões} = 0,15 \times 3 = 0,05 \times 0,05 \times 3 = 0,05^2 \times 3 = 0,45$
 $4 \text{ botões} = 0,45 \times 3 = 0,05 \times 0,05 \times 0,05$

$1 \text{ botão} = 0,05$
 $2 \text{ botões} = 0,05 \times 3 = 0,15$
 $3 \text{ botões} = 0,15 \times 3 = 0,45$
 $4 \text{ botões} = 0,45 \times 3 = 1,35$
 $5 \text{ botões} = 1,35 \times 3 = 4,05$
 $6 \text{ botões} = 4,05 \times 3 = 12,15$
 $7 \text{ botões} = 12,15 \times 3 = 36,45$
 $8 \text{ botões} = 36,45 \times 3 = 109,35$
 $9 \text{ botões} = 109,35 \times 3 = 328,05$
 $10 \text{ botões} = 328,05 \times 3 = 984,15$

$0,05 \times 3 = 0,15$
 $0,15 \times 3 = 0,45$

R: Ele irá gastar R\$ 384,15 pelos botões.

Esse protocolo de D9 mostra que a dupla interpretou o índice dos termos como a quantidade de botões. A dupla realizou os cálculos na CS, e apresentou o valor do 10º termo como o valor do casaco.

A filmagem de **Gustavo**, que nesta sessão ficou sozinho, mostra que ele leu em voz baixa o enunciado da atividade e seguiu registrando no protocolo os números de 1 até 10. Em seguida, leu novamente o enunciado e realizou cálculos na CI. A figura 111 apresenta registro da CI para essa atividade.

Figura 111 - Protocolo at.1 da CI de I2.

3. x	36.45 x	0.15 x	0. C
0.05 =	3. =	3. =	0.05 +
0.15 *	109.35 *	0.45 *	0.15 +
			0.45 +
0.15 x	109.35 x	0.45 x	1.35 +
3. =	3. =	3. =	4.05 +
0.45 *	328.05 *	1.35 *	4.05 +
			12.15 +
0.45 x	0. C	1.35 x	36.45 +
3. =		3. =	109.35 +
1.35 *	109.35 x	4.05 *	328.05 +
	3. =		984.15 +
1.35 x	328.05 *		0. C
3. =			
4.05 *	328.05 x		
	3. =		
4.05 x	984.15 *		
3. =			
12.15 *	0. C		
12.15 x	0.05 x	12.15 x	
3. =	3. =	3. =	
36.45 *	0.15 *	36.45 *	

Após esse registro, I2 iniciou o registro de sua resposta no protocolo, porém, logo parou de escrever e apontou para cada termo com o dedo aparentando realizar os cálculos mentalmente. Em seguida, Gustavo terminou de escrever sua resposta, que consta na figura 112.

Figura 112 - Protocolo at.1 de I2.

1 botão → 0,05	
2 botões → 0,15 +	
3 botões → 0,45 +	
4 botões → 1,35 +	
5 botões → 4,05 +	
6 botões → 12,15 +	
7 botões → 36,45 +	
8 botões → 109,35 +	
9 botões → 328,05 +	
10 botões → 984,15 +	
	R: Ela pagará (5476.2) 14762 R\$
	No casaco.

Nessa atividade, Gustavo calculou e recalculou termo a termo na CI, porém, a soma dos termos ele calculou mentalmente, chegando ao valor correto Ela pagará 1476.2 que se percebe que ele riscou e trocou por “14762 R\$”. Assim, o único que entendeu a questão feita, registrou o valor do casaco sem especificar os 20 centavos.

O objetivo dessa atividade foi proporcionar aos sujeitos realizar a soma dos dez termos de uma PG, implícita, para que fosse possível encontrar uma solução para o problema proposto.

Esperava que um deles tivesse recorrido à escrita do tipo 1º botão 0,05; 2º botão $0,05 \times 3$; 3º botão $(0,05 \times 3) \times 3, \dots$ para poder chegar no 10º botão $0,05 \times 3^9$.

Para a resolução dessa atividade D9 mencionou realizar a soma dos valores dos botões para calcular o valor do casaco, porém, apenas Gustavo a realizou.

Em relação ao uso da calculadora, os grupos a utilizaram de forma a facilitar os cálculos para encontrar o valor de cada um dos botões, conforme constatado por Silva, Loureiro e Veloso (1989).

2ª atividade

Esta atividade teve por objetivo proporcionar aos sujeitos a observação de uma sequência, para que fosse possível realizar a soma de seus 10 primeiros termos, e levar os sujeitos a generalizar a soma de seus n termos. A figura 113 apresenta a 2ª atividade dessa sessão.

Figura 113 - 2ª atividade da 3ª sessão.

Observe a sequência abaixo:

a_1	3
a_2	12
a_3	48
...	...
a_{10}	
...	...
a_n	
...	...

- a) Qual é a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência?
b) Qual seria a soma dos n termos?

A filmagem de **D8** apresenta o seguinte diálogo entre João e Cristian, após João ter lido o enunciado da atividade em voz alta:

João: - *Olha do um ao três. Aqui, ó, está multiplicando? ó, por quatro.*

Cristian: - *Aqui?*

João: - *Sim. Três vezes quatro?*

Cristian: - *(calcula na CI) Doze.*

João: - *Oh, observando a tabela... aqui é três vezes quatro, doze. Aqui, vezes..... a_5 ...*

Cristian: - *Dez.*

João: - *Dez é qual? ... A soma dos dez primeiros termos da sequência.*

Cristian: - *Então faz.*

João: - *A gente vai ter que achar todos, oh. Sabe por quê? Assim... dez primeiros termos.*

Cristian: - *Então faz, ó.. é quarenta e oito multiplicado por dez.*

João: - *Vai fazendo aí...quarenta e oito vezes quatro.*

Cristian: - *Cento e noventa e dois.*

João: - *Hum?*

Cristian: - *Cento e noventa e dois. Vezes quatro?*

João: - *Aqui.*

Cristian: - *Cento e noventa e dois vezes quatro ... setecentos e sessenta e oito.*

João: - *Vezes quatro.*

Cristian: - *Três mil e setenta e dois.*

João: - *Aí você pode.... vamos achar a fórmula primeiro, vai.... Três vezes quatro, doze. Doze vezes quatro... (após um tempo)setecentos e sessenta e oito.... (pega a CI de Cristian) Tem que achar a fórmula vai... vamos achar a fórmula.... Vezes quatro... a_n seria , a_1 vezes quatro..... três vezes quatro.... ah, achei! O a_n é igual a a_1 vezes quatro elevado a n menos um. O a_{10} vai ser então... a_{10} vai ser o a_1 vezes quatro... aqui é nove. Vê aí quatro, vezes quatro... vezes quatro, vezes quatro... Dezesesseis vezes dezesesseis.*

Cristian: - *O quê?*

João: - *Faz aí dezesesseis vezes dezesesseis.*

Cristian: - *(faz na CI) Duzentos e cinquenta e seis.*

João: - *Duzentos e cinquenta e seis vezes... duzentos e cinquenta e seis.... vezes quatro.... Tá. Qual é a soma dos dez primeiros termos dessa sequência? Seria aqui. Qual seria a soma dos n termos? Coloca assim a , vai ter que somar tudo... Seria...seria...três, quatro, cinco, seis, sete, oito,... então tá.... Oh, então a , a soma dos dez primeiros termos... tem que somar tudo. Oh, o três, o quatro vai ter que somar com o dois... duzentos e cinquenta e seis vezes três ... Acho que vai dar certo, vamos fazer o a_4 , fazer aqui, ó.... aqui atrás. Aqui (escreve no protocolo e realiza os cálculos na CI) Agora você vai fazer o a_5 . Vai, faz ó, $a_5...a_5$ é igual a a_1 vezes quatro elevado a quatro. Então pera aí vai ser sessenta e quatro vezes quatro....Duzentos e cinquenta e seis. Ah ali é quatro vezes quatro. Ó... seria duzentos e cinquenta e três vezes três.*

Cristian: - *Vezes três.*

João: - *Vezes três. Igual setecentos e sessenta e oito.*

Cristian: - *Setecentos e sessenta e oito.*

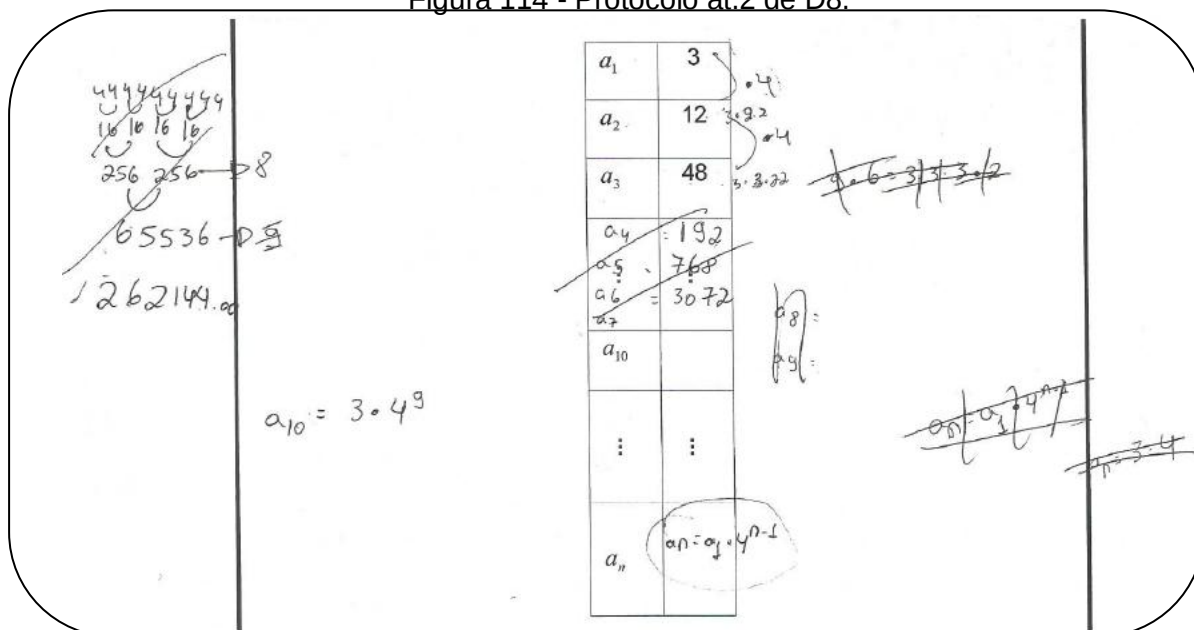
João: - *a_7 vamos fazer $a_7... a_7$ é igual a três vezes quatro elevado a seis. Elevado.... Deixa eu ver (faz cálculo na CI) Coloca aí o resultado. Doze vinte e oito...Igual a doze vinte e oito, oito. Agora a_8 é igual a três vezes quatro elevado a sete. (faz*

cálculo na CI) Quarenta e nove, quinze, dois. O a_9 é igual a dezenove, meia, meia, zero, oito. Isso a_{10} , coloca aí. (faz cálculo na CI) Setenta e oito, meia, quatro, trinta e dois. Agora vamos somar todos. Agora... A soma dos dez primeiros termos da sequência é....

Cristian: - Dez, quarenta e oito, cinquenta e sete, cinco.

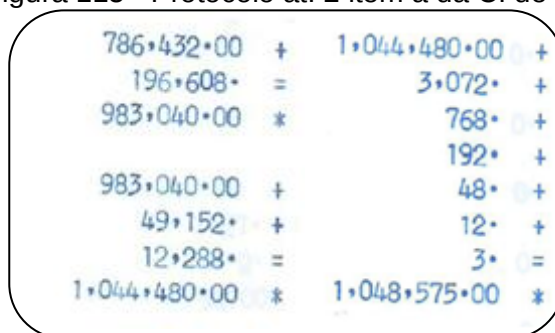
Ao observar o diálogo percebo que, mais uma vez, João assumiu uma postura de líder da dupla D8 e Cristian apenas acatou o que o companheiro falava. A figura 114 apresenta os registros realizados pela dupla, durante a resolução da atividade, antes de registrar a resposta para o item a.

Figura 114 - Protocolo at.2 de D8.



Esse protocolo apresenta os registros de D8, em busca da expressão do termo geral da sequência apresentada. Após calcular o valor de cada um dos termos na CI, a dupla realizou os seguintes cálculos conforme consta na figura 115.

Figura 115 - Protocolo at. 2 item a da CI de D8.



E em seguida, D8 registrou o que consta na figura 116 para o item a.

Figura 116 - Protocolo at. 2 item a de D8.

$a_4 = a_1 \cdot 4^{4-1} =$
 $= 3 \cdot 64 = 192$
 $a_5 = a_1 \cdot 4^4 = 64 \cdot 3 = 192$
 $a_7 = 3 \cdot 4^6 = 12288$
 $a_8 = 3 \cdot 4^7 = 49152$
 $a_9 = 196608$
 $a_{10} = 786432$

a) A soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é 1048575.

Para o item b, João seguiu:

João: - Posso ver aqui?... Isso. Qual seria a soma dos n termos? A somaa soma dos n termos é a fórmula que a gente achou. (escreve no protocolo) Acabou.

A figura 117 apresenta a resposta registrada por João para o item b.

Figura 117 - Protocolo at. 2 item b de D8.

b) A soma dos n termos é $a_n = a_1 \cdot 4^{n-1}$

É interessante notar que D8 realizou os cálculos para encontrar a soma dos 10 termos, afirmando a Cristian que era para “somar todos”. Porém, no item b, a dupla indicou, no lugar da expressão algébrica da soma dos n termos, a expressão algébrica encontrada para indicar o n ésimo termo da sequência.

A filmagem de **D9** apresenta mostra o seguinte diálogo entre a dupla após ler o enunciado em voz baixa:

Roberto: - Três vezes quatro é doze. Ó, é PG aqui oh. É PG. Ó,, vezes quatro, ó.
 Danilo: - Tenta achar aqui.
 Roberto: - Deixa eu achar uma coisa.
 Danilo: - Tem que achar a fórmula.
 Roberto: - Vezes doze....Quanto é oito vezes quatro mesmo? Trinta e poucos.
 Danilo: - Trinta e dois.
 Roberto: - É, eu erre aqui. Hum deixa pra lá, eu vou fazer o item a.

É interessante notar que Roberto percebeu que a sequência era uma PG com razão 4. A figura 118 mostra os registros de Roberto, realizados durante esse diálogo.

Figura 118 - Protocolo at. 2 de D9.

a_1	3
a_2	12
a_3	48
$\vdots$	$\vdots$

Após o que, Roberto leu o item a em voz alta e D9 dialogou:

Danilo: - Você vai fazer a_1, a_2, a_3 ?

Roberto: - Até seis, sete, oito, nove e dez.

Danilo: - Nossa fazer tudo isso assim é fogo.

Roberto: - Faz assim, oh. $a_1, a_2, a_3, \dots$ pronto a_{10} . (registra os termos)
 a_1 é três, vezes quatro é doze. Doze vezes quatro é quarenta e oito e parei por aí. Faz quarenta e oito vezes quatro por gentileza.

Danilo: - Tem que achar a fórmula.

Roberto: - Faz quarenta e oito vezes quatro.

Danilo: - Setecentos e ... (faz na CS)

Roberto: - Setecentos!

Danilo: - Quarenta e oito...

Roberto: - Vezes quatro.... oh, é só fazer vezes...

Danilo: - Eu sei mas...

Roberto: - Cento e noventa e dois?

Danilo: - Isso.

Roberto: - Quanto deu?

Danilo: - Trinta mil...

Roberto: - Quanto?!

Danilo: - Três mil e setecentos.

Roberto: - Três mil e setenta e dois. Vezes quatro.... Vamos fazer essa aqui bem lenta que eu não quero que acabe essa aula.

Danilo: - Doze mil duzentos e oitenta e oito.

Roberto: - Vezes quatro.

Danilo: - Quarenta e nove mil cento e cinquenta e dois.... cento e noventa e seis mil seiscentos e oito.

Roberto: - A última, por favor.

Danilo: - Setecentos e oitenta e seis mil quatrocentos e trinta e dois.

Roberto: - Pronto, acabou.... A soma dos dez primeiros termos... então faz sete oito meia quatro três dois mais um nove meia... deixa que eu vou fazer. Daqui que eu vou somando. (faz na CS) Mais.... mais.... mais... agora?... Acabou. Nossa cara mentira que deu isso, um milhão?

Danilo: - Um milhão quarenta e oito mil quinhentos e setenta e cinco.

Roberto: - Pera aí. A soma dos dez primeiros termos é ...

Danilo: - Imagina fazer tudo isso a mão?

Roberto: - Ia ser muito show.

Danilo: - Tá.

Roberto: - *Opa, coloquei ponto aqui. Ah, ponto final. Finge que é ponto final. Pronto.*

Danilo: - *Pronto?*

Roberto: - *Não, falta a B.*

Vale ressaltar que Roberto parecia estar gostando de participar das sessões, pois disse a Danilo que não queria que essa “aula” acabasse. A figura 119 mostra o registro de D9 ao resolver o item a.

Figura 119 - Protocolo at. 2 item a de D9.

Handwritten work for item a of D9:

Calculations for a_1 to a_{10} :

- $a_1 = 8$
- $a_2 = 32$
- $a_3 = 128$
- $a_4 = 512$
- $a_5 = 2048$
- $a_6 = 8192$
- $a_7 = 32768$
- $a_8 = 131072$
- $a_9 = 524288$
- $a_{10} = 2097152$

Sum calculation: $R: A \text{ soma dos 10 primeiros termos é } 1048575.$

Os protocolos de D9 informam que a dupla encontrou o valor de cada um dos 10 termos da sequência e por fim realizou a soma. Em seguida, Roberto leu em voz alta o item b, e a dupla estabeleceu o seguinte diálogo:

Roberto: - *Beleza, qual seria a soma dos n termos?*

Danilo: - *É o que a gente colocou.*

Roberto: - *É o resultado de n ué. Como é que eu vou responder? Vamos ver. ... a_n vezes quatro.*

Danilo: - *a_n é igual a n elevado a quatro.*

Roberto: - *a_n vezes quatro.... dezesseis. Elevado ao quadrado, dezesseis vezes dezesseis.... hum....*

Danilo: - *O que foi?*

Roberto: - *Eu não sou bom nisso.*

Danilo: - *Nisso o que?*

Roberto: - *Pra achar a fórmula. Tem fórmula pra PG? Tem?*

Danilo: - *Lógico.*

Roberto: - Tem? Vai vê eu to perguntando demais, oh. Me ajuda aqui. A professora ensinou a fórmula, a fórmula de qualquer e a gente não sabe fazer isso? ... Oh, a_6 , seis vezes quatro ...

Danilo: - n mais três...

Roberto: - Não, por que vai ser n mais três?

Danilo: - Porque um tem que dar um. O n o primeiro tem que dar dois.

Roberto: - Mas tá...então é três vezes um.... então é quatro vezes um menos um, três. Aí quatro vezes dois menos um...

Danilo: - Oh, eu acho que essa é a fórmula a_n vezes um mais um mais dois vezes quatro. a_n é um . a_1 , um mais um vezes quatro.

Roberto: - Mas aí é 3 não é quatro. Três vezes quatro é doze.

Danilo: - Que?

Roberto: - Doze aqui ...

Danilo: - Não.

Roberto: - Empresta aqui, empresta aqui. (pega a CS) Então vamos tentar achar o a_3 , vai. a_3 é o que?

Danilo: - Não, é mais fácil você achar o primeiro.

Roberto: - Mais dois vezes quatro é igual...

Danilo: - Tá certa sua conta.

Roberto: - Não, é. Mas tem que achar pra geral, o termo geral.

Danilo: - Não, eu achei pra doze.

Roberto: - Ah, é muito fácil não precisa de fórmula, oh.... Aqui tá perguntando qual é a soma dos n termos? A soma dos n termos é o resultado de a_n qualquer. Oh é os resultados somados... ah são todos os resultados de a_n qualquer. Não é oh, qual a soma dos n termos? ... é a soma dos resultados dos n s quaisquer. De qualquer n , não é?

Danilo: - Acho que é.

Roberto: - Então vamos por aqui, oh. Não precisa de fórmula!

Danilo: - Tá, deixa eu ler.

Roberto: - Tá, então vezes quatro, o que é vezes quatro?

Danilo: - Ah deixa assim.

Roberto: - Pensa um pouco só. Me empresta. (pega o protocolo) Tá, a_3 é quarenta e oito e tá multiplicado de quatro em quatro. a_3 vezes quatro é doze. Doze vezes quatro, quarenta e oito. Ao quadrado... deixa eu já sei, eu acho... a_{10} é igual a ... sei lá... vezes quatro a nona. É vai saber né... Pera aí, quatro vezes quatro vezes... Deu isso aqui. E a_{10} é ? Tem alguma coisa errada. Pera aí... é vezes 10... Errei tudo, errei tudo! É não tá dando certo.

Danilo: - Eu não entendi a pergunta, velho.

Roberto: - Qual seria a soma dos n termos.

Danilo: - Não, pra mim tá igual. Como assim?

Roberto: - n termos, a professora disse assim que n é a posição e a_n é termo. Então, termos é isso... a soma de n termos pera aí, é a posição...

Danilo: - (rele o item a) Tá certo, põe de qualquer jeito. Por mim ainda tá igual.

Roberto: - A soma dos n termos é o que? É a soma dos n termos ... esqueci a resposta cara. A soma dos n termos é o resultado dos a_n . (bate o sinal das 14h50) Ai caramba, pera aí vai acabar a aula!

Pesquisadora: - Se vocês quiserem ficar podem terminar.

É possível observar nesse diálogo que, para encontrar a soma dos n termos da sequência, a dupla tentou encontrar a expressão do n ésimo termo.

Vale observar que no momento em que deu o sinal Roberto ficou preocupado, pois achou que não ia dar tempo de terminar.

Após a confirmação de que poderiam terminar a atividade, D9 seguiu dialogando:

Roberto: - *Tá bom. Qual é a soma dos n termos? A soma desses n termos é o resultado dos a_n .*

Danilo: - *Mas tipo, então é a mesma coisa da primeira.*

Roberto: - *Da primeira é a soma dos 10 primeiros termos e aqui é a soma dos n termos quaisquer. A soma dos n termos é o resultado dos a_n juntos. Põe isso, não tem como achar a fórmula. Na verdade tem só que agente não sabe achar a fórmula.*

Danilo: - *Os n termos seria o que? Os n termos seriam o três... tipo.... não é?*

Roberto: - *n termos é ... a soma... é n termos é isso.*

Danilo: - *n termos é oh, o a_n são n termos. São n termos...*

Francisco: - *É oh, e aqui tá perguntando qual é a soma dos n termos. Seria o que, o resultado dos a_n juntos. Então é por a_n , é resultado do a_n juntos.*

Danilo: - *É a soma dos resultados ...*

Roberto: - *É a soma dos resultados de a_n , pronto. É isso. Cara eu falei isso a aula inteira e você ...*

Danilo: - *É do mesmo jeito tá errado isso velho.*

Roberto: - *Então ajuda a fazer do seu jeito.*

Danilo: - *Eu não sei fazer.*

Roberto: - *Então deixa eu fazer como eu sei por que aí a gente não se dá mal, né?*

Danilo: - *A gente vai se dar mal do mesmo jeito, se errar ou não fizer... Oh deixa eu entender. n termo é o 3.*

Roberto: - *É.*

Danilo: - *Então é a mesma coisa que o outro, velho.*

Roberto: - *É, seria. Só que aqui é uma outra pergunta que a gente tem que responder.*

Danilo: - *É.*

Roberto: - *É.*

Danilo: - *Então põe aí, cara.*

Roberto: - *Tá. As somas ... Então é isso, ó. A soma dos n termos é a soma dos resultados dos a_n juntos.*

Danilo: - *Então, beleza, terminou. Professora terminamos!*

Vale observar que a dupla percebeu que deveria encontrar uma “fórmula”, uma expressão algébrica, para indicar a soma dos n termos, porém desistiu de encontrá-la e registrou o que consta na figura 120.

Figura 120 - Protocolo at. 2 item b de D9.

b. A soma dos n termos São os resultados dos an juntos.

Após observar os protocolos de D9 em relação ao item b, percebo que a resposta apresentada pela dupla ao item, vai ao encontro da afirmação de Orton e Orton (1999) de que mais alunos informam as regras de forma oral do que as expressam na forma escrita.

Gustavo, após ler o enunciado em voz baixa, realizou alguns cálculos na CI, conforme mostra a figura 121.

Figura 121 - Protocolo at.2 item a da CI de I2.

		3,072. x		
		4. =		
		12,288. *		
48. x		12,288. x	3. +	
4. =		4. =	12. +	
192. *		49,152. *	48. +	
			192. +	
192. x		49,152. x	768. +	
4. =		4. =	3,072. +	
768. *		196,608. *	12,288. +	
			49,152. +	
768. x		196,608. x	196,608. +	
4. =		4. =	786,432. +	
3,072. *		786,432. *	0. 0	

Na figura 121, é possível observar que Gustavo registrou os termos na CI para calcular a soma, porém não a efetuou.

Gustavo realizava os cálculos na CI, e reproduzia os resultados dos cálculos no papel. Esses registros constam na figura 122.

Figura 122 - Protocolo at. 2 item a de I2.

A) (3, 12, 48, 192, 768, 3072, 12.288, 49.152, 196.608, 786.432)

R: A soma dos 10 primeiros termos é 3052670

A filmagem de Gustavo mostra que, para calcular a soma dos 10 termos ele primeiro registrou os termos na CI e depois calculou mentalmente, como já havia realizado na 1ª atividade dessa sessão. Isso pode ter sido a causa de o valor encontrado não ser exatamente o correto.

Gustavo seguiu observando a sequência apresentada, apontando com a caneta para os termos e em seguida registrou o que mostra a figura 123.

Figura 123 - Protocolo at. 2 item b de I2.

B) $a_n = 4n \rightarrow a_n = 4n + n$

Não foi possível interpretar a resposta dada por Gustavo ao item b, pois essa resposta não se baseou em nenhum registro dos protocolos.

O objetivo dessa atividade foi proporcionar aos sujeitos a observação de uma sequência, para que fosse possível realizar a soma de seus 10 primeiros termos, e levar os sujeitos a generalizar a soma de seus n termos.

Para a resolução desta atividade, no item a, os grupos encontraram os 10 primeiros termos da sequência e calcularam a soma. No item b, D9 expressou com suas palavras a soma dos n termos da sequência apresentada. Quanto ao uso da calculadora, os grupos a utilizaram de modo a facilitar os cálculos realizados para encontrar os 10 primeiros termos da sequência, deixando de lado os excessivos cálculos com lápis e papel. É interessante ressaltar que Danilo expressou explicitamente a utilidade da calculadora ao comentar: “Imagina fazer tudo isso a mão?”.

3ª atividade

Esta atividade teve por objetivo fazer com que os sujeitos encontrassem a soma dos quinze primeiros termos de uma PG, implícita, para então generalizar e encontrar a soma de seus n termos. A figura 124 apresenta a 3ª atividade dessa sessão.

Figura 124 - 3ª atividade da 3ª sessão.

Thiago recebeu um *email* sobre o desaparecimento de uma menina. Neste *email* o pai da criança pedia para cada pessoa que lesse o *email* repassá-lo para outras cinco pessoas, de forma a aumentar a cada dia o número de pessoas a ver a foto da menina, até que alguém reconheça a criança e o pai a encontre. Porém, para que a corrente dê certo, cada pessoa só poderá enviar os cinco *emails* no dia seguinte em que recebeu.

- a) Se Thiago recebeu hoje o *email* e repassar amanhã para cinco novas pessoas, no 15º dia quantas pessoas terão recebido o *email*?
- b) Como pode ser apresentada a quantidade de pessoas que receberam o *email* após n dias?

A filmagem da dupla **D8** mostra o seguinte diálogo da dupla, ao realizar essa atividade:

Cristian: - *É a última?* (se refere à pesquisadora)

Pesquisadora: - *Sim.*

Cristian: - *Ai, cansei.*

João lê o enunciado em voz alta.

Cristian: - *É só fazer quinze dividido por cinco.*

João: - *Não, ó. (lê o enunciado novamente). Se todo mundo for mandando cinco vezes cinco vezes cinco, se for quinze, cinco vezes cinco vezes cinco. Aí tem que fazer cinco vezes, ó...*

Cristian: - *Eita!*

João: - *Dá tudo isso.*

Cristian: - *Eita desgraça!*

João: - *Dá quinze vezes.*

Cristian: - *Então quinze vezes cinco!*

João: - *Não é quinze vezes cinco. É elevado a cinco... É, ó.. Assim, ó. Não é quinze vezes cinco. É quinze...*

Cristian: - *Elevado a cinco.*

João: - *Faz aí, ó. Cinco vezes cinco.*

Cristian: - *Vinte cinco.*

João: - *Cinco vezes cinco de novo.*

Cristian: - *Ué, cento e vinte e cinco?*

João: - *Zera aí. Faz vinte e cinco vezes vinte e cinco.*

Cristian: - *Três mil cento e vinte e cinco.*

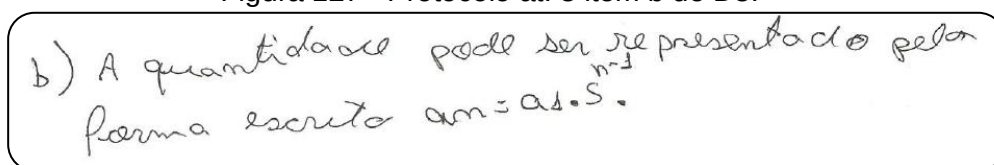
João: - *Hum?! Dá aqui. Ó...seiscentos e vinte e cinco, ó...seiscentos e vinte e cinco, seiscentos e vinte e cinco, seiscentos e vinte e cinco. (registra no protocolo)*

Cristian: - *Nossa!*

Após analisar os protocolos de D8, pude observar que o valor indicado pela dupla como o número de pessoas que terão recebido o e-mail após 15 dias, é o resultado de 5^{15} , pois interpreto que pensaram no 1º dia como 5 emails ao invés de $1 = 5^0$.

João, após ler o item b em voz alta, prosseguiu dizendo a Cristian: “A quantidade... Toma escreve aí: a quantidade pode ser representada pela forma escrita, pela forma a_n é igual a a_1 vezes cinco elevado a n menos um. Acabou”. A figura 127 mostra o registro da dupla para o item b.

Figura 127 - Protocolo at. 3 item b de D8.

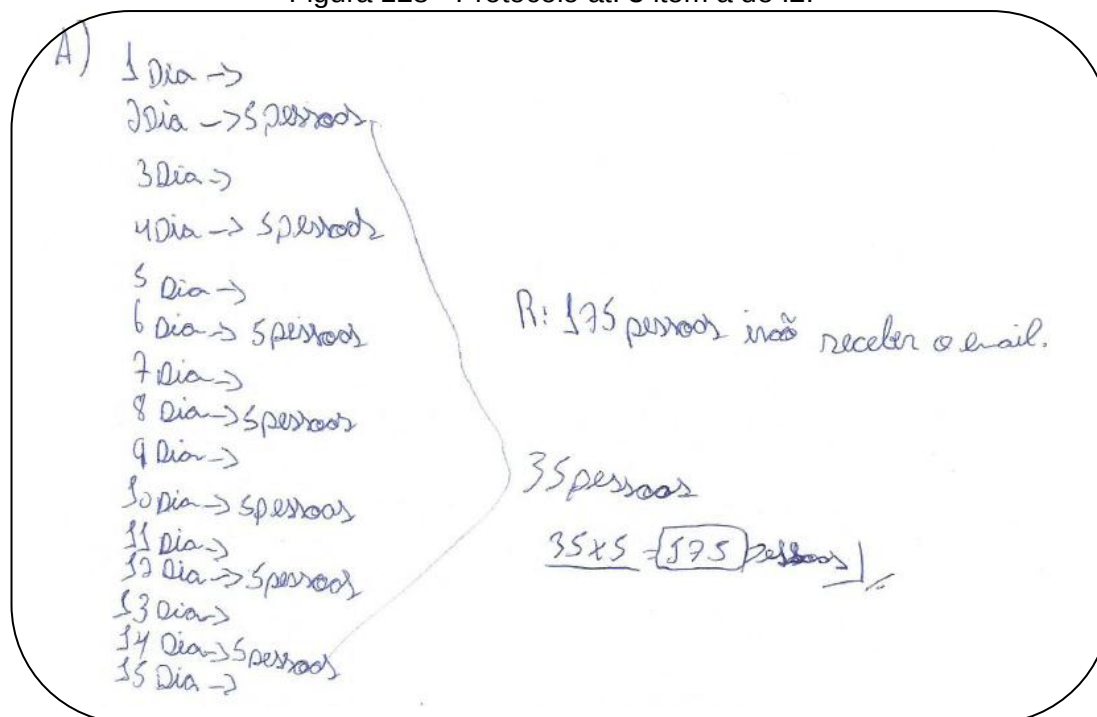


Neste item, assim como no item b da 2ª atividade dessa sessão, D8 registrou no lugar da soma dos n termos da sequência, a expressão do termo geral.

É nítida a sensação de cansaço dos dois elementos da dupla, o que deve ter contribuído para a falta de atenção sobre a questão proposta, confundindo a forma do termo geral dessa PG com a soma de seus termos.

Gustavo, após ler o enunciado em voz baixa, registrou no protocolo o que consta na figura 128.

Figura 128 - Protocolo at. 3 item a de I2.



Após observar este protocolo, percebi que Gustavo registrara que cinco pessoas por vez recebem o e-mail, um dia sim outro não. Tal registro dá indícios de que, ao interpretar o enunciado, o sujeito se equivocou, e o interpretou da seguinte maneira: apenas cinco pessoas devem receber o e-mail por vez, e se as pessoas receberam o e-mail hoje, as próximas cinco pessoas só receberão o email daqui a dois dias.

Dessa forma, Gustavo realizou os cálculos como se a regularidade apresentada fosse a mesma da sequência cíclica, 0; 5; 0; 5; 0;..., ou seja, enviar o e-mail para 5 pessoas a cada dois dias, ao invés de multiplicar por 5 o número de pessoas de um dia para encontrar o número delas no próximo.

Após a realização do item a, o sujeito realizou o seguinte cálculo na CI, como apresenta a figura 129.

Figura 129 - Protocolo at. 3 item a da CI de I2.

35.	x
5.	=
175.	*
0.	C

Esse protocolo mostra que Gustavo utilizou a CI para validar seu cálculo. A filmagem mostra que ele seguiu lendo em voz baixa o item b, e realizava os cálculos na CI enquanto registrava no protocolo o que segue na figura 130.

Figura 130 - Protocolo at.3 item b de I2.

Handwritten notes showing calculations and formulas:

- Vertical list of numbers: 56, 48, 40, 32, 24, 16, 8, 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56.
- Circled number: 35
- Calculation: $30 + 60 + 50 + 40 + 30 + 20 + 10$
- Formulas:
 - $N = 5 \text{ pontos}$
 - $N = 5, N = 6$
 - $N = 3N + 7$ (circled)
 - or $N = 5N - 5$
- Sum at top right: $42 + 36 + 30 + 24 + 18 + 12 + 6$

Neste item, Gustavo registrou vários cálculos, aos quais não consegui dar sentido.

É preciso observar que a dupla **D9** não realizou essa atividade por ter esgotado o tempo com as primeiras duas atividades.

Para essa atividade, o objetivo foi fazer com que os sujeitos encontrassem a soma dos quinze primeiros termos de uma PG, implícita, para então generalizar e encontrar a soma de seus n termos.

Nessa atividade, no item a, D8 indicou o número de pessoas que terão recebido o e-mail após 15 dias como o resultado de 5^{15} ao invés de 5^{14} . Gustavo, por sua vez realizou os cálculos como se a regularidade apresentada fosse a mesma da sequência cíclica, 0; 5; 0; 5; 0;..., ao invés de uma PG de razão 5. No item b, D8 registrou no lugar da soma dos n termos da sequência, a expressão do termo geral e Gustavo como já informado, registrou vários cálculos aos quais não consegui dar sentido.

Em relação ao uso da calculadora, no item a, D8 a utilizou para realizar os cálculos, e Gustavo para validar seu calculo realizado no protocolo. No item b, Gustavo a utilizou para realizar alguns cálculos ao tentar encontrar a expressão algébrica da soma dos n termos da PG.

Considerações sobre a 3ª sessão

O objetivo dessa sessão foi propiciar aos sujeitos de pesquisa a construção da expressão algébrica da soma dos termos de uma PG finita com o auxílio da calculadora.

Nessa sessão, das duas duplas e um sujeito, a dupla D9, no item b da 2ª atividade, foi a única que expressou com suas palavras a soma dos n termos da sequência. Porém, nenhum dos grupos registrou a expressão relativa à soma dos n termos das sequências apresentadas nas três atividades da sessão, o que, mais uma vez, evidenciou que os alunos não estavam acostumados a expressar as regularidades por meio de expressões algébricas.

Dessa forma, com certeza fui ambiciosa ao imaginar que os alunos conseguiriam chegar a uma expressão do tipo: $S_n = \frac{a_1 \times (1 - q^n)}{1 - q}$, S_n a soma dos n termos da PG e q a razão, pois, para encontrar a soma dos termos de qualquer PG finita é necessário utilizar artifícios matemáticos.

Partindo da estratégia utilizada pelos grupos na 1ª e na 2ª atividade dessa sessão, calcular primeiro cada um dos termos da sequência para depois realizar a soma, sigo mostrando os artifícios matemáticos que deveriam ser utilizados pelos sujeitos para que encontrassem a expressão algébrica dos n termos de uma PG finita.

Sabendo que a soma nos n termos de uma PG finita pode ser escrita como: $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}$, os alunos deveriam multiplicá-la pela razão (1º artifício), $q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + \dots + a_1 \cdot q^n$, após o que realizariam a seguinte subtração (2º artifício): $S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$, encontrando assim, a expressão: $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$.

Portanto, para encontrar a expressão algébrica relativa ao n ésimo termo de qualquer PG finita, é necessário utilizar artifícios matemáticos, cuja utilização

considero improvável, por alunos que não estavam acostumados a expressar as regularidades por meio de expressões algébricas.

Quanto ao uso da calculadora, nessa sessão ela foi utilizada pelos grupos para facilitar os cálculos realizados durante as três atividades e para validar as conta realizada por Gustavo ao item “a” da 3ª atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa teve como objetivo:

Investigar se e como estudantes do Ensino Médio observam regularidades e as generalizam, construindo expressões relativas às Progressões Geométricas com o recurso das calculadoras simples ou com impressora.

As questões norteadoras dessa pesquisa foram:

- **O aluno do ensino médio, não familiarizado com a generalização, uma das principais características do pensamento algébrico, pode ser induzido a construir expressões relativas às Progressões Geométricas?**
- **O uso da calculadora pelo aluno contribui para a percepção das regularidades e construção de expressões relativas às Progressões Geométricas?**

Para atingir tal objetivo e responder a essas questões, realizei um estudo de caso etnográfico com alunos voluntários da 1ª série do Ensino Médio, de uma Escola Estadual da cidade de São Paulo.

De acordo com a metodologia utilizada, e considerando o número de voluntários que participaram da pesquisa, enfatizo que este trabalho não teve caráter generalizador, porém, por ser um estudo qualitativo, pode sugerir que seus resultados sejam analisados em outras escolas.

A coleta de dados foi feita em três sessões, ocorridas com intervalo de uma semana entre elas. A 1ª sessão foi destinada à familiarização com a calculadora e à observação de regularidades em sequências; a 2ª sessão destinou-se à realização de atividades relativas à construção de expressões dos termos gerais de determinadas progressões geométricas e a 3ª sessão visou à realização das

atividades relativas à construção de expressões da soma dos termos de determinadas progressões geométricas finitas.

Para coletar os dados necessários para a análise da introdução da calculadora no estudo de PG, e seu possível efeito no processo de construção de expressões algébricas relativas às mesmas, baseei-me, sobretudo, nas ideias de Devlin (2002), Mason (1996a e 1996b), Orton e Orton (1999), Silva, Loureiro e Veloso (1989) e Abelló (1997).

É importante destacar a pertinência do uso da calculadora com impressora como instrumento de coleta de dados, pois, os papéis impressos pela CI muitas vezes revelaram as “estratégias” utilizadas pelos sujeitos durante a resolução das atividades.

Durante a aplicação do instrumento de pesquisa pude perceber que os alunos estavam motivados para participar dos encontros, pois as sessões ocorreram fora do período em que estavam matriculados e, até quando haviam sido liberados antes do final de seu período escolar regular, fato ocorrido nos dias marcados para as segunda e terceira sessões, eles compareceram antes do horário combinado, mostrando-se dispostos a realizar as novas tarefas.

Considero importante ressaltar o interesse dos alunos em resolver as atividades propostas. Acredito que esse fato tenha ocorrido, pois, de acordo com Mason (1996a), o trabalho com padrões provoca nos alunos uma sensação de entusiasmo. O diálogo entre Roberto e Danilo ao final da 2ª atividade da 2ª sessão, Roberto: “Matemática é mais fácil, né?” e Danilo responde: “É.”, confirma a ideia de Devlin (2002) de que o trabalho com padrões os motiva e muda a forma de eles pensarem sobre a Matemática, e especificamente sobre a Álgebra.

Outro fator importante para tal interesse foi a disponibilização da calculadora para a realização das atividades, o que evidenciou, assim como nas pesquisas de Ponte (1989), Abelló (1997), Selva e Borba (2010), Bianchini e Machado (2010), Pizysieznig (2011) e Soares (2012) entre outros, que a calculadora foi um instrumento motivador para os alunos, na realização das atividades.

Durante 1ª sessão, os alunos demonstraram facilidade para indicar o próximo termo de uma sequência cíclica, e souberam estabelecer uma estratégia para encontrar os termos mais distantes do último termo apresentado.

Os alunos construíram uma sequência numérica, segundo uma dada lei explícita de formação, o que possibilitou evidenciar que souberam interpretá-la e registrar um caso particular, o que constitui o processo inverso a observar e generalizar, processo esse também considerado importante na questão de generalização de padrões, conforme Mason (1996a) sugere: observar a generalidade para encontrar a particularidade.

Em relação à caracterização de sequências numéricas no quesito da determinação de quais delas eram PA ou PG, os voluntários tiveram dificuldade em interpretar a explicação dada. Poucos perceberam a característica de uma PA, o que frustrou minha previsão de que, como os sujeitos já haviam iniciado o estudo de PA, indicariam com facilidade as sequências com essa característica.

Posso pensar que talvez eu não tenha sido clara na explicação das características de cada uma. No entanto, os voluntários tiveram facilidade em relação à caracterização das sequências como crescentes e decrescentes.

O registro de uma sequência numérica que, no caso, era uma PA, foi feito pelos voluntários, a partir da lei de formação de forma implícita, sem que eles tivessem apresentado dificuldade para isso.

A calculadora, durante a primeira sessão, foi utilizada pelos voluntários como um instrumento para realizar os cálculos e para validar seus próprios cálculos realizados no papel e/ou mentalmente.

Na 2ª sessão, a maioria dos voluntários (todas as duplas) observou o padrão apresentado pelas PG, o que os levou a encontrarem os próximos termos das sequências e estabelecer diferentes estratégias para chegar aos termos mais distantes dos últimos apresentados.

Três das quatro duplas perceberam a relação entre cada figura e sua ordem na sequência da 2ª atividade, e generalizaram essa relação, expressando com suas

palavras o número de triângulos pretos relativos à figura do fractal correspondente ao enésimo termo.

A quarta dupla, por sua vez, antes de responder quantos triângulos pretos existiam nas figuras a_6 , a_7 , a_8 , e a_9 , encontrou uma expressão para o enésimo termo, e só depois calculou as respostas; ou seja, primeiro generalizou a relação apresentada, encontrando a expressão do termo geral da PG, para depois encontrar os próximos termos da sequência. Essa mesma dupla, na 3ª e última atividade não usou a mesma estratégia, e seguiu a estratégia das outras duplas, respondendo as três primeiras questões da atividade coerentemente, para, no final, dar como resposta à questão “Como pode ser representada a relação entre a área do lote nº 1 e as demais áreas?”, pela regra explicitada no enunciado da atividade “multiplicando sempre o número anterior por 2” ou algo semelhante.

O voluntário que ficou sozinho nessa sessão estava fazendo o primeiro ano pela terceira vez, e limitou-se a dar respostas a questões que não envolviam um termo geral n explicitamente. Imagino que o fato de ele já ter “visto” progressões PA e PG anteriormente possa ter influído nesse fato, pois pode ter-se lembrado de que havia “fórmulas”, mas por não se lembrar delas, desistiu de tentar construir as expressões relacionadas. Essa suposição se baseia em fato ocorrido e comprovado em situação semelhante enfrentada por um sujeito de pesquisa de Carvalho (2008).

Em relação à expressão do enésimo termo da sequência, apenas uma dupla a estabeleceu e expressou, com suas palavras, a relação entre um termo qualquer seu antecessor e a relação entre um termo qualquer e seu sucessor, confirmando o que afirmam Orton e Orton (1999), de que grande parte dos alunos descrevem as regras de padrões numéricos, comparando os termos, com relação à diferença entre eles.

As análises dessa sessão indicaram que os voluntários não estavam familiarizados com o processo de registrar padrões observados em determinadas sequências por meio de uma expressão algébrica. Apenas uma dupla construiu a expressão algébrica do enésimo termo de uma das sequências apresentadas.

Assim já posso responder à primeira questão norteadora desta pesquisa:

- **O aluno do ensino médio, não familiarizado com a generalização, uma das principais características do pensamento algébrico, pode ser levado à construção de expressões relativas às Progressões Geométricas?**

— *Sim, é possível levar o aluno do Ensino Médio, não familiarizado com a generalização, a construir uma expressão para o n ésimo termo de uma PG.*

A calculadora, nessa sessão, foi utilizada pelos grupos para a realização dos cálculos necessários para encontrar os termos solicitados nas atividades.

Para a 3ª sessão, à qual compareceram cinco dos nove voluntários esperados, com certeza fui ambiciosa ao imaginar que os sujeitos conseguiriam chegar à expressão da soma dos n termos de uma PG finita. Essa afirmação é justificada pelo resumo que segue da análise da sessão.

Na 1ª atividade, os grupos, primeiramente, encontraram o valor de cada termo para depois responderem qual o preço do casaco, ou seja, a soma dos 10 termos da sequência dada implicitamente. Das duas duplas, uma mencionou o fato de ter que realizar a soma dos termos para encontrar o valor desejado, no entanto, não o fez, dando como preço do casaco o preço do décimo botão. Apenas o indivíduo que nessa sessão ficou sozinho realizou tal soma, tendo encontrado o preço do casaco.

Já na 2ª atividade, todos encontraram os 10 primeiros termos da sequência e calcularam a soma deles.

É interessante notar que o “item a” da 2ª atividade solicitava a mesma coisa que a primeira atividade, no entanto, nele **constava explicitamente** a soma dos termos e na questão anterior o fato estava apenas implícito.

Em relação ao “item b” – “qual seria a soma dos n termos?” três voluntários, uma das duplas e o que estava sozinho, construíram a expressão algébrica, não da soma dos termos mas do n ésimo termo. A outra dupla expressou com suas palavras a soma dos n termos da sequência apresentada.

A 3ª atividade foi feita apenas por uma das duplas e pelo voluntário que estava sozinho nessa sessão. O voluntário interpretou o enunciado de forma

idiossincrática, baseando sua resolução na sequência 0; 5; 0; 5; 0; 5; ..., ao invés da PG 1, 5, 25, 125,... e a dupla se baseou na sequência : 5, 25, 125.... e, baseados nessa PG, fizeram o cálculo do número de pessoas que no 15º dia teriam recebido o e-mail. A dupla registrou a expressão do enésimo termo como resposta ao “item b” ao invés da expressão requerida da soma dos primeiros n termos.

As calculadoras foram utilizadas nessa sessão para facilitar os cálculos realizados em todas as três atividades e, também, para validar seus resultados.

O desempenho dos voluntários quanto à construção da expressão do termo geral de uma PG, mostrou que a maioria deles vivenciou o ato de, a partir da observação de um padrão, descrever por meio de uma expressão algébrica o enésimo termo. No entanto, o mesmo não se deu com a expressão da soma dos termos de uma PG. Neste caso, creio ter sido pretenciosa, por esperar que eles também pudessem chegar a uma expressão, pois, para tal, seria necessário usar artifícios matemáticos, conforme já explicado anteriormente.

Se tivesse tido a oportunidade de realizar as entrevistas, poderia ter esclarecido melhor as estratégias utilizadas por alguns dos voluntários durante a resolução das atividades. Infelizmente, o pouco tempo e a necessidade de aprofundar as análises dos dados para o preparo das entrevistas fizeram com que desistisse desse intento.

Considero que os voluntários participantes da pesquisa conseguiram desenvolver a consciência de generalidade que, segundo Mason (1996a), consiste em sensibilizar-se pela diferença entre “olhar por meio de” e “olhar através de”, ou seja, ver a generalidade no particular e ver o particular no geral.

Concordo com as ideias de Mason (1996a) de que ao perceber diferentes padrões de regularidades e descrevê-los surgem as oportunidades de confrontar as diferentes soluções, o que evidencia as diferentes formas de se ver um problema e suas soluções.

Acredito que relacionar a álgebra com padrões, conforme afirma Devlin (2002), motiva os alunos, mudando sua forma de pensar sobre a Matemática, especificamente sobre a Álgebra. Acredito, também, na ideia de Mason (1996a) de

que o futuro da Álgebra depende da importância que o professor atribui ao pensamento matemático, principalmente ao processo de generalização.

Quanto ao uso da calculadora, como já citado, nesta pesquisa, ela foi um instrumento motivador para os voluntários durante a realização das atividades. Todos os grupos a utilizaram para facilitar a realização dos cálculos necessários para a resolução das atividades ou/e para validar as respostas por meio da conferência de um cálculo mental e/ou algoritmo, o que me leva a responder minha segunda questão de pesquisa:

- **O uso da calculadora auxilia na construção de expressões relativas ao estudo das Progressões Geométricas?**

— *Sim, a calculadora serviu como um instrumento que possibilitou aos alunos focar na resolução das atividades, e não nos cálculos a serem realizados.*

Ela serviu como “alavanca”, possibilitando aos alunos manipular os dados dos enunciados, perceber os padrões apresentados, estabelecer relações e dar sentido as mesmas de forma generalizar os padrões apresentados, e expressá-los por meio de expressões algébricas. Isso corrobora as ideias de Abergaria e Ponte (2008), de que a calculadora propicia o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno, por meio da identificação de propriedades numéricas, generalizações e determinações de padrões numéricos.

Dessa forma, concordo plenamente com a afirmação de Silva, Loureiro e Veloso (1989, p. 3) de que “a calculadora pode contribuir para um ensino de Matemática, em que a ênfase seja colocada na compreensão, no desenvolvimento de diversas formas de raciocínio e na resolução de problemas”.

E, como afirma Pizysieznig (2011), para introduzir o uso dessa tecnologia nas aulas de Matemática é necessário, primeiramente, que o professor se familiarize com essa ferramenta, verifique a disposição desse material no estabelecimento de ensino para, então, incluí-la em seu planejamento e criar situações didáticas adequadas aos seus alunos.

Questões que surgiram da pesquisa realizada

Quanto ao processo de desenvolvimento dos alunos, sugiro investigar se os professores de Matemática, do EF e/ ou do EM, têm o hábito de observar o processo de desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos.

Sobre a observação de regularidades e generalização de padrões questiono:

- Os alunos do ciclo II do Ensino Fundamental têm o hábito de observar regularidades e generalizar padrões?

Dado o resultado de minha pesquisa sobre as vantagens da calculadora, questiono o preparo dos professores para trabalhar com o uso de tecnologias:

- A proposta curricular da SEESP indica o uso de tecnologias como ferramenta para o ensino e aprendizagem da Matemática, mas como os professores são preparados para utilizar tais tecnologias?
- Os alunos dos cursos regulares de Licenciatura em Matemática são preparados para utilizar as ferramentas tecnológicas em sala de aula, especificamente a calculadora?

E, por fim, com o estudo realizado sobre o uso da calculadora no processo de ensino e aprendizagem da matemática, e o trabalho com generalização de padrões e o desenvolvimento de expressões algébricas, surgiu a seguinte questão:

- Alunos do ciclo II do EF são capazes de generalizar expressões algébricas com o auxílio da calculadora?

REFERÊNCIAS

ABELLÓ, F. U. *Aritmetica y Calculadoras*. 2. ed. Madri: Sintesis, 1997.

ALBERGARIA, I. S., & PONTE, J. P. Cálculo mental e calculadora. In. CANAVARRO, A. P.; D. MOREIRA e ROCHA, M. I. (Eds), *Tecnologias e educação matemática*. Lisboa: SEM-SPCE, 2008. p. 98-109.

ANDRÉ, M. E. D. A. Estudo de caso em Pesquisa e Avaliação Educacional. Brasília: Líber Livro, 2005.

BIANCHINI, B. L. e MACHADO, S. D. A. A sensibilização do professor do ensino fundamental para o uso da calculadora em sala de aula. In: GROENWALD, C. L. O. ; ROSA, M (org). *Educação Matemática e Calculadoras: Teoria e Prática*. 1ª Ed. Canoas/RS: ULBRA, 2010.p. 179- 191.

BOGDAN R. C.; BIKLEN S. K. *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto – Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. *Banco de questões 2012: 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas- OBMEP 2012*. Brasília: MEC, 2012.

_____. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto ciclo do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC, 1998. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2012.

_____. Ministério da Educação. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC, 2002.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: PCN Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1999.

CARVALHO, C. A. S. *O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética*. 2008. 127 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CASTALDI, M. J. Z. D. *Matemática: Ensino Fundamental 6º ano/ SESI-SP*. São Paulo: SESI, 2010a.

_____. *Matemática: Ensino Fundamental 7º ano/ SESI-SP*. São Paulo: SESI, 2010b.

DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto, 2002.

GPEA 2011. Disponível em: <<http://www.pucsp.br/pos/edmat/>>. Acesso em: 18 fev. de 2012.

LOPES, A. C. J. Explorando o uso da calculadora no ensino de Matemática para jovens e adultos. *Revista Alfabetização e Cidadania*, n. 6, dez. 1997. p. 67- 79.

LOUREIRO, C. Em defesa da utilização da calculadora: algoritmo com sentido de número. In: *Educação Matemática*, Lisboa, n. 77, março/abril de 2004.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L.. (Ed.). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996a. p. 65- 86.

_____. El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Barcelona, n. 9, 1996b, p. 07-21.

MELO, A. R. F. *A prática do professor de matemática permeada pela utilização da calculadora*. 2008. 142 p. Dissertação (mestrado profissional em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo.

MELLO, J. L. Pastore. *História e Criação das ideias matemáticas*. São Paulo: Pueri Domus Escolas Associadas, 2001.

ORTON, A; ORTON, J. Pattern and the Approach to Algebra. In: Orton, A. (Edited) *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, London: Cassell, 1999.

PEREZ, E. P. Z. *Os Alunos do Ensino Médio e a Generalização de Padrão*. 2006. 126 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PIZYSIEZNIG, A. H. *Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar calculadora?*. 2011. 158 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PONTE, J.P. A calculadora e o processo de ensino-aprendizagem. *Educação e Matemática*, Lisboa, nº11, p.1-2, 3º trimestre de 1989.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Caderno do Aluno de Matemática: Ensino Médio 1ª série Vol 1*. São Paulo: SEESP, 2009a.

_____. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Caderno do Professor de Matemática: Ensino Médio 1ª série Vol 1*. São Paulo: SEESP, 2009b.

_____. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Caderno do Professor de Matemática: Ensino Médio 1ª série Vol 3*. São Paulo: SEESP, 2009c.

_____. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias. Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio*. São Paulo: SEESP, 2010.

_____. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias. Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio*. São Paulo: SEESP, 2008.

_____. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Relatório Pedagógico – Matemática – SARESP 2010*. São Paulo: FDE, 2011.

SELVA, A.C.V.; BORBA, R.E.S.R.. *O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental*. Belo Horizonte: Autentica Editora, 2010 – (Tendências em Educação Matemática).

SILVA, A.; LOUREIRO, C.; VELOSO, M.G. *Calculadoras na Educação Matemática – Actividades*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1989.

SOARES, N. C. *As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8º ano do Ensino Fundamental*. 2012. 123 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ANEXOS

Anexo A - Roteiro para a 1ª sessão.

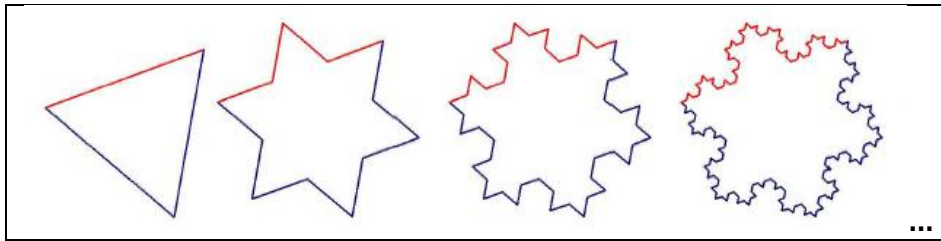
Pesquisadora	Auxiliares
13h: Agradecer a presença de todos. Pedir que eles se acomodem em duplas, conforme estão dispostas as cadeiras. Apresentar os auxiliares.	Separar as etiquetas e os sacos plásticos.
Pedir que coloquem os celulares desligados sobre a mesa a sua frente e guardem o resto de seus materiais em suas mochilas.	
Explicar que os auxiliares irão recolher e etiquetar os celulares para no final da sessão devolvê-los.	Passar de mesa em mesa, marcar o nome de cada aluno nas etiquetas e pedir que o aluno coloque o celular no saco plástico com a etiqueta.
	Colocar uma calculadora CS na mesa de cada um dos sujeitos:
13h05: 1º momento; questões sobre o uso de CS e funções da mesma.	Observação de três duplas cada uma
13h20: segundo momento da sessão	Recolher uma das CS de cada dupla e substituir a CS que ficou com duas duplas pela CI.
Pedir autorização aos sujeitos para gravar	Colocar 2 filmadoras para as duplas com CI e 4 gravadores para as outras 4.
Estabelecer as regras da realização das atividades: 1.colocar nome e número da dupla, em todas as folhas de atividade; 2.caso sem enganem passar um traço sobre e continuar na mesma folha. Não apagar, pois é importante para a pesquisa entender como eles pensaram; 3.Ao terminar cada atividade, e quando tiverem duvida levantar a mão, que irei até o local.	Entregar a atividade 1 com uma caneta a cada dupla. Observação de três duplas cada uma.
13h50: Finalizar a sessão, agradecendo a presença e lembrando do próximo encontro.	Recolher as calculadoras, gravadores e filmadoras. Devolver os celulares.

Anexo B - Roteiro para a 2ª sessão.

Pesquisadora	Observadora
13h: Agradecer a presença de todos. Pedir para que eles se acomodem em duplas, conforme estão dispostas as cadeiras. Explicar que um deles deverá permanecer sozinho.	Separar os sacos plásticos já etiquetados na sessão anterior.
Pedir que coloquem os celulares desligados sobre a mesa a sua frente e guardem o resto de seus materiais em suas mochilas.	
Explicar que a auxiliar irá recolher os celulares para no final da sessão devolvê-los.	Passar de mesa em mesa e pedir que o aluno coloque o celular no saco plástico com a etiqueta.
	Colocar uma CS na mesa de cada um dos sujeitos.
13h05: 1º momento: Retomar a função do ponto e da vírgula na calculadora.	
13h10: Iniciara institucionalização da divisão.	Recolher as CS.
13h25: 2º momento	Entregar uma CI a uma dupla e ao sujeito que estiver só. Para as demais duplas entregar uma CS a cada.
Pedir autorização aos sujeitos para gravar.	Colocar 1 filmadora e uma CI para o sujeito que estiver só, 1 filmadora e uma CS para uma dupla e 3 gravadores para as outras 3 duplas.
Estabelecer as regras de realização das atividades: 1.colocar nome número da dupla, em todas as folhas de atividade; 2.caso se enganem colocar um traço sobre e continuar na mesma folha. Não apagar, pois, é importante para a pesquisa entender como eles pensaram; 3.Ao terminar cada atividade, e quando tiverem dúvida levantar a mão, que irei até o local.	Entregar a atividade 1 com uma caneta a cada dupla e ao sujeito que estiver só. Observação de duas duplas cada observadora.
13h50: Finalizar a sessão, agradecendo a presença e lembrando do próximo encontro.	Recolher as calculadoras, gravadores e filmadoras. Devolver os celulares.

Anexo C - 4ª atividade da 2ª sessão.

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, sendo cada uma das partes semelhante ao objeto original. A sequência a seguir contém um dos primeiros fractais descritos. Esse fractal é conhecido como **Floco de Neve de Koch**. Observe a sequência e responda:



- a) A próxima figura possui quantos lados?
- b) Quantos lados possui a 22ª figura?
- c) Qual é a relação entre o número de lados da figura e a sua posição? Explique.
- d) Procure uma regra que facilite descrever os lados de qualquer floco de Neve de Koch, ou seja, $a_n =$

Fonte: Adaptado de Castaldi (2010b, p. 138)