

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

RAQUEL SANTOS SILVA

**ESTUDO DA RETA EM GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA PROPOSTA DE
ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO A PARTIR DE CONVERSÕES DE
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA COM O USO DO *SOFTWARE*
GEOGEBRA**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2014**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

RAQUEL SANTOS SILVA

**ESTUDO DA RETA EM GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA PROPOSTA DE
ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO A PARTIR DE CONVERSÕES DE
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA COM O USO DO SOFTWARE
GEOGEBRA**

Trabalho final apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob orientação da Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini.

**SÃO PAULO
2014**

BANCA EXAMINADORA

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e data: _____

*“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa.
Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”*

Paulo Freire

Dedico este trabalho aos meus pais Davi e Socorro. Sempre estiveram ao meu lado, dando apoio e incentivo para que pudesse alcançar meus objetivos. Este trabalho é resultado dos ensinamentos recebidos ao longo da vida.

Obrigada!

AGRADECIMENTOS

Este projeto de pesquisa só foi possível devido a colaboração significativa de várias pessoas durante o seu desenvolvimento.

Agradeço aos meus pais Davi e Socorro. Sempre estiveram prontos para apoiar-me em projetos pessoais e a todos os familiares que sempre encorajaram-me para o crescimento.

Faço um agradecimento singular ao meu esposo Rodrigo pela compreensão, paciência, apoio e companheirismo durante essa jornada.

Gostaria de agradecer ao governo do estado de São Paulo pela bolsa concedida que proporcionou a continuidade dos estudos.

Os colegas de curso, Silvana, Nilza, Jefferson, Maria Tereza, Regina, Helena, Neto, Eliane e Nalva também constituíram parte fundamental deste processo, bem como os colegas de grupo, Enéas, Joelma, Francisco, Alessandro e Paulo, gostaria de agradecê-los. Em especial a Claudia Pereira dos Santos, companheira de todas as horas durante essa caminhada.

Os professores doutores Célia, Gerson, Celina, Cileda foram muitíssimo importantes para o crescimento durante os dois anos de curso. A professora doutora Barbara Lutaif Bianchini, orientadora, de fundamental importância para todo o desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço aos colegas da escola onde trabalho, a diretora Eliane Zaroni por permitir a aplicação da atividade e toda a colaboração em todos os momentos. Agradeço também à gerente Luana pelo auxílio e presteza durante os dois anos de curso.

Para os queridos alunos participantes da pesquisa todos os meus agradecimentos pela contribuição valiosa, sem eles nada seria possível.

Pessoas especiais, contribuíram com palavras de incentivo e precisam ser lembradas como as amigas Nadia, Regina, Janaína e Talita.

Afinal todos que estiveram comigo durante esse período foram coadjuvantes nessa conquista pessoal, o meu muito obrigada é pouco para reconhecer.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo investigar se a utilização de um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, pode contribuir a partir dos pontos de vista cognitivo e matemático para uma melhor compreensão do objeto matemático reta em relação a geometria analítica, na 3ª série do Ensino Médio. Para essa verificação foram utilizadas as ideias de Raymond Duval na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Com base nessas ideias foi construída uma sequência composta por 4 atividades cujo foco principal é o estudo da reta, suas diferentes formas de representação e a coordenação entre os registros algébrico, gráfico e da língua natural. Para o desenvolvimento das atividades os alunos utilizaram como apoio o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Esta sequência foi aplicada a alunos de uma escola pública estadual. A metodologia utilizada foi a Engenharia Didática de Michèle Artigue. Os resultados apresentados sinalizam que a utilização do *software* pode contribuir para a apreensão do objeto matemático reta de modo a facilitar e acelerar o seu estudo.

Palavras-chave: Geometria analítica, Reta, Registros de representação semiótica, *Software* GeoGebra, Coordenação entre registros.

ABSTRACT

This article makes part of the research project for Professional Master's degree in Mathematical Education from PUC-SP. It has the aim to investigate if the using of a dynamic geometry software, GeoGebra, could contribute for a better comprehension of the mathematical object, the line. They were applied some aspects studied in the Analytical Geometry during the 3rd year of high school (in Brazil). For verifying these aspects, they were used the ideas of Raymond Duval in the Semiotic Registers of Representation theory. A sequence of activities that focuses on the line was built based on the theory. Its different representation forms and the coordination among the algebraic, graphic and natural language registers were considered in addition. For the development of the activities, the students used the software GeoGebra as a support. The students studied in a public school located at the south part of São Paulo city were the target. The methodology used was the Didactics Engineering of Mich lle Artigue. The results show off that the use of this software may contribute to the mathematical object apprehension, the line, to facilitate and speed up its study.

Key words: Analytical geometry, Line, Semiotic registers of representation, Software GeoGebra, Coordination among registers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	17
CAPÍTULO 1	21
1.1 Problemática	21
CAPÍTULO 2	25
2.1 Revisão Bibliográfica	25
2.2 Análise dos Documentos Oficiais	33
2.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)	33
2.2.2 Orientações Curriculares Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM+).....	37
2.2.3 Currículo do estado de São Paulo	41
CAPÍTULO 3	47
3.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica	47
3.2 A teoria dos Registros de Representação Semiótica e o estudo da reta.....	55
3.2.1 Sistema cartesiano ortogonal plano.....	55
3.2.2 Condição de alinhamento de três pontos	56
3.2.3 Equação da reta.....	58
3.2.4.1 Equação da reta conhecidos: o coeficiente angular e um ponto $P(x_0, y_0)$	62
3.2.5 Equação da reta na forma reduzida.....	64
3.2.6 Posições relativas entre duas retas	65
3.2.7 O estudo da reta no ensino superior	68
3.2.7.1 Estudo da reta no espaço	70
3.3 O uso da tecnologia nas aulas de matemática	72
3.3.1 O computador como ferramenta de ensino	72
3.3.2 O GeoGebra	74
CAPÍTULO 4	78
4.1 Metodologia de Pesquisa - Engenharia Didática	78

4.2 Etapas da engenharia didática na pesquisa.....	80
4.2.1 Análises preliminares.....	80
4.2.2 Concepção da sequência de atividades	85
4.2.3 Análise <i>a priori</i> da sequência de atividades	86
4.2.3.1 Análise <i>a priori</i> da Atividade 1.....	89
4.2.3.2 Análise <i>a priori</i> da Atividade 2.....	95
4.2.3.3 Análise <i>a priori</i> da Atividade 3.....	99
4.2.3.4 Análise <i>a priori</i> da Atividade 4.....	104
CAPÍTULO 5	106
5.1 Caracterização dos sujeitos de pesquisa	106
5.2 Experimentação – A aplicação da sequência de atividades.....	108
5.3 Análise <i>a posteriori</i> da sequência de atividades aplicada.....	111
5.3.1 Análise das questões respondidas antes da realização da sequência de atividades	112
5.3.2 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 1	115
5.3.3 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 2	126
5.3.4 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 3	139
5.3.4.1 Parte 1 da Atividade 3	139
5.3.4.2 Parte 2 da Atividade 3	144
5.3.4.3 Parte complementar da Atividade 3	150
5.3.4.4 Generalização das Atividades 1, 2 e 3	153
5.3.5 Análise das questões respondidas depois da realização da sequência de atividades	154
5.3.6 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 4	157
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	162
ANEXO I.....	167
ANEXO II	180
REFERÊNCIAS	181

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Organização dos temas por série do EM.....	39
Figura 2 – Blocos temáticos para o ensino de Matemática apresentados no Currículo do estado de São Paulo	44
Figura 3 - Conteúdos e habilidades de Geometria Analítica apresentados pelo Currículo do estado de São Paulo	45
Figura 4 - Questão que traz à tona o fenômeno de não congruência semântica por conta da abordagem ponto a ponto	53
Figura 5 - Observações sobre o sistema cartesiano ortogonal.....	55
Figura 6 - Três pontos alinhados.....	56
Figura 7 - A inclinação da reta em relação ao eixo x - parte 1.....	59
Figura 8 - A inclinação da reta em relação ao eixo x - parte 2.....	60
Figura 9 - O coeficiente angular da reta.....	60
Figura 10 - Posições relativas entre duas retas.....	65
Figura 11 - Vetores no plano	68
Figura 12 - Eixos coordenados Ox , Oy e Oz	69
Figura 13 - A reta no espaço R^3	70
Figura 14 - Tela do <i>software</i> GeoGebra e suas ferramentas	76
Figura 15 - Quadro geral de conteúdos de Geometria Analítica para a 3ª série do EM	85
Figura 16 - Tela do <i>software</i> GeoGebra	89
Figura 17 - Atividade 1	90
Figura 18 - Tela do <i>software</i> GeoGebra - Atividade 1	91
Figura 19 - Quadro geral de conteúdos referentes a matrizes e determinantes da 2ª série do Ensino Médio	92
Figura 20 - Possíveis conversões e tratamentos a serem realizados na Atividade 1	93
Figura 21 - Conversões e tratamentos realizados para a conclusão da Atividade 1	95
Figura 22 - Atividade 2	96
Figura 23 - Tela do <i>software</i> GeoGebra - Atividade 2	98
Figura 24 - Atividade 3.....	101
Figura 25 - Conversões e tratamentos realizados nas atividades 1,2 e 3.....	103
Figura 26 - Atividade 4.....	104
Figura 27 - Protocolo da construção no GeoGebra para a Atividade 1, feita pela dupla 2	118

Figura 28 - Tela do <i>software</i> GeoGebra - Atividade 2.....	127
Figura 29 - Protocolo da construção no <i>software</i> GeoGebra para a Atividade 2, feita pela dupla 2	130
Figura 30 - Protocolo da construção realizada no GeoGebra para resolução da Atividade 3 – Parte 1, feita pela dupla 3	142
Figura 31 - Protocolos das construções das três duplas no GeoGebra para a resolução da Atividade 3 - Parte 2.....	148
Figura 32 - Protocolo da construção no GeoGebra para o complemento da Atividade 3, feita pela dupla 2	152
Figura 33 - Protocolo da construção realizada no GeoGebra para resolução da Atividade 4, feita pela dupla 3	159

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - A condição de alinhamento de três pontos e os Registros de Representação Semiótica.....	57
Tabela 2 - A equação da reta na forma geral e os Registros de Representação Semiótica.....	59
Tabela 3 - O coeficiente angular e os Registros de Representação Semiótica	63
Tabela 4 - A equação da reta na forma reduzida e os Registros de Representação Semiótica.....	64
Tabela 5 - As posições relativas entre duas retas e os Registros de Representação Semiótica.....	66

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas <i>antes</i> das Atividades - 1	112
Quadro 2 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas <i>antes</i> das Atividades - 2	113
Quadro 3 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas <i>antes</i> das Atividades - 3	113
Quadro 4 - Respostas das três duplas para a questão 1 da Atividade 1	115
Quadro 5 - Respostas das três duplas para a questão 2 da Atividade 1	116
Quadro 6 - Respostas das três duplas para a questão 3 da Atividade 1	118
Quadro 7 - Respostas das três duplas para a questão 4 da Atividade 1	119
Quadro 8 - Respostas das três duplas para a questão 5 da Atividade 1	121
Quadro 9 - Relação entre os registros algébrico e gráfico realizado pela dupla 1	122
Quadro 10 - Respostas das três duplas para a questão 5 da Atividade 1	123
Quadro 11 - Protocolos das conclusões dos alunos das duplas 1, 2 e 3 para a Atividade 1	124
Quadro 12 - Respostas das três duplas para a questão 1 da Atividade 2	126
Quadro 13 - Respostas das três duplas para a questão 2 da Atividade 2	127
Quadro 14 - Respostas das três duplas para a questão 3 da Atividade 2	128
Quadro 15 - Respostas das três duplas para a questão 4 da Atividade 2	129
Quadro 16 - Respostas das três duplas para a questão 5 da Atividade 2	131
Quadro 17 - Respostas das três duplas para a questão 6 da Atividade 2	132
Quadro 18 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 7 da Atividade 2	133
Quadro 19 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 8 da Atividade 2	134
Quadro 20 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 9 da Atividade 2	134
Quadro 21 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 10 da Atividade 2	136
Quadro 22 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 11 da Atividade 2	137
Quadro 23 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 12 da Atividade 2	138
Quadro 24 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 13 da Atividade 2	138
Quadro 25 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 1 da Atividade 3 – Parte 1	140
Quadro 26 - Respostas das três duplas para as questão 2 da Atividade 3 – Parte 1	141

Quadro 27 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 3 da Atividade 3 – Parte 1	142
Quadro 28 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 4 da Atividade 3 – Parte 1	143
Quadro 29 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 5 da Atividade 3 – Parte 1	143
Quadro 30 - Conclusão das três duplas para a Atividade 3 – Parte 1	144
Quadro 31 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 1 da Atividade 3 – Parte 2	145
Quadro 32 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 2 da Atividade 3 – Parte 2	145
Quadro 33 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 3 da Atividade 3 – Parte 2	146
Quadro 34 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 4 da Atividade 3 – Parte 2	146
Quadro 35 - Conclusão das três duplas para a Atividade 3	147
Quadro 36 - Resoluções das três duplas para o complemento da Atividade 3	150
Quadro 37 - Respostas dadas pelas três duplas para o complemento da Atividade 3	151
Quadro 38 - Protocolos das três duplas para a generalização das Atividades 1,2 e 3	153
Quadro 39 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas depois das Atividades - 1	154
Quadro 40 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas <i>depois</i> das Atividades - 2	155
Quadro 41 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas <i>depois</i> das Atividades - 3	155
Quadro 42 - Enunciado da Atividade 4	157
Quadro 43 - Protocolo das respostas dadas pelas três duplas para a Atividade 4	158
Quadro 44 - Protocolos das três duplas para a descrição da resolução da Atividade 4 com o uso do GeoGebra	160

INTRODUÇÃO

Matemática é uma disciplina estudada desde a entrada dos alunos na escola, contudo quanto mais estuda, mais e mais dificuldades aparecem em relação a ela. Por isso tem sido considerada sempre uma vilã e os estudantes normalmente apresentam muito medo de errar, não conseguir resolver o exercício e não saber aplicar conceitos já estudados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000b, p. 40) apontam a necessidade de “[...] que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la.”

Em muitas situações é possível constatar certa falta de motivação por parte dos alunos diante das propostas de atividades matemáticas. Por esses motivos o ensino da matemática tem sido um desafio para os professores, pois deve-se tentar ajudá-los, de alguma forma, a não desanimar diante das dificuldades particulares da disciplina.

[...] escutamos dos alunos, inclusive daqueles que tinham desempenho satisfatório, o comentário de que esta era a parte da Matemática mais complicada e difícil, ocasionando, como consequência, baixo rendimento por parte destes do ponto de vista da avaliação somativa. (ANDRADE, 2007, p. 22)

Tenho trabalhado como professora de matemática na rede estadual de ensino de São Paulo por aproximadamente 10 anos e todas essas angústias fazem parte do meu dia a dia. Nas aulas de matemática muitas vezes os alunos dizem: *“eu tenho dificuldade, não gosto de matemática, eu não sei mesmo, não vou nem tentar!”* Essa situação motivou-me a buscar o aperfeiçoamento para entender melhor algumas situações e para, de algum modo adequar-me ao público que traz consigo tantas angústias.

Desde o ingresso no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), em 2012, afirmo que a visão diante das situações do dia a dia mudou. As discussões realizadas durante as aulas e os estudos das pesquisas e teorias têm sido muito úteis para a reflexão e prática.

A participação no Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA) também foi importante para a formação de novas concepções e conceitos que podem auxiliar em minha prática. Neste grupo existem vários projetos de pesquisa e dentre todos um chamou-me mais atenção: *A aprendizagem da álgebra com a utilização de ferramentas tecnológicas*, devido às potencialidades da utilização do computador como recurso pedagógico.

Nos últimos anos tenho trabalhado com a 3ª série do Ensino Médio (EM). Além de todas as angústias com relação à Matemática, esta série tem uma particularidade: a escolha da carreira profissional.

Os alunos que muitas vezes rejeitavam a Matemática passam a vê-la com outros olhos e a encaram como uma espécie de salvação. Muitos percebem a presença da Matemática em praticamente todas as carreiras e só nesse momento começam a ter maior interesse.

Talvez um motivo para o interesse repentino seja a grande propaganda em torno das carreiras ligadas à área das ciências exatas como: Engenharia (de todos os tipos), Arquitetura e Informática (de todos os tipos). Esse é um ponto por mim observado comumente e em alguns casos, alunos que até a segunda série do Ensino Médio tinham verdadeira aversão à Matemática, começam a interessar-se e afirmam preferir a carreira nesta área.

Diante de tal fato comecei a pensar em uma maneira de motivá-los e incentivá-los a dar continuidade no interesse pela área e principalmente a Matemática. Ao analisar os conteúdos ministrados na 3ª série do EM, um deles chamou-me atenção em especial, a geometria analítica.

Geometria analítica é parte integrante do currículo da 3ª série do EM, mas muitas vezes não é tratada com a sua real importância. Tendo em vista a relevância deste conteúdo para a conclusão do EM e seu uso como pré-requisito para a continuidade dos estudos daqueles que optarem por uma carreira na área das ciências exatas, decidi refletir um pouco mais sobre o assunto e criar uma sequência de atividades que abordasse o tema.

Unir álgebra e geometria é sempre um desafio para o professor de Matemática, segundo Hajnal (2007, p. 18) “[...] percebemos que os alunos apresentam dificuldades em trabalhar e compreender tópicos fundamentais da geometria analítica.”. Um exemplo claro dessa dificuldade é o estudo da reta.

Apesar de o estudo da reta não ser novidade é possível observar dificuldades apresentadas pelos alunos ao chegarem a 3ª série do EM. A reta começa a ser estudada a partir do Ensino Fundamental (EF), no 8º ano inicia-se o estudo das equações com duas incógnitas e a resolução deste tipo de equação é trabalhada por meio dos métodos de resolução do sistema de equações do primeiro grau. Ao encontrar a solução de um sistema de equações do primeiro grau começa-se a trabalhar a ideia de par ordenado. Em seguida esses pares ordenados são representados como pontos em um sistema cartesiano ortogonal plano.

No 9º ano, a noção de função já começa a ser estudada. Ao iniciar tal estudo já são combinadas as representações gráficas e suas equações, à vista disso a equação de primeiro grau já é associada à representação gráfica de uma reta. Esse estudo é consolidado na 1ª série do EM, nesta série os coeficientes da equação de primeiro grau são explorados e associados à representação gráfica de uma reta.

Mesmo com todas as informações das séries anteriores, muitos alunos chegam à 3ª série do EM com a ideia de que uma reta é simplesmente um traço retilíneo e que não há relação com as equações. Logo mostrar uma reta de forma geométrica é muito simples, basta construir o gráfico. Uma questão difícil para eles é enxergar uma reta em um registro algébrico, ou seja, em uma equação por exemplo.

Em meio a todas as situações observei ser muito interessante investigar este tema da geometria analítica. A averiguação dar-se-á por meio de uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra. Segundo Gravina (2001, p. 40) “Na pesquisa matemática atual, objetos e processos até então restritos aos ‘olhos da mente’ são agora externalizados através de precisas, objetivas e dinâmicas visualizações na tela do computador [...]”. Acredito que o uso do computador pode contribuir muito para o desenvolvimento das atividades e tal possibilidade será melhor detalhada mais adiante.

As ideias de Duval na Teoria dos Registros de Representação Semiótica mostram-se interessantes e serão empregadas neste estudo.

Ao explorar geometria analítica automaticamente faz-se necessária a utilização de diferentes registros de representação semiótica, pois o estudo da relação entre geometria e álgebra prevê o uso de pelo menos dois registros, algébrico e gráfico. Os tratamentos e as conversões entre os diferentes registros são pontos pouco explorados, mas podem auxiliar para o melhor entendimento da geometria analítica.

O aprofundamento sobre os tratamentos e conversões será tratado com mais detalhes no Capítulo 3.

É normal ao pensar em uma reta imaginar-se apenas a representação geométrica, tal representação é eficaz mas não é suficiente para a compreensão do conceito de reta. O objetivo é os alunos trabalharem com essas conversões de registros e também com os tratamentos em uma sequência didática com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, no caso o GeoGebra.

Os programas que fazem “traduções” entre diferentes sistemas de representação apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, principalmente porque o aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente as diferentes representações, até de forma simultânea, e não em aspectos relativos a transição de um sistema à outro, atividade que geralmente demanda tempo. (GRAVINA, 1999, p. 80)

Com este tipo de proposta pretende-se consolidar conceitos sobre equação da reta. Tendo em vista que os alunos participantes da pesquisa já tiveram contato com os conceitos de forma tradicional, e estes serão da terceira série do Ensino Médio, do período da manhã de uma escola pública da rede estadual de São Paulo.

No Capítulo 1 descreve-se a problemática da pesquisa. Os motivos pelos quais decidiu-se por este tema e a questão de pesquisa;

No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica, ou seja são mencionadas as pesquisas correlatas e também a análise dos principais documentos oficiais sobre o tema escolhido, o estudo da reta em geometria analítica;

No Capítulo 3 expõe-se o referencial teórico. A teoria dos Registros de Representação Semiótica é apresentada e acompanhada de uma aplicação que envolve o tema abordado. Os motivos pelos quais foi escolhido o *software* GeoGebra, também serão apresentados;

No Capítulo 4 a metodologia de pesquisa é descrita. A Engenharia Didática de Michèle Artigue é delineada por meio dos passos realizados durante o desenvolvimento da pesquisa. A concepção da sequência de atividades também é apresentada;

No Capítulo 5 a caracterização dos sujeitos de pesquisa, a análise da sequência criada e sua aplicação são detalhados. Os resultados observados para as três duplas participantes do estudo também são expostos;

Em seguida são trazidas as considerações finais sobre a aplicação da sequência de atividades e os resultados obtidos.

CAPÍTULO 1

1.1 Problemática

Ensinar e aprender matemática tem sido um desafio tanto para os profissionais da educação quanto para os alunos. Durante o EF normalmente a disciplina é estudada de forma segmentada. A geometria não mistura-se com a álgebra. Ao chegar no EM essa separação não é mais tão clara e os estudantes são levados a relacionar conhecimentos de geometria e álgebra.

É muito comum os alunos ficarem um pouco inseguros, por não estarem acostumados a fazer essa articulação. No decorrer do primeiro e segundo anos esse trabalho poderia ser priorizado com o intuito de criar o hábito de relacionar geometria e álgebra.

Na terceira série do EM a insegurança costuma ser maior. Existe a pressão da obrigatoriedade de aprender e tomar muitas decisões importantes que influenciarão suas vidas para sempre. As dúvidas e questionamentos são parte do dia a dia dos alunos desta série.

Concomitantemente a tudo isso os documentos oficiais propõem a geometria analítica como primeiro assunto a ser estudado, ramo da matemática que relaciona geometria e álgebra. A relação dar-se-á por meio do estudo das equações e propriedades da reta, da circunferência e das cônicas. Além de representar de forma gráfica essas figuras, os alunos também são levados a relacioná-las com suas respectivas equações e dar-lhes o tratamento algébrico devido.

O estudo da geometria analítica na terceira série do EM é um momento para dar significado a muitos assuntos estudados em séries anteriores do EM e até mesmo do ensino fundamental.

Diante desses aspectos é possível perceber a importância do estudo da geometria analítica, fato que incentivou-me a pesquisá-lo. Este é um tema muito interessante a ser explorado e obviamente não será possível contemplar todos os tópicos apresentados na 3ª série do EM. Após a análise dos tópicos referentes ao assunto, julga-se oportuno dedicar especial atenção ao estudo da reta.

Quando é iniciado o estudo da reta, ainda na primeira série do EM, já é possível estabelecer a relação entre geometria e álgebra, mas ainda de maneira superficial. O estudo da reta, na terceira série do EM, aparece com a função de complementar e consolidar essa relação.

Após o levantamento dos aspectos descritos, iniciou-se a procura por trabalhos acadêmicos a fim de verificar as informações trazidas sobre o assunto. A procura por pesquisas foi realizada por meio do uso da internet. Os sites acessados foram da PUC-SP¹ e de outras universidades como: USP², UNESP³, UNICAMP⁴, UFRGS⁵ etc. O resultado dessa busca foi surpreendente. A quantidade de trabalhos que abordam o tema geometria analítica é muito pequena. Foram encontradas apenas 11 pesquisas relacionadas ao tema. Dentre elas só uma tratava exatamente do estudo da reta, outro aspecto importante na decisão de pesquisá-lo.

Nas pesquisas encontradas existe um ponto de convergência: apesar da dificuldade enfrentada pelos alunos em relacionar geometria e álgebra e a importância do tema para o entendimento de vários objetos matemáticos, o tratamento dado por professores e alunos, além da maneira como os materiais apresentam esse assunto é superficial e não contempla de forma eficiente os reais objetivos para o estabelecimento da relação entre geometria e álgebra.

Varella (2010) aponta grande dificuldade em argumentar a respeito de conjecturas refletindo bloqueio em relação às provas e demonstrações por parte dos alunos. Hajnal (2007) cita dificuldades existentes em compreender tópicos de geometria analítica. Andrade (2007) menciona a ausência de motivação dos alunos em aprender determinados conteúdos matemáticos devido à falta de contextualização dos mesmos. Castro (2001) indica a complicação demonstrada pelos alunos em transitar pelos vários registros que representam um objeto matemático.

Outro ponto bastante defendido nas pesquisas é que o uso dos ambientes de geometria dinâmica no computador como: Cabri, GeoGebra etc. pode trazer uma nova motivação para os alunos além de proporcionar mais rapidez no aprendizado, devido à facilidade para a construção das figuras, Hajnal (2007, p. 25) declara que “[...] a

¹ PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

² USP: Universidade de São Paulo.

³ UNESP: Universidade do Estado de São Paulo.

⁴ UNICAMP: Universidade de Campinas.

⁵ UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

facilidade com que o estudante pode explorar e verificar [...] é útil para que ele forme ou teste suas convicções [...] o que aguça a curiosidade [...].”

Como é possível construir gráficos de maneira mais rápida e eficaz, sem erros, o tempo dedicado às análises das relações será maior e pode trazer melhor compreensão do objeto matemático em questão, a reta.

Gravina (2001, p. 35) aponta que “[...] a tecnologia informática disponibiliza [...] ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação dos funcionamentos cognitivos [...]”. A utilização desse tipo de recurso se faz de maneira cada vez mais simples mesmo para aqueles sem tanta experiência com o uso do computador.

Essas ferramentas não só aumentam as possibilidades de dimensionamento dos modelos: elas oferecem interação mais natural com eles. Agora, além das variáveis e equações matemáticas a reger o modelo, os objetos metafóricos utilizados também podem ser modificados pela manipulação direta na tela do computador. As simulações e seus objetos metafóricos tornam-se instâncias de representação de imagens mentais, com iconografia em profusão (símbolos, gráficos, diagramas) e com o dinamismo de imagens presentes na tela do computador. A versatilidade do ambiente dá fluidez aos processos mentais e dá formas de pensar que ultrapassam as do discurso oral ou escrito, ou do desenho estático. (GRAVINA, 2001, p. 35-36)

Um recurso muito interessante apresentado durante as aulas do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, foi o *software* de geometria dinâmica. Alguns foram explorados, mas houve maior familiarização com o GeoGebra. Esta é uma ferramenta muito rica e com ela torna-se possível dar tratamento diferente ao presente estudo. A visualização do objeto geométrico e suas propriedades algébricas é importante para consolidar o aprendizado.

Ao longo dos últimos cinco anos verifica-se o aumento no interesse dos jovens por carreiras ligadas à área das ciências exatas, este fato faz com que alguns alunos demonstrem maior interesse pelo estudo da matemática já no EM. Então se conseguirem estabelecer as relações e enxergá-las, será importante para a continuidade de seus estudos. Além de ser uma forma diferenciada e mais atrativa de abordar o assunto. Diante dessas observações propõe-se a seguinte questão de pesquisa:

- Qual a contribuição que a utilização do *software* GeoGebra pode trazer para a apreensão do objeto matemático reta sob os pontos de vista cognitivo e matemático no sentido da teoria dos Registros de Representação Semiótica, para alunos da terceira série do Ensino Médio (EM) tendo em vista que já estudaram no ano de 2013 a equação da reta em geometria analítica?

Em busca de respostas para tal questão, foi criada uma sequência de atividades a ser desenvolvida em ambiente computacional de geometria dinâmica, o *software* GeoGebra. Seu objetivo é verificar quais tipos de relações os alunos conseguem estabelecer em diferentes contextos, como por exemplo a relação entre o que já foi estudado utilizando papel e lápis e o que vai manipular com o uso do computador.

CAPÍTULO 2

2.1 Revisão Bibliográfica

Após a definição do tema para a pesquisa: *O estudo da reta em geometria analítica*, iniciou-se a verificação de trabalhos já realizados em torno do assunto. A busca principiou-se pelo *site* da Capes no qual existe boa parte das pesquisas realizadas no Brasil, essa busca concentrou-se no período de 2000 a 2013. No primeiro momento houve dificuldade em encontrar trabalhos que abordassem o mesmo tema no espaço de tempo de 5 anos. Devido a essa dificuldade o período foi ampliado para 13 anos. Foram encontradas 3 teses de doutorado e 12 dissertações de mestrado que tratavam da geometria analítica.

Entre as 15 pesquisas encontradas foram eliminadas aquelas que não apresentavam direcionamento para o EM, restando apenas 3. O próximo passo foi verificar nos *sites* da PUC-SP, UNESP, UFRGS e da UFPA⁶ se havia mais alguma pesquisa relacionada ao tema. A decisão de verificar outros trabalhos nos *sites* dessas universidades teve como base o fato de a pesquisa realizada no *site* da Capes ter resultado as instituições apontadas.

Depois da nova verificação foram encontrados mais 8 trabalhos relacionados ao tema nos *sites* das universidades citadas acima. A leitura desses 11 estudos trouxe muitos subsídios.

Posteriormente à análise convém destacar os trabalhos de: Varella (2010), Hajnal (2007), Andrade (2007) e Castro (2001). Vale ressaltar a maior relação com o tema.

Em sua dissertação de mestrado Varella (2010) apresenta uma análise das coleções de livros didáticos pertencentes ao Programa Nacional do Livro do Ensino Médio/2009 (PNLEM/2009) e do material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, conhecidos como *Caderno do Professor* e *Caderno do Aluno*. O objeto matemático analisado nesses materiais foi o estudo da reta – equação geral, do conteúdo de geometria analítica. A autora analisou a abordagem dada por esses

⁶ UFPA: Universidade Federal do Pará.

materiais em relação a provas e demonstrações, também para o objeto matemático em questão.

A autora destaca a falta de pesquisas e as dificuldades apresentadas pelos alunos para lidar com provas e demonstrações, justificando a escolha do tema.

Como fundamentação teórica utilizou a teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999) que propõe a organização do saber matemático para haver êxito na *transposição didática*⁷. Detalha a TAD como não voltada ao desenvolvimento cognitivo do aluno e sim ao conjunto de ações dele e do professor que possibilitem tornar um saber em objeto de conhecimento, para isso é necessário um conjunto de ações denominado organização praxeológica. Essa teoria tem o objetivo de fazer uma análise *epistemológica*⁸ do saber sob o ponto de vista didático.

Em complementação as ideias de Chevallard, a pesquisadora acrescenta a tipologia de prova proposta por Balacheff (1988). Descreve que antes de estabelecer os tipos é necessária a definição dos conceitos de prova e demonstração, acrescenta ainda a não utilização dessas palavras como sinônimos. Na sequência apresenta as seguintes definições: a prova é uma explicação aceita pela comunidade matemática. A demonstração é um tipo de prova específica na qual são apresentados enunciados, estes levam a uma explicação aceitável.

Na sequência da definição dos termos prova e demonstração, Varela (2010) categoriza as provas, nos termos de Balacheff, como pragmáticas (utilizam situações concretas) e intelectuais (utilizam um conjunto de regras pertencentes a uma categoria para aceitar ou refutar a proposição).

Após a distinção feita entre prova e demonstração e a categorização de provas torna-se possível apresentar os tipos de prova: *Empirismo ingênuo*: baseia-se na observação e a validação é bem simples; *Empirismo crucial*: baseia-se na observação e experimentação, a validação é feita a partir de duas hipóteses podendo rejeitar uma em detrimento da outra; *Exemplo genérico*: baseia-se na explicação das razões da validação de uma proposição pelo cumprimento de operações ou transformações; *Experiência mental*: não são usados exemplos para encontrar uma validação que é dada por uma teoria.

⁷ Segundo Leite apud Chevallard (2007) qualquer conteúdo a ser ensinado ao sofrer modificações e adaptações de modo a torná-lo compreensível é chamado de transposição didática. Assim um saber a ensinar torna-se saber de ensino.

⁸ O termo epistemológico vem de epistemologia que estuda a origem, a estrutura, os métodos e a validade do conhecimento. Disponível em: <http://www.significados.com.br/epistemologia>.

Os tipos de prova são caracterizados da seguinte maneira: empirismo ingênuo, empirismo crucial e exemplo genérico são provas pragmáticas, já a experiência mental é uma prova intelectual. A pesquisa realizada foi qualitativa e do tipo *documental*⁹.

Foram determinados para a análise, pela autora, 7 coleções de livros didáticos aprovados pelo PNLEM/2009 além do material fornecido pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE/SP).

Varela (2010) conclui que o trabalho com provas e demonstrações é importante e deve obedecer todo o rigor exigido, porém não pode limitar-se a situação de simples verificação, a fim de proporcionar um tipo de trabalho em que o aluno seja levado a refletir, conjecturar, argumentar etc.

Apesar de o objeto de pesquisa ser a equação da reta, a autora verificou todos os conteúdos apresentados para o estudo da geometria analítica nos livros analisados e percebeu que em todos aparecem os mesmos tópicos: sistema cartesiano ortogonal, distância entre dois pontos, ponto médio e condição de alinhamento de 3 pontos.

A autora resume suas conclusões em quatro tópicos:

[...] i) a ausência de definição para os termos que constituem o método dedutivo; ii) a falta de clareza da organização Matemática ao realizar uma demonstração que verifica um teorema; iii) incidência não representativa de tarefas propostas aos alunos que permitam a elaboração de provas nos diferentes níveis de raciocínio dedutivo; iv) inconsistência na identificação de um teorema: não está explícito na maioria dos materiais didáticos analisados, se uma afirmação representa uma propriedade, um teorema ou somente deduz uma fórmula matemática. (VARELLA, 2010, p. 204-205).

O tema geometria analítica é abordado de forma superficial nas coleções examinadas por Varela (2010) e de acordo com a sua análise verifica-se o tratamento inadequado desses materiais em relação ao assunto. A partir das análises constata-se a necessidade desses materiais não serem os únicos utilizados durante as aulas. É importante haver sempre a busca, pelos professores, por mais informações sobre o assunto estudado.

As considerações feitas pela autora são muito relevantes para o tema abordado, pois levam a crer que a eterna busca pelo conhecimento deve ser uma prática diária e é necessário o incentivo para a pesquisa durante as aulas. A partir disso conclui-se que professores e alunos precisam caminhar juntos à procura do conhecimento.

⁹ Segundo Lüdke e André (1986) neste tipo de pesquisa utilizam-se documentos contemporâneos ou antigos com sua autenticidade comprovada por meios científicos para a composição o estudo.

Hajnal (2007) propõe o estudo do paralelismo no ensino de geometria analítica plana. Também visa a questão referente a provas e demonstrações em um processo que vai do empírico ao dedutivo.

A autora menciona que a motivação de sua pesquisa foram os resultados obtidos durante a sua participação num projeto do Programa de Estudos Pós Graduated da PUC-SP. Este projeto tinha por objetivo investigar os problemas do processo de ensino e aprendizagem da prova com a utilização de recursos oferecidos por ambientes computacionais.

No decorrer da realização do projeto foi sugerido o tópico de paralelismo entre duas retas, inserido no estudo da geometria analítica, para uma possível pesquisa. Assim a autora construiu uma sequência didática para iniciar o estudo do paralelismo de duas retas no ensino de geometria analítica para a 1ª série do EM.

O referencial teórico utilizado foi baseado nos trabalhos de Parsysz (2001) que fez uma análise dos trabalhos de Van Hiele (1984). Nesta análise Parsysz (2001) verifica a evolução do pensamento geométrico em ordem de importância em cinco níveis.

Dos cinco níveis Parsysz (2001) destaca apenas 4: *Nível G0 (geometria concreta)*: parte-se da realidade com elementos concretos e seu aspecto geral, a validação é perceptiva; *Nível G1 (geometria espaço-gráfica)*: parte-se de representações figurais e gráficas bidimensionais (papel ou computador), a resolução de exercícios é feita com o uso de ferramentas como régua e compasso, nesse nível o aluno inicia a identificação das propriedades das figuras, mas ainda não consegue explicá-las e a validação ainda é perceptiva; *Nível G2 (geometria proto-axiomática)*: os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações são feitas a partir de teoremas euclidianos aceitos de modo intuitivo e *Nível G3 (geometria axiomática)*: os axiomas são explicitados completamente, os objetos são teóricos e a validação é feita por axiomas e propriedades do sistema axiomático.

Para complementar o referencial teórico, Hajnal (2007) emprega as ideias de Balacheff (1987). Ele apresenta as provas produzidas pelos alunos como pragmáticas e intelectuais além de classificá-las em quatro tipos: Empirismo ingênuo, Empirismo crucial, Exemplo genérico e Experiência mental.

A metodologia de pesquisa foi a Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988), na qual são aplicadas quatro fases: fase 1 (análises preliminares); fase 2 (concepção

e análise a priori das atividades); fase 3 (experimentação) e a fase 4 (análise a posteriori e validação).

Em sua análise *a priori* a autora acredita que o ambiente de geometria dinâmica, Cabri Geomètre, poderá contribuir com o trabalho desenvolvido por meio de uma sequência didática dividida em três etapas: a primeira com uso do material concreto, a segunda em ambiente informatizado e a terceira mescla atividades com papel e lápis e em ambiente informatizado.

Hajnal (2007) conclui que a utilização do *software* contribuiu de maneira significativa para o avanço dos alunos em relação ao entendimento do conteúdo. Ao associar o uso do *software*, a sequência didática e uma situação contextualizada produziu-se um efeito favorável ao avanço dos alunos na produção de provas.

Outros recursos são apontados pela autora, um exemplo é o uso do computador, tais ferramentas são muito bem-vindas no processo de ensino e aprendizagem. Os ambientes informatizados têm papel importante nesse processo e podem proporcionar o trabalho eficaz, rápido e prazeroso.

Softwares de geometria dinâmica são de fácil manuseio e existem vários gratuitos, isto facilita muito a sua utilização. Além de serem novidade, atraem a atenção dos alunos. Outro ponto a ser levado em consideração é o fato de o tempo ser reduzido. Não há muitas aulas no decorrer do ano letivo para um trabalho prolongado com cada temática e a utilização desse tipo de recurso auxilia na obtenção de resultados mais rápidos.

Os desenhos em movimento ajudaram os alunos a construírem suas próprias conjecturas sendo assim, o ambiente favoreceu a construção de argumentações e provas, já que os fatos observados durante a movimentação exigem explicações que devem ser justificadas e provadas [...] O dinamismo do *software* e a facilidade que ele oferece ao usuário, de experimentar, visualizar, simular e validar foi útil para que os alunos apresentassem soluções variadas o que indica uma aquisição de autonomia para argumentar e provar. (HAJNAL, 2007, p. 200).

Fica claro no trabalho de Hajnal (2007) que o uso da tecnologia traz muitos benefícios e pode mudar a prática desenvolvida em sala de aula para melhor qualidade e eficiência. Outro aspecto importante a ser levado em consideração é o fato do computador estar presente na vida dos alunos, sendo assim deve ser inserido no contexto educacional de maneira gradativa.

Os objetos matemáticos muitas vezes não possuem representação cotidiana para serem utilizada como exemplo, essas representações são por vezes difíceis de serem construídas com lápis, papel e régua, então perde-se tempo com construções. Este problema pode ser totalmente eliminado com a utilização do computador. Dessa forma passa a ser uma ferramenta eficaz no auxílio do processo de ensino e aprendizagem, pois permite que o real foco, as análises a respeito de determinado objeto matemático, seja trabalhado mais intensamente sem perdas.

Andrade (2007) apresenta em sua dissertação de mestrado uma reflexão sobre o ensino de geometria analítica e constata que muitas vezes há perda de tempo em relação a repetição de conceitos referentes ao objeto matemático. A partir daí propõe uma sequência de ensino a contemplar os assuntos da geometria analítica plana e também a integração com vetores, objeto de estudo do ensino superior.

Sua pesquisa foi qualitativa de natureza *etnográfica*¹⁰ nos termos de Marli André (2005). Como referencial teórico utilizou a TAD de Chevallard (1991) e a aprendizagem significativa proposta por David Ausubel (1968).

Chevallard (1991), na TAD, propõe ao professor estar ciente do conhecimento prévio do aluno, a partir daí será possível realizar as intervenções e ajustes necessários para que a aprendizagem ocorra. Para isso é preciso que o aluno faça descobertas a respeito da hierarquia dos conceitos.

Ainda de acordo com a teoria utilizada por Andrade (2007) o novo conhecimento dar-se-á ancorado em conhecimentos prévios na existente estrutura cognitiva do aluno. Há uma hierarquia conceitual chamada de estrutura cognitiva. Sem conhecimento prévio faz-se necessário o uso de organizadores prévios que podem ser qualquer fonte de informação atuando como fornecedor para a continuidade de estudos.

O autor faz algumas considerações relevantes em torno do papel desempenhado pelo professor. Afirma que a simples transmissão de conhecimento ainda está muito presente nas escolas devido à má formação dos profissionais e também ao fato de normalmente novos professores inspirarem-se em exemplos tidos ao longo de suas vidas. Ressalta a importância da autorreflexão dos educadores e

¹⁰ Segundo André (1995) a metodologia de natureza etnográfica é muito utilizada por sociólogos e antropólogos, no qual o pesquisador se insere no meio, de modo a não interferir, e analisa todas as situações ocorridas a fim de observar e relatar posteriormente todas as características do comportamento social de um grupo.

também da busca por conhecimento de teorias e práticas que possam mudar essa atitude.

Para fundamentar essas reflexões, cita o trabalho de Zeichner (1993) que aponta três aspectos essenciais para a melhoria da qualidade do ensino: como o aluno compreende e interpreta as informações recebidas, a interação entre professor e aluno e a administração do professor a respeito da relação interpessoal e das condições de trabalho com a escola.

A organização didática proposta por Andrade (2007) foi aplicada em uma escola de ensino fundamental e médio na cidade de Belém do Pará.

Em sua organização didática utilizou elementos da história da geometria analítica plana e o fez para expor o assunto aos alunos. A partir da apresentação histórica, os estudantes produziram um relato sobre o que foi mostrado tentando estabelecer conexões com temas estudados previamente. Em seguida foi apresentado e justificado o plano de coordenadas cartesianas. Para isto foi proposto um problema denominado: Como localizar um tesouro?

Foram propostas outras atividades, dentre elas algumas envolviam determinação de ângulos de inclinação, distância entre dois pontos, equação da reta etc. A última atividade tinha por objetivo o tratamento do conceito de vetores, apesar de não ser objeto de estudo do EM.

Andrade (2007) constata que há estreita relação entre a geometria analítica plana e vetores e este trabalho foi motivador, além de propiciar a integração entre o a geometria analítica plana e o conceito de vetores, assunto estudado no ensino superior.

[...] Esta era uma relação de interesse e muita motivação por parte dos discentes e dos docentes, pois as praxeologias matemáticas construídas nos permitiram evidenciar a importância dos objetos matemáticos trabalhados, para a vida prática do aluno, no contexto de seu cotidiano escolar, no que diz respeito à continuidade de seus estudos e a interpretação de problemas do dia a dia que necessitem do conhecimento dos objetos matemáticos envolvidos. (ANDRADE, 2007, p.110)

Com base nos resultados é possível observar a utilização de elementos interessantes para o estudo da geometria analítica e também a consideração da importância do tema para a continuidade dos estudos daqueles alunos ingressantes em cursos superiores na área das ciências exatas.

Contar a história da matemática é uma maneira interessante de trabalhar conceitos. Por vezes mostrar como deu-se evolução e origem, a fim de justificar mudanças ocorridas até o presente momento pode auxiliar na compreensão. Além de revelar a necessidade da divisão em etapas durante o processo de aprendizagem, o que explica o não entendimento imediato e sim aos poucos com muito estudo e dedicação.

Castro (2001), em sua dissertação de mestrado, optou pelo tema “*os vetores do plano e do espaço e os registros de representação*” devido a sua experiência no ensino superior e a grande dificuldade de compreensão desse assunto pelos alunos ingressantes na universidade. O trabalho baseia-se na tese de Pavlopoulou (1994) que investigou o fracasso dos alunos em relação ao estudo de álgebra linear no primeiro ano dos cursos de ciências exatas nas universidades francesas. Em sua tese o objeto matemático de estudo é o vetor.

A teoria utilizada pela autora para dar suporte a sua pesquisa foi a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Nesta teoria Duval propõe a distinção entre o objeto e suas representações para não serem confundidos.

Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988) foi utilizada como metodologia por Castro (2001) e baseia-se em concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino.

Para investigar as dificuldades de seus alunos referente à conversão entre registros de vetores do plano e do espaço, a autora, preparou um teste e o aplicou a 70 alunos de cursos de engenharia e de matemática em faculdades diferentes. Os testes foram realizados em duplas. Após a aplicação percebeu alguns erros típicos como visualização espacial e dificuldade de representação no registro gráfico, dificuldade nos subregistros do registro simbólico, igualdade entre vetor e número real e erro de dimensão.

Com base nos resultados obtidos no teste, foi construída uma sequência didática sobre vetores no espaço. O objetivo da sequência foi transcrito a seguir.

Nosso objetivo era verificar a possibilidade de realizar um aprendizado nas conversões entre os registros gráfico e das n -uplas, de vetores no espaço. Queríamos também descaracterizar a ideia de que um representante de um vetor precisa ter origem O (origem do sistema de coordenadas). Para isto, o aluno trabalhou (nas últimas atividades) no registro gráfico, com representantes distintos de um mesmo vetor. (CASTRO, 2001, p. 53).

A sequência foi aplicada em duas sessões para novos participantes diferentes daqueles do teste. Estes eram do primeiro e segundo anos do curso de engenharia, na primeira sessão participaram 21 duplas e na segunda sessão 17 duplas. Após a aplicação considerou uma evolução em relação a conversão do registro das n-uplas para o registro gráfico já na primeira sessão. Após a segunda sessão todos os alunos foram capazes de realizar as atividades, e isto mostrou a obtenção dos objetivos propostos para a sequência.

A leitura das pesquisas apresentadas foi importante, possibilitou perceber as várias complicações do trabalho com geometria analítica, tanto para alunos quanto para professores. Enfrentar a dificuldade de compreensão de noções tão importantes como a equação da reta, as posições relativas entre as retas etc. é uma tarefa difícil.

Recursos de informática, como os *softwares* de geometria dinâmica, são muitas vezes opções que podem trazer bons resultados. A facilidade de utilização e manipulação desses *softwares* faz com que, acompanhado por uma aula bem planejada, seja possível gerar maior motivação para os alunos.

Outro aspecto importante do emprego desse tipo de *software* é a possibilidade de observar e perceber situações não perceptíveis em figuras construídas com o uso de lápis e papel, e isto pode levar à melhor compreensão dos objetos matemáticos estudados, no caso específico, a reta.

Várias dificuldades apontadas pelas pesquisas também já haviam sido percebidas na experiência pessoal, e esta situação faz crer que o tipo de sequência criada pode auxiliar na tentativa de melhorar tais problemas.

Na sequência, a análise dos documentos oficiais complementar as impressões já verificadas durante a leitura das pesquisas.

2.2 Análise dos Documentos Oficiais

2.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)

Após tomada a decisão sobre o tema, *o estudo da reta*, mostra-se extremamente importante buscar informações nos documentos oficiais sobre o que espera-se com o estudo deste tema para os alunos do EM. Essa análise iniciou-se com a leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM),

Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM+).

De acordo com os PCNEM (2000) o sentido do ensino desse campo para o EM visa a produção de um conhecimento específico da área em busca da interdisciplinaridade e contextualização, a fim de desenvolver várias competências e habilidades nos campos científico e tecnológico.

Acrescenta ainda que o tipo de conhecimento a ser adquirido nesta fase do aprendizado não deve ter caráter profissionalizante, mas necessita pautar-se na utilidade para a vida e o trabalho a fim de desenvolver várias características auxiliares neste objetivo.

[...] este documento procura apresentar [...] uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade. (BRASIL, 2000b, p. 4)

Faz uma referência ao fato de buscar-se a interdisciplinaridade, principalmente em relação às disciplinas do campo das ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, porém também afirma a preocupação com a não nulidade do aprendizado dos conhecimentos específicos de cada disciplina.

Note-se que a interdisciplinaridade do aprendizado científico e matemático não dissolve nem cancela a indiscutível disciplinaridade do conhecimento. O grau de especificidade efetivamente presente nas distintas ciências, em parte também nas tecnologias associadas, seria difícil de se aprender no Ensino Fundamental, estando naturalmente reservado ao Ensino Médio. Além disso, o conhecimento científico disciplinar é parte tão essencial da cultura contemporânea que sua presença na Educação Básica e, consequentemente, no Ensino Médio, é indiscutível. (BRASIL, 2000b, p. 6)

A Matemática é definida como uma área que possui características próprias e por esse motivo precisa ser tratada com o tal. São apresentadas várias razões pelas quais a Matemática pode ser abordada com muita atenção e destaca-se o fato de seus conceitos estarem presentes em todas as atividades humanas.

Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (BRASIL, 2000b, p. 9)

O trabalho com a Matemática deve contemplar todos os aspectos referentes a formação do cidadão para sua vida de modo geral. É também apresentada com uma série de objetivos comuns às demais disciplinas pertencentes ao campo das ciências da natureza.

Todas as disciplinas devem ser trabalhadas norteadas pelo desenvolvimento de três eixos referentes às competências e habilidades: *Representação e comunicação* que visam desenvolver a capacidade de comunicação; *Investigação e compreensão* que pretendem desenvolver a capacidade de questionar, além do raciocínio e a capacidade de aprender; e a *Contextualização sociocultural* para compreender e utilizar a ciência como meio de interpretação e intervenção e a tecnologia como conhecimento prático.

Fica evidente que a matemática tem uma linguagem própria, esta deve ser conhecida pelo aluno para aplicar e entender os conceitos pertinentes a ela.

Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL, 2000b, p. 40)

No EM, a matemática também carece ser vista como uma ciência. O aluno deve perceber que definições, demonstrações e conceitos têm como função a construção de novos conhecimentos. Espera-se que no EF os alunos já tenham tido contato com vários campos do saber matemático e no EM tenham condições de usá-los e ampliá-los.

A questão referente à tecnologia deve estar presente como uma preocupação real no ensino da matemática, o aluno necessita de incentivo para além de desenvolver as habilidades propostas, saber buscar novas habilidades. Com a

rapidez da evolução da tecnologia as habilidades já desenvolvidas passam a ser insuficientes rapidamente.

O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (BRASIL, 2000b, p. 41)

Outro ponto a destacar-se no que refere-se à tecnologia é o fato de incorporá-la ao cotidiano da sala de aula. O computador é hoje um objeto de domínio público e está presente na vida de boa parte dos alunos. Se bem utilizado pode ser um recurso indispensável ao aprendizado.

Com base em todos esses aspectos o documento apresenta as principais habilidades propostas para o ensino da matemática no EM:

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000b, p.42)

Tais habilidades representam o que deve ser desenvolvido em relação à Matemática, mas não é bom esquecer que as relações interpessoais e as atitudes não podem ser deixadas de lado durante esse processo.

Estabelecidas as habilidades a serem desenvolvidas, a temática trabalhada deve obedecer uma seleção de conteúdos mínimos enquanto outra parte do currículo pode ter certa flexibilidade de acordo com as necessidades e interesses da escola.

Também por isso, o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores. Essa organização terá de cuidar dos conteúdos mínimos da Base Nacional Comum, assim como fazer algumas indicações sobre possíveis temas que podem compor a parte do currículo flexível, a ser organizado em cada unidade escolar, podendo ser de aprofundamento ou direcionar-se para as necessidades e interesses da escola e da comunidade em que ela está inserida. (BRASIL, 2000b, p. 43)

O PCNEM (2000) traz orientações sobre como desenvolver o trabalho com álgebra e geometria em separado. Para a álgebra o documento propõe uma abordagem de modo a desenvolver habilidades ligadas a resolução de problemas, conhecimento e utilização da linguagem simbólica, validação de argumentos, descrição de modelos e capacidade de utilizar a álgebra na interpretação e na interferência em situações reais.

A propósito da geometria direciona o trabalho no sentido de ampliar habilidades de visualização, desenho e argumentação lógica, bem como a aplicação dos conhecimentos adquiridos como formas e propriedades geométricas na busca de soluções para problemas de situações reais do dia a dia.

Nota-se que geometria e álgebra são apresentadas com objetivos comuns e com certeza deverão ser desenvolvidas pela geometria analítica na 3ª série do EM.

2.2.2 Orientações Curriculares Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM+)

Este documento foi redigido para complementar as orientações já contidas nos PCNEM (2000). Nele pode ser encontrada uma descrição mais detalhada das habilidades e dos conteúdos a serem desenvolvidos pelo ensino das disciplinas ligadas à área das ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.

O foco desta pesquisa é o ensino da matemática, mais especificamente a geometria analítica, portanto serão apresentadas as orientações referentes a este tema.

Para o ensino da Matemática no EM o PCNEM+ (2002) traz a divisão em três grandes temas: *Álgebra: números e funções*, *Geometria e medidas* e *Análise de dados*. A geometria analítica está inserida no segundo tema *Geometria e medidas*.

Para o ensino de *Geometria e medidas* propõe-se o tratamento das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para isto ficam divididas quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica.

Geometria analítica é tratada conforme transcrito a seguir.

A unidade **Geometria analítica** tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. (BRASIL, 2002a, p.124)

Com essa abordagem espera-se proporcionar para o aluno a percepção do uso de diferentes instrumentos matemáticos para representar o mesmo problema. Um exemplo para este tipo de trabalho é a construção de uma reta por uma resolução algébrica (equação) ou uma solução gráfica (gráfico).

O PCNEM+(2002) propõe como foco do estudo desse tema o próprio objetivo da geometria analítica que consiste em estabelecer a relação existente entre geometria e álgebra.

Ressalta ainda a importância da análise de situações propostas a partir do conhecimento conjunto de geometria e álgebra contrária a simples memorização de equações e fórmulas. Um caminho indicado é a resolução de problemas.

Trabalhar a história da geometria analítica é outro caminho a ser utilizado. Esse percurso pode levar o aluno a entender o desenvolvimento do assunto e perceber os conceitos, como parte de um processo e o seu não surgimento do dia para a noite, mas a construção ao longo de muitos anos de estudo e o desenvolvimento diante das necessidades humanas. Assim a matemática apresenta-se com caráter de ciência e não somente de ferramenta.

As habilidades que devem ser desenvolvidas pelo estudo da geometria analítica são apresentadas a seguir.

4. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2002a, p.125)

Na figura a seguir é apresentada a organização dos temas por série do Ensino Médio. Destaca-se em vermelho o conteúdo de geometria analítica a fim de identificar o que foi apontado como essencial para o estudo deste assunto.

Figura 1 - Organização dos temas por série do EM

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: BRASIL, 2002a, p.128

A apresentação dos conteúdos feita pela tabela nos dá a ideia clara do que é importante para cada série e pode-se destacar os tópicos referentes a geometria analítica a serem trabalhados na terceira série.

O PCNEM+ (2002, p. 129) sugere esta organização para a condição de haver 4 aulas semanais de matemática e aponta que “Se o número de aulas semanais for inferior a quatro, o professor deve elaborar seu planejamento tendo como foco as ideias centrais de cada tema.”

A organização foi feita com o intuito de, na primeira série, os alunos serem levados a tomar contato com procedimentos básicos de maneira mais contextualizada, levando-se em consideração situações presentes no dia a dia dos alunos. Na segunda série há uma mudança no tratamento e os conceitos são mais amplos com o objetivo de mostrar o lado científico da matemática. Na terceira série uma ampliação e aprofundamento, em relação aos procedimentos como maneira de aplicação dos conceitos já adquiridos nas séries anteriores é proposta. Nesta série os alunos já devem ser capazes de fazer intervenções em situações reais.

Com relação a temática para a terceira série indica três aspectos essenciais: o primeiro deve enfatizar funções, o segundo necessita focar na compreensão da matemática como ciência e no terceiro precisa dar maior importância à estatística descritiva e às medidas de tendência central, bem como o entendimento das probabilidades e suas aplicações simples.

Como estratégias são sugeridos o trabalho com resolução de problemas, o trabalho em grupo e os projetos. A comunicação também deve ser um ponto a levar-se em consideração, carece ser incentivada pedindo aos alunos a produção de vários tipos de textos como relatórios, sínteses e descrições de conclusões.

Avaliação é outro aspecto a ser destacado. Várias maneiras podem ser consideradas, não somente aquelas tradicionais nas quais verifica-se apenas o conteúdo em questão corrigidas como certas ou erradas para a atribuição de um conceito. A avaliação é uma forma de nortear o trabalho e verificar se os objetivos foram alcançados ou não a fim de ter informações para o planejamento ou replanejamento das aulas.

Os dois documentos apresentados, PCNEM e PCNEM+, complementam-se. Todos os direcionamentos sugeridos no PCNEM são acrescentados de maneira mais específica enfatizando a matemática e seus conceitos no PCNEM+. É perceptível a preocupação com o ensino voltado para a vida do aluno. Em todos os momentos

são apresentadas situações de modo a proporcionar um aprendizado voltado ao desenvolvimento humano e não simplesmente ao desenvolvimento científico.

Independentemente de não apresentarem um currículo com conteúdos estabelecidos, são oferecidas habilidades a serem desenvolvidas ao longo do EM. Vários aspectos são abordados e fica claro que a matemática deve servir como ferramenta e como subsídio para a formação de um cidadão crítico com condições de intervir em situações do mundo em que vive e tomar decisões pautadas em conhecimento.

2.2.3 Currículo do estado de São Paulo

A Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP) iniciou, no ano de 2008, um conjunto de ações com o objetivo de estabelecer um currículo básico para as escolas da rede estadual, nos níveis fundamental e médio. Este currículo foi desenvolvido a partir de documentos existentes como PCN, PCN+ etc. e da consulta às escolas sobre práticas bem sucedidas.

Em 2008 foi divulgada uma *Proposta Curricular* que apontava conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos tanto no EF – ciclo II, quanto no EM. Após dois anos de análises e consultas, em 2010, foi estabelecido o Currículo oficial para toda a rede de escolas estaduais de São Paulo. Durante o ano de 2010, foi feita uma reformulação e em 2011, o Currículo foi consolidado.

O Currículo é composto por uma série de materiais para orientar o trabalho pedagógico em cada série. Os materiais são direcionados à equipe gestora com o *Caderno do Gestor*, aos professores com o *Currículo* e o *Caderno do Professor*, com disciplinas em separado e também aos alunos com o *Caderno do Aluno*.

O *Caderno do Gestor* apresenta direcionamentos para a equipe gestora da escola, com o intuito de auxiliar na implementação do currículo e traz direcionamentos para a escola criar e colocar em prática sua *Proposta Pedagógica*.

O Currículo apresenta os conteúdos e habilidades básicas a serem desenvolvidas durante as aulas no decorrer do ano letivo, para cada disciplina e série dos ensinos fundamental e médio.

O *Caderno do Professor* e o *Caderno do Aluno* são materiais complementares, ambos são compostos por *Situações de Aprendizagem* a serem trabalhadas para o desenvolvimento das habilidades. No *Caderno do Professor* existem orientações de como conduzir estas atividades e no *Caderno do Aluno* são apresentadas as próprias atividades. Estes materiais são divididos por disciplina, série e bimestre.

Um ponto a observar neste documento é o fato de propor o ensino centrado nas competências. Esta proposta é justificada pelo documento da seguinte forma:

Uma das razões para se optar por uma educação centrada em competências diz respeito a democratização da escola. Com a universalização do Ensino Fundamental, a educação incorpora toda a heterogeneidade que caracteriza o povo brasileiro; nesse contexto, para ser democrática, a escola tem de ser igualmente acessível a todos, diversa no tratamento a cada um e unitária nos resultados.

Optou-se por construir a unidade com ênfase no que é indispensável que todos tenham aprendido ao final do processo, considerando-se a diversidade. Todos tem direito de construir, ao longo de sua escolaridade, um conjunto básico de competências, definido pela lei. Esse é o direito básico, mas a escola deverá ser tão diversa quanto são os pontos de partida das crianças que recebe. Assim, será possível garantir igualdade de oportunidades, diversidade de tratamento e unidade de resultados. Quando os pontos de partida são diferentes, é preciso tratar diferentemente os desiguais para garantir a todos uma base comum. (SÃO PAULO, 2011c, p. 13)

Devido a toda diversidade encontrada em relação ao aprendizado dos alunos, justifica-se a necessidade da realização do trabalho diferenciado centrado em competências e habilidades. Esta maneira é diferente daquela em que a memorização e o conhecimento da maior quantidade de conteúdos possível eram a prioridade.

Com base nesta abordagem diferenciada verifica-se a possibilidade do trabalho com a matemática a fim de contemplar o desenvolvimento das habilidades e competências.

A matemática é considerada uma área a parte pelo Currículo do estado de São Paulo totalmente distinta das áreas: *Linguagens e Códigos* e *Ciências da Natureza*, apontadas pelo PCNEM (2000).

Existem razões para a matemática ser considerada distinta de outras áreas, uma delas é o tipo de linguagem apresentada, com características muito próprias que poderia facilmente confundi-la com uma língua, porém ao mesmo tempo existem aspectos para caracterizá-la à uma ciência da natureza. Motivo pelo qual incluí-la em alguma das duas áreas pode resultar na perda de atributos tanto de linguagem quanto de ciência da natureza. Outra razão é a incorporação dos recursos tecnológicos tendo em vista sua grande proximidade com a matemática.

Ao respeitar a rica história da disciplina e alçá-la a uma área do conhecimento, busca-se apenas criar as condições para uma exploração mais adequada das possibilidades de a Matemática servir as outras áreas, na grande tarefa de transformação da informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação. (SÃO PAULO, 2011c, p. 28)

Em relação aos recursos tecnológicos o Currículo (2011) apresenta, conforme transcrito a seguir.

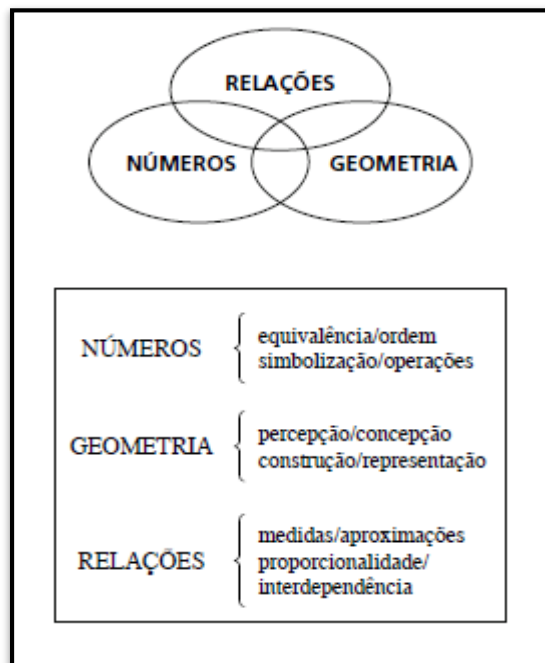
Os computadores atualmente são considerados instrumentos absolutamente imprescindíveis para jornalistas e escritores, mas é no terreno da Matemática que se abrem as mais naturais e promissoras possibilidades de assimilação consciente dos inúmeros recursos que as tecnologias informáticas podem oferecer no terreno da Educação. Ainda que as tais tecnologias estejam presentes e representem papel importante em todas as áreas do conhecimento, a natureza algorítmica dos computadores aproxima-os especialmente dos conteúdos matemáticos. (SÃO PAULO, 2011c, p. 27-28)

Neste documento são apresentados subsídios para o ensino da matemática nos níveis fundamental (ciclo II) e médio. O seu ensino está centrado em competências e habilidades. Um dos primeiros subsídios é a união entre matemática e língua materna em busca do conhecimento. Outra situação apontada é a busca pela contextualização de modo a tentar estabelecer uma conexão mínima com elementos da realidade.

Ficam fixados três eixos. Segundo o Currículo do estado de São Paulo (2011c, p. 31) o primeiro deles é *expressão/compreensão* que visa desenvolver “[...] a capacidade de expressão a partir de diversas linguagens[...]”. Em seguida o Currículo do estado de São Paulo (2011c, p. 31) indica o eixo *argumentação/decisão* que pretende desenvolver a “[...] capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis[...]”. E o terceiro eixo apontado é o da *contextualização/abstração* com o objetivo de cultivar “[...]a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola[...]”.

Para o desenvolvimento desses três eixos o trabalho foi dividido em três grandes blocos temáticos: *Números*, *Geometria* e *Relações*, conforme indica a figura a seguir.

Figura 2 - Blocos temáticos para o ensino de Matemática apresentados no Currículo do estado de São Paulo



Fonte: Currículo do estado de São Paulo (2011c, p. 39)

De acordo com a figura percebem-se os três blocos temáticos interligados de modo a não serem trabalhados isoladamente. Sempre existirá uma integração entre eles e mesmo com os objetivos próprios de cada um para sua concepção, são necessários elementos dos outros blocos para o desenvolvimento ocorrer de fato.

O trabalho com a geometria analítica está presente no Ensino Médio, mais especificamente no primeiro bimestre da 3ª série. Todo o desenvolvimento realizado nos blocos da Geometria, Números e Relações, nos ensinos fundamental e médio servem de apoio para o seu estudo.

A geometria analítica está inserida tanto no bloco da Geometria como no bloco das Relações, com o seu estudo pretende-se favorecer a possibilidade do aluno conseguir estabelecer relações entre as figuras estudadas em geometria, as equações estudadas em álgebra, as medidas estudadas no bloco dos números etc.

Há, ainda, no Ensino Médio, um rico leque de possibilidades para o cruzamento das Relações como um bloco de conteúdos com os demais, tanto os Números quanto a Geometria. Na geometria analítica, por exemplo, fundem-se as perspectivas das relações de interdependência, da linguagem algébrica e dos objetos geométricos, numa verdadeira comunhão de interesses entre as três vertentes de temas disciplinares. (SÃO PAULO, 2011c, p. 44)

Na figura a seguir é possível observar os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos na 3ª série do ensino médio em relação à geometria analítica.

Figura 3 - Conteúdos e habilidades de Geometria Analítica apresentados pelo Currículo do estado de São Paulo

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	Geometria/Relações Geometria analítica • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares • Ponto e reta: distância • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas • Cônicas: noções, equações, aplicações	• Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações • Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas • Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares • Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares • Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas

Fonte: Currículo do estado de São Paulo (2011c, p. 69)

O estudo da geometria analítica pode ser realizado a partir das diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático. O trabalho com pontos, retas, circunferências e cônicas é indicado para a 3ª série.

A reta e sua equação é o objeto de estudo para a pesquisa, por isso convém destacar, na figura 3, os conteúdos e habilidades a serem trabalhados em relação ao assunto.

Para o estudo da reta a condição de alinhamento entre dois pontos, a equação da reta e o estudo dos seus coeficientes são os conteúdos utilizados para alcançar as habilidades indicadas. Saber usar o sistema de coordenadas cartesianas para representar pontos e figuras, saber reconhecer a equação da reta, o significado de

seus coeficientes e as posições relativas entre as retas também são conceitos essenciais para este trabalho.

Geometria analítica é parte fundamental do estudo da matemática, pois a partir do seu conhecimento espera-se dos estudantes a identificação das relações existentes entre outros conceitos matemáticos, ou mesmo a relação entre conceitos matemáticos e de outras disciplinas.

Analisar os três documentos oficiais trouxe alguns apontamentos sobre a importância do trabalho com a geometria analítica. Este é um assunto interessante para o desenvolvimento de certas habilidades necessárias à formação dos alunos, não só em matemática mas em outras áreas também.

Com exploração da geometria analítica espera-se que o aprendiz consiga estabelecer relações entre a geometria e a álgebra, porém tomando como base esse tipo de conexão poder fazer várias relações entre diversos conteúdos.

Relacionar conteúdos aprendidos em matemática com outras áreas do conhecimento é uma competência desejada no decorrer da vida escolar.

Um aspecto a destacar em relação à análise dos documentos é o uso do computador como uma ferramenta que pode proporcionar facilidades para o estudo de maneira mais dinâmica.

Todos os documentos apontam os mesmos conceitos para o desenvolvimento da geometria analítica. O trabalho com a representação gráfica, as equações e as posições relativas entre figuras são unanimidade para o seu estudo. Logo, a equação da reta é apontada como parte indissociável deste trabalho.

Percebe-se a única direção de todos os documentos analisados e tentar associar esse caminho ao estudo de uma teoria é um desafio a ser encarado.

CAPÍTULO 3

3.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida por Raymond Duval, filósofo e psicólogo, que empenha-se, desde a década de 70, à pesquisa em Educação Matemática. Trabalhou durante 25 anos no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática de Estrasburgo, na França. Durante esse período publicou vários trabalhos importantes sobre o desenvolvimento cognitivo em Matemática. Hoje, como professor emérito da *Universidade du Litoral Côte d'Opale* na França continua contribuindo muito para as pesquisas em Educação Matemática.

O livro *Sémiosis et pensée humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels*¹¹, foi publicado em 1995, e sua importância foi significativa para o desenvolvimento dessa teoria. A partir de então a teoria dos Registros de Representação Semiótica tem influenciado muitas pesquisas na área da Educação Matemática no Brasil.

Estudo dos fenômenos relativos ao conhecimento está ligado de maneira muito particular à noção de representação. Um objeto matemático pode ser representado de várias maneiras. O conhecimento e a coordenação das várias maneiras de representa-lo é parte da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Para Duval (2011) a representação é a maneira como uma informação pode ser descrita. A descrição pode ser feita de diversas formas e a diversidade deve ser perceptível pelos receptores. Existem três tipos de representações: representações subjetivas e mentais, representações internas ou computacionais e representações semióticas.

¹¹ *Sémiosis et pensée humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels – Semiósio do pensamento humano: Registros Semióticos e Aprendizagem Intelectual*. Tradução do francês feita pela autora.

Representações subjetivas e mentais podem ser encaradas como “fantasias”, ou seja, são as concepções que as pessoas fazem em relação a fenômenos físicos e naturais. As representações internas e computacionais são aquelas nas quais o sujeito realiza tarefas sem pensar em todas as etapas necessárias para tal. É possível exemplificar com os algoritmos de computador, ao utilizá-los, o sujeito não percebe a realização da ação pela máquina e não por ele mesmo.

Um sistema particular de signos com suas dificuldades próprias de significado e funcionamento, é denominado representação semiótica. É possível resumir este tipo de representação em dois aspectos: forma e conteúdo. A forma refere-se ao representante e o conteúdo ao representado.

Sem as representações semióticas seria impossível a construção do conhecimento. A “*semiósis*” é a apreensão ou a produção de uma representação e a “*noésis*” é a apreensão conceitual de um objeto, ou seja, a conceitualização.

Duval (2009, p. 17) afirma “[...] Não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*.” Conclui-se então: a conceitualização só ocorrerá após a representação, a apreensão dos objetos matemáticos só será possível após o sujeito ter coordenado vários tipos de representações.

As representações semióticas consideram a existência de vários sistemas semióticos e a conversão de um sistema para o outro é uma operação cognitiva possível. Essa conversão pode ser descrita como “mudança de forma”.

Matemática, devido a sua especificidade encaixa-se nas representações semióticas. O conhecimento em matemática pode ser desenvolvido com o auxílio desse tipo de representação.

Duval (2011) utilizou as ideias de Saussure¹², Peirce¹³ e Frege¹⁴ para fazer a associação entre representações semióticas e matemática¹⁵. Um ponto muito importante da relação entre representações semióticas e matemática é não confundir o representante com o representado.

¹² Segundo Duval (2011) Saussure publicou em 1916 a obra fundadora do método da análise estrutural de fundamental importância para a fundação da semiótica como disciplina.

¹³ Duval (2011) conta que Peirce elaborou no período de 1890 a 1910, trabalho visando descrever o papel de todas as formas e signos na atividade cognitiva.

¹⁴ Duval (2011) afirma que Frege preocupou-se com a produção semiótica de modo a ter valor de prova e descoberta matemática.

¹⁵ Ainda segundo Duval (2011) Saussure, Peirce e Frege são considerados os “pais” da semiótica todos os trabalhos a partir de então tem como base ideias descritas por eles.

[...] não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, [...] com suas representações [...] porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL, 2009, p. 14)

Confundir representante e representado é uma situação verificada diversas vezes durante as aulas de matemática. Um exemplo muito claro é o estudo de funções. Normalmente o conceito de função é confundido com a sua representação, muito trabalhada em sala de aula. Ao perguntar-se sobre o que é função, a resposta mais frequente é: “*O gráfico é a função!*”, esta situação pode exemplificar tal confusão.

Duval (2011) assegura que o trabalho com a matemática consiste em transformar representações semióticas e isso distingue-a de outras áreas do conhecimento. Em matemática uma representação semiótica só será interessante se houver a possibilidade de ser transformada em outra representação semiótica.

As representações semióticas podem ser transformadas em outros tipos de representações também semióticas. Servem como “referência a um objeto” no caso da falta de acessibilidade ao próprio objeto matemático ou como “transformação em outras representações semióticas”, esse problema é de ordem cognitiva e pode auxiliar no entendimento de objetos matemáticos mais complexos.

O conteúdo constituinte depende do tipo de representação semiótica utilizado, as diferentes representações não mostram os mesmos aspectos de um único objeto. Quando o tipo de representação é associado ao seu conteúdo é possível atingir o objeto desejado, como observa Duval a seguir.

A coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. [...] Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas “traduções” mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la. Porém, quando um tal tipo de trabalho é proposto, constata-se uma modificação completa nas iniciativas e nas atitudes dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para os controlar, para a rapidez de execução e também para o interesse colocado na tarefa.[...] Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos dos alunos. (DUVAL, 2009, p.19)

Para Duval (2009) objetos matemáticos inacessíveis podem ser entendidos ao colocar-se os diferentes tipos de representação possíveis para o mesmo em correspondência. Esta ação permite o entendimento do objeto mais facilmente.

Nesse aspecto a utilização de *softwares* computacionais, apresenta-se como um recurso bastante interessante para o trabalho com os diferentes registros de representação semiótica.

[...] as representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis como objetos reais. Podemos deslocá-las, fazê-las rodar, ou estendê-las a partir de um ponto. Esse aspecto “dinâmico” é apenas uma consequência da potência ilimitada do tratamento. *Mas ele permite desempenhar uma função que nenhum dos outros modos fenomenológicos permite: a função de simulação.* (DUVAL, 2011, p. 137)

As transformações de representações semióticas podem ser feitas de duas formas: aquelas que produzem representações semióticas do mesmo tipo chamadas de **tratamentos** e aquelas que produzem representações de tipos diferentes chamadas **conversões**.

Essas transformações só podem ser feitas a partir de seus registros. Duval define registro a seguir.

Os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo <<criadores>>, de representações sempre novas. E a produção de novas representações permite descobrir novos objetos. (DUVAL, 2011, p. 72)

Registros são sistemas semióticos, assim como signos e códigos, mas cada um deles representa papéis muito diferentes. O principal papel dos registros é especificado por Duval a seguir.

Um registro é, evidentemente, um sistema semiótico, mas um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza, essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar. (DUVAL, 2011, p. 70)

O conteúdo da representação produzida por um registro deve referir-se ao objeto matemático e também possibilitar a discriminação entre diferentes unidades de sentido. Tais fatores autorizam a passagem de uma forma de representação para outra, como estabelece Duval a seguir.

Mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. (DUVAL, 2011, p. 73)

Dentre os diferentes registros, Duval (2011) declara o papel fundamental da língua natural para o desenvolvimento do pensamento e certifica ser o primeiro registro de representação semiótica ao qual o aluno tem contato. Sem a língua natural não seria possível o entendimento, nem mesmo o conhecimento de outros tipos de registro. Os enunciados, as explicações orais, conversas sobre os conceitos são realizadas sempre em língua natural.

Conversões entre a representação no registro da língua natural para qualquer outra podem ser feitas com a utilização de representações de transição, pois não é possível convertê-la de forma direta. O abandono da língua natural no ensino da matemática foi substituído pela criação de uma língua formal, própria da matemática.

Duval (2011) apresenta a representação por meio de figuras como um registro de representação semiótica. Esse tipo de registro caracteriza-se pelo fato de proporcionar diferentes olhares em relação a mesma figura sem alterá-la. Ao observar uma figura geométrica a percepção a respeito dela poderá acontecer de várias maneiras e isso é característica da atividade matemática. As dimensões podem ser transformadas dependendo do que pretende-se analisar.

Para modelar uma situação concreta geometricamente aparece a necessidade de uma representação mista composta pela superposição de duas representações semióticas diferentes. Normalmente faz-se um esquema correspondente a representação geométrica.

Escritas simbólicas, representações gráficas e linguagem formal são outros tipos de registros de representação semiótica. A linguagem formal consiste em uma linguagem própria de cada tipo de ciência ou conhecimento.

Sobre os diferentes registros de representação semiótica Duval afirma conforme transcrição a seguir.

Assim, os enunciados, as configurações geométricas, os esquemas, as fórmulas são *produções cujo conteúdo chama a atenção sobre um objeto, mesmo que elas pareçam explicitá-lo, não devem ser confundidas com o objeto representado.* (DUVAL, 2011, p. 72)

Operações próprias de cada registro são cognitivas e devem cumprir as funções de produção de representação de qualquer coisa, objetivação (o pensamento dos objetos representados precede a representação) e transformação de representações por tratamentos e conversões.

Duval (2009) afirma ser necessário, para o entendimento em matemática, a coordenação entre pelo menos dois registros. A conversão é condição primordial para esse entendimento.

Para compreender o que uma representação semiótica representa e como ela o representa, é preciso considerar uma segunda representação que é associada à primeira por uma variação que podemos produzir de maneira sistemática. (DUVAL, 2011, p. 103,104)

Coordenar diferentes registros de representação semiótica deve ocorrer a partir de duas operações: a primeira é converter a representação em outro registro e a segunda é gerar todas as modificações possíveis dessa representação até convertê-la nesse outro registro.

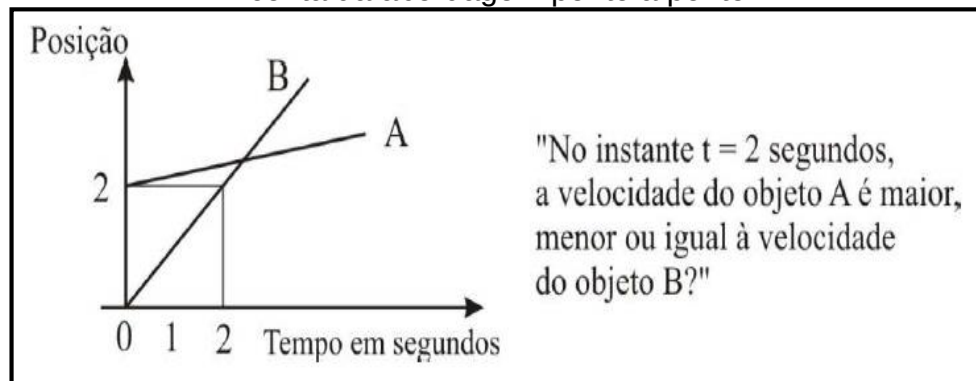
Baseado na teoria de Registros de Representação Semiótica, Duval (2011) alega que a conversão entre os diferentes registros de um mesmo objeto matemático apresenta-se como uma das atividades com mais dificuldades para os alunos e afirma que o ensino centrado nas conversões apresentará resultados melhores, contrário ao ensino centrado apenas em atividades de tratamento ou de formação.

A conversão entre dois registros pode apresentar congruência ou não-congruência. A congruência ocorre quando há uma correspondência termo a termo e as informações estão explícitas, neste caso a conversão é quase imediata. A não existência dessa correspondência implica na não-congruência.

Os registros podem ser discursivos como por exemplo a língua natural, a linguagem formal, a linguagem simbólica etc. e não-discursivos dentre eles as imagens, figuras geométricas, os gráficos cartesianos entre outros. Também podem ser monofuncionais quando são referentes à própria matemática ou multifuncionais, caso contrário.

Diante de todas as classificações possíveis para os diferentes tipos de registros é possível verificar a viabilidade de ocorrer a conversão entre dois tipos de registros de forma direta ou inversa. Para o entendimento do objeto matemático é necessário que o aluno seja capaz de realizar tanto uma quanto a outra.

Figura 4 - Questão que traz à tona o fenômeno de não congruência semântica por conta da abordagem ponto a ponto



Fonte: Clement, 1985 apud Duval, 2011, p. 109

Na figura 4, é possível observar um exemplo de conversão não congruente apresentado em um artigo escrito por Duval (2011) o qual expõe uma situação descrita no registro da língua natural e representada no registro gráfico. Duval (2011) menciona muitos erros cometidos pelos alunos para essa questão e analisa o motivo de tantos erros.

[...] Se retomarmos a nossa análise das variáveis visuais, observamos que a altura de um ponto em relação ao eixo vertical não é um valor figural pertinente: **a altura resulta de valores tomados por duas variáveis visuais diferentes**: o ângulo e a posição do traçado. E sobre o gráfico apresentado, **a comparação dos ângulos dos traçados A e B não poderá ser feita se não forem neutralizados os valores diferentes de posição**. Isto revela que este tipo de erro não está relacionado à dificuldade do conceito de inclinação, mas à ausência de discriminação das variáveis visuais pertinentes no registro das representações gráficas. (Duval, 2011b, p. 109)

Segundo Duval (2011, p. 121) “A variação de congruência e não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos.” O registro da língua natural tem uma distância cognitiva considerável em relação a outros registros, o funcionamento desse tipo de registro discursivo não assemelha-se em nada ao funcionamento de outros registros. Por ser um registro multifuncional não é possível fazer correspondências termo a termo de forma direta e daí surge a necessidade de uma *representação auxiliar de transição*.

Duval (2011) conclui que a análise do funcionamento cognitivo do pensamento em Matemática pode ser resumido:

- existe um funcionamento semiótico específico para cada registro de representação.
- a passagem de um registro a outro exige que comecemos a desenvolver uma coordenação sinérgica entre pelo menos dois registros. Esse desenvolvimento exige atividades e tarefas específicas, diferentes daquelas privilegiadas para a aquisição de “conceitos”.
- a compreensão dos “conceitos matemáticos”, diferentemente da compreensão dos conceitos nas outras disciplinas, pressupõe a coordenação sinérgica de pelo menos dois registros de representação. (DUVAL, 2011, p. 124)

Trabalhar com base nesta teoria deve ter elaboração de sequências criteriosa. Essas sequências precisam proporcionar um esquema didático de progressão, das atividades práticas às atividades mais teóricas. Esse conjunto de atividades também deve contemplar pelo menos dois registros de representação semiótica.

No método de análise fundamentado nos registros de representação, a escolha do segundo registro, que servirá de registro revelador, é essencial. Para as representações gráficas, essa escolha é evidente. Ele foi específica e intencionalmente desenvolvido em relação com a escrita algébrica das relações. E para analisar esse registro, a escolha inversa se impõe naturalmente, mesmo que isso não seja frequentemente colocado em prática no ensino e que nos contentemos com uma única regra de codificação para converter as equações ou inequações em representações gráficas. (DUVAL, 2011, p. 115)

Duval (2011) aponta a importância do uso do computador para a realização desse trabalho. O computador é apresentado como uma ferramenta poderosa e afirma que o seu surgimento facilitou a substituição de papel e lápis. Menciona ainda a qualidade dos *softwares* e a contribuição trazida por eles em relação a rapidez e eficiência para o trabalho cada vez mais preciso.

De acordo com as ideias de Duval (2011) os computadores não produzem novos registros de representação, as representações apresentadas por eles são exatamente as mesmas feitas com lápis e papel, mas são uma maneira nova de produzir registros capaz de acelerar os tratamentos. As representações não-discursivas tornam-se manipuláveis como se fossem objetos reais e isso proporciona maior dinamismo impossível antes.

A utilização de *softwares* exige uma atividade cognitiva mais alta por parte do aluno diferente de situações nas quais não é utilizado. Além do trabalho com a matemática, a manipulação dos menus também é extremamente importante. Assim o estudante precisa desenvolver várias habilidades para realizar a coordenação esperada entre os diferentes registros.

3.2 A teoria dos Registros de Representação Semiótica e o estudo da reta

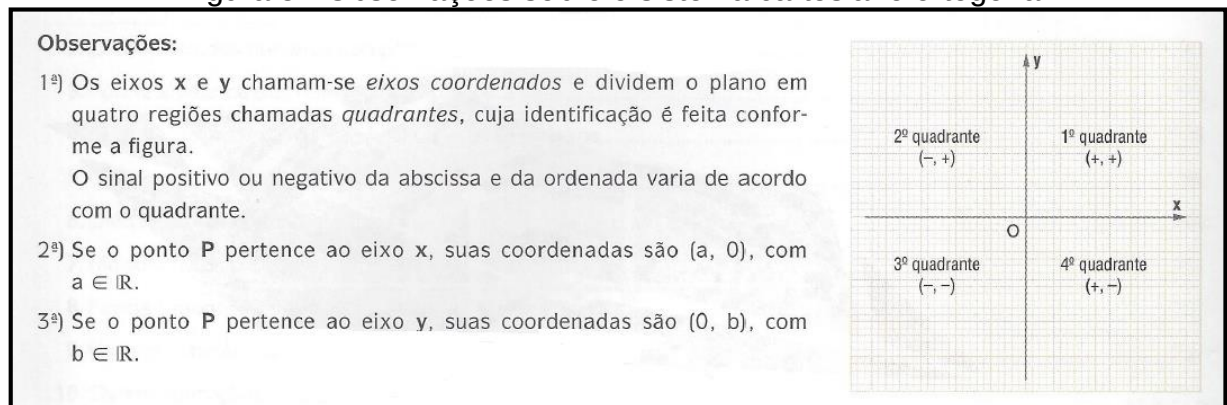
A sequência de atividades foi proposta para estudantes da 3ª série do EM da rede pública de ensino do estado de São Paulo. Assim, com base no Currículo do estado de São Paulo (2011) os alunos necessitam estudar esse conteúdo no primeiro bimestre desta série e a eles devem ser apresentados os seguintes tópicos referentes ao estudo da reta: alinhamento de três pontos, equação da reta e estudo dos seus coeficientes e posições relativas entre duas retas.

Em continuação apresenta-se a análise dos diferentes tipos de registros estudados de acordo com essa teoria.

3.2.1 Sistema cartesiano ortogonal plano

Segundo Dante (2005) é possível adotar como forma de estabelecer correspondências biunívocas¹⁶ entre os pontos em um plano e os pares ordenados de números reais, dois eixos ortogonais, chamados eixo x e eixo y , que formam o *sistema cartesiano ortogonal*. A intersecção entre os eixos x e y é o ponto O denominado *origem* do sistema. Na figura a seguir são apresentadas algumas características do sistema cartesiano ortogonal.

Figura 5 - Observações sobre o sistema cartesiano ortogonal



Fonte: Dante (2005, p. 8)

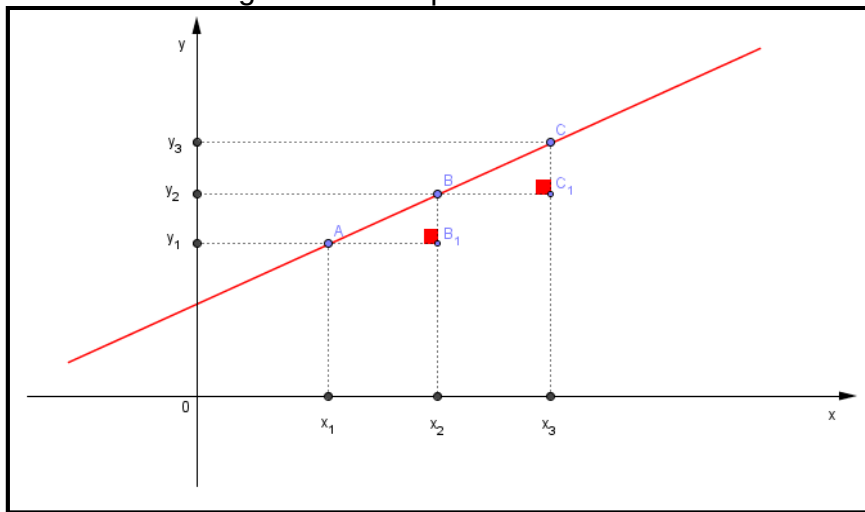
¹⁶ “Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto de pares ordenados de números reais, isto é, a cada ponto do plano corresponde um único par ordenado (x, y) e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto do plano.” (DANTE, 2005, p. 7)

Observa-se que o sistema cartesiano ortogonal é plano, ou seja, existem apenas duas dimensões, os pontos são definidos por um par ordenado e assim o conjunto a ser considerado é o conjunto dos números reais. Como trata-se da correspondência de dois valores representa-se por R^2 .

3.2.2 Condição de alinhamento de três pontos

Diz-se que três pontos estão alinhados quando existe uma reta que passa pelos três ao mesmo tempo.

Figura 6 - Três pontos alinhados



Fonte: Figura criada pela pesquisadora.

Na figura 5 pode-se observar dois triângulos retângulos: ΔABB_1 e ΔBCC_1 e é possível afirmar que:

$$\Delta ABB_1 \cong \Delta BCC_1$$

Dados os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pode-se dizer que A, B e C estão alinhados. Se $\Delta ABB_1 \cong \Delta BCC_1$, logo:

$$\frac{C_1B}{B_1C} = \frac{CC_1}{BB_1}^{17}$$

Se $\frac{C_1B}{B_1C} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ (1), e $\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ (2)

Comparando (1) e (2), tem-se:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \Rightarrow (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) = (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)$$

¹⁷ Adotou-se a notação C_1B para a medida do segmento de reta que tem como extremidades os pontos C_1 e B. A notação $\overline{C_1B}$ é utilizada para indicar o segmento de reta.

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = 0$$

$$x_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1 = 0$$

$$x_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 = 0$$

O primeiro termo da igualdade corresponde ao determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

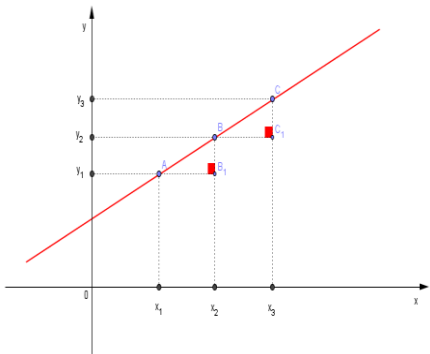
Então diz-se:

Sejam os três pontos A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) e C (x_3, y_3) , afirma-se que eles estão alinhados se:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Neste caso é possível perceber a presença de quatro registros de representação semiótica diferentes: registro da língua natural, registro simbólico, registro algébrico e registro gráfico. Conforme apresentado na tabela a seguir.

Tabela 1 - A condição de alinhamento de três pontos e os Registros de Representação Semiótica

<i>Registro da língua natural</i>	<i>Registro simbólico</i>
Três pontos estão alinhados quando existe uma reta que passa pelos três ao mesmo tempo. A, B e C são colineares.	$\frac{\Delta ABB_1}{C_1B} = \frac{\Delta BCC_1}{B_1C} = \frac{\Delta CC_1}{BB_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$
<i>Registro algébrico</i>	<i>Registro gráfico</i>
$\frac{C_1B}{B_1C} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ $\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$	

É possível observar que houve algumas conversões, do registro da língua natural para o registro gráfico, do registro gráfico para o registro algébrico, com o registro simbólico servindo como registro *auxiliar de transição*. Partindo das proposições (1) e (2) até chegar ao determinante foi realizado um **tratamento** dentro do registro algébrico. Neste caso foram utilizados quatro registros de representação semiótica, o que atende as considerações da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

3.2.3 Equação da reta

Quando três pontos estão alinhados significa a existência de uma reta que contém os três pontos. Porém estes pontos não são os únicos pertencentes a esta reta, ela possui infinitos pontos de coordenadas x e y . Se conhecermos dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pertencentes a reta é possível dizer que existirão infinitos outros pontos e poderemos representá-los de forma genérica por $C(x, y)$. Usando a condição de alinhamento de três pontos temos:

Dados $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x, y)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ao resolver o determinante, vem:

$$(y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) = 0$$

Considera-se: $a = (y_1 - y_2)$, $b = (x_2 - x_1)$ e $c = (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$

Então substituindo tem-se: $\boxed{ax + by + c = 0}$

Toda reta pode ser escrita algebricamente pela equação $ax + by + c = 0$. Esta equação é chamada de equação da reta na forma geral.

Neste caso é possível perceber a utilização de dois Registros de Representação Semiótica: registro da língua natural e o registro algébrico.

Tabela 2 - A equação da reta na forma geral e os Registros de Representação Semiótica

<i>Registro da língua natural</i>	<i>Registro algébrico</i>
Quando três pontos estão alinhados isto significa que existe uma reta que contém os três pontos. Porém estes pontos não são os únicos pertencentes a esta reta, ela possui infinitos pontos de coordenadas x e y. Se conhecermos dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pertencentes a reta é possível dizer que existirão infinitos outros pontos e poderemos representá-los de forma genérica por $C(x, y)$.	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$ $(y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) = 0$ $a = (y_1 - y_2), b = (x_2 - x_1) \text{ e}$ $c = (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$ $ax + by + c = 0$

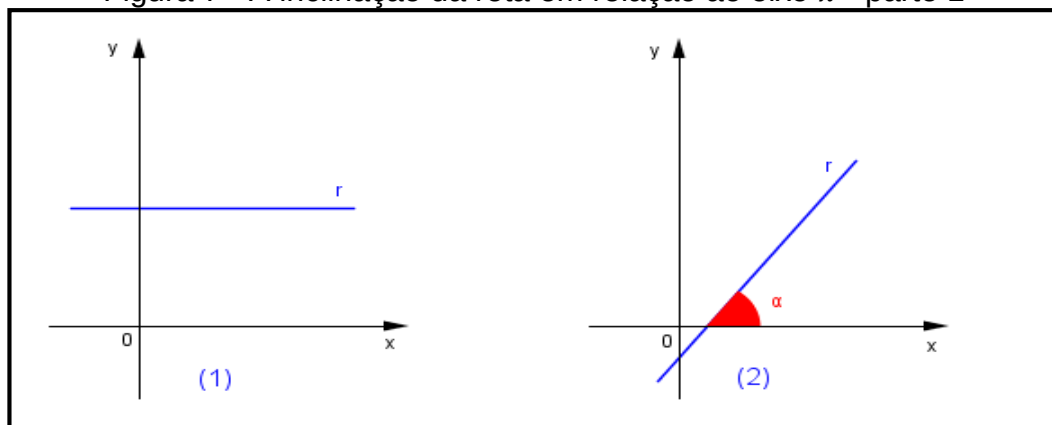
Houve a **conversão** do registro da língua natural para o registro algébrico. Dentro do registro algébrico foram feitos vários **tratamentos** a partir do determinante até chegar na equação da reta na forma geral.

3.2.4 Coeficiente angular

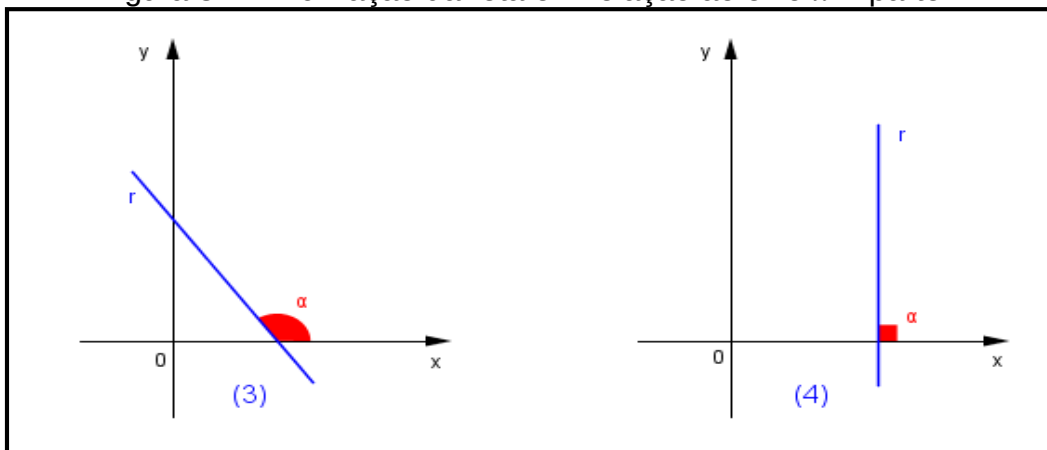
Dado um sistema de coordenadas cartesianas e uma reta r , pode-se dizer que a reta r forma um ângulo α com o eixo x . O ângulo α varia de acordo com a inclinação da reta.

Observa-se:

Figura 7 - A inclinação da reta em relação ao eixo x - parte 1



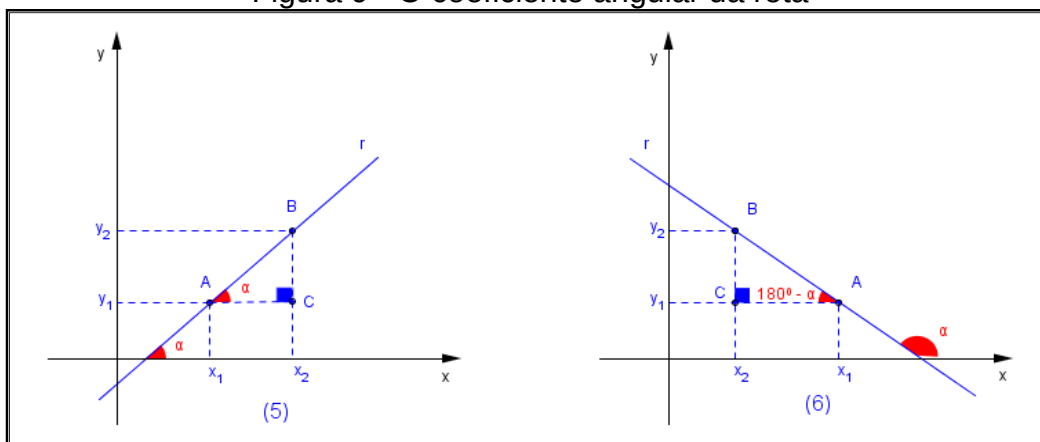
Fonte: Figura criada pela pesquisadora

Figura 8 - A inclinação da reta em relação ao eixo x - parte 2

Fonte: Figura criada pela pesquisadora

- (1) $\alpha = 0^\circ$
- (2) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- (3) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- (4) $\alpha = 90^\circ$

Figura 9 - O coeficiente angular da reta



Fonte: Figura criada pela pesquisadora.

- (5) O triângulo ABC é um triângulo retângulo, pois $\hat{C}$ é reto (90°). Então, pela trigonometria tem-se:

Seja $\overline{BC}$ ¹⁸ o cateto oposto em relação a α , então:

$$BC = y_2 - y_1$$

¹⁸ $\overline{BC}$ é o segmento de reta de origem B e extremidade C. BC é a medida desse segmento. Critério adotado pela pesquisadora.

Seja $\overline{AC}$ ¹⁹ o cateto adjacente em relação a α , então:

$$AC = x_2 - x_1$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(6) O triângulo ABC é um triângulo retângulo, pois $\hat{C}$ é reto (90°). Então, pela trigonometria tem-se:

Seja $\overline{BC}$ o cateto oposto em relação a α , então:

$$BC = y_2 - y_1$$

Seja $\overline{AC}$ o cateto adjacente em relação a α , então:

$$AC = x_1 - x_2$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Como:

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \Rightarrow -\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Ao multiplicar os dois membros da equação tem-se:

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Conclui-se que:

Se α é o ângulo de inclinação da reta r em relação ao eixo x , e ao chamar a $tg \alpha$ de m , tem-se:

$$\boxed{m = tg \alpha}$$

se o ângulo α é conhecido

ou

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

se são conhecidos dois pontos A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) pertencentes à reta.

O valor de m é denominado *coeficiente angular* ou *declividade* da reta e representa a posição da reta em relação aos eixos x e y , no sistema de coordenadas cartesianas.

¹⁹ $\overline{AC}$ é o segmento de reta de origem A e extremidade C. AC é a medida desse segmento. Critério adotado pela pesquisadora.

3.2.4.1 Equação da reta conhecidos: o coeficiente angular e um ponto $P(x_0, y_0)$

Sabe-se que a partir do ângulo α que uma reta r forma com o eixo x é possível determinar o coeficiente angular desta reta por meio da expressão:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Também é possível determinar o coeficiente angular da reta utilizando a expressão:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Conhecendo o ponto $P(x_0, y_0)$, considerando a existência de vários outros pontos pertencentes a reta do tipo $P_1(x, y)$ e ao substituir na expressão: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, tem-se:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Ao isolar $(y - y_0)$, tem-se:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Assim conhecendo o coeficiente angular da reta e um ponto pertencente a ela, pode-se determinar a equação da reta usando esta expressão.

Neste caso é verificada a presença de quatro registros de representação semiótica: o registro da língua natural, o registro simbólico, o registro da escrita algébrica e o registro gráfico.

Tabela 3 - O coeficiente angular e os Registros de Representação Semiótica

<i>Registro da língua natural</i>	
Dado um eixo de coordenadas cartesianas e uma reta r, pode-se dizer que a reta r forma um ângulo α com o eixo x. O ângulo α varia de acordo com a inclinação da reta. Assim conhecendo o coeficiente angular da reta e um ponto pertencente a ela, é possível determinar a equação da reta usando esta expressão.	
<i>Registro Simbólico</i>	<i>Registro Algébrico</i>
(1) $\alpha = 0^\circ$ (2) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (3) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (4) $\alpha = 90^\circ$ $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ $P(x_0, y_0)$ e $P_1(x, y)$	$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} \quad \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $-\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = tg \alpha$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ $(y - y_0) = m(x - x_0)$
<i>Registro gráfico</i>	

Foram feitas várias **conversões** entre os registros de representação semiótica apresentados. Foi feita a conversão do registro da língua natural para o registro gráfico, do registro gráfico para o registro algébrico, do registro gráfico para o registro simbólico e finalmente do registro simbólico para o registro algébrico. Além das conversões foram feitos vários **tratamentos** nos registros algébrico e gráfico.

3.2.5 Equação da reta na forma reduzida

Dada a equação da reta r , $ax + by + c = 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, e $b \neq 0$ é possível isolar y e tem-se:

$$by = -ax - c$$

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right), \text{ considera-se } m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$$

Logo conclui-se: $y = mx + n$

Sabe-se que o coeficiente m da equação representa o coeficiente angular da reta r e o coeficiente n da equação representa o coeficiente linear da reta. O coeficiente angular indica a posição da reta em relação ao eixo x e o coeficiente linear representa a ordenada do ponto em que a reta r cruza o eixo y .

É possível perceber dois registros de representação semiótica: o registro da língua natural e o registro algébrico.

Tabela 4 - A equação da reta na forma reduzida e os Registros de Representação Semiótica

<i>Registro da língua natural</i>	<i>Registro algébrico</i>
<i>O coeficiente m da equação representa o coeficiente angular da reta r e o coeficiente n da equação representa o coeficiente linear da reta. O coeficiente angular indica a posição da reta em relação ao eixo x e o coeficiente linear representa a ordenada do ponto que a reta r cruza o eixo y.</i>	$ax + by + c = 0$ $by = -ax - c$ $y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$ $m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$ $y = mx + n$

No registro algébrico é possível perceber um **tratamento** para a mudança na forma da equação. Houve uma **conversão** do registro algébrico para o registro da língua natural na explicação sobre os coeficientes da equação.

3.2.6 Posições relativas entre duas retas

Dadas duas retas r e s , com m_1 e m_2 denominados coeficientes angulares e n_1 e n_2 denominados coeficientes lineares das suas equações, tem-se:

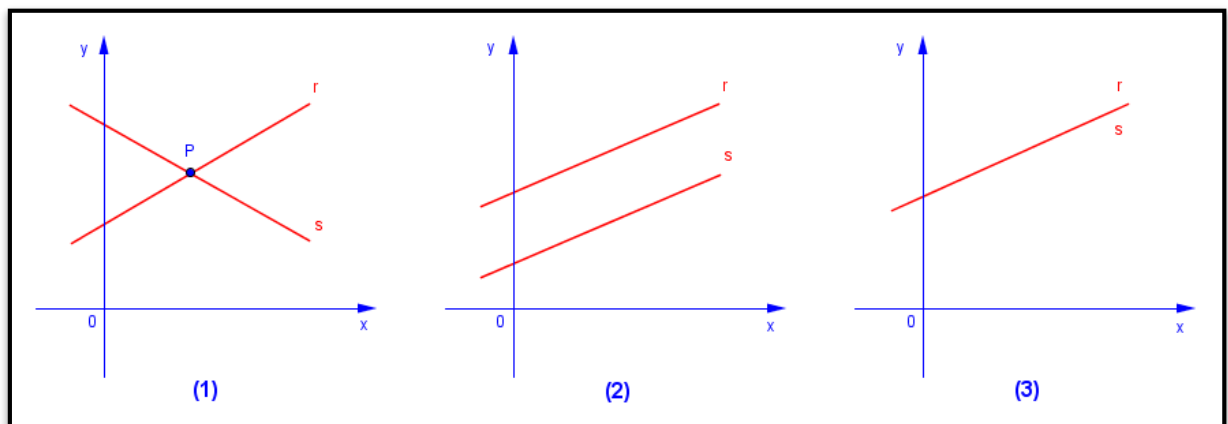
$$r: y = m_1x + n_1$$

$$s: y = m_2x + n_2$$

Elas podem ocupar três posições relativas no plano cartesiano.

- r e s são concorrentes, então existe um único ponto em comum
 $r \times s \Leftrightarrow \exists P(x, y) / P \in r \text{ e } P \in s$
- r e s são paralelas e distintas, então não existe nenhum ponto em comum
 $r // s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$
- r e s são paralelas e coincidentes, então existem infinitos pontos em comum
 $r // s \Leftrightarrow r \equiv s$

Figura 10 - Posições relativas entre duas retas



Fonte: Figura criada pela pesquisadora

$$(1) r \times s$$

$$(2) r // s$$

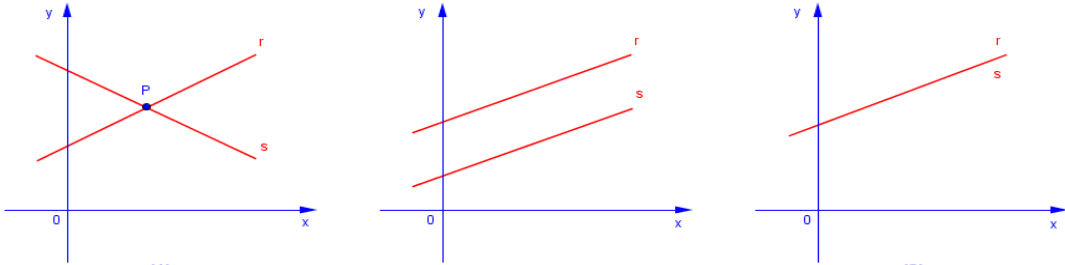
$$(3) r // s \Leftrightarrow r \equiv s$$

Assim conclui-se:

- as retas são concorrentes: $r \times s \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$
- as retas são paralelas distintas: $r // s \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ e } n_1 \neq n_2$
- as retas são paralelas coincidentes: $r // s \text{ e } r \equiv s \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ e } n_1 = n_2$

Neste caso é possível observar vários tipos de registros de representação semiótica: registro da língua natural, registro da linguagem formal, registro simbólico, registro algébrico e registro gráfico.

Tabela 5 - As posições relativas entre duas retas e os Registros de Representação Semiótica

<i>Registro da língua natural</i>	
<i>r e s são concorrentes, então existe um único ponto em comum</i> <i>r e s são paralelas e distintas, então não existe nenhum ponto em comum</i> <i>r e s são paralelas e coincidentes, então existem infinitos pontos em comum</i>	
<i>Registro simbólico</i>	<i>Registro algébrico</i>
$r \times s$ $r // s$ $r // s$ $r \equiv s$	$r: y = m_1x + n_1$ $s: y = m_2x + n_2$
<i>Registro da linguagem formal²⁰</i>	
$r \times s \Leftrightarrow \exists P(x, y) / P \in r \text{ e } P \in s$ $r // s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$ $r // s \Leftrightarrow r \equiv s$ $r \times s \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$ $r // s \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ e } n_1 \neq n_2$ $r // s \text{ e } r \equiv s \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ e } n_1 = n_2$	
<i>Registro gráfico</i>	
 (1) (2) (3)	

Foram realizadas algumas **conversões**. Do registro da língua natural para o registro algébrico e para o registro simbólico, em seguida para a linguagem formal. O próximo passo foi a conversão do registro em linguagem formal para o registro gráfico. Após essa conversão foi realizada uma conversão do registro gráfico para o registro simbólico. Para finalizar a conversão do registro em linguagem formal associado ao registro em língua natural. Nesta situação não houve **tratamento**.

²⁰ De acordo com Duval (2011) a linguagem formal é aquela própria da matemática, ou seja, só é utilizada dentro da própria matemática.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval pode perfeitamente ser associada ao estudo da geometria analítica e mais precisamente, como foi descrito neste capítulo, para o estudo da equação da reta.

O estudo da reta tem como objetivo combinar diferentes tipos de representações semióticas de modo a fazer com que o aluno identifique estes registros, cada um com suas particularidades, e utilizá-los da melhor maneira possível nas diferentes situações que possam ser propostas.

Integração entre os diferentes registros dá-se de maneira que conceitos já estudados anteriormente possam ser apreendidos pelos alunos em busca do entendimento do objeto matemático.

[...] os diferentes termos de uma equação permitem codificar as características de todas as unidades figurais [...] graças a um sistema de eixos orientados e graduados. *Daí sua articulação <<objetiva>>*, aparentemente simples que possibilita o pensamento funcionar simultaneamente nos dois tipos de representações muito diferentes [...] (DUVAL, 2011, p. 25)

Neste caso o foco é o próprio objeto matemático e não suas representações, esse intuito tem que ser claro para o aluno durante as aulas. Os diferentes registros de representação semiótica que são estudados e explorados funcionam como um meio de atingir o objeto matemático.

Utilizar o registro da língua natural será o ponto de partida e em seguida as conversões para outros registros como os registros gráfico, da linguagem simbólica, da linguagem formal e da escrita algébrica serão parte importante do processo utilizado para alcançar o entendimento do objeto.

Os tratamentos dentro do mesmo registro são também condições necessárias para que o objetivo seja alcançado. Saber construir um gráfico, realizar operações algébricas, trabalhar com símbolos etc. são condições para realizar as conversões, portanto os tratamentos têm a mesma importância das conversões neste processo.

Baseada em todos esses conceitos foi construída uma sequência de atividades que visam explorar tanto as conversões quanto os tratamentos com a utilização de um novo recurso, o computador. A utilização de um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, será um diferencial e espera-se colaborar para a associação entre os diferentes registros.

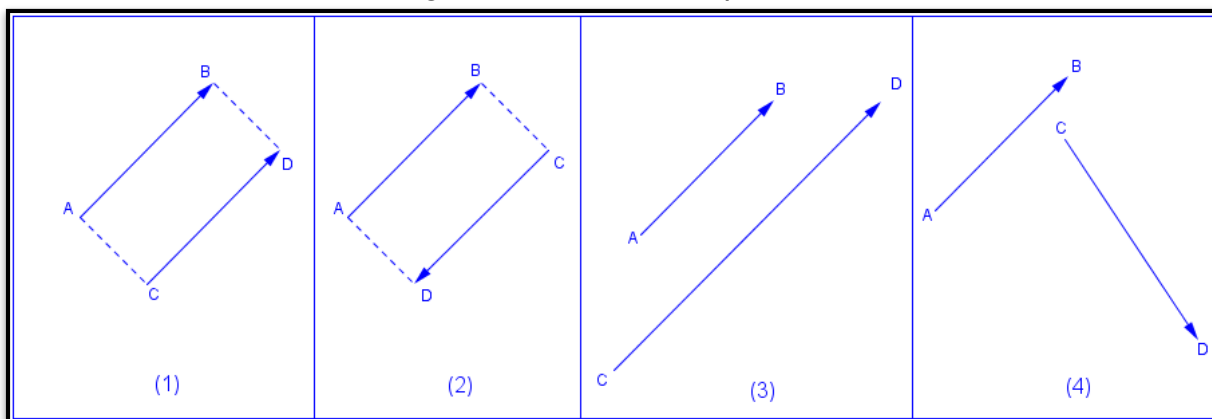
3.2.7 O estudo da reta no ensino superior

Como já fora mencionado anteriormente, existe grande interesse por parte dos alunos do EM em carreiras ligadas à área das ciências exatas, por este motivo julga-se interessante observar como o assunto é tratado neste nível de ensino. E dessa forma verificar como estabelecer uma ponte entre o que foi estudado no ensino médio e o que será estudado no ensino superior.

O tratamento dado ao estudo da geometria analítica no ensino superior é um tratamento vetorial e espacial diferente do tratamento dado no EM. Segundo Camargo e Boulos (2005) um vetor é um segmento orientado que possui um comprimento, uma direção e um sentido que está compreendido entre um par ordenado de pontos no espaço. Seja (A,B) um vetor em que A é a sua *origem* e B sua *extremidade* e (C, D) outro vetor em que C é sua *origem* e D sua *extremidade*. É possível dizer que (A,B) e (C,D) têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos AB e CD têm o mesmo comprimento.

De acordo com Camargo e Boulos (2005) os vetores (A,B) e (C,D) têm a mesma direção se $AB \parallel CD$ (o segmento orientado AB é paralelo ao segmento orientado CD). São as definições de origem e extremidade que determinam o sentido dos vetores.

Figura 11 - Vetores no plano



Fonte: Figura criada pela pesquisadora.

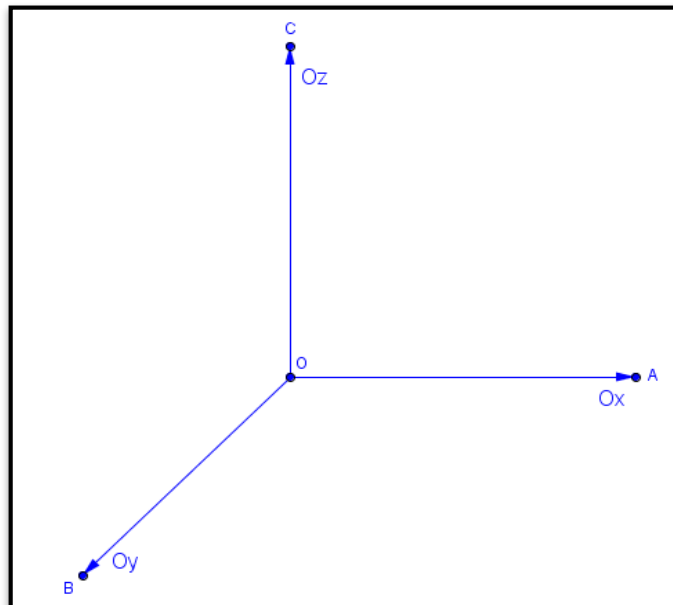
- (1) (A,B) e (C,D) têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.
- (2) (A,B) e (D,C) têm mesmo comprimento, mesma direção e sentidos diferentes.
- (3) (A,B) e (C,D) têm comprimentos diferentes, mesma direção e mesmo sentido.
- (4) (A,B) e (C,D) têm comprimento, direção e sentido diferentes.

Para Camargo e Boulos (2005) a possibilidade dos vetores serem representados pelos pares ordenados de pontos no espaço indicados por (A,B) ou ainda por $\overrightarrow{AB}$ e também por uma letra latina minúscula com uma seta logo acima, por exemplo, $\vec{v}$.

Os vetores estão estabelecidos para o espaço, Camargo e Boulos (2005) definem um sistema de coordenadas para a possibilidade de localizar os pontos no espaço. Seja O um ponto do espaço e uma base composta pelos vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, em que O é a origem do sistema e A, B e C são as extremidades dos vetores respectivamente.

De acordo com Camargo e Boulos (2005, p. 119) “As retas AO, OB e OC são chamadas eixos coordenados, *respectivamente eixo dos x, eixo dos y, eixo dos z, ou ainda eixo das abscissas, eixo das ordenadas, eixo das cotas*; são indicadas respectivamente por Ox, Oy e Oz.”

Figura 12 - Eixos coordenados Ox, Oy e Oz



Fonte: Figura criada pela pesquisadora.

Assim fica estabelecida a tripla ordenada (x,y,z) de números reais como as coordenadas de um ponto qualquer do espaço, P. Logo $P = (x,y,z)$. O conjunto de triplas ordenadas de números reais no espaço é denominado R^3 .

3.2.7.1 Estudo da reta no espaço

Dada uma reta r contida no espaço, escolhe-se um ponto A pertencente a esta reta e um vetor $\vec{v}$ não nulo e paralelo à reta r . Então um ponto X pertencente ao espaço pertence a r se e somente se $\overrightarrow{AX}$ e $\vec{v}$ satisfazem a condição de que existe $\lambda \in R$, tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{v}$.

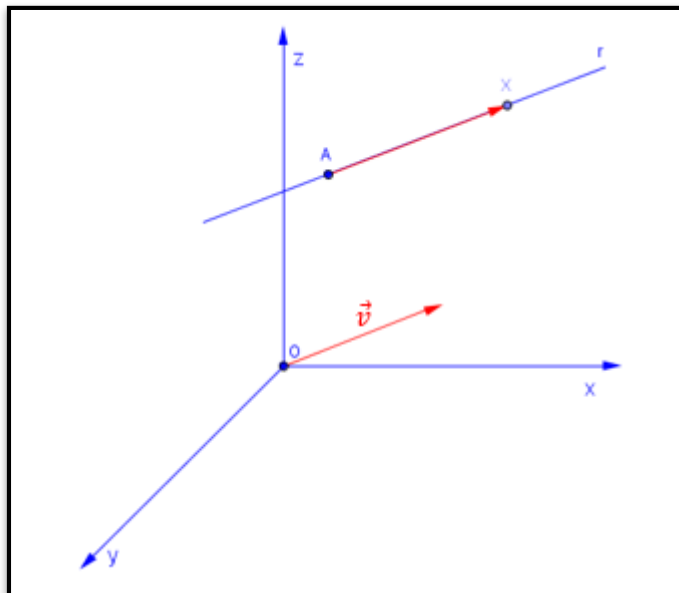
Camargo e Boulos (2005, p. 126) definem “Em outras palavras, dado λ real, nos dá um ponto X de r , e dado $X \in r$, existe $\lambda \in R$ tal que se verifica. A reta r é, pois, o lugar geométrico dos pontos X do espaço tais que vale $X = A + \lambda \vec{v}$.”

Esta equação chama-se *equação vetorial* da reta r e escreve-se:

$$r: X = A + \lambda \vec{v}, \quad (\lambda \in R)$$

Obs. O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e λ é denominado *parâmetro*.

Figura 13 - A reta no espaço R^3



Fonte: Figura criada pela pesquisadora.

Ao observar como o estudo da reta é apresentado no ensino superior, verifica-se a importância do assunto estudado no EM para o seu entendimento. Desse modo se o aluno tiver um bom conhecimento sobre a reta no

plano pode ser mais fácil o entendimento da reta no espaço. Convém destacar a relação entre geometria e álgebra tem papel fundamental para a apreensão do conceito de reta no espaço.

Este autor (Duval), quando tratou da função linear/afim, partiu do pressuposto que tais funções produzem retas no plano cartesiano e estudou o papel dos coeficientes da equação da reta. [...] a representação simbólica da função gera um conjunto de características algébricas [...] cujos elementos estão relacionados aos elementos de um conjunto de características gráficas [...]. (Moretti, Ferraz e Ferreira, 2008, p.113)

Apesar de ser apresentado um elemento novo, o vetor, verificam-se as semelhanças entre as ideias de coeficiente angular e coeficiente linear. Outro aspecto a ser levado em consideração é o fato de um ponto ser representado por uma tripla ordenada o que pode ser relacionado diretamente com o par ordenado no sistema cartesiano ortogonal plano.

O uso do computador pode ser um aliado para o entendimento, a existência de *softwares* com o plano (2D) e o espacial (3D) associados facilita o aprendizado. Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 113) afirmam que “[...] a partir de certo momento no ensino superior e mesmo no ensino secundário a conversão entre a representação simbólica para a gráfica é efetuada por programas computacionais.” Assim o estudo ganha um novo enfoque no qual o aluno deve ser crítico em relação a imagem observada na tela do computador. Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 114) complementam “[...] esta crítica pode ser feita por meio do reconhecimento das unidades básicas gráficas associadas às unidades básicas simbólicas pertinentes.”

Para aqueles alunos que pretendem dar continuidade aos estudos em carreiras ligadas à área das ciências exatas como engenharia, matemática, física etc. é importante terem o conhecimento da geometria analítica plana para possibilitar o aprofundamento na geometria analítica espacial. Este fato motiva a pensar melhor a respeito de como trabalhar de maneira mais eficiente com a geometria analítica plana.

3.3 O uso da tecnologia nas aulas de matemática

3.3.1 O computador como ferramenta de ensino

A introdução de novas tecnologias no ensino tem sido um grande desafio para todos, porém cada vez mais é preciso lidar com ela para maior eficácia e atratividade do trabalho. Sua utilização é recomendada por vários documentos oficiais. Sobre a utilização do computador e o ensino de matemática no EM os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam conforme transcrição a seguir.

É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. [...] O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. (BRASIL, 2000b, p. 41)

Portanto o conhecimento sobre a tecnologia de modo geral pode ser inserido na prática em sala de aula. A utilização do computador é uma opção com a possibilidade de trazer vários benefícios para o processo de ensino e aprendizagem. As facilidades trazidas pelos *softwares* para o estudo da matemática são muitas, uma delas é em relação ao tempo, pois é possível realizar diversas operações com um simples clique, fato que possibilita o trabalho mais centrado nas análises ao invés de priorizar construções e resoluções. Sobre isso o PCNEM+(2002) traz sugestões de como seria possível fazê-lo, conforme a transcrição a seguir.

Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos “com lápis e papel”, e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento. (BRASIL, 2002a, p. 118)

Dessa maneira pode apresentar bons resultados de aprendizagem, além de trazer uma motivação a mais para os alunos, pois é um recurso mais atrativo. As orientações curriculares para o Ensino Médio – OCEM-EM (2006, p. 87) apontam a

tecnologia a ser trabalhada na escola em dois aspectos “[...] a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.” Ao considerar a matemática para a tecnologia, o trabalho deve contemplar a capacitação para o uso de ferramentas como a calculadora e planilhas eletrônicas.

Ao considerar-se a *Tecnologia para Matemática* o uso dos *softwares* apresenta-se de maneira muito interessante.

Já se pensando na *Tecnologia para a Matemática*, há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. São características desses programas: a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela. (BRASIL, 2006c, p. 88)

Nessa linha, pretende-se usar um *software* a fim proporcionar o “pensar matematicamente”, as OCEM-EM (2006, p. 88-89) citam os *softwares* de geometria dinâmica como recursos interessantes, para sua manipulação exigem “[...] além de conhecimento em geometria, uma escolha de estratégia de resolução do problema, com a elaboração de um cronograma de ataque aos diferentes subproblemas que compõem o problema maior.” E consideram ainda a importância de trabalhar dessa maneira pois “É uma atividade que coloca em funcionamento diferentes habilidades cognitivas – o pensar geométrico, o pensar estratégico, o pensar hierárquico.”

Para o estudo da geometria analítica é importante salientar a existência de vários programas e o trabalho com eles permite várias maneiras de explorá-lo.

Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação – inequação. (BRASIL, 2006, p. 89)

O Currículo do estado de São Paulo (2011) aponta a utilização de recursos tecnológicos de maneira muito positiva. O trabalho em matemática deve tirar proveito desses recursos.

Por um lado, certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável, salvo em condições extraordinárias, em razão de extremo mau uso. (SÃO PAULO, 2011, p. 33-34)

A escolha de um *software* deve ser realizada de forma criteriosa a fim de contemplar objetivos preestabelecidos. Esse papel fica a cargo do professor que decidirá após análise de vários aspectos em relação aos alunos, conteúdos, recursos disponíveis etc.

3.3.2 O GeoGebra

Diante das potencialidades apresentadas para o uso de recursos tecnológicos e da escolha da geometria analítica, mais precisamente o estudo da reta, para tanto inicia-se a busca pela ferramenta ideal para o desenvolvimento pretendido. Optou-se pelo trabalho com um *software*. Dentre os diversos *softwares* existentes para o uso nas aulas de matemática existem vários tipos, os estatísticos, os geométricos, os algébricos, os de programação etc.

A ideia era trabalhar com a manipulação e a articulação entre a geometria e a álgebra. Assim foi concedida especial atenção para aqueles denominados *softwares de geometria dinâmica*. É preciso planejar o desenvolvimento pretendido.

Um *software* para o aprendizado em matemática, diferente de um *software* para “fazer” matemática, precisa levar em consideração o crescimento cognitivo, que pode diferenciar significativamente a estrutura lógica e formal de como se aprende. Vale a pena considerar os aspectos cognitivos relevantes para o uso da tecnologia computacional antes da principal tarefa de focar no ambiente computacional e o seu papel no aprendizado da matemática. (TALL, 2002, p. 189)

Entre os *softwares* mais conhecidos encontram-se o *Cabri Géomètre*, o GeoGebra, o *Geometer's Sketchpad* etc. Os três mencionados possuem uma característica em comum, associam a geometria e a álgebra, ou seja, é possível realizar manipulações, fazer construções de figuras geométricas e então observar a

relação com a álgebra. Porém o GeoGebra chamou a atenção por ser um *software* livre, o que facilita o acesso a ele.

O *software* GeoGebra foi criado por *Markus Hohenwarter* como parte de sua tese de doutorado, na *Universidade de Salzburg* em 2002. Foi desenvolvido de modo a integrar a geometria interativa e os sistemas algébricos computacionais.

Nos últimos 10 anos o *software* GeoGebra tem sido aprimorado com a colaboração de um grupo de 15 desenvolvedores e mais de 100 tradutores pelo mundo em um projeto *open-source*. Neste projeto, ao baixar o *software*, a pessoa tem acesso a todas as suas informações e pode alterá-lo de modo a colaborar com sua evolução.

A versão em português, do *software* GeoGebra pode ser obtida no *site* ***www.geogebra.org*** no qual também podem ser encontradas informações, tutoriais, além de uma comunidade com fóruns nos quais é possível ter contato com seus usuários de qualquer lugar do mundo.

[...] proporciona uma conexão muito próxima entre a manipulação simbólica e as possibilidades de visualização [...] proporciona duas janelas em que cada objeto na janela de álgebra corresponde a um objeto na janela de visualização, e vice versa.[...] Como, GeoGebra proporciona a facilidade de lidar com as janelas de álgebra e visualização significa que é possível para o usuário, investigar, dizer sobre os parâmetros da equação de uma circunferência movimentando-a com o mouse e observando as mudanças em sua equação, ou o usuário pode mudar a equação e observar a maneira como os objetos mudam na janela de visualização.(HONHEWARTER, 2007, p. 127)

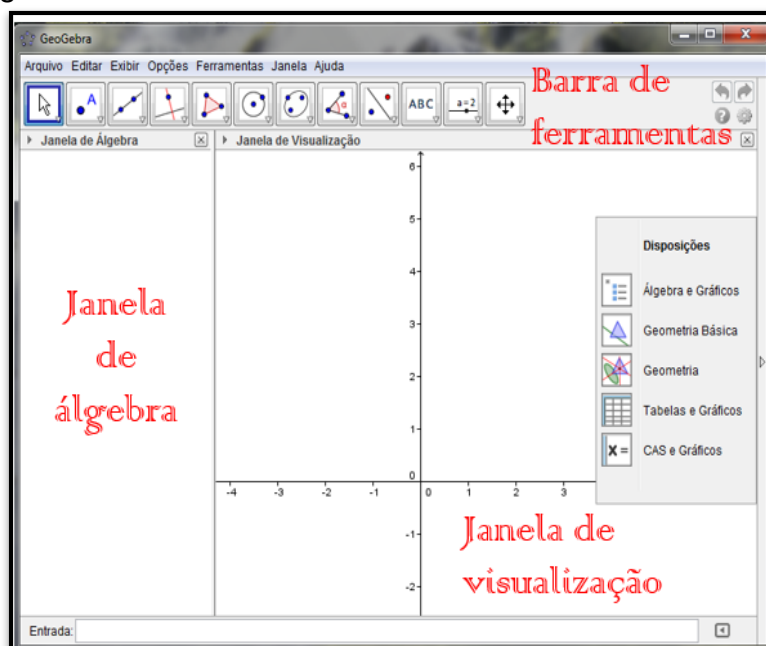
As possibilidades de uso desse *software* são inúmeras e podem ser exploradas de diversas maneiras. Outro aspecto relevante para a pesquisa é a possibilidade de trabalhar com diferentes registros de representação semiótica, nesta pesquisa os registros gráfico e algébrico, essenciais para o trabalho com a reta em geometria analítica.

No entanto, a constante presença de dois registros importantes faz uma grande diferença no potencial de acessibilidade ao objeto matemático da geometria analítica, em relação a "competência representacional" que o trabalho exige e, portanto, (talvez só hipoteticamente) a relevância do tema como um motor para promover a compreensão. O motivo pelo qual o *software* GeoGebra é único reside na sua habilidade semiótica, por exemplo, na representação simultânea e dinâmica de vários registros.(MISFELDT, 2010, p. 5)

Na tela do GeoGebra observa-se a facilidade de entendimento de suas ferramentas. Ao aproximar o cursor de cada ferramenta sua função e como proceder é mostrado. Além disso é possível personalizar a barra de ferramentas, de modo a

utilizar apenas as ferramentas importantes para a realização da tarefa. Ao abrir o programa a tela inicial aparece conforme a figura a seguir.

Figura 14 - Tela do *software* GeoGebra e suas ferramentas



Fonte: A pesquisadora

Outro aspecto interessante apresentado pelo *software* é mencionado por Neto (2010, p. 76) “Um recurso diferente deste *software* é a possibilidade de gravar a construção feita pelo usuário e depois ver todos os passos feitos por ele.” Esse tipo de recurso é muito interessante, a partir dessas informações é possível fazer a análise de como foi construída aquela figura, ou como a equação foi obtida. E Neto (2010, p. 76) ainda acrescenta ser “[...] possível observar cada um dos passos da sua construção, não somente o seu fim.”

A utilização de uma ferramenta como o GeoGebra deve ocorrer de maneira a proporcionar o conhecimento do assunto a ser estudado, porém o papel do professor não pode ser substituído por essa ferramenta, é ele quem direciona e planeja as estratégias para o aluno avançar. Em muitas situações existem vários obstáculos que podem provocar a desistência ou falta de estímulo, mas este é um desafio a ser superado.

Integrar a tecnologia informática no dia a dia da sala de aula não é tarefa simples: concepções e hábitos constituídos na tecnologia do lápis e papel, do giz e do quadro-negro, e nas próprias vivências dos professores enquanto alunos (o que tendem a replicar) erigem-se em obstáculos. (GRAVINA, 2001, p. 194)

Diante deste desafio, foi elaborada uma proposta de atividade para alunos da 3ª série do EM com o objetivo de verificar como lidam com o objeto matemático reta em uma perspectiva diferente daquela que já havia sido utilizada durante as aulas, ou seja o uso de lápis e papel.

A escolha do *software* aconteceu de maneira a seguir na direção da apreensão e não da simples constatação. Pretende-se trabalhar com diferentes registros de representação semiótica. Tendo em vista a exposição de duas representações na tela do *software* GeoGebra, gráfica e algébrica, de maneira coordenada houve a intenção de explorá-lo.

Outro aspecto observado foi o fato de ser possível utilizar uma representação simbólica de maneira a manipular as demais representações. Isto é, três representações podem ser contempladas com o seu uso. Se levarmos em consideração que Duval (2011) afirma ser necessária a coordenação de pelo menos duas representações diferentes para a apreensão do objeto matemático, verifica-se a possibilidade interessante de utilizar o *software* GeoGebra para o estudo com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Vale ressaltar outros dois aspectos determinantes para a escolha, o fato de ser um *software* gratuito e de fácil manipulação. Devido a facilidade não significa um obstáculo para o aluno no momento da realização da sequência de atividades e sua gratuidade proporciona acesso para aqueles interessados em explorá-lo em suas casas. A sequência de atividades será mostrada de maneira detalhada no capítulo 4.

Esta é uma pesquisa qualitativa, pois os aspectos observados não foram generalizados e dados quantitativos não foram o foco de análise. Este tipo de pesquisa é definido por André a seguir.

[...] chamada de “naturalística” por alguns ou de “qualitativa” por outros. Naturalística ou naturalista porque não envolve manipulação de variáveis, nem tratamento experimental; é o estudo do fenômeno em acontecer natural. Qualitativa porque se contrapõe ao esquema quantitativo de pesquisa que divide a realidade em unidades passíveis de mensuração, estudando-as isoladamente), defendendo uma visão holística dos fenômenos, isto é, que leve em conta todos os componentes de uma situação em suas interações e influências recíprocas. (ANDRÉ, 1995, p. 17)

A seguir a metodologia utilizada, a Engenharia Didática, é descrita em relação a pesquisa.

4.1 Metodologia de Pesquisa - Engenharia Didática

A engenharia didática é uma metodologia utilizada para a concepção, realização, observação e análise de situações de ensino, quando há uma parte experimental. Esta metodologia foi desenvolvida na França na década de 80 por Michèle Artigue.

A expressão “engenharia didática” [...] emergiu dentro da didática da matemática na França no início dos anos 1980 a fim de rotular a forma de trabalho didático que é comparável ao trabalho de um engenheiro.[...] Esse rótulo foi visto como uma maneira de aproximar questões que eram cruciais naquele momento:

1.a questão do relacionamento entre pesquisa e ação no sistema de ensino,
2.a questão do lugar atribuído à “performance didática” da aula dentro das metodologias de pesquisa. (ARTIGUE, 2002, p.29-30)

Nesse trabalho são empregados aspectos da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, para descrever a maneira como a sequência de atividades foi elaborada, aplicada e seus resultados analisados. A engenharia didática divide-se em microengenharia, restringe-se a um assunto e aos fenômenos de sala de aula e a macroengenharia, reúne pesquisas de microengenharia para o estudo de fenômenos ligados a duração nas relações de ensino e aprendizagem.

Esta metodologia de pesquisa caracteriza-se validação da pesquisa feita com a confrontação entre uma análise *a priori* baseada no quadro teórico e a análise *a posteriori* feita com os resultados verificados à luz da teoria. A validação na engenharia didática é interna, ou seja, não há comparação com elementos externos àqueles pertinentes à pesquisa. Isso difere a engenharia didática de outras metodologias de pesquisa. Artigue (1995, p. 38) menciona “[...] a engenharia didática é singular não pelos objetivos das suas investigações internas aos seus limites, e sim pelas características de seu funcionamento metodológico.”

Quatro fases são determinadas para a engenharia didática:

- Análises preliminares;
- Concepção e análise *a priori* das situações didáticas;
- Experimentação;
- Análise *a posteriori* e validação;

O primeiro passo são as análises preliminares feitas com base no referencial teórico e nos conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto estudado. Na fase da concepção e análise *a priori* o pesquisador determina com base em suas análises preliminares as variáveis pertinentes ao seu estudo. Artigue (1995) diferencia essas variáveis em dois tipos:

1. Variáveis macrodidáticas ou globais, aquelas em relação à organização geral da engenharia.
2. Variáveis microdidáticas ou locais, referem-se à organização de uma sessão ou de uma fase da engenharia.

Com a definição das variáveis é possível começar a estabelecer a análise *a priori*, parte importante da validação. Nesse momento é feita a descrição e a previsão dos resultados a serem observados durante a experimentação. A análise *a priori* privilegia *situações adidáticas*²¹ nas quais o ator principal é o aluno e o professor aparece apenas como coadjuvante.

Nessa fase, a experimentação, o pesquisador/professor entra em contato com o grupo de alunos para a realização da situação didática. É fundamental, neste momento, os registros do pesquisador/professor a respeito das observações. Estes apontamentos serão utilizados para a próxima fase, a análise *a posteriori*.

²¹ Uma situação *adidática*, segundo Brousseau (1986) é aquela em que o aluno atua de forma independente em determinado momento do processo sem o controle ou interferência do professor transferindo assim a responsabilidade pela busca da solução do problema para o aluno. Porém vale ressaltar que toda essa situação foi preparada pelo professor que tem papel fundamental nesse processo.

Última fase, análise *a posteriori* e validação, todo material coletado durante a fase de experimentação, dado o tratamento das informações, é analisado para em seguida os dados da análise *a priori* e *a posteriori* serem confrontados a fim de validar ou refutar as hipóteses levantadas a princípio.

O trabalho realizado até agora certamente é útil para um melhor entendimento dos problemas ligados à preparação dos conteúdos a serem ensinados, para identificar os pontos nos quais os esforços deveriam ser concentrados, e também permitir a criação de um conjunto de produtos funcionais que são compatíveis com os quadros teóricos. (ARTIGUE, 2002, p. 38-39)

Para realizar esse trabalho foram utilizados aspectos da engenharia didática, de maneira a ser possível criar uma sequência de atividades, aplicá-la a um grupo de alunos e analisar os resultados obtidos. A maneira como esses aspectos foram utilizados será apresentada a seguir.

4.2 Etapas da engenharia didática na pesquisa

4.2.1 Análises preliminares

A primeira fase da engenharia didática consiste na escolha do tema e no levantamento de dados a respeito dele. O tema escolhido para pesquisa, a equação da reta, foi definido a partir de questões observadas durante as aulas e também da análise de materiais pedagógicos como os livros didáticos, documentos oficiais, além de pesquisas realizadas relacionadas ao assunto.

No Brasil de acordo com o PCNEM (2000) a equação da reta é um assunto estudado na 3ª série do EM dentro do conteúdo de geometria analítica. Apesar de equação da reta ser um tema apresentado no EF e abordado em todo o EM, na 3ª série seu estudo intensifica-se. Nesta etapa o aluno é levado a uma reflexão maior sobre a importância da relação entre geometria e álgebra.

Diferentes representações de uma mesma reta são parte fundamental desse estudo de modo que o aluno entenda o objeto matemático, a reta.

O Currículo do estado de São Paulo (2011) sinaliza o trabalho com a reta focando objetivos bem específicos e mostra-se importante para o desenvolvimento do estudo da geometria analítica plana.

Mas consideramos que a parte correspondente às retas, suas equações, suas propriedades e suas aplicações pode ser especialmente representativa do significado da Geometria Analítica como um método de abordagem dos problemas geométricos que contempla o ideal cartesiano – ou o “plano” de Descartes, que buscava uma aproximação efetiva entre a Geometria e a Álgebra. (SÃO PAULO, 2011b, p. 9)

A despeito da importância do assunto ser evidente, em relação ao estudo da Matemática, alguns alunos não conseguem percebê-la e mostram muita dificuldade em realizar as conexões entre conteúdos já explorados e os novos.

Hajnal (2007) aponta as dificuldades dos alunos em justificar suas respostas além de apresentar problemas para compreender tópicos como o coeficiente angular da reta e as propriedades do paralelismo de duas retas.

Andrade (2007) revela uma inquietação por parte dos alunos sobre o fato de não conseguirem ver sentido nos conceitos estudados relação com aspectos já conhecidos. Segundo Varela (2010) existem problemas no trabalho com geometria analítica devido à falta de coordenação de mais de um registro de representação semiótica acerca de provas e demonstrações e também afirma ser um aspecto pouco explorado tanto pelos professores quanto pelos materiais didáticos.

Castro (2001, p. 24) aponta as dificuldades quanto ao conceito de vetor pois não conseguem “[...] transitar pelos diversos registros que representam vetor[...]”. Este fato mostra que no sistema de ensino brasileiro as conversões de diferentes registros não são prioridade.

Tantas dificuldades apontadas pelas pesquisas correlatas e a experiência como professora considerando-se a quantidade crescente de alunos que têm a intenção de dar continuidade nos estudos, na área das ciências exatas, decidiu-se explorar a geometria analítica e mais precisamente o estudo da reta.

Em seguida realizou-se breve análise de como o livro didático apresenta o assunto. Então foi possível observar o tipo de atividade apresentada e quais conceitos estão presentes para o estudo desse tema.

Posteriormente a breve exploração dos livros didáticos fez-se uma análise dos documentos oficiais como o Currículo do Estado de São Paulo, o Caderno do Professor e do Aluno (materiais fornecidos pela SEE-SP), os Parâmetros Curriculares

Nacionais do Ensino Médio (PCNEM e PCNEM+) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) com o objetivo de investigar quais são as orientações dadas por eles para o estudo desse assunto. Em todas as consultas aos documentos oficiais pode-se observar a equação da reta presente como parte importante do trabalho com a geometria analítica na 3ª série do EM.

O assunto, equação da reta, está presente em todos os documentos como pré-requisito para o trabalho com outros objetos matemáticos como o estudo da circunferência e das cônicas. A ideia é que o aluno possa estabelecer as relações entre geometria e álgebra no início para a reta, em seguida para circunferência e cônicas e então possa realizá-las para qualquer figura.

O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características[...] mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe. (BRASIL, 2002, p. 124)

Em seguida a breve investigação do tratamento dado ao assunto por alguns livros didáticos e a análise dos documentos oficiais, optou-se por examinar as pesquisas em relação ao assunto. Na procura por pesquisas houve uma surpresa, não existem muitos trabalhos referentes à equação da reta na geometria analítica. A maioria das pesquisas refere-se ao conteúdo no estudo de funções.

Logo decidiu-se deter aquelas que abordassem essencialmente a geometria analítica, mesmo quando o tema não fosse o estudo da reta. Mesmo assim não foram encontradas muitas pesquisas. Pouco mais de 10 dissertações e teses que referiam-se à geometria analítica foram localizadas. No primeiro momento a pesquisa foi feita pelo *site* da Capes e em seguida foram consultados os sites das Universidades apontadas no *site* da Capes inicialmente. O período pesquisado foi de 2000 até 2013.

Ao término do estudo dessas pesquisas foi possível constatar várias dificuldades apontadas pelos autores em acordo com as observações sobre o fato de o assunto ser importante e dos problemas para realizar a conexão entre geometria e álgebra, por parte dos alunos.

[...] escutamos dos alunos, inclusive daqueles que tinham desempenho satisfatório, o comentário de que esta era a parte da Matemática mais complicada e difícil, ocasionando, como consequência, baixo rendimento por parte destes do ponto de vista da avaliação[...] (ANDRADE, 2007, p. 22)

A dissertação de Castro (2001, p. 86) traz a afirmação de que “[...] a maior dificuldade dos alunos, está na conversão em que um dos registros envolvidos é o registro gráfico.” De posse de todas essas informações foi possível começar a estabelecer uma ligação entre as teorias apresentadas durante as aulas do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da PUC-SP e todas as observações feitas durante as leituras.

Dentre as teorias destacadas durante o curso, uma delas pareceu mais adequada ao assunto a ser trabalhado, a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Como o objetivo do trabalho com o estudo da reta é usar as diferentes representações para o entendimento do objeto matemático, tornou-se possível estabelecer a relação entre teoria e prática.

Para construir a conexão entre teoria e prática fez-se necessário o aprofundamento do conhecimento da teoria, para tal, a leitura de livros e trabalhos que a utilizaram foi fundamental. Ao aprofundar no conhecimento da teoria foi possível perceber muitas relações com o assunto. A principal delas, para o objeto matemático ser entendido são necessárias pelo menos duas representações complementares entre si.

Pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros. Mesmo se, de um ponto de vista matemático, o trabalho parece utilizar apenas um único registro, a compreensão necessária para conduzir o trabalho exige a mobilização pelo menos implícita de um segundo registro assim como sua coordenação. Existe, além disso, domínios da matemática, em que mobilizamos explicitamente pelo menos dois registros. (DUVAL, 2011, p. 100)

Relacionar duas representações complementares pode levar a estabelecer a representação geométrica e a representação algébrica como exemplos de possibilidade para desempenhar esse papel. Pois existe a tendência de sempre tratar a reta a partir de “gráfico” e “equação”.

Foram muitas as informações coletadas durante todas as observações. Propiciando subsídios para pensar em uma sequência de atividades com o intuito de abordar o estudo da reta, privilegiando o trabalho com os registros de representação semiótica. Para a realização desta sequência de atividades foi usado um contexto diferente do já utilizado na sala de aula, o computador.

O uso do computador é recomendado por todos os documentos oficiais e também é mencionado por muitas pesquisas. O que justifica a escolha em utilizá-lo como ponto importante do desenvolvimento da sequência.

O crescente uso dos computadores constitui um importante capítulo à parte, pois, além de sua capacidade de edição de textos e organização de dados, abre portas para um universo de informações, com o aprendizado da “navegação” na Internet, permitindo consultar inúmeros bancos de dados e sites informativos e formativos, para não falar dos estimulantes intercâmbios individuais e institucionais. (BRASIL, 2002, p. 136)

Durante as aulas do curso de Mestrado, o contato com *softwares* interessantes para o trabalho pedagógico foi grande.

Como fora idealizado um trabalho que envolvesse diferentes representações, uma opção é o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Com ele é possível trabalhar as diferentes representações além de ser um *software* livre, sem custo, o que o torna acessível para todos.

[...] Markus Hohenwarter cria o GeoGebra durante suas pesquisas ao longo do seu mestrado. Ele é um *software* gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. [...] Sua ideia ao desenvolvê-lo era unir as facilidades dos *softwares* de geometria dinâmica (DGS) e o poder e os recursos dos *softwares* computacionais algébricos (CAS), ou seja, juntar as principais características de outros pacotes que tratam de geometria, cálculo e álgebra separadamente[...] (NETO, 2010, p. 71)

Experimentar o *software* GeoGebra durante as aulas do curso de mestrado foi muito proveitoso e a ideia de empregá-lo para o desenvolvimento da sequência de atividades deve-se ao fato de os alunos participantes da pesquisa serem da 3ª série do EM e no momento de sua realização já terem estudado o assunto com uso de papel e lápis, por isso a ideia de proporcionar um ambiente diferente.

O uso do *software* pode funcionar como fator motivador para o estudo do assunto já visto anteriormente. Além de ser uma ferramenta com muitas possibilidades, que pode auxiliar na compreensão dos conceitos. De acordo com Hajnal (2007) “Tais *softwares* permitem a manipulação dinâmica de figuras sem que elas percam suas propriedades e por propiciar aos alunos momento de ação, conjecturas, validação e formalização.”

Como o assunto já fora estudado no contexto tradicional, sem o uso de recursos diferentes como o computador, verifica-se a necessidade da abordagem diferente daquela dada anteriormente.

4.2.2 Concepção da sequência de atividades

A segunda fase da engenharia didática é da concepção da sequência de atividades e da análise *a priori* das situações didáticas, nesta fase descreve-se como ocorreu a concepção.

Informações obtidas na revisão bibliográfica, na análise dos documentos oficiais e no estudo da teoria forma a base para o início do processo de concepção da sequência de atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

Nesse processo o primeiro passo foi buscar exemplos de atividades com a possibilidade de adaptação ou utilização para a sequência.

Essa busca foi feita em *sites* que continham atividades de matemática, em livros didáticos e no material fornecido pela SEE-SP, o Caderno do Professor (2011). O assunto equação da reta é trabalhado, na 3ª série do EM, a partir das noções de condição de alinhamento de três pontos, equação da reta na forma geral, coeficiente angular, equação da reta na forma reduzida e posição relativa entre duas retas. Conforme indica o quadro a seguir.

Figura 15 - Quadro geral de conteúdos de Geometria Analítica para a 3ª série do EM

Unidade 1 – O plano cartesiano. Distância entre dois pontos. Ponto médio de um segmento. Condição de alinhamento de três pontos. Unidade 2 – A equação da reta. Significado dos coeficientes. Retas paralelas. Unidade 3 – Retas perpendiculares. Regiões do plano. Unidade 4 – Problemas lineares. Unidade 5 – A equação da circunferência. Unidade 6 – Distância de ponto a reta. Posições relativas entre reta e circunferência. Unidade 7 – Cônicas. Apresentação e propriedades da elipse, da hipérbole e da parábola. Unidade 8 – Equações da elipse, da hipérbole e da parábola.

Fonte: Caderno do Professor – Matemática – 3ª série – Volume 1 (p. 11)

Como o tema equação da reta é trabalhado com base nessas noções é interessante que estejam presentes na sequência de atividades. A princípio a ideia era haver pelo menos uma atividade envolvendo cada uma delas.

Após cogitar todos esses aspectos, foi elaborada uma sequência com quatro atividades. A primeira propõe o estudo da noção de condição de alinhamento de três pontos. A segunda atividade explora os tipos de equação da reta e a análise dos seus coeficientes.

A terceira atividade composta de duas partes tem como propósito a análise da posição relativa entre duas retas. Na primeira parte a intenção era o paralelismo entre duas retas e na segunda a concorrência. A atividade quatro foi retirada do livro Fundamentos da Matemática Elementar – volume 7 de Gelson Iezzi e adaptada para adequar-se ao objetivo de apresentar uma situação mais próxima da realidade, que pudesse ser resolvida com base nas noções discutidas nas atividades anteriores.

Quando as quatro atividades ficaram prontas realizou-se o “piloto” com uma dupla de alunas voluntárias, a intenção era perceber possíveis erros e problemas nos enunciados. Após esse teste realizado com a ajuda das duas adolescentes, as questões foram apresentadas ao GPEA, grupo de pesquisa, para que seus integrantes também opinassem a respeito delas.

As atividades foram apresentadas e discutidas uma a uma, durante aproximadamente duas horas e meia. Após a discussão, com as contribuições feitas pelos colegas do grupo, além das observadas pelas alunas, chegou-se ao resultado final, a sequência composta por quatro atividades a ser apresentada em seguida.

Como etapa importante para a realização da pesquisa, o projeto foi apresentado e aprovado ao Comitê de Ética da PUC-SP e cadastrado na Plataforma Brasil, para justificar o fato de não haver risco para os participantes. Após o cumprimento dessas duas etapas foi dada continuidade aos próximos passos da pesquisa.

4.2.3 Análise *a priori* da sequência de atividades

Esta sequência de atividades foi elaborada com a intenção de investigar se os alunos participantes tinham apreendido o objeto matemático **reta**. Eles já tinham conhecimento sobre o conteúdo abordado na sequência. A decisão pela utilização do

software GeoGebra teve o propósito apresentar o conteúdo, visto anteriormente, de maneira diferente daquela usada no primeiro contato com o assunto.

Os resultados obtidos durante a realização da sequência de atividades serão analisados a partir de dois aspectos: o ponto vista matemático e também o ponto de vista cognitivo. Esses dois pontos de vista serão verificados a partir da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Do ponto de vista matemático, o que analisamos é sempre a resolução de um problema dado e, para isso partimos de sua solução para explicitar os diferentes conhecimentos que permitem resolvê-lo. A análise é, portanto retroativa e própria do problema dado, sem que estejamos seguros de que ela seja transferida para um problema aparentemente próximo. Do ponto de vista cognitivo, o que analisamos são os processos que permitem reconhecer por si sós os conhecimentos matemáticos a serem empregados no quadro do problema dado, qualquer que ele seja. Pois, não serve de nada se lhe explicarmos a solução, se você não vê como poderia pensar sobre ele. Em outros termos a questão cognitiva é considerada sobre os gestos intelectuais desenvolvidos no trabalho matemático, antes mesmo que tenhamos a mínima ideia da solução procurada. (DUVAL, 2011, p. 41)

Um aspecto diferente levado em consideração na elaboração da sequência de atividades é a utilização do registro da língua natural. Apesar de ser um registro importante para a compreensão e manipulação dos conceitos em matemática, existe grande dificuldade por parte dos alunos em realizar conversões que envolvam esse tipo de registro como apontam várias pesquisas. Duval (2011, p. 125) afirma que “Existe entre a língua natural e os outros registros uma distância cognitiva considerável [...] É o que torna difícil a conversão dos enunciados da língua natural para representações em outro registro.”

Isso deve-se ao fato de que a conversão de um registro em língua natural para outro tipo de registro qualquer ou vice versa, é um fenômeno de não congruência, ou seja, não é possível fazer a conversão de forma direta, são necessárias *representações auxiliares de transição*. Essa dificuldade deve-se ao fato de, no estudo da matemática, o registro em língua natural não ser bem trabalhado.

E, pode ser, porque tudo foi feito para reduzir o lugar e o papel da língua natural no pensamento matemático. O desenvolvimento da lógica matemática e das linguagens formais [...] testemunha a pesquisa de uma *semiós* que suprimiria a linguagem natural em favor da linguagem formal. (DUVAL, 2011, p. 131)

A escolha do uso de um *software* para auxílio na aplicação da sequência de atividades deve-se ao fato de ser um ambiente novo, tendo em vista o contato anterior dos alunos com o assunto abordado. O segundo aspecto é de acordo com Duval (2011, p.137) que os objetos matemáticos “[...] tornam-se manipuláveis como objetos reais.” por meio dos recursos do *software*, fato impossível no ambiente de lápis e papel.

O que deve ser observado nestas atividades não é fato de o aluno realizar ou não os tratamentos e conversões, por este motivo optou-se pelo uso de um *software* que realizará os *tratamentos de maneira instantânea*²² e as *conversões de maneira automática*²³. O que se quer observar é a capacidade dos alunos de manipular o *software* e chegar a conclusões a partir das informações apresentadas na tela.

Podemos, então, observar que a interface real entre o computador e o indivíduo não é o que se exibe no monitor, mas o que *permite comandar uma exibição*, isto é, o *menu de comando para as instruções*. Podemos, então, analisar as tarefas cognitivas requeridas pela utilização de cada *software* em função das ações que seu menu autoriza ou exclui. (DUVAL, 2011, p. 137)

Segundo Duval (2011) as produções dos alunos são sempre produções semióticas e para análise de tais produções é preciso que sejam levados em consideração no mínimo dois registros. Para esta pesquisa, o registro produzido pelos estudantes para a análise foi em língua natural, porém dois aspectos desse tipo de registro foram observados, o escrito e o oral. O registro escrito foi analisado com base nos protocolos e o registro oral com base nas gravações dos diálogos e entrevistas feitas após a realização das atividades.

A seguir são apresentadas as atividades que compuseram a sequência criada, foram elaboradas pela pesquisadora com a colaboração dos colegas do GPEA.

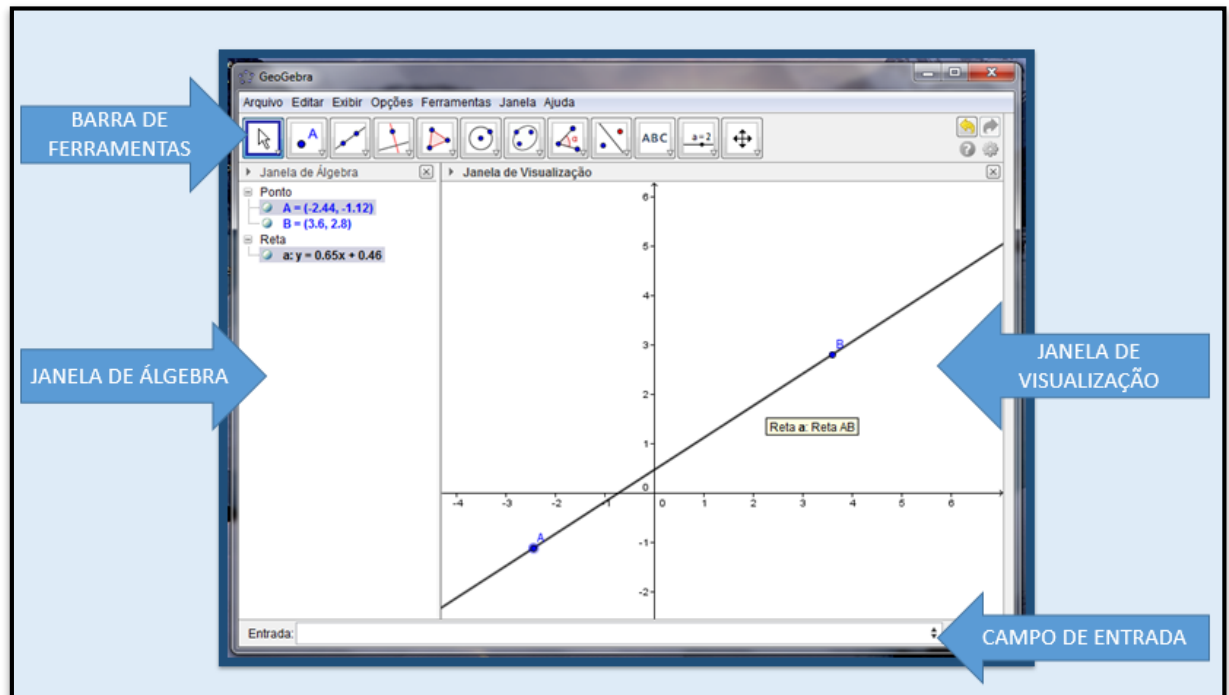
²² *Tratamentos instantâneos* são aqueles comandados pelo aluno mas realizado pelo computador. Critério adotado pela pesquisadora.

²³ *Conversões automáticas* são aquelas comandadas pelo aluno mas realizada pelo computador. Critério adotado pela pesquisadora.

4.2.3.1 Análise *a priori* da Atividade 1

O primeiro passo antes de iniciar a apresentação das atividades é mostra a tela do GeoGebra.

Figura 16 - Tela do *software* GeoGebra



Fonte: a pesquisadora²⁴

A primeira atividade foi idealizada para proporcionar aos alunos o reconhecimento de situações nas quais três pontos estão alinhados²⁵. Com o *software* GeoGebra aberto foram testados três pontos alinhados e três não alinhados.

Os pontos alinhados e não alinhados foram escolhidos aleatoriamente, o único cuidado tomado foi para os números representantes das suas coordenadas não terem ordem de grandeza elevada.

Desse modo ao digitarem as coordenadas os pontos não ficariam “escondidos”. Em seguida os alunos foram instigados a responder algumas questões com o objetivo de identificar o significado das informações na janela de álgebra e estabelecer a relação entre essas informações observadas e aquelas já estudadas anteriormente.

²⁴ A figura foi obtida com a abertura do *software* GeoGebra e a transformação em um arquivo de imagem

²⁵ Para designar que três pontos estão contidos em uma reta serão adotadas as notações: três pontos estão alinhados e três pontos são colineares.

Em seguida foram realizados uma conversão e um tratamento por parte dos alunos para continuarem estabelecendo as relações entre o conhecido e o novo observado na tela do computador.

Figura 17 - Atividade 1

ATIVIDADE 1	
1 - Abra o <i>software</i> GeoGebra. No campo de entrada na parte inferior da tela digite os pontos $A=(-1,1)$, $B=(1,3)$ e $C=(2,4)$. Em seguida, ligue os pontos com o auxílio da ferramenta “<i>reta definida por dois pontos</i>” - , localizada na barra de ferramentas. Os três pontos que você digitou, A, B e C são colineares? Por quê?	2 - Agora, também no campo de entrada digite os pontos $D=(-2,-1)$, $E=(4,-3)$ e $F=(0,5)$. Em seguida ligue os pontos com o auxílio da ferramenta “<i>polígono</i>” -  localizado na barra de ferramentas. Os pontos D, E e F são colineares? Por quê?
3 - O que aparece na janela de álgebra?	
4 - De acordo com o que você estudou, qual é o método para verificar se três pontos são colineares?	
5 - No espaço abaixo use o método que você já estudou para verificar se os três pontos estão alinhados, no caso dos pontos A, B e C. Em seguida use o mesmo processo para D, E e F.	
6 - Compare o método utilizado acima com os elementos que você já observou na janela de álgebra. Qual a sua conclusão?	
Complete:	
7 - Três pontos estão alinhados se:	8 - Quando três pontos não estão alinhados:

Para a aquisição dos objetivos, na questão 1, foi proposto aos alunos digitarem os pontos A, B e C fornecidos, em seguida solicitou-se que ligassem os pontos e observassem as janelas de visualização e de álgebra do *software* GeoGebra. Ao observá-las espera-se dos alunos a resposta que os três pontos estão alinhados, pois ao ligá-los acredita-se ser perceptível a existência de uma reta contendo-os.

São esperadas respostas tais como: os pontos são colineares, os pontos formam uma reta, existe uma reta que passa pelos três pontos etc. Qualquer uma dessas respostas é válida para a proposta.

Na questão 2 pede-se para digitarem novos pontos, D, E e F, também fornecidos. Ao observarem a janela de visualização verifiquem se estes não são colineares e confirmem essa percepção ao ligá-los. Quando ligarem os pontos aparecerá na tela do computador um triângulo e por isso os pontos não são colineares.

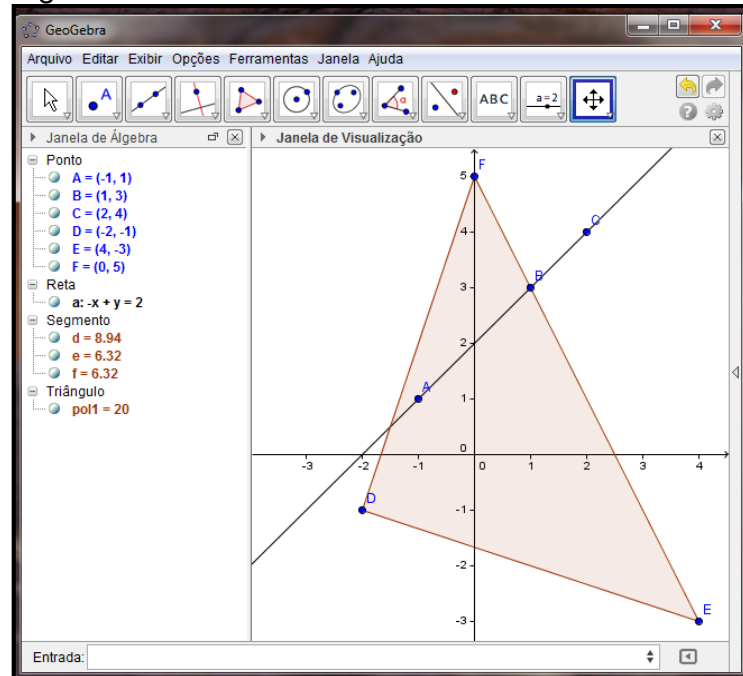
Frases como: os pontos não são colineares, pois não formam uma reta; pois formam um triângulo; pois não existe uma reta que passe pelos três pontos etc, podem aparecer nas respostas dadas para a questão 2.

Segundo Duval (2011) *representar uma ação que permite substituir uma marca sem dimensão pelo contínuo visual de uma unidade figural com uma dimensão e assumir as qualidades visuais de forma* é importante e propõe-se esse tipo de ação nas questões 1 e 2. Automaticamente ao digitarem as coordenadas dos pontos e realizarem as ações o registro gráfico servirá como revelador em relação ao registro algébrico.

Conseguir observar a coordenação existente entre os registros gráfico e algébrico, além de expressar-se com o uso do registro da língua natural é o esperado na questão 3.

Relacionar conhecimentos já estudados anteriormente com as observações feitas nas questões 1 e 2 é a intenção para a questão 4. Pretende-se instigar os alunos a fazerem a relação entre as observações feitas a partir da tela e o conteúdo já estudado anteriormente, conforme indica a figura a seguir.

Figura 18 - Tela do software GeoGebra - Atividade 1



Fonte: a pesquisadora²⁶

²⁶ A figura foi obtida pela pesquisadora com a abertura do software GeoGebra e a transformação em um arquivo de imagem.

Em seguida, na questão 5, a resolução do determinante é esperada para a verificação do resultado. Podem obter zero ou não como resposta. A partir daí almeja-se comparem os resultados obtidos com as observações feitas na etapa anterior.

A resposta esperada na questão 4 é que para verificar se três pontos são colineares ou não, é possível utilizar o determinante de ordem 3, formado pelas coordenadas dos três pontos e uma coluna somente com número 1 e ao resolvê-lo, se o resultado for 0 (zero) os pontos são colineares e se for diferente de 0 (zero) não são colineares. Se responderem apenas enfatizando o uso do determinante é um indício que a conexão esperada foi feita.

Na questão 5 a utilização do determinante para conferir observações anteriores é a proposta. Neste caso espera-se o uso da *regra de Sarrus* e desse modo sejam encontrados os resultados 0 (zero) e 40 (quarenta), para os pontos A, B, C e D, E, F, respectivamente.

O método para a resolução do determinante pela *regra de Sarrus* é esperada, pois de acordo com o Currículo do estado de São Paulo (2011) esta é a única regra estudada por eles conforme mostra o quadro a seguir.

Figura 19 - Quadro geral de conteúdos referentes a matrizes e determinantes da 2ª série do Ensino Médio

Unidade 1 – Matrizes: apresentação, tipos, igualdade e operações: adição, subtração e multiplicação por uma constante.
Unidade 2 – Matrizes: diferentes significados; multiplicação entre duas matrizes.
Unidade 3 – Matrizes: operações e equações matriciais.
Unidade 4 – Determinantes: um número associado a uma matriz quadrada; método de Sarrus.
Unidade 5 – Sistemas lineares: resolução por escalonamento.
Unidade 6 – Sistemas lineares: resolução por escalonamento.
Unidade 7 – Sistemas lineares: discussão de parâmetros.
Unidade 8 – Problemas resolvíveis por intermédio de sistemas lineares.

Fonte: Caderno do professor – 2ª série do EM – Volume 2 (2013, p. 11)

Após a resolução do determinante, na questão 6, deseja-se concluir: se o resultado do determinante é zero, os pontos pertencem à mesma reta e se é diferente de zero, os pontos não pertencem à mesma reta ou formam um triângulo.

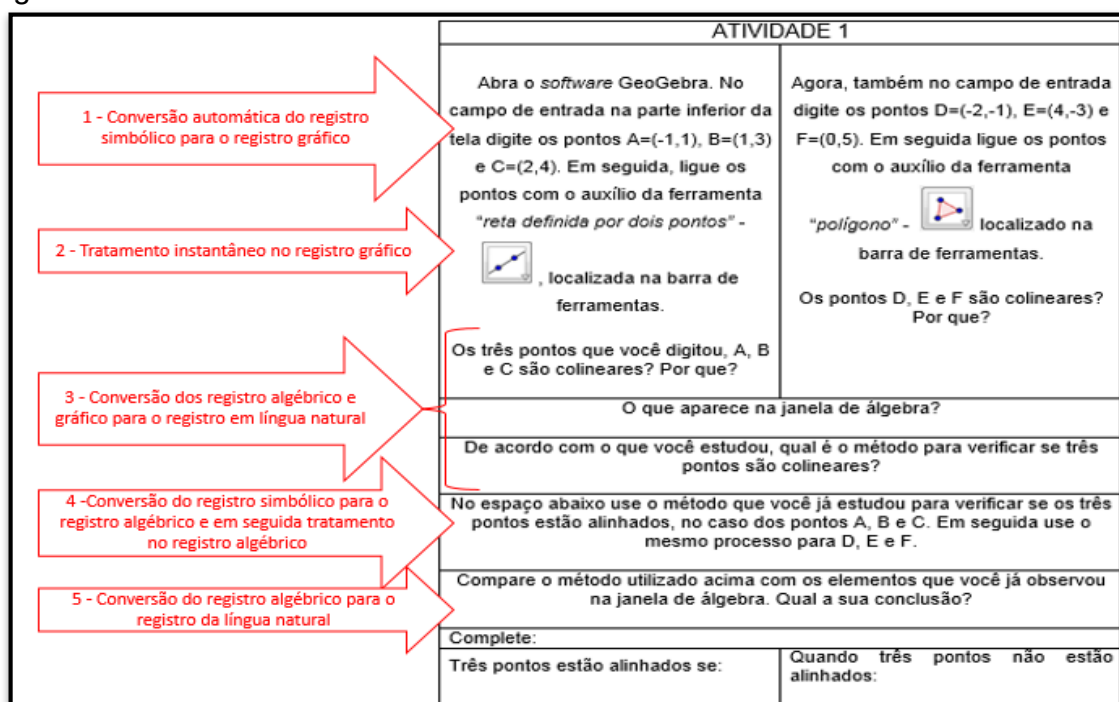
Para responderem a essa questão os alunos terão que estabelecer a relação entre os registros gráfico e algébrico e ainda terão que expressar suas conclusões por meio do registro da língua natural. Nesta situação a resolução do determinante tem um caráter de *representação auxiliar de transição* entre as informações na tela do computador, os resultados obtidos no papel e a conclusão expressa no registro da língua natural.

O auxílio do *software* em algumas conversões e tratamentos será usado para os alunos chegarem à conclusão esperada no decorrer da atividade. Quando a conversão for realizada pelo computador, adota-se a denominação de *conversão automática* e quando o tratamento for realizado pelo computador, adota-se *tratamento instantâneo*. Quando a conversão ou tratamento for realizado pelo próprio aluno, assume-se simplesmente as designações conversão e tratamento.

Realização de tratamentos e conversões não são o principal objetivo, para isso usa-se o recurso do *software*. A prioridade é a coordenação entre os diferentes tipos de registros de representação semiótica visando a apreensão do objeto matemático **reta**.

A figura a seguir apresenta as conversões e tratamentos a serem realizadas com o uso ou não do *software* durante a efetivação da atividade.

Figura 20 - Possíveis conversões e tratamentos a serem realizados na Atividade 1



Fonte: Figura criada pela pesquisadora

Em 1 e 2 o aluno não realiza, porém coordena a ação de modo que as conversões e tratamentos sejam feitos pelo computador. Em 3,4 e 5 o aluno realiza as conversões e tratamentos com o uso de papel e lápis.

Deseja-se estabelecerem as conexões esperadas, pois a utilização do GeoGebra pode proporcionar o melhor entendimento por tornar visível e manipulável o objeto matemático **reta**.

Outro aspecto levado em consideração é referente ao registro da língua natural, a conversão do registro gráfico ou do registro algébrico para o registro da língua natural não é tão simples, portanto associado ao registro da língua natural escrito observa-se também o registro da língua natural oral, como forma de confirmar ou não as impressões sobre os escritos.

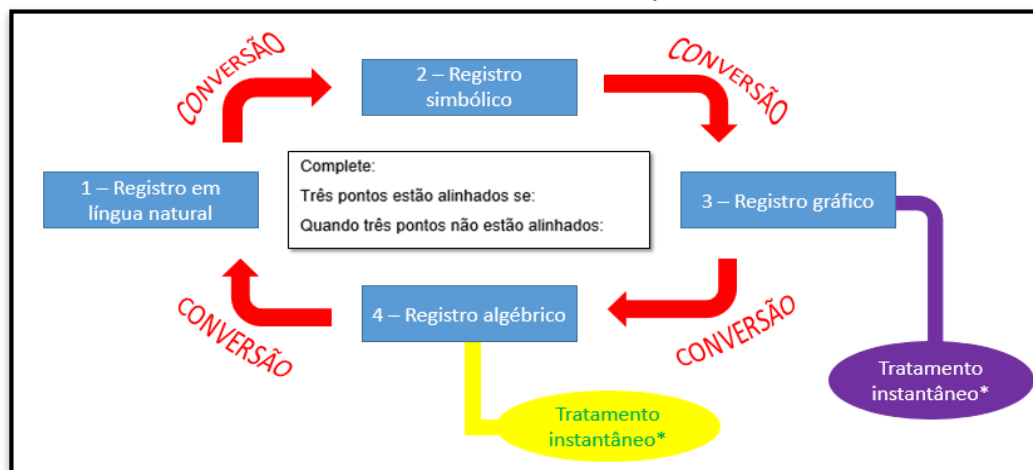
A sequência de atividades privilegia conversões envolvendo o registro da língua natural visto que existe certa dificuldade para a maioria dos alunos. A análise matemática associada a análise cognitiva proporciona observar o nível de apreensão dos alunos sobre objeto matemático.

Para os alunos chegarem à conclusão de que para três pontos serem colineares: deve existir uma reta passando pelos três ao mesmo tempo ou o determinante de ordem três formado por suas coordenadas deve ser igual a zero; e se não forem colineares: formam um triângulo e o determinante é diferente de zero, espera-se haver a coordenação de quatro registros de representação semiótica.

O registro da língua natural é o primeiro a ser trabalhado por meio das instruções e dos enunciados. O registro simbólico é o segundo e funciona como um registro de transição na conversão do registro da língua natural para o registro gráfico. Deseja-se que a conversão entre esses dois registros seja realizada pelos alunos.

As conversões do registro simbólico para o registro gráfico e do registro gráfico para o registro algébrico são *conversões automáticas*, ou seja, realizadas pelo GeoGebra. Os tratamentos tanto no registro gráfico como no registro algébrico são *tratamentos instantâneos* também realizados pelo *software*. E por fim os alunos realizam a conversão para o registro da língua natural novamente. A figura a seguir apresenta essas conversões e tratamentos.

Figura 21 - Conversões e tratamentos realizados para a conclusão da Atividade 1



Fonte: Figura criada pela pesquisadora.

Observa-se a dificuldade em percorrer esse caminho, a coordenação entre vários registros é requerida. Para realizar a atividade quatro registros diferentes são utilizados. Paralelo a isso, vários conhecimentos matemáticos são necessários como a localização de pontos em um sistema cartesiano ortogonal, a ideia de área, o método para resolução do determinante, a ideia de reta e de triângulo etc. Como o assunto já foi estudado, é esperado que os alunos consigam percorrer esse caminho e realizar a atividade. Porém dificuldades de escrita, interpretação e pouco conhecimento matemático podem ocorrer durante a realização da atividade e representar obstáculos para seu desenvolvimento.

4.2.3.2 Análise *a priori* da Atividade 2

Na Atividade 2, o principal objetivo é o trabalho com os coeficientes angular e linear da equação da reta na forma reduzida e o que eles representam. A maneira como a equação da reta pode ser escrita também é um aspecto abordado nesta atividade. Os pontos são fornecidos pela proposta e foram escolhidos de maneira que os coeficientes da equação da reta que os contém não fossem representados por dízimas periódicas para evitar aproximações.

A notação utilizada para a representação de pontos²⁷ e de retas foi apresentada da mesma maneira exibida no *software*, a fim de não causar confusões referentes a essa questão.

²⁷ No *software GeoGebra* os pontos são representados da seguinte forma: $A = (x, y)$. Adotar-se-á a mesma notação do *software*.

Figura 22 - Atividade 2

ATIVIDADE 2	
1 - No campo de entrada, na parte inferior da tela digite os pontos: $A = (-2,5)$ e $B = (2,-2)$. Na barra de ferramentas clique em “<i>reta definida por dois pontos</i>” - , em seguida clique sobre o ponto A e sobre o ponto B. O que aparece na janela de álgebra?	2 - Na janela de álgebra clique com o botão direito do mouse sobre a expressão e selecione a opção “<i>equação $y=ax+b$</i>”. O que aconteceu com a equação da reta na janela de álgebra? Por quê?
	3 - Na janela de visualização, o que aconteceu com a reta que você construiu? Por quê?
4 - Agora vamos variar o ponto B. Digite as coordenadas dos pontos indicados abaixo no campo de entrada, em seguida clique sobre a ferramenta “<i>reta definida por dois pontos</i>” -  na barra de ferramentas e construa a reta que passa pelo ponto A e os novos pontos. Lembre-se de, na janela de álgebra, clicar na opção “<i>equação $y=ax+b$</i>”. Então escreva as equações das retas obtidas abaixo: a) Digite $B_1=(-3,2)$. Equação da reta b: b) Digite $B_2=(-2,-3)$. Equação da reta c: c) Digite $B_3=(0,-5)$. Equação da reta d:	5 - As equações das retas são iguais? Qual é a diferença entre elas? Por quê?
	6 - Na barra de ferramentas selecione a opção “<i>mover</i>” -  então clique sobre o ponto B, na janela de visualização e movimente-o. Na janela de álgebra, o que acontece com as equações das retas? Por que você acha que isso acontece?
	7 - Agora, na janela de visualização, clique sobre a reta que passa por A e B e movimente-a. Na janela de álgebra, o que acontece com as equações das retas? Por quê?
A partir de suas observações, responda:	
8 - Ao movimentar o ponto B apenas os coeficientes a e b da primeira equação da reta mudaram. Por quê?	9 - Ao movimentar a reta que passa por A e B os coeficientes a e b de todas as equações das retas na janela de álgebra mudaram exceto em duas delas. Por que você acha que isso acontece?
10 - Comparando o que já foi estudado com o que você observou, o que você pode concluir em relação aos coeficientes a e b da equação da reta do tipo $y=ax+b$? O que o coeficiente a representa na equação da reta? E o coeficiente b?	11 - As equações das retas poderiam ser escritas de outra maneira? Qual?
	12 - Escreva as equações das retas dadas de outra maneira: a) Reta a: b) Reta b: c) Reta c: d) Reta d:
13 - O que você pode concluir?	

Na questão 1, solicita-se digitarem os pontos fornecidos e construírem a reta que os contém com o auxílio do *software*, para essa ação estão substituindo uma marca sem dimensão pelo contínuo visual da unidade figural de uma dimensão.

Entre a operação de construção de um gráfico [...] e a operação não matemática que consiste em ligar os pontos consecutivos assim obtidos pelos segmentos, existe um SALTO DIMENSIONAL NO CONTÍNUO VISUAL de retas e curvas. É em virtude desse salto dimensional que os gráficos cartesianos tornam-se um sistema semiótico produtor, ou criador, de novas representações [...] Ele possibilita efetuar sobre o contínuo visual as operações que não são possíveis com os pontos, tão numerosos que eles são. (DUVAL, 2011, p. 108)

Na questão 2, pede-se para comandarem a ação de modo a realizar um *tratamento instantâneo* na equação da reta construída. Ao digitarem os pontos, a equação da reta aparece na forma $ax + by = c$ e neste caso a intenção seria trabalhar com a equação na forma $y = ax + b$.

A solicitação em alterar a forma como a equação é apresentada dá-se pelo fato do interesse em relação ao estudo dos coeficientes angular e linear da equação, por outro lado a outra forma como a equação é apresentada não é a forma geral, também adequada ao objetivo.

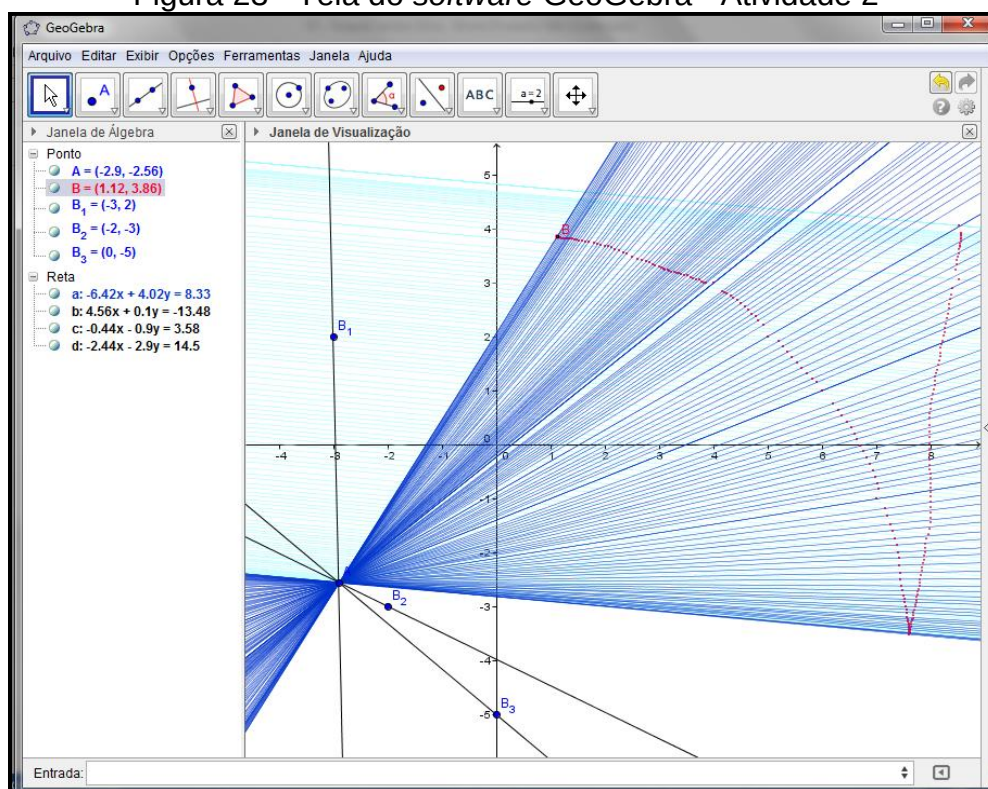
Na questão 3 pede-se apenas para observarem a mudança na forma como a equação é apresentada, e essa mudança não altera a reta representada graficamente. Na questão 4, são fornecidos três pontos e solicita-se a construção de três novas retas passando pelo ponto A e pelos novos pontos B₁, B₂ e B₃. Ainda nessa questão os alunos devem comandar a ação para a realização de um *tratamento instantâneo* nas equações das retas apresentadas e em seguida copiá-las da janela de álgebra do *software* para o papel.

É chamada a atenção, na questão 5, para a distinção entre os coeficientes das equações e consequentemente a diferença entre as posições em relação aos eixos x e y . Respostas como: as retas são diferentes, pois os coeficientes de suas equações são diferentes ou as retas são diferentes, porque a posição dos pontos são diferentes podem aparecer.

Solicita-se, nas questões 6 e 7, realizarem o movimento com o auxílio de uma ferramenta do *software* e enquanto estejam realizando o movimento observem a equação da reta. Primeiro pede-se movimentarem seja somente do ponto B em seguida o movimento deve ser da reta que passa pelos pontos A e B.

Ao movimentar apenas o ponto B a posição da reta em relação aos eixos x e y muda, ou seja, o ângulo de inclinação em relação ao eixo x , e a ordenada do ponto onde a reta cruza o eixo y também se altera. Isso ocorre porque o ponto A permanece fixo e o ponto B tem sua localização alterada de modo a reta movimentar-se em torno desse do ponto A. Ao movimentar a reta que passa A e B, não há mais um ponto fixo, logo os dois pontos têm suas localizações alteradas, porém a inclinação da reta, passa por eles, em relação ao eixo x permanece igual, porém a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo y muda. Conforme mostra a figura a seguir²⁸.

Figura 23 - Tela do *software* GeoGebra - Atividade 2



Fonte: Figura feita pela pesquisadora com o uso do *software* GeoGebra

Coordenar os registros gráfico e algébrico é o principal objetivo nessas questões, ao movimentar a reta há uma alteração nos coeficientes de sua equação conforme o movimento. Como o *software* apresenta as duas janelas, de visualização e de álgebra ao mesmo tempo é possível verificar o acontecimento em uma ao modificar a outra.

²⁸ As marcações em azul claro indicam o movimento da reta AB, as marcações em azul escuro indicam o movimento da reta AB, quando movimentado o ponto B. As marcações em vermelho indicam o movimento do ponto B nas duas situações.

Nas questões 8,9,10 e 11 espera-se conseguirem coordenar os registro gráfico e algébrico para realizarem a conversão para o registro da língua natural de a expressarem-se de maneira clara.

Espera-se responderem que o coeficiente a é denominado coeficiente angular e representa a tangente trigonométrica do ângulo de inclinação da reta com o eixo x e o coeficiente b representa a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo y denominado coeficiente linear.

Denominações como coeficiente angular e linear podem não estar explícitas no registro por parte dos alunos. O registro feito por eles pode não explicitar termos como a tangente trigonométrica e a ordenada sejam ocultados e isso poderá revelar o não estabelecimento de alguns conceitos.

As questões 12 e 13 chamam a atenção para o fato de a equação da reta poder ser escrita de diversas formas, a intenção é chamar a atenção e não privilegiar um determinado tipo de equação. Nos encaminhamentos para o ensino da geometria analítica do Currículo do estado de São Paulo (2011) o trabalho com a equação da reta deve privilegiar o significado dos coeficientes e não as várias formas de equação da reta.

Todas as *conversões são automáticas e os tratamentos são instantâneos*, ou seja, não foi solicitado aos alunos realizarem tais ações. A pretensão desta atividade é realmente a coordenação entre os diferentes registros e a única conversão solicitada foi dos registros gráfico e algébrico para o registro da língua natural, como forma de expressar as observações feitas no desenvolvimento da atividade.

Independentemente de serem usados recursos do *software* para a efetivação desta atividade, o desenvolvimento cognitivo necessário para a sua realização é alto. Quatro registros de representação estão presentes de modo a serem coordenados: os registros da língua natural, simbólico, gráfico e algébrico.

4.2.3.3 Análise *a priori* da Atividade 3

A terceira atividade trata da posição relativa entre duas retas no plano cartesiano e é constituída de duas partes.

Em sua primeira parte é constituída de seis questões. A primeira delas apresenta as equações de cinco retas todas escritas na mesma forma exceto a última.

Esta é proporcional à terceira e implica no fato de as retas serem paralelas coincidentes. O fato de a última equação estar escrita de maneira diferente foi pensado de maneira a chamar a atenção dos alunos para as diferentes formas de escrita de uma mesma equação e o fato de coeficiente angular só estar aparente em equações na forma reduzida. A questão seguinte sobre a posição relativa entre as retas visa chamar a atenção para o que já fora observado na Atividade 2 a respeito do coeficiente angular e consequentemente indicar a posição da reta em relação aos eixos x e y .

O planejamento das questões seguintes foi pensado para os alunos observarem os registros gráfico e algébrico e coordenarem-os de modo a perceber que quando as retas são paralelas os coeficientes angulares são iguais e os lineares são diferentes e quando coeficientes angulares e lineares são iguais as retas são paralelas e coincidentes. Outro aspecto a ser ressaltado é, as retas paralelas não possuírem nenhum ponto de intersecção.

A segunda parte da Atividade 3 foi idealizada de maneira a trabalhar a concorrência entre retas. Nesta atividade não serão tratados casos particulares de concorrência como por exemplo o perpendicularismo entre duas retas.

Na questão 1 são fornecidas cinco equações de retas todas na forma reduzida, esta foi a forma trabalhada nas atividades anteriores, e os alunos são orientados a digitá-las, movimentar as retas, observar as alterações e chegar à conclusão de que duas retas são concorrentes se os coeficientes angulares são diferentes.

Em seguida apresenta-se uma atividade de tratamento no registro algébrico, pois duas retas concorrentes possuem um ponto de intersecção, de modo que o ponto seja encontrado sem o auxílio dos recursos do *software*. E a proposta é para os alunos utilizarem o *software* apenas para conferir se as coordenadas do ponto encontrado estão corretas. Em seguida pede-se aos alunos descreverem como fizeram para encontrar o ponto de intersecção e suas coordenadas com a utilização do *software*.

A Atividade 3 foi planejada de modo que as *conversões sejam automáticas* e os *tratamentos sejam instantâneos* para focar apenas na observação e coordenação dos registros envolvidos. Nesta atividade as conversões envolvendo o registro da língua natural são o foco do trabalho. Somente na parte final da atividade os alunos deveriam realizar um tratamento no registro algébrico ao resolverem o sistema de equações formado pelas equações das duas retas concorrentes.

Resolver esse sistema poderá ser feito de acordo com o método que os alunos julgarem conveniente, método da adição, método da substituição ou escalonamento. Em seguida são orientados a descrever como utilizaram os recursos do *software* para conferir o que foi feito com o uso de lápis e papel.

Existem ferramentas do GeoGebra para a conferência de maneira mais simples, são elas: digitar no campo de entrada as equações das duas retas e selecionar na barra de ferramentas a opção “intersecção entre dois objetos”, na janela de álgebra as coordenadas do ponto aparecerão e devem ser exatamente iguais às aquelas encontradas por meio da resolução do sistema de equações. Outra opção seria digitar no campo de entrada do *software* as coordenadas do ponto obtido e verificar se esse ponto está exatamente no encontro entre as retas.

As atividades 1, 2 e 3 propõem uma abordagem diferente da tradicional para o estudo da reta em geometria analítica, as atividades visam a coordenação entre quatro registros de representação semiótica. O registro da língua natural é o primeiro apresentado nos enunciados. O registro simbólico funciona aqui como uma representação auxiliar de transição devido ao fato de a conversão do registro da língua natural para qualquer outro registro não ocorre de forma direta. Ao digitarem coordenadas de pontos ou equações ocorre a *conversão automática* para o registro gráfico e automaticamente o registro algébrico também é revelado.

Os registros gráfico e algébrico complementam-se, devido a existência da coordenação entre eles de maneira que um pode ajudar a revelar aspectos do outro, por isso são solicitadas ações que permitem que os alunos comandem os *tratamentos instantâneos* e *conversões automáticas* para focar totalmente na análise dos dois registros.

A partir das observações os alunos são instigados a chegar a algumas conclusões para comprovar, ou não, se conseguiram realizar a coordenação entre os registros e essas conclusões são expressas em língua natural.

Desse modo percebe-se a coordenação entre os registros de maneira cíclica, ou seja, parte-se do registro da língua natural em seguida os registros simbólico, gráfico e algébrico são utilizados e volta-se ao registro da língua natural, conforme indicado na figura a seguir.

Figura 25 - Conversões e tratamentos realizados nas atividades 1,2 e 3



Fonte: Figura criada pela pesquisadora.

Esse não é um caminho simples a ser percorrido, pois em termos cognitivos para o aluno chegar à conclusão esperada vários conhecimentos devem estar bem consolidados e a capacidade de estabelecer essas relações é condição necessária para isso.

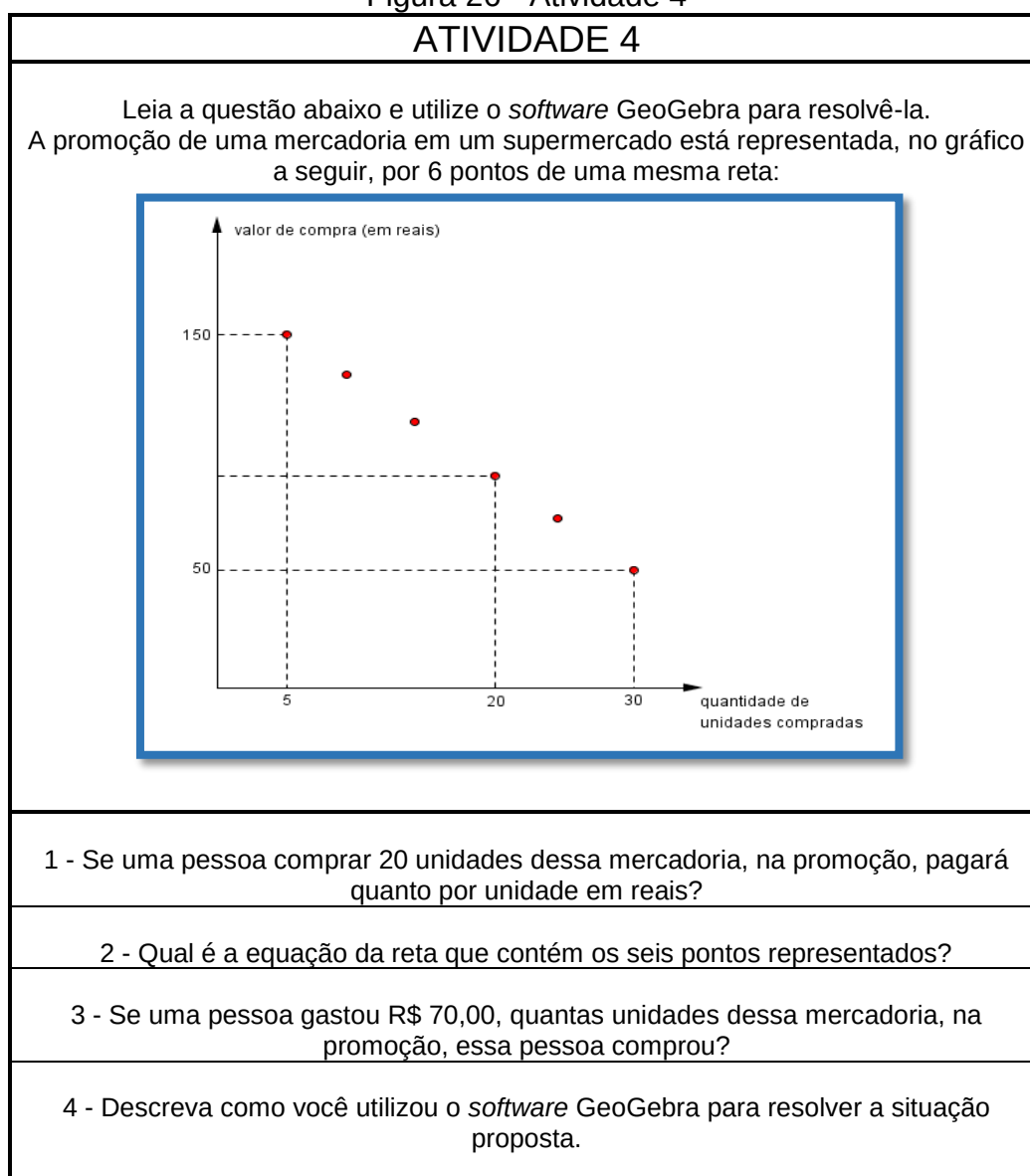
Utilizar o *software* GeoGebra foi pensado propositalmente para o foco do trabalho ser apenas na coordenação dos registros e não na realização de tratamentos e conversões.

Relacionar as atividades e o assunto, já estudado, é a pretensão e espera-se dos alunos não terem grandes dificuldades em estabelecer essa conexão. Apesar do fato de os alunos já terem tido contato com o assunto não é possível garantir a apreensão de tais noções. Assim existe um segundo objetivo para esta sequência de atividades, caso os alunos não tenham apreendido essas noções, terão a possibilidade de fazê-lo durante o processo de resolução das atividades dessa sequência.

4.2.3.4 Análise *a priori* da Atividade 4

Atividade denominada 4 tem como objetivo utilizar os conceitos lembrados ou apreendidos nas atividades 1,2 e 3 para uma aplicação prática. Esse enunciado foi retirado da coleção *Fundamentos da Matemática Elementar*, mais precisamente do *volume 7* de Gelson Iezzi (2005) e trata especificamente de geometria analítica. É uma questão de vestibular adaptada para ser resolvida com a utilização do *software* GeoGebra. A questão era de múltipla escolha que foi alterada para uma questão discursiva, na qual os alunos eram instigados a responder com base na análise e comparação das situações anteriores com a atual. Conforme indica a figura a seguir.

Figura 26 - Atividade 4



Nesta atividade os alunos precisam utilizar o *software* GeoGebra para facilitar a resolução da situação proposta. É apresentado um gráfico no qual alguns pontos estão representados.

O primeiro passo para a resolução seria identificar as coordenadas de dois pontos do gráfico e digitá-las no campo de entrada do *software* GeoGebra. O segundo passo seria construir uma reta pelos dois pontos. Apesar de a situação não ser representada por uma reta, é possível utilizar o conceito de reta tanto no registro gráfico como no registro algébrico para encontrar o solicitado. A solução para a atividade pode ser feita com a utilização dos conhecimentos a respeito da reta apesar de a reta não ser o objeto matemático para representá-la.

A primeira questão pode ser respondida com o uso da equação da reta, apresentada na janela de álgebra, substituindo o valor 20 no lugar de x . Seria possível também digitar o ponto de coordenadas (20,0) e construir uma reta perpendicular ao eixo x passando por esse ponto. O ponto de encontro entre essa reta e a primeira reta que passava pelos pontos digitados inicialmente terá a ordenada igual ao valor pago por uma pessoa que comprar 20 unidades do produto.

Para responder a segunda questão basta observar a equação da reta, construída logo no início, na janela de álgebra. A terceira questão pode ser respondida a partir de um processo muito parecido com o da primeira, ou o aluno utiliza a equação da reta e substitui o valor pago (R\$ 70,00) no lugar de y . Ou ainda, utiliza a opção da construção de uma reta perpendicular a y , resultando no fato de o ponto de encontro entre a primeira reta e a reta construída perpendicularmente ao eixo y ser o ponto procurado.

Esta atividade é interessante, nela os alunos poderão vivenciar uma situação na qual as noções estudadas podem ser aplicadas em uma situação que poderia ser real. Espera-se com essa atividade que os alunos não tenham dificuldades para resolvê-la, pois já tiveram contato com o assunto equação da reta ou anteriormente ou durante a resolução das atividades da sequência de atividades.

5.1 Caracterização dos sujeitos de pesquisa

A escola na qual a pesquisa foi realizada fica localizada na zona sul da cidade de São Paulo. Pertence à rede estadual de ensino de São Paulo.

Seu espaço físico compreende 12 salas de aula, uma biblioteca, além das salas de vídeo e informática. Funciona em três períodos: manhã, tarde e noite. Os períodos da manhã e da noite atendem a alunos das três séries do EM. A noite são seis salas de EM Regular e cinco salas de EM na modalidade EJA (Educação de Jovens e Adultos). Em 2013 há uma sala ociosa neste período. Pela manhã há uma sala de 9º ano do EF II e as demais são ocupadas pelo EM com 5 primeiras, 3 segundas e 3 terceiras séries. No período da tarde todas as salas são ocupadas pelo EF II com três salas de cada ano.

Os alunos das salas das 3ª séries do período da manhã, em sua maioria, estudaram nesta escola desde o EF II, portanto já estão bem familiarizados com a mesma. O conteúdo referente a esta série não foi iniciado de imediato no início do ano letivo.

Foram realizadas algumas atividades nas quais os alunos deveriam reconhecer e aplicar conceitos e conteúdos de séries anteriores como: o conceito de função, conceitos referentes a geometria, probabilidades etc. Com estas atividades pretendia-se fazer um diagnóstico de quais assuntos tinham conhecimento para iniciar o estudo da geometria analítica.

Uma prova diagnóstica com o mesmo objetivo de verificação de habilidades foi enviada para a escola pela Secretaria de Estado da Educação (SEE-SP). Os resultados dessa prova mostraram a dificuldade da maioria dos alunos em algumas habilidades, a partir de então decidiu-se iniciar o primeiro bimestre com alguns conceitos não interiorizados pelos alunos e constatados na avaliação.

Notou-se grande dificuldade em conceitos como a localização de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas, a resolução de equações de primeiro grau,

a construção de um gráfico, enfim conceitos essenciais para o estudo da geometria analítica.

Devido ao pouco tempo não era possível deter-se em uma longa revisão, então optou-se por antes de iniciar cada tópico, uma retomada de conceitos necessários para o estudo daquele assunto novo seria feita.

No mês de março de 2013, iniciei o estudo da geometria analítica com a localização de pontos em sistema cartesiano ortogonal plano, em seguida distância entre dois pontos, coordenadas do ponto médio e condições de alinhamento de três pontos. Com esses assuntos de maneira geral os alunos não tiveram muitos problemas.

As aulas eram sempre expositivas, com explicação de conceitos e demonstrações das fórmulas. Após as explicações os alunos eram orientados a fazer alguns exercícios retirados do livro didático adotado pela escola. O livro adotado é da Coleção Novo Olhar, volume 3 de Joamir de Souza.

Em determinadas ocasiões exercícios de vestibulares ou do ENEM²⁹ também eram trabalhados. Após a resolução dos exercícios era feita a correção daqueles exercícios que os alunos apresentassem maior dificuldade. O mesmo processo seguiu para os conceitos de coeficiente angular e equação da reta.

A escola possui vários projetos desenvolvidos ao longo do ano. Até o fim do primeiro semestre houve várias interrupções no conteúdo para o desenvolvimento desses projetos. Posso citar como exemplos: Projeto Leitura, Mostra Científica, Olimpíada de Matemática etc. O fato de existirem tantos projetos, algumas vezes contribui para reduzir a quantidade de aulas refletindo no desenvolvimento do conteúdo previsto no Currículo (2011).

Devido a essas interrupções e a quantidade de aulas reduzida, o estudo da reta foi iniciado pouco antes das férias escolares de julho, e esse fato tirou um pouco do foco dos alunos em relação a esse assunto. O estudo da reta foi retomado após o período de férias, durante aproximadamente quinze dias do mês de agosto de 2013.

Avaliações realizadas nesse período consistiam em provas, atividades de casa e em sala de aula. As atividades poderiam ser individuais ou em grupo.

²⁹ ENEM -Exame Nacional do Ensino Médio. Criado em 1998 com o objetivo de avaliar o estudante ao fim da escolaridade básica. Podem participar os alunos concluintes e os alunos que já concluíram o ensino médio. Hoje este exame também é utilizado como critério de seleção para ingresso no ensino superior e para aqueles alunos que pretendem concorrer a uma bolsa de estudos oferecida pelo governo federal do Brasil. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>.

Não é muito fácil identificar as dificuldades de cada aluno individualmente, pois as salas têm em média 40 a 42 alunos. Porém é possível identificar dificuldades mais gerais em relação às turmas. Essas dificuldades são apresentadas a seguir.

- Realização de operações básicas para a resolução de equações ou simplificação das mesmas;
- Identificação de propriedades das figuras geométricas;
- Interpretação dos enunciados;
- Dificuldade com relação à descrição e justificação de procedimentos adotados de forma escrita;
- Dificuldade em relacionar diferentes formas de representação de um mesmo objeto;

Todas dificuldades identificadas não são muito diferentes daquelas apontadas pelas pesquisas como declara Hajnal (2007, p.17) “[...] a maioria dos alunos não conseguiu justificar suas respostas ou apresentaram respostas totalmente empíricas sem nenhuma informação pertinente.”

Varella (2010, p. 27) afirma que os alunos apresentam “[...] falhas no reconhecimento e aplicação de propriedades das figuras planas, [...] interpretação incorreta de um problema ou mesmo a falta de coordenação de mais de um registro de representação [...]”.

Ao refletir a respeito de todos esses aspectos levantados em conjunto com os estudos sobre a teoria, análise dos documentos oficiais e revisão bibliográfica construiu-se uma sequência de atividades e acredita-se poder auxiliar no diagnóstico de tais dificuldades.

5.2 Experimentação – A aplicação da sequência de atividades

Após a elaboração da sequência de atividades partiu-se para a próxima fase da engenharia didática, a experimentação. Nesta fase a sequência desenvolvida foi aplicada aos alunos com a finalidade de verificar os possíveis resultados apontados na análise *a priori*.

O público alvo dessa sequência de atividades são os alunos da 3ª série do EM. O motivo para a escolha dos alunos desta série ocorreu pelo fato deles já terem tido contato com o assunto.

O objetivo era verificar se a utilização de um *software* como o GeoGebra poderia auxiliar na apreensão do objeto matemático.

Para a experimentação foram convidados dez alunos das três salas do período da manhã da 3ª série do EM. O dia marcado para a experimentação foi 27 de setembro de 2013, uma sexta-feira, no período da manhã. Foram convidados dez alunos, escolhidos de maneira aleatória de acordo com o interesse apresentado por eles. Dos dez alunos convidados apenas seis compareceram. Os seis alunos foram agrupados em três duplas para a realização da sequência de atividades.

A primeira intenção era utilizar os computadores da sala de informática da escola, porém alguns problemas apareceram. Esta escola faz parte do Programa ACESSA Escola³⁰, por este motivo os computadores da sala de informática só podem ser utilizados com o uso de uma senha e esta fica em posse apenas do aluno que trabalha nesta sala como estagiário. O aluno que trabalhava na sala de informática, no período da manhã, pediu o seu desligamento, logo não foi possível utilizar os computadores da sala de informática, pois não tínhamos acesso, devido a falta da senha.

Realizar as atividades só foi possível pois como forma de solucionar o problema utilizaram-se *notebooks* levados pela pesquisadora. No dia marcado foram levados três *notebooks*, como apenas seis alunos, dos dez convidados, compareceram a quantidade foi suficiente, pois eram três duplas. A primeira atitude foi encontrar uma sala ociosa para a realização das atividades, a melhor opção foi a própria sala de informática apesar de não utilizar seus computadores.

Depois de estabelecer o local adequado, explicou-se o objetivo da pesquisa, e como seria a participação dos alunos. Esclareceu-se não haver nenhum risco para a participação do projeto de pesquisa. O termo de consentimento livre e esclarecido³¹, que permite a utilização da produção dos alunos para fins de pesquisa, devidamente assinado pelos pais, foi recolhido.

³⁰ ACESSA Escola, um programa do Governo do Estado de São Paulo, desenvolvido pela Secretarias de Estado da Educação, sob a coordenação da Fundação para o Desenvolvimento da Educação (FDE), tem por objetivo promover a inclusão digital e social dos alunos, professores e funcionários das escolas da rede pública estadual. Por meio da Internet, ele possibilita aos usuários o acesso às tecnologias da informação e comunicação para a construção do conhecimento e o fortalecimento social da equipe escolar. Disponível em: <http://acessaescola.fde.sp.gov.br/Public/Conteudo.aspx?idmenu=11>.

³¹ O termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) é apresentado no Anexo II.

Logo após a explicação introdutória, iniciou-se a apresentação do *software* GeoGebra aos alunos. Foram mostradas opções de ferramentas contidas na barra de ferramentas e como utilizá-las, foram mostradas praticamente todas, com ênfase naquelas mais utilizadas para a realização da sequência de atividades. Em seguida os alunos puderam explorar o *software* por mais ou menos vinte minutos.

Para o encontro da sala, explicação dos objetivos da pesquisa e a familiarização com o *software* foi gasta aproximadamente uma hora e trinta minutos.

Assim a sequência de atividades foi iniciada às 8h30min. Para a realização da Atividade 1, foram gastos aproximadamente 40 minutos. Os alunos desenvolveram esta atividade com relativa facilidade tanto no uso do *software* quanto as questões propostas.

Todas as duplas iniciaram a Atividade 2 aproximadamente às 9h10min, o desenvolvimento dessa atividade também transcorreu sem maiores problemas. O tempo gasto também foi de aproximadamente 40 minutos. Após o término foi feito um intervalo de aproximadamente 20 minutos.

Foram reiniciadas as atividades às 10h10min com a parte 1 da Atividade 3. Esta proposta foi um pouco mais trabalhosa por ser composta de duas partes. Para a realização desta atividade gastou-se aproximadamente 1 hora e 10 minutos. Em relação à parte 1 desta atividade os alunos conseguiram concluir o que foi pedido, apesar de dedicarem um tempo maior às discussões e observações sobre as retas e suas equações.

Houve um pouco mais de demora para a segunda parte da Atividade 3, os alunos conseguiram concluir rapidamente que as retas eram concorrentes, mas chegar à conclusão de que o ponto de intersecção entre as retas pode ser encontrado pela resolução do sistema formado pelas equações das retas concorrentes foi um pouco mais trabalhoso. Algumas intervenções foram feitas devido as dúvidas surgidas durante as discussões.

As três duplas conseguiram realizar as atividades 1, 2 e 3, duas mais rapidamente e uma dupla com um pouco mais de dificuldade, porém todas conseguiram.

A Atividade 4 foi iniciada por volta de 11h40min. Os alunos realizaram esta proposta com a ajuda das ferramentas do *software* GeoGebra.

Esta atividade foi desenvolvida por mais ou menos 50 minutos. Portanto as atividades encerraram-se aproximadamente às 12h30min.

Percebeu-se grande satisfação por parte dos alunos em relação às atividades e ao *software*, foram feitos comentários sobre o fato de poder movimentar as retas construídas e com esse recurso as noções já vistas anteriormente ficarem mais claras. De maneira geral, o encontro foi muito proveitoso e notou-se nos alunos maior motivação.

5.3 Análise *a posteriori* da sequência de atividades aplicada

A sequência de atividades foi aplicada para alunos da 3ª série do EM. Os participantes já tiveram contato com o assunto no início do ano de 2013. Três duplas participaram do projeto e foram chamadas de **dupla 1**, **dupla 2** e **dupla 3**. A dupla 1 era composta pelos alunos 1 e 2, a dupla 2 era composta pelos alunos 3 e 4 e a dupla 3 pelos alunos 5 e 6. As atividades foram desenvolvidas sem a interferência da pesquisadora, caracterizando assim uma sequência de atividades *adidática*³².

No decorrer da execução das questões pertencentes à sequência, o áudio foi gravado apenas da dupla 3, porém foi feita entrevista com as duplas 1 e 2 para ter uma ideia clara do que realmente queriam dizer com as respostas escritas no papel. Esta foi a opção para existir mais de um registro em língua natural, ou seja, o escrito e o oral.

O assunto tratado na sequência é a reta enfatizando quatro registros de representação semiótica. Para o seu desenvolvimento espera-se dos alunos conseguir coordenar os diferentes registros. Os registros a serem coordenados são: registro da língua natural, registro simbólico, registro gráfico e registro algébrico. Aqui o registro simbólico funcionará como uma representação auxiliar de transição para conversões não realizadas de forma direta.

³² Segundo Brousseau (2008) uma situação *adidática* é aquela que não tem a interferência do professor no momento em que está sendo realizada, é comandada exclusivamente pelo aluno.

5.3.1 Análise das questões respondidas antes da realização da sequência de atividades

Em complemento às atividades foram feitas algumas perguntas relativas ao conhecimento dos alunos sobre o assunto e as suas expectativas sobre o desenvolvimento delas. Outro aspecto a destacar-se é a experiência dos alunos com o computador para estimar como será a relação deles com o *software*.

Na primeira questão perguntou-se se lembravam do assunto equação da reta e as respostas dadas são apresentadas a seguir.

Quadro 1 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas *antes* das Atividades - 1

Você já teve contato com o assunto <i>equação da reta</i> , nas aulas de matemática, neste ano de 2013. O que você lembra de ter estudado sobre esse assunto?	
Dupla 1	Sim. Existe retas, semi-retas e segmento de retas, a equação da reta é para identificar onde se encontra as retas.
Dupla 2	Neste assunto estudamos as formas geral e reduzida da equação, as coordenadas dos pontos no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas, o baricentro, sistemas lineares, retas paralelas, concorrentes e perpendiculares, circunferências e cônicas.
Dupla 3	O assunto equação da reta já é de nosso conhecimento. Nos lembramos que dentro desse assunto estudamos a posição que as retas ocupam no plano cartesiano de acordo com as coordenadas, temos também os coeficientes angular e linear, que definem, respectivamente, a inclinação da reta e o ponto onde ela cruza o eixo y .

Quadro 2 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas *antes* das Atividades - 2

Quais dificuldades você teve durante o estudo desse assunto?	
Dupla 1	O assunto em si é fácil, a dificuldade se encontra nos exercícios mais complexos onde tinhamos que utilizar diversos elementos da matéria.
Dupla 2	A formação dos sistemas lineares e na verificação da redução desses sistemas (SPD, SPI e SI).
Dupla 3	Durante o estudo do assunto as dificuldades encontradas aconteceram no início dos estudos, pois com a prática ele passou a ser melhor entendido. No entanto, com o passar do tempo e novos assuntos algumas características são esquecidas pela falta de prática.

Quadro 3 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas *antes* das Atividades - 3³³

Você usa o computador com muita frequência? Para qual finalidade?	
Dupla 1	Sim Para fazer pesquisas, lazer e trabalho.
Dupla 2	Sim, para trabalhos escolares, pesquisas para aprimoramento pessoal e entretenimento.
Dupla 3	Sim, principalmente para continuar os estudos de aulas e cursos, pesquisas sobre atualidades.

Na primeira questão observa-se que os alunos já tiveram contato com o assunto, mas não recordam de tudo já estudado. Foram mencionadas retas e segmentos de reta, equações e também foi feita referência às posições relativas entre as retas.

De acordo com as respostas dadas verifica-se que as duplas 1 e 3 mencionaram assuntos estudados e referem-se exclusivamente à reta, mas a dupla 2 apresentou vários outros tópicos pertencentes à geometria analítica, porém não são especificamente sobre o estudo da reta.

³³ A fonte dos quadros 1, 2 e 3 são os protocolos das três duplas.

Na segunda questão apontam a maior dificuldade em relação aos conhecimentos prévios, por exemplo resolução de equações, propriedades das figuras geométricas etc.

A dupla 1 não explicitou de forma clara quais foram suas principais dificuldades, por isso foram questionados e as respostas são apresentadas a seguir.

Aluno 1: *“Acho que a dificuldade é quando a gente tem que usar tudo, a gente se confunde, na hora de calcular, quando a gente tem que fazer muito cálculo de uma vez, aí tem que calcular por exemplo, sei lá, os pontos, o baricentro, as medianas, aí você tem que juntar tudo de uma vez e calcular.”*

Pesquisadora: *“Mas é com o cálculo ou com o conceito referente à geometria analítica?”*

Aluno 2: *“Com o cálculo.”*

Aluno 1: *“Com o cálculo, a gente entende o que tem que fazer mas na hora de misturar tudo confunde.”*

Na terceira questão os alunos mostram ter conhecimento em relação ao uso do computador. Apontam usarem o computador com frequência tanto para o trabalho quanto para estudo, além de utilizá-lo para o lazer.

Quando referiram-se a lazer, as três duplas mencionaram a utilização de redes sociais, jogos e músicas como principais atividades, porém as redes sociais são a primeira atividade a ser lembrada por eles e é possível comprovar ao observar o diálogo da dupla 2 abaixo.

Pesquisadora: *Que tipo de entretenimento?*

Aluno 3: *Bom, eu uso mais pra jogos, mesmo né!*

Aluno 4: *Eu é facebook essas coisas assim, de vez em quando jogos, mas a maioria das vezes é facebook!*

Todas as respostas dadas pelos alunos eram esperadas, já que o assunto foi estudado, logo imaginava-se que lembrariam de tópicos da geometria analítica. As dificuldades em relação a conhecimentos prévios também era algo esperado, pois muitas vezes os alunos não conseguem resolver determinadas situações devido a problemas referentes à assuntos já vistos anteriormente, mas não apreendidos.

Em relação ao uso do computador já era esperado terem bastante experiência e o usarem com bastante frequência.

Com base nessas informações pode-se considerar como perfil dos alunos participantes da pesquisa: já estudaram o assunto e lembram, mesmo superficialmente, do conteúdo estudado anteriormente, a maior dificuldade encontra-se no ato de relacionar conteúdos já vistos com aqueles estudados no momento e utilizam o computador com frequência para as mais diversas atividades, portanto têm experiência com o computador.

Ao final da Atividade 3 os alunos também responderam algumas questões com o objetivo de verificar as opiniões a respeito do uso do *software* e das atividades realizadas.

5.3.2 Análise *a posteriori* da Atividade 1

Na primeira questão da Atividade 1 foi pedido que os alunos digitassem três pontos: $A=(-1,1)$, $B=(1,3)$ e $C=(2,4)$ ³⁴; usassem a ferramenta “*reta definida por dois pontos*” e respondessem se A, B e C eram ou não colineares. As repostas dadas pelas três duplas seguem abaixo.

Quadro 4 - Respostas das três duplas para a questão 1 da Atividade 1³⁵

Dupla 1	
Os três pontos que você digitou, A, B e C são colineares? Por que? <i>Sim, pois, todos os pontos passam pela mesma reta.</i>	
Dupla 2: Sim, porque eles formam uma reta.	Dupla 3: Os três pontos digitados são colineares, pois estão alinhados e ao traçar uma reta, ela passa pelos três pontos.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As duplas 2 e 3 responderam de acordo com o esperado, portanto conseguiram visualizar os três pontos contidos em uma reta. Ao realizarem a conversão para o registro da língua natural conseguiram expressar o observado na tela do computador.

³⁴ Os pontos foram representados dessa forma, pois no *software* GeoGebra esta é a notação requerida.

³⁵ As respostas das duplas 2 e 3 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Certa dificuldade, foi mostrada pela dupla 1, na conversão dos registros algébrico e gráfico para o registro da língua natural, observados na tela do computador. Apenas observando os escritos não consegue-se ter uma ideia clara a respeito do conhecimento deles portanto perguntou-se o que queriam dizer a respeito da frase escrita. As respostas são apresentadas a seguir.

Aluno 1: “Porque olhando lá no programa, ele fazia uma reta, todos os pontos eram ligados na mesma reta.”

Aluno 2: “Todos os pontos estavam na mesma reta.”

Aluno 1: “Todos estavam alinhados, é isso!”

Com base nas respostas é possível dizer que apesar da dificuldade com o registro da língua natural na forma escrita, os alunos conseguiram visualizar o fato de os três pontos estarem alinhados, pois ao usarem o registro da língua natural na forma oral conseguiram explicitar o que pretendiam dizer ao escrever a frase para responder a questão 1 da Atividade 1.

Na questão 2 foram apresentados mais três pontos $D=(-2,-1)$, $E=(4,-3)$ e $F=(0,5)$ e como na questão 1, foi solicitado que respondessem se D, E e F eram ou não colineares. A seguir as respostas dadas pelas três duplas.

Quadro 5 - Respostas das três duplas para a questão 2 da Atividade 1³⁶

Dupla 1	
Os pontos D, E e F são colineares? Por que? <i>Não, pois os três pontos não passam pela mesma reta.</i>	
Dupla 2: Não, porque eles formam um triângulo.	Dupla 3: Os pontos acima não são colineares pois não se encontram alinhados e traçando uma reta sobre os pontos formaremos um triângulo.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 1 cometeu o mesmo equívoco observado na questão 1 ao escrever que os pontos não passam pela mesma reta, por isso foram questionados a respeito do que queriam dizer com essa frase e responderam conforme é apresentado a seguir.

³⁶ As respostas dadas pelas duplas 2 e 3 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Aluno 1: *“A localização dos pontos eram distantes uma da outra, tipo um era mais em cima, outro era no canto direito, outro no canto esquerdo, não tinha como passar a linha...”*

Aluno 2: *“Uma mesma reta sobre eles!”*

Aluno 1: *“...passar pelos três seguindo reto! [...] Fica a reta de um com o outro, mas pelos três não.”*

Ao utilizarem o registro da língua natural oral, não cometem o mesmo equívoco e pode-se concluir que apesar do engano cometido no registro da língua natural escrito, conseguiram perceber não ser possível traçar uma única reta passando pelos três pontos.

A resposta da dupla 2 foi direta e mostrou a não percepção desta dupla sobre a impossibilidade de traçar uma reta passando pelos três pontos e então esses três pontos formariam um triângulo.

A dupla 3, em sua resposta, também mostra que perceberam não ser possível traçar uma reta contendo os três pontos, porém ao escreverem *“traçando uma reta sobre os pontos formaremos um triângulo”*, percebe-se um equívoco, pois para obter um triângulo é necessário traçar três retas e não apenas uma. Isto leva a refletir sobre o que quiseram dizer com tal afirmação.

Nas questões 1 e 2 o par de registros, gráfico e algébrico, mostra-se eficiente para serem estabelecidas relações entre diferentes registros a respeito de um mesmo objeto matemático. O registro gráfico serve de registro revelador, por meio de sua manipulação com o auxílio dos recursos do *software* é possível verificar a percepção dos alunos sobre o fato de para três pontos estarem alinhados, deve existir uma única reta que os contenha e quando três pontos não estão alinhados esta reta não existe e tais pontos formam um triângulo.

Solicitou-se aos alunos, na questão 3, observarem e descreverem as informações contidas na janela de álgebra. A seguir são apresentadas as respostas dadas pelas três duplas.

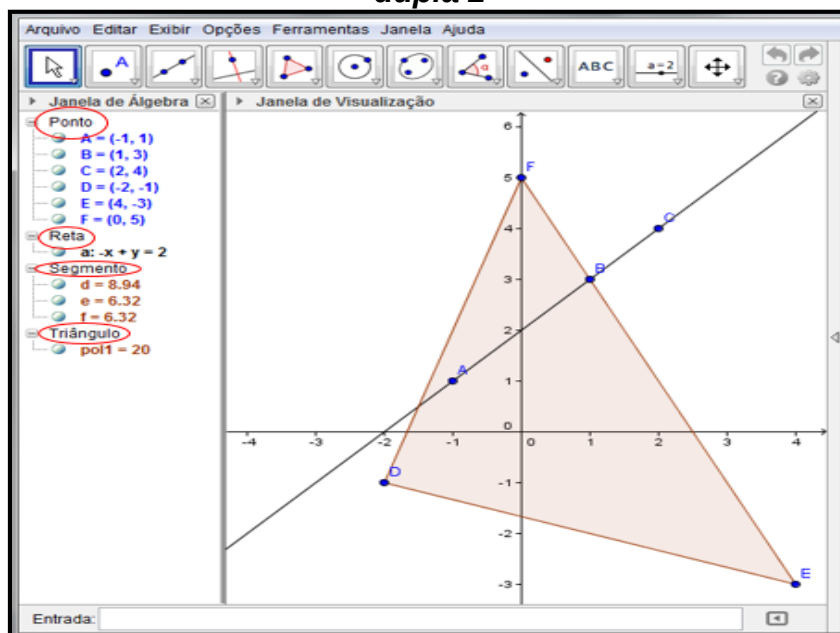
Quadro 6 - Respostas das três duplas para a questão 3 da Atividade 1

Dupla 1	O que aparece na janela de álgebra? Aparece as coordenadas dos pontos, da reta, dos segmentos e do triângulo.
Dupla 2	O que aparece na janela de álgebra? Na janela de álgebra são mostrados as coordenadas dos pontos, a equação da reta e os segmentos do triângulo.
Dupla 3	O que aparece na janela de álgebra? Na janela de álgebra aparecem as coordenadas dos pontos.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As três duplas deram respostas muito semelhantes, isso deve-se ao fato de, na janela de álgebra, os elementos serem identificados em ponto, reta, segmento e triângulo, conforme indica a figura a seguir.

Figura 27 - Protocolo da construção no GeoGebra para a Atividade 1, feita pela **dupla 2**



Fonte: Protocolo da dupla 2, feito no software GeoGebra.

A dupla 1 mencionou as coordenadas dos pontos, porém quando referiram-se à reta, ao segmento e ao triângulo não mencionaram o que está discriminado para cada um dos elementos citados. Ao perguntar sobre o observado, responderam conforme indicado a seguir.

Aluno 1: “Da reta seria a equação. Do segmento eram como se fossem os pontos que faziam o ângulo do triângulo. Do triângulo, a área.”

Aluno 2: “A área do triângulo.”

A dupla 2 citou as coordenadas dos pontos, a equação da reta e os segmentos do triângulo. Tanto a dupla 1 quanto a dupla 2 mencionaram os segmentos apresentados na janela de álgebra, mas não identificaram nenhuma característica em relação a eles. Pode-se dizer que as duas duplas não conseguiram identificar o significado das informações a respeito dos segmentos.

A dupla 3 mencionou apenas as coordenadas dos pontos e não citou os demais elementos. É possível concluir que apesar de os alunos terem manipulado esses elementos na janela de visualização, ainda não conseguiram estabelecer a conexão esperada entre os registros algébrico e gráfico, pois não conseguiram relacionar o manipulado com o que apareceu na janela de álgebra.

A questão 4 refere-se à relação entre o observado e manipulado com a ajuda do *software* e o que já foi estudado anteriormente. A seguir as respostas dadas pelas três duplas.

Quadro 7 - Respostas das três duplas para a questão 4 da Atividade 1

Dupla 1	De acordo com o que você estudou, qual é o método para verificar se três pontos são colineares? Resolvendo a determinante da ordem 3 onde temos que obter o valor igual a zero.
Dupla 2	De acordo com o que você estudou, qual é o método para verificar se três pontos são colineares? Para verificarmos esta condição devemos resolver o determinante de ordem 3 formado pelas coordenadas dos pontos.
Dupla 3	De acordo com o que você estudou, qual é o método para verificar se três pontos são colineares? Para identificar se os pontos são colineares é necessário resolver o determinante e o resultado deve ser igual a 0 (zero).

Fonte: Protocolos das duplas 1,2 e 3.

As três duplas mencionaram a utilização do determinante para verificar se os três pontos estão alinhados, porém somente a dupla 2 especificou que este determinante é formado pelas coordenadas dos pontos, embora não tenha registrado o fato de o resultado do determinante ser zero quando os pontos formam uma reta.

A dupla 1 citou a ordem do determinante, mas não disse que ordem é essa. Ao serem perguntados a esse respeito disseram o que segue.

Aluno 1: *“Da ordem dos pontos. São três pontos então o determinante tem ordem 3.”*

Aluno 2: *“3.”*

A dupla 3 também não relatou a ordem do determinante e quais são os números que formam esse determinante, como verifica-se no diálogo entre os alunos.

Aluno 5: *“Então, pelo que eu lembro é pelo sis.... não é sistema, ai fugiu agora, lembra que a gente fazia... determinante!”*

Aluno 6: *“Determinante, é!”*

Aluno 5: *“Ai a gente tinha que fazer aqueles 3...”*

Aluno 6: *“Ai a gente multiplica em diagonal...”*

A utilização do determinante foi lembrada pelas três duplas, portanto conseguiram associar o que já foi estudado com o que foi apresentado na questão 4. Porém cabe ressaltar a dificuldade mostrada pelos alunos em relação ao registro da língua natural principalmente na forma escrita, ao serem questionados não hesitam em responder e acrescentam informações ao que fora escrito no papel.

Na questão 5 os alunos tiveram que utilizar o determinante para conferir o que foi observado na tela do computador. As resoluções são apresentadas a seguir.

Quadro 8 - Respostas das três duplas para a questão 5 da Atividade 1

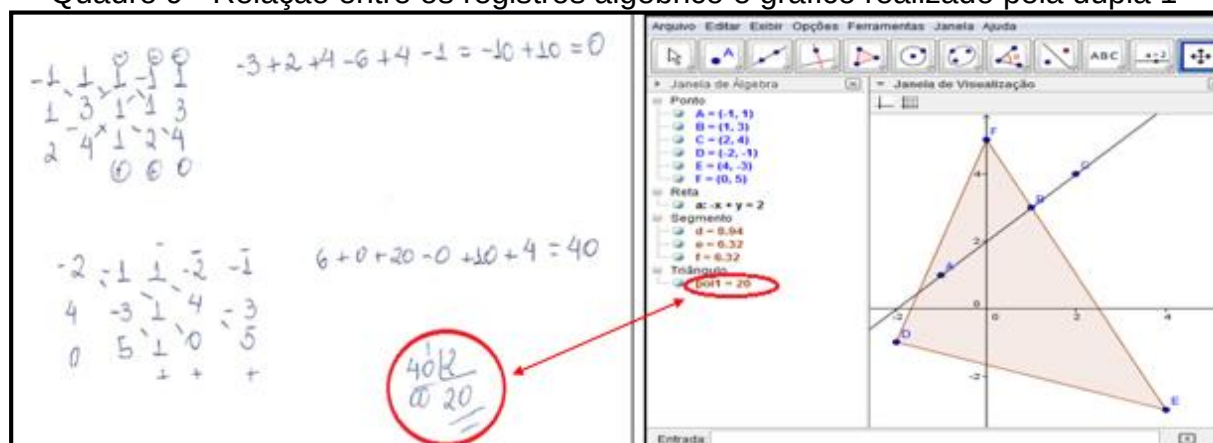
No espaço abaixo use o método que você já estudou para verificar se os três pontos estão alinhados, no caso dos pontos A, B e C. Em seguida use o mesmo processo para D, E e F.		
Dupla 1	$\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{array}$ $-3 + 2 + 4 - 6 + 4 - 1 = -10 + 10 = 0$ $\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}$ $6 + 0 + 20 - 0 + 10 + 4 = 40$ $\begin{array}{r} 40 \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$	
Dupla 2	$A = (-1, 1); B = (3, 3); C = (2, 4)$ $\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{array}$ $-6 + 4 - 1 - 3 + 2 + 4 = 0$ A, B e C estão alinhados	$D = (-2, 1); E = (4, 3); F = (0, 5)$ $\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}$ $0 + 10 + 4 + 6 - 0 + 20 = 40$ D, E e F não estão alinhados
Dupla 3	$\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{array}$ $-3 + 2 + 4 - 6 + 4 - 1 = -10 + 10 = 0$ A, B, C = 0 A, B e C estão alinhados.	$\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}$ $+6 + 20 + 10 + 4 = 40$ $A_D = \frac{1}{2} \cdot D$ $A_D = \frac{1}{2} \cdot 40$ $A_D = \frac{40}{2}$ $A_D = 20 \text{ u}^2$ $D, E, F = 40$ D, E, F não estão alinhados

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3

As três duplas resolveram o determinante com o uso da *regra de Sarrus*, devido ao fato de ser a única regra indicada pelo Currículo do estado de São Paulo (2011) para a resolução do determinante.

A dupla 1 ao resolver os dois determinantes, encontrou os dois valores esperados, 0 (zero) e 40 (quarenta). Porém conforme foi destacado em vermelho nos quadros 8 e 9, conseguiram estabelecer a relação entre o que foi observado na janela de álgebra e o valor obtido para o determinante dos pontos D, E e F que não eram colineares. Conforme pode-se observar no quadro a seguir.

Quadro 9 - Relação entre os registros algébrico e gráfico realizado pela dupla 1



Fonte: Protocolos da dupla 1, no papel e no computador.

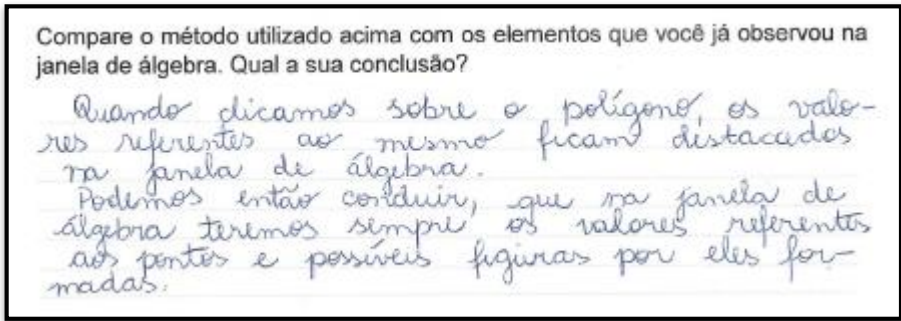
A dupla 2 resolveu os determinantes e conseguiu os resultados 0 (zero) e 40 (quarenta), esperados. A dupla 3 também resolveu os dois determinantes conforme esperava-se, mas estabeleceu a conexão com o que já foi estudado usando a expressão para o cálculo da área do triângulo:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |D| \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \text{ com } A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \text{ e } C(x_C, y_C)$$

As três duplas não demonstraram dificuldades em relação ao uso e resolução do determinante. As duplas 1 e 3 mostraram maior atenção do ponto de vista cognitivo procurando estabelecer a conexão entre o que aparece na janela de álgebra e o que apareceu na resolução feita por eles no papel.

Na questão 6 pediu-se aos alunos realizarem a conexão entre o que já foi visto nas aulas de matemática e o observado no desenvolvimento das atividades, como mostra a figura a seguir.

Quadro 10 - Respostas das três duplas para a questão 5 da Atividade 1³⁷

Dupla 3	
Compare o método utilizado acima com os elementos que você já observou na janela de álgebra. Qual a sua conclusão? 	
Dupla 1: Ambos foram coerentes, pois obtivemos o mesmo resultado de diferentes maneiras	Dupla 2: Concluímos que o método foi eficiente e coincidiu com os resultados mostrados no plano cartesiano.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 3 não respondeu o que foi pedido, apenas mencionou um recurso do software.

Aluno 5: “Que o valor que ele dá aí é o valor da área do triângulo, né.”

Aluno 6: “Mas aí ele tá falando de todos.”

Aluno 5: “Então esse último valor é só referente, ó, se a gente clicar fora já não vai mais ter, entendeu?”

Aluno 6: “Não, eu sei mas ele tá falando da janela de álgebra então a gente tem que considerar todos os valores dela.”

Ao observar o diálogo podemos constatar uma situação de certa confusão por parte dos alunos dessa dupla, verifica-se uma dúvida em relação ao que deveria ser observado na janela de álgebra, devido a essa confusão provavelmente decidiram por responder destacando o recurso do software.

A dupla 1 citou o fato de os resultados obtidos no papel e no computador serem os mesmos. Conforme a transcrição a seguir.

Aluno 1: “Acho que você já vendo como é que tá não tem como você errar, mais fácil do que talvez, você pode errar no cálculo e dá diferente e não é, então eu acho que observando no programa, é melhor. Você resolvendo o cálculo dá a mesma coisa que o programa faz, o mesmo cálculo que você faz a mão é o mesmo que o programa faz.”

³⁷ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

As duplas 1 e 2 tiveram conclusões muito parecidas apesar de a dupla 1 apresentar maior dificuldade em relação ao registro da língua natural na forma escrita.

A questão 7 foi a última da Atividade 1, nela foi pedido que os alunos concluíssem a respeito do alinhamento ou não de três pontos. As respostas das três duplas são apresentadas a seguir.

Quadro 11 - Protocolos das conclusões dos alunos das duplas 1, 2 e 3 para a Atividade 1

Três pontos estão alinhados se:	
Dupla 1	O valor de determinante for igual a zero.
Dupla 2	formarem uma reta e o determinante for igual a zero.
Dupla 3	o valor de respectivo determinante for igual a 0 (zero).
Quando três pontos não estão alinhados:	
Dupla 1	O valor do determinante é diferente de zero e forma-se um triângulo.
Dupla 2	formam uma figura geométrica ou não, mas não formam uma reta e o determinante não é igual a zero.
Dupla 3	Não temos a formação de uma e consequentemente os determinantes não serão iguais a zero logo, poderão ser formadas figuras geométricas.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3

A primeira conclusão, em relação aos pontos estarem alinhados, foi parcialmente contemplada pelas duplas 1 e 3, ambas citaram apenas a forma algébrica e não deram importância à representação gráfica. A dupla 2 pelo contrário contemplou ambos os registros algébrico e gráfico, além de mencionar a resolução do determinante também apontou a formação de uma reta passando pelos pontos.

A segunda conclusão, em relação ao pontos não estarem alinhados, apresentou equívocos nos registros das duplas 2 e 3.

A dupla 2 cita que os três pontos podem formar uma figura geométrica ou não, fato que expressa um engano por parte dos alunos, pois os três pontos sempre formarão um triângulo e não outro tipo de figura. No que diz respeito ao determinante relacionaram corretamente. Ao serem questionados sobre três pontos formarem uma figura responderam conforme indicado a seguir.

Aluno 4: *“Olha eu já vi casos de triângulos e retângulos sendo formados.”*

Pesquisadora: *“Com três pontos?”*

Aluno 4: *“Não, três pontos, só triângulo. Já vi uma linha formada e não reta, por exemplo ela sobe assim e depois desce.”*

A dupla 3 fez referência ao resultado do determinante ser diferente de zero e os pontos não formarem uma reta, mas a reta não foi mencionada explicitamente, ficou subentendida, e não fazem alusão ao triângulo e sim a figuras geométricas, isso leva a pensar que estão considerando que os três pontos podem formar outro tipo de figura qualquer, fato que não é verdadeiro.

Aluno 6: *“Normalmente quando três pontos não estão alinhados a gente vai acabar formando uma figura né!”*

A dupla 1 contemplou os dois registros, algébrico e gráfico, especificando-os conforme esperado.

No decorrer do desenvolvimento da Atividade 1, foi possível notar que os alunos não conseguiram estabelecer todas as conexões que eram esperadas. As conexões entre o registro gráfico e algébrico foram contempladas parcialmente, nenhuma das três duplas conseguiu chegar à conclusão esperada, quando conseguiam verificar o registro gráfico não relacionavam com o registro algébrico e vice-versa.

Um aspecto a ser levado em consideração é a utilização do registro da língua natural, as dificuldades em relação a seu emprego são claras para as três duplas. Verifica-se a necessidade da maior exploração desse registro, a coordenação entre os demais registros e o registro da língua natural é condição necessária para a apreensão de qualquer objeto matemático, o que não poderia ser diferente para a reta.

[...] tudo foi feito para reduzir o lugar e o papel da língua natural no pensamento matemático. O desenvolvimento da lógica matemática e das linguagens formais [...] testemunha a pesquisa de uma *semiós* que suprimiria a linguagem natural em favor da linguagem formal. (DUVAL, 2011, p. 131)

Isto posto verifica-se a necessidade de explorar este registro tão importante para o entendimento de qualquer conceito em matemática. O registro da língua natural tanto escrito como oral está presente nas aulas e deve ser trabalhado de forma exaustiva a fim de contribuir para a apreensão do objeto matemático.

5.3.3 Análise *a posteriori* da Atividade 2

Na questão 1 pedia-se para digitarem os pontos $A=(-2,5)$ e $B=(2,-2)$ e com o uso da ferramenta “*reta definida por dois pontos*” construísem a reta que os continha, em seguida pedia-se para responderem sobre os elementos presentes na janela de álgebra, conforme mostra o quadro a seguir.

Quadro 12 - Respostas das três duplas para a questão 1 da Atividade 2

O que aparece na janela de álgebra?	
Dupla 1	Os valores dos pontos e a equação da reta.
Dupla 2	Aparecem as coordenadas dos pontos e a equação da reta.
Dupla 3	Na janela de álgebra aparece a equação da reta.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 1 respondeu que os “*valores dos pontos*” e a equação da reta eram apresentados na janela de álgebra, ao citarem os “*valores dos pontos*” permanece uma dúvida sobre a intenção ao usarem esta expressão, por esse motivo foram questionados sobre o real intento ao dizerem isso e a resposta é apresentada a seguir.

Pesquisadora: “O que vocês quiseram dizer com os *valores dos pontos*?”

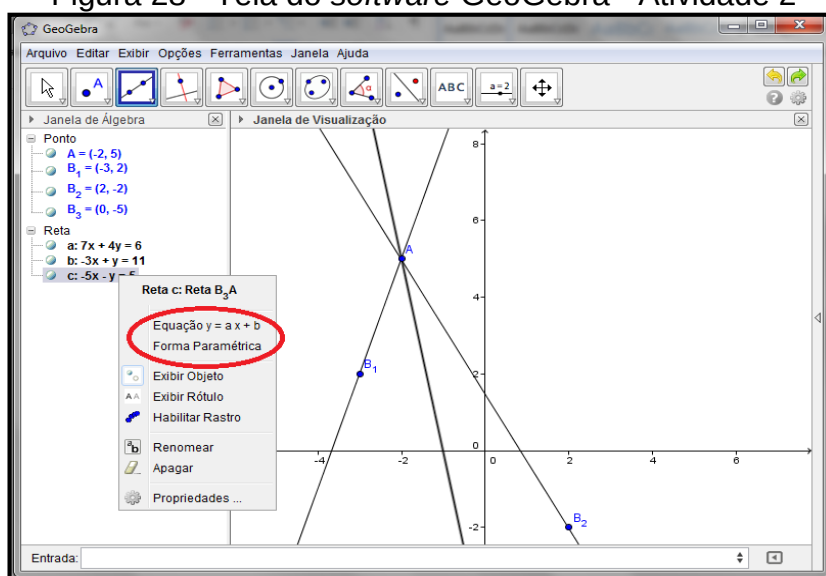
Aluno 2: “ x e y !”

Aluno 1: “Seria o x e o y ! As coordenadas dos pontos.”

De acordo com a resposta dada é possível inferir que os alunos da dupla 1, identificaram os elementos presentes na janela de álgebra. A dupla 2 respondeu da maneira esperada, mencionou as coordenadas dos pontos e a equação da reta.

A dupla 3 não indicou as coordenadas dos pontos, apenas citou a equação da reta, fato que leva a refletir a respeito do observado na tela do computador. Na questão 2 foi requerido aos alunos mudarem a equação da reta, na janela de álgebra, para a forma reduzida. O software GeoGebra possui este recurso, ao clicar sobre a equação admite-se escolher a forma como a equação será apresentada na janela de álgebra, conforme indicado na figura a seguir.

Figura 28 - Tela do software GeoGebra - Atividade 2



Fonte: Figura criada pela pesquisadora com o software GeoGebra.

As respostas dadas pelas três duplas para essa questão são expostas a seguir.

Quadro 13 - Respostas das três duplas para a questão 2 da Atividade 2³⁸

Dupla 3	
O que aconteceu com a equação da reta na janela de álgebra? Por que? A equação da reta passou da forma geral para a forma reduzida, logo, os valores que aparecem mudaram.	
Dupla 1: Ele resolveu a equação, deixando o y sozinho.	Dupla 2: A equação fica na forma reduzida porque o y foi isolado.

Fonte: Protocolos das duplas 1,2 e 3.

³⁸ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

A dupla 3 respondeu com menção às formas geral e reduzida da equação de uma reta, porém a equação exibida na janela de álgebra não é aquela chamada de forma geral, no *software* a equação é exposta na forma $ax + by = c$, esta não é a forma indicada pelos alunos na resposta. Quando referem-se aos valores não identificam quais valores são esses e nem tampouco qual a importância deles para a representação da reta.

A dupla 1 respondeu que o *software* resolveu a equação, quando na verdade a equação não foi resolvida, foi alterada, de modo que o y foi isolado para ser exibida de outra maneira. Ao serem questionados, os alunos responderam conforme apresentado a seguir.

Pesquisadora: “Vocês disseram que ele resolveu a equação, o que vocês quiseram dizer com isso?”

Aluno 1: “Na verdade ele representou de outra forma, não resolveu, mas representou de outra forma.”

Nesta situação fica clara, mais uma vez, a dificuldade em relação ao registro da língua natural na forma escrita, o escrito não expressa exatamente o pensamento dos alunos.

A dupla 2 respondeu da maneira esperada, que a forma da equação foi alterada e para isso o y foi isolado.

Na questão 3 pedia-se aos alunos observarem os acontecimentos na janela de visualização ao alterar a forma como foi apresentada na janela de álgebra, as respostas são mostradas a seguir.

Quadro 14 - Respostas das três duplas para a questão 3 da Atividade 2³⁹

Dupla 3	
Na janela de visualização, o que aconteceu com a reta que você construiu? Por que? Nada aconteceu com a reta na janela de visualização, pois os valores não sofreram nenhuma alteração.	
Dupla 1: Se manteve uma reta passando pelo ponto A e B, pois não alteramos sua coordenada.	Dupla 2: Não acontece mudança nenhuma porque ela não se altera, apenas a expressão.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

³⁹ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

A dupla 3 mencionou o não sofrimento de alterações em relação aos valores quando na verdade houve mudança na forma como a equação foi exibida. Também não identificou quais valores são esses e nem o que representam para a identificação da reta.

Aluno 6: “Nada. Tá exatamente igual. Até porque a gente não mudou os valores. A gente só mudou a forma de ver os valores.”

Aluno 5: “A representação da equação.”

Nesta situação entende-se que os alunos não identificaram a realização de um *tratamento instantâneo* no registro algébrico e esse tratamento não provocou alterações no registro gráfico, portanto não seria correto escrever que não houve nenhuma alteração.

A dupla 1 aponta a manutenção da reta devido as coordenadas dos pontos A e B não serem alteradas, isso quer dizer que não foram movimentadas. A dupla 2 respondeu da maneira esperada, porém utilizou a palavra expressão, quando seria mais adequado utilizar equação.

Na questão 4 foram fornecidos os pontos $B_1(-3,2)$, $B_2(-2,-3)$ e $B_3(0,-5)$ e solicitou-se traçar três novas retas. Em seguida pediu-se que as equações dessas três novas retas fossem anotadas.

A seguir as respostas dadas pelos alunos.

Quadro 15 - Respostas das três duplas para a questão 4 da Atividade 2

Dupla 1	a) Digite B_1= $(-3,2)$. Equação da reta b: $y = 3x + 11$ b) Digite B_2= $(-2,-3)$. Equação da reta c: $x = -2$ c) Digite B_3= $(0,-5)$. Equação da reta d: $y = -5x - 5$
Dupla 2	a) Digite B_1= $(-3,2)$. Equação da reta b: $y = 2,97x + 10,92$ b) Digite B_2= $(-2,-3)$. Equação da reta c: $y = -33,29x - 69,57$ c) Digite B_3= $(0,-5)$. Equação da reta d: $y = -3,11x - 5$
Dupla 3	a) Digite B_1= $(-3,2)$. Equação da reta b: $y = 3x + 11$ b) Digite B_2= $(-2,-3)$. Equação da reta c: $y = x - 2$ c) Digite B_3= $(0,-5)$. Equação da reta d: $y = -5x - 5$

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

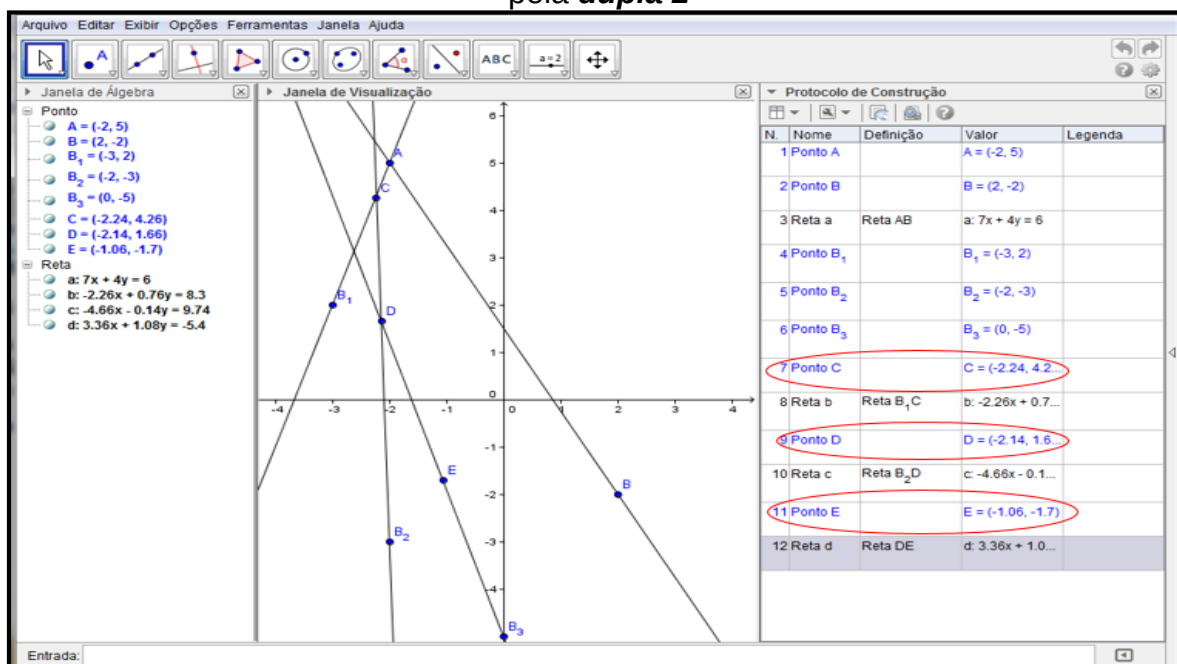
Todas as equações escritas pela dupla 1 estão corretas conforme era esperado. A dupla 3 escreveu as equações para as retas *b* e *d* acertadamente, porém a equação da reta *c* foi escrita de maneira equivocada. Pois esta reta é paralela ao

eixo y logo o único valor possível para y é zero e por isso y não aparece em sua equação. Porém ao ouvir a gravação constata-se que a equação “falada” estava correta, mas a equação escrita estava errada.

Aluno 5: “A reta b é $x=-2$.”

A dupla 2 escreveu todas as equações de maneira equivocada. Para ter certeza sobre o que realmente aconteceu utilizou-se um recurso do *software* chamado “*Protocolo de construção*”. Este aponta quais foram os procedimentos utilizados para a construção, conforme indica a figura a seguir.

Figura 29 - Protocolo da construção no *software* GeoGebra para a Atividade 2, feita pela **dupla 2**

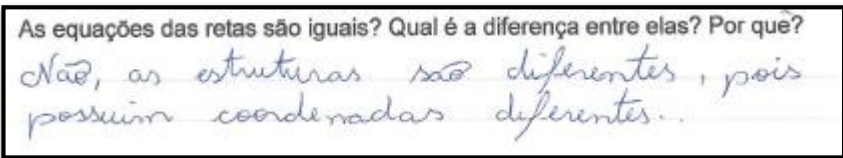


Fonte: Protocolo da dupla 2 feito com o *software* GeoGebra.

Ao observar-se o protocolo de construção, notou-se que as equações escritas pela dupla 2 estão incorretas, os alunos acrescentaram dois pontos em sua construção, os pontos C e D conforme destacado em vermelho na figura 29. As retas deveriam passar pelo ponto A, porém apenas duas delas passaram por ele, fato que motivou as equações não serem aquelas esperadas. A conversão do registro da língua natural para os registros gráfico e algébrico não foi realizada corretamente por esta dupla.

A questão 5 chama a atenção para as equações das retas e as possíveis alterações entre elas. As respostas dadas são apresentadas a seguir.

Quadro 16 - Respostas das três duplas para a questão 5 da Atividade 2⁴⁰

Dupla 1	
	
Dupla 2: Não as coordenadas dos pontos são diferentes.	Dupla 3: As equações das retas não são iguais. Os valores dos coeficientes são distintos, pois elas tem apenas um ponto em comum mas possuem posições distintas.

Fonte: Protocolos das duplas 1,2 e 3.

A resposta dada pela dupla 1 alerta para a citação da palavra estruturas e deixa dúvida a respeito do que queriam dizer com isso, ao perguntar, foi obtida a resposta a seguir.

Pesquisadora: “O que seriam as estruturas?”

Aluno 1: “Seria a representação, porque na **a** e na **c** tem y já na **d** não tem y então já ficou diferente já dá pra notar uma diferença entre a representação.”

Os alunos dessa dupla identificam a diferença entre as equações das retas, porém têm dificuldade em utilizar termos próprios da matemática, por exemplo aqui almejava-se mencionarem a palavra coeficiente, mas foram indicadas estrutura e representação apenas.

A dupla 2 respondeu que as equações não são iguais, devido as coordenadas dos pontos serem diferentes, essa resposta não está completa, pois a reta passa pelos pontos mencionados.

A dupla 3 respondeu de maneira bem próxima a desejada, citando a diferença e o motivo pelo qual as equações são diferentes.

A questão 6 solicitava a movimentação do ponto B e a observação das equações. As respostas são apresentadas a seguir.

⁴⁰ As respostas dadas pelas duplas 2 e 3 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Quadro 17 - Respostas das três duplas para a questão 6 da Atividade 2⁴¹

Dupla 1	
Na janela de álgebra, o que acontece com as equações das retas? Por que você acha que isso acontece? <i>Os valores da equação mudaram. Por os valores dos pontos influenciam na equação.</i>	
Dupla 2: As equações das retas se modificam porque as coordenadas são alteradas.	Dupla 3: Quando movemos o ponto, a equação da reta por onde passa o ponto B se altera de acordo com o movimento.

Fonte: Protocolos das duplas 1,2 e 3.

A dupla 1 mencionou a mudança dos valores da equação, porém os alunos não especificaram a intenção ao referir “os valores da equação”, por isso ao serem questionados responderam conforme apresentado a seguir.

Aluno 1: “Dependendo da onde o ponto tá, [...] se o ponto tá no 2 e no 5 e o outro no 4 e no 10 não vai ser a mesma equação, vai ser diferente! A posição do ponto interfere na equação.”

A partir da resposta dada pelo aluno 1 da dupla 1, percebe-se que ao referir-se a valores dos pontos na verdade quer dizer coordenadas dos pontos pertencentes à reta e esses valores interferem nos coeficientes da equação. Quando menciona 2 e 5 e em seguida 4 e 10, seriam os valores de x e y , ou seja, as coordenadas do ponto. Essas coordenadas são localizadas em posições diferentes no sistema cartesiano ortogonal.

A dupla 2 respondeu de maneira muito semelhante à resposta da dupla 1, porém referiram-se às coordenadas dos pontos e isso proporcionou melhor entendimento.

A dupla 3 tenta estabelecer uma relação entre o movimento do ponto e a mudança nos coeficientes da equação, porém não explica como isso se dá.

Na questão 7 os alunos movimentaram a reta que passa por A e B e observaram os acontecimentos das equações. As respostas dadas são apresentadas a seguir.

⁴¹ As respostas dadas pelas duplas 2 e 3 foram transcritas pela pesquisadora.

Quadro 18 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 7 da Atividade 2

Na janela de álgebra, o que acontece com as equações das retas? Por quê?	
Dupla 1	Os valores de todas as equações mudam, pois consequentemente quando movimentar-se a reta A-B, muda-se a distância entre os pontos.
Dupla 2	Porque apenas os coeficientes angular e linear modificam, com a alteração do ponto B.
Dupla 3	Todas as equações da reta na janela de álgebra sofrem modificações que variam de acordo com o movimento da reta

Fonte: Protocolos das duplas 1,2 e 3.

Novamente a dupla 1 refere-se aos coeficientes como valores das equações, nesta situação eles dizem que isso ocorre porque a distância entre os pontos muda e esta é uma concepção equivocada, além de usarem a notação incorreta para reta $\overline{AB}$.

Aluno 1: “De uma forma, na verdade, não a distância mas, o ponto se a gente mudou o ponto como eu disse na outra vai mudar a posição Se eu mudei a posição de um ponto, vai mudar de todos os outros.”

Para a dupla 1 os valores da equação são seus coeficientes e a utilização desse termo revela certa confusão em relação à linguagem da matemática.

A dupla 2 menciona os coeficientes angular e linear, porém não consegue mostrar qual é a relação entre os coeficientes e a posição na qual o ponto está.

A dupla 3 apesar de não mencionar alterações nas equações mostra raciocínio muito parecido com o utilizado pela dupla 2, ou seja, as duas duplas não conseguem relacionar os acontecimentos da janela de visualização e da janela de álgebra.

Na questão 8 foi pedido que os alunos justificassem por que os coeficientes apenas da primeira reta sofreram alterações, conforme as respostas a seguir.

Quadro 19 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 8 da Atividade 2

Dupla 2	
Ao movimentar o ponto B apenas os coeficientes a e b da primeira equação da reta mudaram. Por que? Porque apenas os coeficientes angular e linear modificam, com a alteração do ponto B.	
Dupla 1: Porque o ponto B não está ligado com os outros pontos.	Dupla 3: Porque o único ponto ao qual ele está alinhado é o A, formando uma que passa somente por eles.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 2 não respondeu o solicitado, apenas copiou o que já estava afirmado acima.

A dupla 1 percebeu o fato de o ponto B pertencer apenas à primeira reta e isso determinar a alteração apenas da equação da primeira reta.

A dupla 3 também atentou-se para o fato de o ponto B pertencer à reta que passa por A, porém quando mencionou o alinhamento somente com A equivocou-se, desse modo este ponto pode estar alinhado com qualquer outro ponto.

Na questão 9 solicitou-se aos alunos responderem por que os coeficientes de todas as retas alteram-se ou não, ao movimentar a reta a . Conforme mostra o quadro a seguir.

Quadro 20 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 9 da Atividade 2⁴²

Dupla 2	
Ao movimentar a reta que passa por A e B os coeficientes a e b de todas as equações das retas na janela de álgebra mudaram exceto em duas delas. Por que você acha que isso acontece? Porque dessa vez a reta inteira é modificada.	
Dupla 1: Na primeira a posição da reta não mudou, já na outra foi o ponto onde ela cruza o eixo que se manteve o mesmo.	Dupla 3: Observamos que todos os valores se alteram, com exceção do coeficiente angular da reta que está sendo movida.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

Verifica-se novamente que a dupla 2 não respondeu o solicitado, apenas mencionou a modificação da reta, porém como e porquê isso aconteceu não foi respondido.

⁴² As respostas dadas pelas duplas 1 e 3 foram transcritas pela pesquisadora.

Aluno 4: *“Então o angular modificou porque modificou a reta e o linear...”*

Aluno 3: *“e o linear...então o coeficiente angular modificou porque a posição da reta mudou...Da primeira vez somente o ponto B foi movimentado e desse vez a reta inteira foi movimentada então por isso que o coeficiente angular não se modifica.”*

Aluno 4: *“linear”*

Essa dupla apresentou dificuldade para identificar o significado de cada coeficiente, pelo diálogo observa-se dúvidas ao referir-se aos coeficientes.

A dupla 1 respondeu como era esperado ao citar que a posição da primeira reta não mudou e que na outra reta o ponto em que corta o eixo y não foi alterado.

A dupla 3 fez a observação parcialmente correta, pois não percebeu que o coeficiente linear da reta d não foi alterado.

Aluno 5: *“Já sei o que é que não tá mudando, sabe o que é..isso aqui ó, sabe porque ele tá em cima do eixo então ele pode mudar a inclinação mas o ponto onde ele cruza o y , ele não vai...”*

Aluno 6: *“Mas e o B_1 , ó, o B_1 também não tá mudando. Não perai eu não tô reparando eu tô olhando no lugar errado, vamos deixar ele normal, ele tava aqui, aí a gente tem que olhar a reta, a função, vou mexer só uma vez pra ver. Todos mudaram.”*

Aluno 5: *“Todos mudaram.”*

A dupla 3 não conseguiu observar a não alteração dos coeficientes em duas equações de retas. Nem mesmo observou no registro gráfico que a ordenada do ponto no qual a reta corta o eixo y não é alterada, e a inclinação de outra também não. Tal fato indica problemas relacionados à coordenação dos dois registros.

Na questão 10 solicitava-se aos alunos responderem o que cada coeficiente representa, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 21 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 10 da Atividade 2⁴³

Dupla 2	
Comparando o que já foi estudado com o que você observou, o que você pode concluir em relação aos coeficientes a e b da equação da reta do tipo $y=ax+b$? O que o coeficiente a representa na equação da reta? E o coeficiente b? <i>O coeficiente a é o angular e o b é o coeficiente linear. A relação dos coeficientes com a reta é, conforme a reta é movimentada o coeficiente linear muda.</i>	
Dupla 1: O a representa o coeficiente angular e o b o coeficiente linear.	Dupla 3: Os coeficientes são as bases que determinam a posição da reta no plano cartesiano. O coeficiente “a” representa a inclinação da reta e o “b” representa o ponto em que a reta cruza o eixo y.

Fonte: Protocolos das duplas 1,2 e 3.

A dupla 2 respondeu a questão apenas identificando a nomenclatura para os coeficientes a e b , mas não identificou qual é relação deles com a representação gráfica. Além disso citou que ao movimentar a reta somente o coeficiente linear muda, o que faz pensar que não perceberam realmente o significado de cada coeficiente.

Pesquisadora: “O coeficiente angular representa o que? Ele vai ser alterado em que situação?”

Aluno 4: “A partir do momento que você modificar o ângulo dele.”

Pesquisadora: “E o linear representa o que?”

Aluno 3: “O ponto.”

Aluno 4: “Ele não muda porque você não mexeu na...na...”

É possível observar certa hesitação nas respostas dadas pela dupla 2, os alunos não mostraram certeza ao responderem e ficam confusos quando começam a falar.

A dupla 1 também se preocupou apenas com a nomenclatura e não com o significado de cada coeficiente.

A dupla 3 respondeu conforme era esperado apesar de omitir palavras importantes para o entendimento como: representa a inclinação da reta em relação aos eixos x e y ; representa a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y .

⁴³ As respostas dadas pelas duplas 1 e 3 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Na questão 11 solicitou responderem se as equações das retas poderiam ser escritas de outra maneira. As respostas dadas são apresentadas a seguir.

Quadro 22 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 11 da Atividade 2⁴⁴

Dupla 3	
As equações das retas poderiam ser escritas de outra maneira? Qual? As equações das retas podem ser escritas de várias formas, como a geral e a reduzida.	
Dupla 1: Sim, de sua forma geral.	Dupla 2: Sim. Elas poderiam ser escritas na forma geral.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 3 mencionou a possibilidade de escrever as equações de várias formas, mas só citou as formas geral e reduzida, isso faz crer que essas são as únicas.

As duplas 1 e 2 também destacaram apenas a forma geral o que transmite a ideia errônea da existência dessa forma apenas.

Pesquisadora: “Só existe a forma geral e a reduzida?”

Aluno 3: “Olha, agora eu acho que não”

A hesitação dos alunos em suas respostas também é observada nesta questão, isso mostra que esses alunos não conseguiram apreender o objeto matemático e ainda não entenderam como coordenar os diferentes registros.

Na questão 12 solicitou-se a eles escreverem as equações de outra maneira, conforme mostra o quadro a seguir.

⁴⁴ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Quadro 23 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 12 da Atividade 2

Escreva as equações das retas dadas de outra maneira:	
Dupla 1	a) Reta a: $2x + 5y = 20$ b) Reta b: $2x - 3y = -12$ c) Reta c: $7x - 2y = -8$ d) Reta d: $x = 0$
Dupla 2	a) Reta a: $7x + 4y = 6$ b) Reta b: $-2,26x + 0,76y = 8,3$ c) Reta c: $-4,66x - 0,14y = 9,74$ d) Reta d: $3,36x + 1,08y = 5,4$
Dupla 3	a) Reta a: $7x + 4y = 6$ b) Reta b: $-3x + y = 11$ c) Reta c: $x - 2$ d) Reta d: $-5x - y = 5$

Fonte: Protocolos das duplas 1,2 e 3.

A dupla 1 escreveu as equações da maneira correta, já as duplas 2 e 3 escreveram expressões não compatíveis com as iniciais após os movimentos solicitados, provavelmente porque em algum momento realizaram movimentos ou ações não solicitados. A dupla 3, no entanto, escreveu uma expressão algébrica para a reta c ao invés da equação $x = -2$ e isto faz refletir sobre como chegaram a essa expressão.

Finalmente na questão 13 foi solicitado aos alunos escreverem sobre as observações em relação às formas como a equação da reta pode ser escrita, conforme apresentado a seguir.

Quadro 24 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 13 da Atividade 2

O que você pode concluir:	
Dupla 1	Que há diversas formas de se representar uma mesma reta.
Dupla 2	Concluímos que ao isolarmos o y na equação geral, temos a equação reduzida.
Dupla 3	Que as equações das retas podem ser representadas de várias formas sem que interfira na posição gráfica e nos valores.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 1 concluiu como era esperado, que a equação de uma reta pode ser escrita de várias formas. A dupla 2 concluiu existirem apenas duas formas de escrever a equação de uma reta, isto mostra que os alunos da dupla 2 não conseguiram perceber o fato de a forma da equação escrita na janela de álgebra não ser nenhuma das duas. Se apenas observarem a forma escrita na janela de álgebra mais as duas mencionadas já seriam pelo menos três formas.

A dupla 3 chegou a uma conclusão muito próxima daquela desejada, apesar de não identificar o que quis expressar com a palavra ‘valores’.

Diante dos protocolos referentes às respostas dadas pelas duplas para a Atividade 2 entende-se que as duplas 1 e 3 apresentam dificuldades na conversão dos registro gráfico e algébrico para o registro da língua natural, a dupla 2 também apresenta certa dificuldade com relação a esse registro, porém a coordenação entre os registros gráfico e algébrico é um ponto a ser levado em consideração logo notou-se equívocos em respostas ou não responderam o que foi solicitado em algumas situações.

5.3.4 Análise *a posteriori* da Atividade 3

5.3.4.1 Parte 1 da Atividade 3

A parte 1 da Atividade 3 é composta de 6 questões com o objetivo de trabalhar o conceito de retas paralelas. Na questão 1 foi solicitado aos alunos digitarem cinco equações de retas fornecidas pela proposta. A seguir as respostas dadas pelos alunos.

Quadro 25 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 1 da Atividade 3 –
Parte 1⁴⁵

Dupla 1	
Dupla 2: As retas são paralelas porque possuem o mesmo coeficiente angular.	Dupla 3: A posição relativa entre as retas é paralela, pois os coeficientes angulares são iguais, logo a inclinação é a mesma.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 1 respondeu que as retas são paralelas, mas diferenciou aquelas coincidentes, isso provocou certa confusão, pois retas coincidentes também são paralelas. Um fato que chamou atenção foi a marcação feita pela dupla 1 nas equações, conforme mostrado no quadro 25. Este fato leva a cogitar que os alunos desta dupla inferiram o paralelismo entre as retas mesmo antes de digitá-las no software GeoGebra. Para verificar foram questionados, e as respostas são apresentadas a seguir.

Aluno 1: “Nós circulamos pra identificar já o ângulo...”

Aluno 2: “o coeficiente angular”

Aluno 1: “o coeficiente angular na verdade e o linear e ver ser é igual ou não. Ah e a gente resolveu né, e colocou aqui.”

Assim percebeu-se que as marcações feitas no papel realmente expressam o imaginado, eles perceberam antes mesmo de digitar que os coeficientes angulares eram iguais e logo são paralelas. Essa percepção ocorreu mesmo para aquela equação escrita de forma diferente.

As duplas 2 e 3 responderam de maneira satisfatória associando o fato de serem paralelas ao valor do coeficiente angular ser igual e as retas serem paralelas.

⁴⁵ As respostas dadas pelas duplas 2 e 3 foram digitadas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Na questão 2 solicita-se observarem as janelas de álgebra, visualização e responderem quantas equações e retas apareceram além do porquê isso ocorreu, conforme mostra o quadro a seguir.

Quadro 26 - Respostas das três duplas para as questão 2 da Atividade 3 – Parte 1⁴⁶

Dupla 3	
Quantas equações de retas você observa na janela de álgebra? Quantas retas você observa na janela de visualização? Por que? Aparecem na janela de álgebra 5 (cinco) equações e na janela de visualização aparecem apenas 4 (quatro) retas.	
Dupla 1: Na janela de álgebra 5 e na visualização 4, pois temos retas coincidentes.	Dupla 2: Observamos cinco equações e na janela de álgebra e quatro retas na janela de visualização porque as retas d e e são coincidentes.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As duplas 1 e 2 responderam conforme o esperado, pois observaram o fato de aparecerem mais equações do que retas e justificaram por meio da existência de duas retas coincidentes. A dupla 3 também observou a quantidade de equações em cada janela (álgebra e visualização), mas não justificou o motivo pelo qual isso acontece. A transcrição do diálogo é apresentada a seguir.

Aluno 5: “Se a gente mover elas a posição delas não vai se alterar, né!”

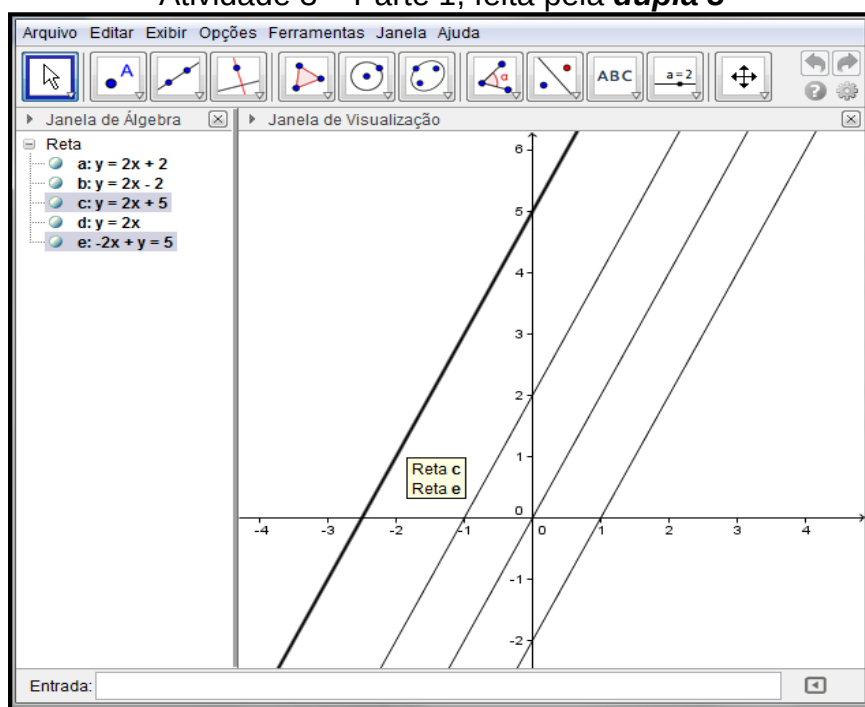
Aluno 6: “Mas aí a gente consegue tirar uma de cima da outra, ela não move as duas juntas.”

Aluno 5: “Mas aí é porque a equação vai mudar, olha o primeiro ele continua, o angular não muda.”

Apesar de não usarem a palavra coincidentes verifica-se que os alunos da dupla 3 reconheceram quando as retas são coincidentes. A construção realizada por eles é apresentada na figura a seguir.

⁴⁶ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Figura 30 - Protocolo da construção realizada no GeoGebra para resolução da Atividade 3 – Parte 1, feita pela **dupla 3**



Fonte: Protocolo da dupla 3 feito com o software GeoGebra.

Observa-se a existência de 4 retas na janela de visualização e 5 equações de retas na janela de álgebra, mas uma das retas está mais escura, na verdade duas retas coincidentes estão representadas ali, além disso ao colocar-se o cursor sobre ela suas equações também ficam destacadas, conforme apresentado na figura 30, dessa forma constata-se que a dupla 3 percebeu o que acontecia com as retas.

Na questão 3 pedia-se para movimentarem as retas e observarem se suas posições alteravam. As respostas são apresentadas a seguir.

Quadro 27 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 3 da Atividade 3 – Parte 1⁴⁷

Dupla 3	
A posição relativa entre as retas se altera? <i>A posição relativa não se altera, apenas o coeficiente linear se modifica.</i>	
Dupla 1: Não, continuam com a mesma posição.	Dupla 2: Não se altera.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

⁴⁷ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

As três duplas responderam não haver alteração na posição relativa entre as retas, porém apenas a dupla 3 destacou o fato de o coeficiente linear modificar-se, embora não tivesse sido solicitada nesta questão.

Na questão 4 pediu-se para observarem especificamente a janela de álgebra para responderem a respeito dos coeficientes linear e angular das equações. As respostas são apresentadas a seguir.

Quadro 28 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 4 da Atividade 3 –
-Parte 1⁴⁸

Dupla 3	
E na janela de álgebra em relação às equações das retas, há alguma alteração em seus coeficientes? Na janela de álgebra as equações das retas tem apenas seus coeficientes lineares alterados.	
Dupla 1: Sim, o coeficiente linear da reta movimentada muda.	Dupla 2: Sim, os coeficientes lineares se alteram.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As três duplas responderam da maneira esperada em relação ao coeficiente angular permanecer e o coeficiente linear alterar-se, à medida que a reta é movimentada.

Na questão 5 solicitou-se que respondessem se é possível identificar a posição relativa entre as retas apenas observando suas equações. As respostas dadas são apresentadas a seguir.

Quadro 29 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 5 da Atividade 3 –
-Parte 1⁴⁹

Dupla 1	
Existe alguma maneira de identificar a posição relativa entre as retas apenas observando suas equações? Qual? Sim, se o coeficiente angular e linear forem iguais elas serão coincidentes, se o angular for igual e o linear não, elas serão paralelas, e se o coeficiente angular for diferente, serão concorrentes.	
Dupla 2: Sim. Olhando o coeficiente angular.	Dupla 3: Para identificar a posição relativa entre as retas observando apenas as equações é necessário analisar as semelhanças ou diferenças entre os coeficientes angulares e lineares.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

⁴⁸ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

⁴⁹ As respostas dadas pelas duplas 2 e 3 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

As duplas 1 e 3 responderam de maneira muito semelhante a resposta desejada, porém apesar dos erros de português, os alunos da dupla 1 identificaram todas as possibilidades de posições relativas em relação aos coeficientes das equações das retas.

A dupla 3 não identificou as posições e as relações entre os coeficientes das equações das retas. A dupla 2 também não identificou e além disso nem mencionou o coeficiente linear.

Na questão 6 solicitou-se aos alunos justificarem com base no observado nas questões anteriores. As explicações são apresentadas a seguir.

Quadro 30 - Conclusão das três duplas para a Atividade 3 – Parte 1

O que você pode concluir?	
Dupla 1	Que os valores dos coeficientes influenciam nas posições das retas.
Dupla 2	Concluimos que os coeficientes angulares define as posições relativas da reta, e os coeficientes lineares definem as coordenadas dos pontos.
Dupla 3	Podemos concluir que é possível analisar as equações das retas e determinar suas características por meio dos coeficientes.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3

A dupla 1, conforme já foi observado anteriormente, trocou a palavra coeficientes por valores, mas respondeu sobre a existência de uma relação entre os coeficientes e a posição ocupada pela reta no sistema cartesiano ortogonal plano.

A dupla 2 respondeu de forma satisfatória, porém ao tentar explicar a respeito do coeficiente linear não o fez de maneira clara deixando dúvida a seu respeito.

A dupla 3 deu uma resposta muito geral, mas não respondeu a solicitação, esperava-se identificarem as previsões possíveis em relação às retas apenas observando os coeficientes angulares e lineares.

5.3.4.2 Parte 2 da Atividade 3

Na primeira questão foram apresentadas cinco equações para que fossem digitadas e observadas, conforme mostra o quadro a seguir.

Quadro 31 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 1 da Atividade 3 –
-Parte 2⁵⁰

Dupla 3	
Qual é a posição relativa entre as retas? Por que? A posição relativa entre as retas é concorrente, pois apesar de terem posições distintas ambas se cruzam em algum ponto.	
Dupla 1: São todas concorrentes, pois os coeficientes são diferentes.	Dupla 2: Elas são concorrentes por que os coeficientes angulares são diferentes.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As duplas 1, 2 e 3 responderam que todas as retas são concorrentes e para justificar, usaram o fato de os coeficientes angulares serem diferentes. Apenas a dupla 3 chamou a atenção para o fato dessas retas possuírem apenas um único ponto em comum.

Na questão 2 foi solicitado aos alunos movimentarem as retas com o uso das ferramentas do *software* GeoGebra e observarem se a posição relativa entre elas é alterada, conforme é apresentado a seguir.

Quadro 32 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 2 da Atividade 3 –
-Parte 2⁵¹

Dupla 1	
A posição relativa entre as retas se altera? Não.	
Dupla 2: Não, Elas continuam concorrentes.	Dupla 3: A posição relativa entre as retas não se altera.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As três duplas escreveram que mesmo ao movimentar as retas a posição não é alterada, ou seja, permanecem concorrentes, conforme era esperava-se que respondessem.

Na questão 3 pediu-se aos alunos identificarem como é possível determinar a posição relativa entre retas por meio da sua equação. As respostas dadas são apresentadas a seguir.

⁵⁰ As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

⁵¹ As respostas dadas pelas duplas 2 e 3 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

Quadro 33 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 3 da Atividade 3 –
-Parte 2⁵²

Dupla 3	
Existe alguma maneira de identificar a posição relativa entre as retas apenas observando suas equações? Qual? A maneira utilizada para identificar a posição das retas pode ser observando seus coeficientes, se forem distintos a reta será concorrente.	
Dupla 1: Sim, observando os coeficientes.	Dupla 2: Sim. Observando os coeficientes angulares.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

Na resposta dada pela dupla 3 é possível observar que além de identificar o coeficiente angular como meio de verificar a posição relativa entre as retas, também identificou que seus valores devem ser diferentes para que sejam concorrentes.

As duplas 1 e 2 apenas mencionaram que o coeficiente angular determina a posição relativa entre as retas, mas não deram maiores informações sobre como identificar se são ou não concorrentes.

Na questão 4 foi solicitado aos alunos decidirem a respeito do que é necessário para duas retas ou mais serem concorrentes, conforme mostra o quadro a seguir.

Quadro 34 - Respostas dadas pelas três duplas para a questão 4 da Atividade 3 –
Parte 2

O que você pode concluir?	
Dupla 1	Que quando os coeficientes são diferentes as retas são concorrentes.
Dupla 2	Concluímos, que os coeficientes angulares determinam as posições relativas da reta.
Dupla 3	Podemos concluir que se os coeficientes angulares e lineares forem distintos as retas serão concorrentes.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As duplas 1 e 3 responderam conforme era esperado, pois relacionaram os coeficientes angulares com a posição das retas. A dupla 2 respondeu de maneira muito geral. O objetivo era para responderem especificamente em relação às retas serem concorrentes.

⁵² As respostas dadas pelas duplas 1 e 2 foram transcritas pela pesquisadora a partir dos protocolos.

A questão 5 solicitou aos alunos chegarem à conclusão de como é possível relacionar a posição relativa das retas e seus coeficientes. A seguir as conclusões das três duplas.

Quadro 35 - Conclusão das três duplas para a Atividade 3

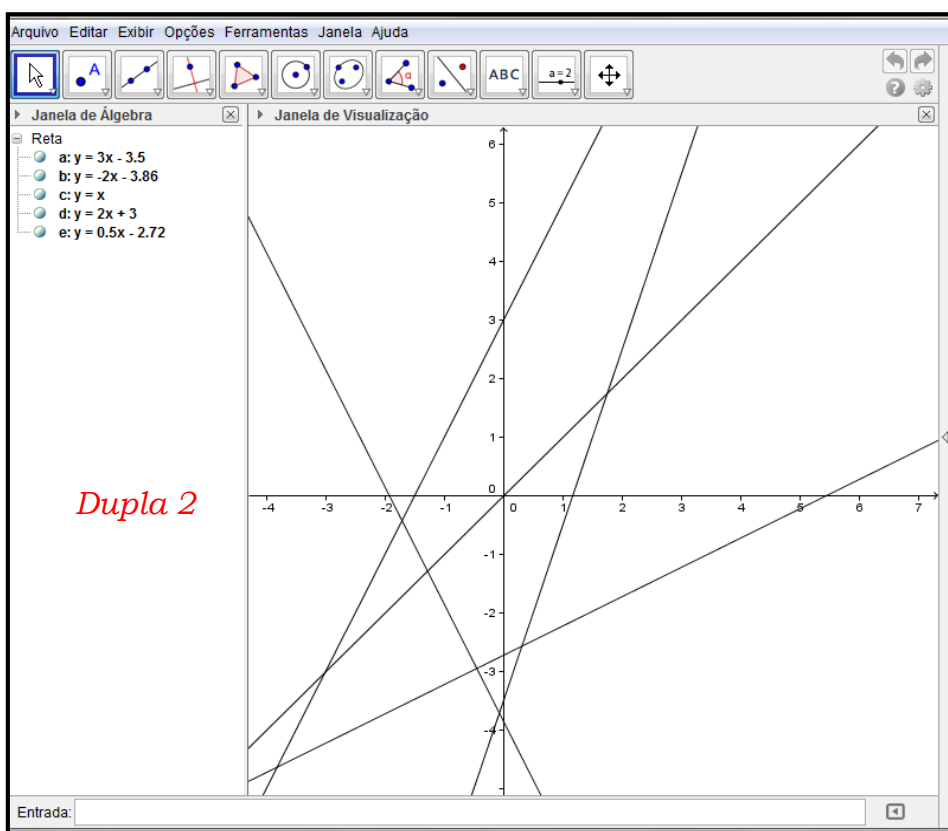
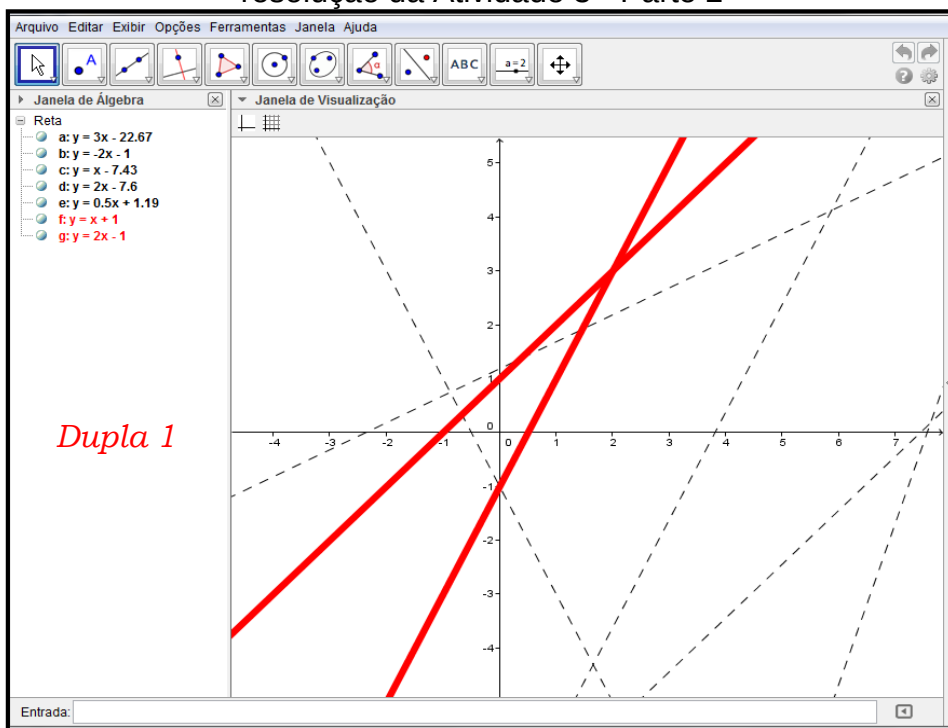
As retas são paralelas distintas se:	
Dupla 1	os coeficientes angulares forem iguais e os lineares não.
Dupla 2	os coeficientes angulares forem iguais.
Dupla 3	tiverem os coeficientes angulares iguais e lineares diferentes.
As retas são paralelas coincidentes se:	
Dupla 1	ambos os coeficientes forem iguais.
Dupla 2	os coeficientes angulares forem iguais e os coeficientes lineares diferentes.
Dupla 3	tiverem os coeficientes angulares e lineares iguais.
As retas são concorrentes se:	
Dupla 1	os coeficientes angulares forem diferentes.
Dupla 2	os coeficientes angulares forem diferentes.
Dupla 3	tiverem coeficientes angulares e lineares diferentes.

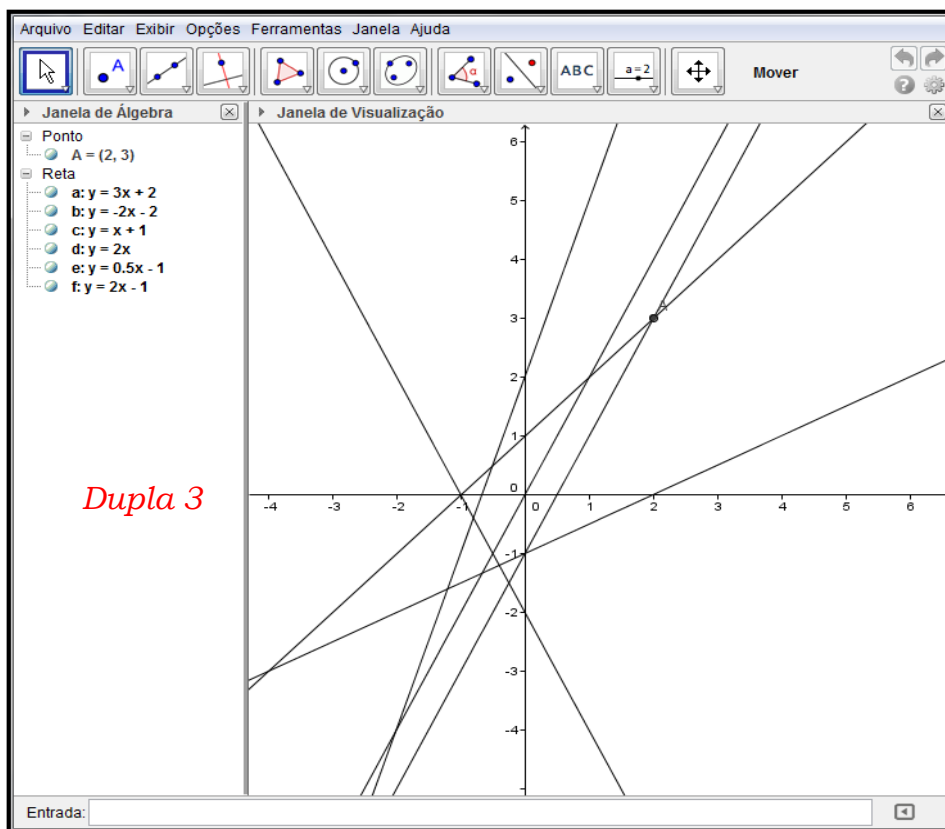
Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

Nas conclusões das três duplas observa-se a predominância do registro algébrico. Em todas as conclusões são mencionados apenas os coeficientes angulares e lineares como forma de identificar a posição relativa entre as retas.

Nenhuma das duplas associou os coeficientes com alguma característica da representação gráfica, como por exemplo: são paralelas se tiverem a mesma inclinação em relação ao eixo x , ou são concorrentes se possuírem um único ponto em comum. Este fato é curioso, pois nas questões anteriores estas observações apareceram, isto faz crer que o maior objetivo de relacionar os registros gráfico e algébrico não foi alcançado. A seguir as construções feitas pelas três duplas no software GeoGebra para a resolução desta atividade.

Figura 31 - Protocolos das construções das três duplas no GeoGebra para a resolução da Atividade 3 - Parte 2





Fonte: Protocolos das duplas 1, 2, 3 feitos com o software GeoGebra.

Verifica-se nas falas dos alunos da dupla 2 que somente no momento de serem questionados, começaram a pensar sobre a coordenação entre representação gráfica e algébrica, conforme apresentado a seguir.

Pesquisadora: *O que isso representa olhando graficamente?*

Aluno 3: *“A posição da reta.”*

Aluno 4: *“É tudo envolvido na posição.”*

Essa coordenação é o objetivo do trabalho com o software GeoGebra, mas observa-se a não ocorrência de maneira muito simples, como já fora mencionado anteriormente. Nessa atividade pretende-se que os alunos utilizem quatro registros de representação semiótica para estabelecerem as conexões de maneira correta.

5.3.4.3 Parte complementar da Atividade 3

Para complementar a Atividade 3 foram propostas duas questões em relação as retas concorrentes. Na primeira pediu-se aos alunos encontrarem o ponto comum entre duas retas cujas equações foram fornecidas pela questão. As resoluções são apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 36 - Resoluções das três duplas para o complemento da Atividade 3

Você já percebeu que quando duas retas são concorrentes existe um ponto em comum entre elas. Dadas as equações das retas: a) $y = x + 1$ b) $y = 2x - 1$ Encontre o ponto em comum entre as retas no espaço abaixo sem o auxílio do <i>software</i> GeoGebra. Depois, confira as coordenadas do ponto que você encontrou utilizando o <i>software</i>.	
Dupla 1	$x + 1 = 2x - 1$ $2 = x$
Dupla 2	$\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 1 = 2x - 1 \\ x - 2x = -1 - 1 \\ -x = -2 \cdot (-1) \\ x = 2 // \\ y = 2 + 1 \\ y = 3 // \end{array} \quad P = (2, 3)$
Dupla 3	$\begin{array}{l} \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \\ y = x + 1 \\ x + 1 = 2x - 1 \\ x - 2x = -1 - 1 \\ -x = -2 \cdot (-1) \end{array} \quad \begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = 2 + 1 \\ \boxed{y = 3} \\ \boxed{P: (2, 3)} \end{array} \quad \boxed{x = 2}$

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As duplas 2 e 3 resolveram o sistema linear formado pelas equações das retas dadas e encontraram o ponto $P(2,3)$. A resolução das duas duplas está de acordo com os procedimentos matemáticos. A dupla 1 no entanto não resolveu o sistema linear, apenas igualou as duas equações e encontrou apenas a abcissa do ponto.

A ordenada não foi encontrada pelos procedimentos de resolução do sistema linear, nem mesmo o ponto foi indicado na resolução. A dupla foi questionada sobre como resolveu a questão.

Aluno 1: “Se elas tem um dos pontos iguais então ela tem uma igualdade entre elas, então a gente fez uma igual a outra e isolou o x . A gente colocou cada equação lá no campo de entrada e aí a gente observou no gráfico onde elas estavam passando...”

Aluno 2: “a intersecção.”

Aluno 1: “era no 2 exatamente.”

A dupla 1 não preocupou-se em resolver todo o sistema linear, pois poderia usar o recurso do *software* para identificar o que foi solicitado, por este motivo não deu continuidade à resolução do sistema linear.

Em seguida foi requisitado aos alunos descreverem como utilizaram o *software* GeoGebra para conferir os cálculos, conforme o quadro a seguir.

Quadro 37 - Respostas dadas pelas três duplas para o complemento da Atividade 3

Descreva como você fez para encontrar esse ponto utilizando o software GeoGebra.	
Dupla 1	Colocamos as duas equações na caixa de entrada e observamos onde se cruzam no eixo x .
Dupla 2	Nós digitamos as duas equações no campo de entrada.
Dupla 3	Digitamos as funções referentes as retas citadas e selecionamos a opção “Interseção de Dois Objetos”. Em seguida, clicamos sobre as retas e apareceu o ponto de interseção com as respectivas coordenadas na janela de álgebra.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 1 respondeu que observou onde as retas se cruzam no eixo x , contrariando o que foi dito e descrito acima, ao utilizar o registro da língua natural na forma escrita foi cometido um equívoco, na verdade fez-se uso de uma ferramenta do *software* denominada “ponto de intersecção”.

Talvez porque como encontrou-se apenas o valor de x do ponto de intersecção tentou-se evidenciar que não seria necessário continuar o cálculo, já que existia a possibilidade de finalizá-lo com o uso do *software*.

A dupla 2 mencionou apenas que digitou as equações, o que não seria suficiente para determinar se o ponto encontrado com lápis e papel estava correto, portanto não terminou a descrição de como realizou a atividade.

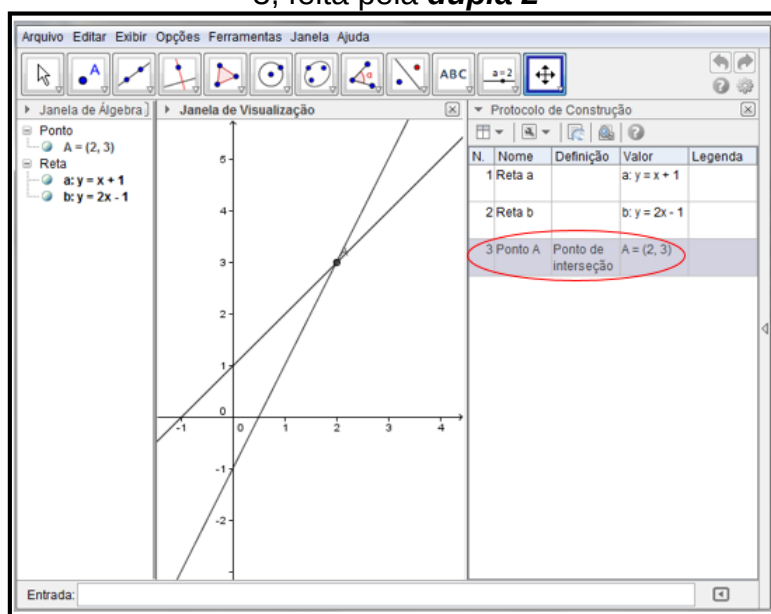
Aluno 4: “Ai ela se formou na janela de visualização.”

Aluno 3: “Elas apareceram sendo concorrentes.”

Aluno 4: “Aí a gente mudou da forma reduzida para a forma geral.”

A descrição feita pelos alunos da dupla 2, tanto na forma escrita como na forma oral, não é completa e dessa maneira não é possível identificar como conferiram o resultado obtido com lápis e papel. Portanto, decidiu-se verificar a construção feita por com o uso do GeoGebra, conforme indica a figura a seguir.

Figura 32 - Protocolo da construção no GeoGebra para o complemento da Atividade 3, feita pela **dupla 2**



Fonte: Protocolo da dupla 2 feito com o *software* GeoGebra.

De acordo com os protocolos de construção do *software* GeoGebra a dupla 2 utilizou a ferramenta “*ponto de intersecção*”, destacado na figura 32, para conferir o que foi feito com lápis e papel.

A dupla 3 respondeu de maneira clara e concisa, a forma como encontrou o ponto e conferiu se estava correto, apesar de usar a palavra função para designar a equação da reta.

5.3.4.4 Generalização das Atividades 1, 2 e 3

Foi solicitado aos alunos experimentarem digitar outras equações e pontos, com o objetivo de os movimentarem e utilizarem recursos do *software* a fim de verificar se as observações feitas nas três atividades também são válidas nessas novas equações. As respostas dadas são apresentadas a seguir.

Quadro 38 - Protocolos das três duplas para a generalização das Atividades 1, 2 e 3

Experimente digitar outras equações de retas criadas por você, movimente pontos, retas e verifique se as observações feitas até aqui valem também para essas novas equações de retas. Registre suas observações abaixo:	
Dupla 1	Sim, pois apresentam as mesmas propriedades em relação aos coeficientes.
Dupla 2	Sim. fizemos um sistema linear e resolvemos as equações isolando o ponto y para descobrir o ponto x, e assim podemos achar o ponto de interseção entre as retas.
Dupla 3	Assim como nas atividades anteriores, as retas com coeficientes angulares iguais são paralelas e se os coeficientes angulares e lineares forem diferentes, a reta será concorrente tendo um ponto de interseção.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 1 enfatizou a questão dos coeficientes como as propriedades observadas em relação a eles poderem ser observadas para quaisquer equações.

A dupla 2 não respondeu o solicitado, fez uma descrição de como resolveu o sistema linear não pertinente a esta questão, isso pode evidenciar que não realizou a tarefa solicitada.

A dupla 3 enfatizou as posições relativas entre as retas, mostrando que esse aspecto chamou-lhe mais atenção.

5.3.5 Análise das questões respondidas depois da realização da sequência de atividades

Na sequência apresentam-se as respostas dadas pelos alunos das três duplas às questões propostas. As três questões tratam da opinião a respeito das atividades e do uso do *software*.

Quadro 39 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas depois das Atividades - 1

Qual é a relação entre as atividades que você desenvolveu aqui e o assunto equação da reta, estudado anteriormente?	
Dupla 1	São atividades que fixam o assunto aprendido tanto na sala de aula quanto aqui.
Dupla 2	Através da equação da reta na forma reduzida, podemos verificar a posição relativa entre duas retas e, caso sejam concorrentes, o ponto de interseção entre elas.
Dupla 3	O assunto equação da reta, mesmo que tenha sido estudado anteriormente, se tornou mais fácil pois com o <i>geogebra</i> podemos ver a aplicação do estudo de maneira mais dinâmica.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As duplas 1 e 3 afirmam que por meio das atividades foi possível entender melhor o assunto. A dupla 3 destaca o fato de o programa ter um caráter dinâmico e isso proporcionou entendimento de maneira mais fácil.

A dupla 2 não respondeu o solicitado, simplesmente mostrou as propriedades já observadas anteriormente. Isto faz refletir a respeito do que quiseram dizer, por isso foi questionada sobre suas respostas, conforme apresentado a seguir.

Pesquisadora: “O que vocês viram nas aulas de matemática é a mesma coisa que vocês viram aqui?”

Aluno 3: “Sim.”

Pesquisadora: “O que vocês acharam de usar o *software*?”

Aluno 4: “Mais fácil!”

Aluno 3: “É bem mais fácil porque a gente tá visualizando tudo entendeu?”

Aluno 4: “Não tem que ficar lá desenhando, fazendo aqueles detalhes todos...”

De acordo com o diálogo, os alunos da dupla 2 reconheceram que o assunto estudado nas aulas foi o mesmo tratado na atividade e mencionaram o uso do *software* como facilitador do entendimento.

Quadro 40 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas **depois** das Atividades - 2

Qual a sua opinião sobre o uso do <i>software</i> GeoGebra? Você teve dificuldades em utilizá-lo?	
Dupla 1	É um bom <i>software</i> que ajuda no entendimento da matéria e outro aspecto positivo do <i>software</i> é que ele é de fácil manuseio.
Dupla 2	É um ótimo recurso para atividades de geometria analítica e tivemos muita praticidade em utilizá-lo.
Dupla 3	O <i>software</i> GeoGebra facilita o entendimento da geometria analítica por sua dinamicidade. Não foram encontradas dificuldades.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

Quadro 41 - Protocolo das três duplas para as questões pessoais respondidas **depois** das Atividades - 3

Você acha que a utilização do <i>software</i> GeoGebra ajudou na compreensão do assunto equação da reta? Por quê?	
Dupla 1	Sim, porque é uma forma mais fácil de interagir com a matéria.
Dupla 2	Sim. Porque ele permitiu uma melhor visualização das retas e equações, além de nos proporcionar a prova real dos exercícios que fizemos anteriormente.
Dupla 3	Com a utilização do <i>software</i> GeoGebra o assunto equação da reta se torna mais fácil de ser entendido e resolvido por ser prático e dinâmico.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

As duas questões tratam especificamente do uso do *software* GeoGebra, as três duplas gostaram de usá-lo e não mostraram grandes dificuldades com relação a interface. Na questão 3, a dupla 2 menciona a possibilidade de fazer a prova real dos exercícios. Por não ser possível entender qual a intenção ao responderem, a dupla foi questionada.

Pesquisadora: “O que vocês quiseram dizer com ‘além de proporcionar a prova real’?”

Aluno 3: “Quando a gente fazia o exercício a mão, aí a gente colocava ali as coordenadas ou a equação e aí aparecia a posição da reta, aí a gente confirmava se o resultado que a gente chegou tava certo mesmo.”

Pesquisadora: “E com relação a você poder movimentar?”

Aluno 3: “Eu acho que ajuda a... que clareia mais o entendimento dos coeficientes, entendeu? A função de cada um o que cada um representa, é mais fácil...”

Aluno 4: “uhum”

Nota-se em relação a dupla 2 que caracteriza o uso do *software* como forma de comprovar exercícios já vistos ou resolvidos. Logo a partir daí refletir a respeito do exposto na tela. Essa ideia tem a ver com a validação da solução de um problema. Esse é um aspecto importante comumente pouco explorado em aulas de matemática.

As três duplas mencionaram haver maior facilidade em relação a compreensão proporcionada pelo fato de poderem movimentar as retas.

Em todas as questões, as três duplas avaliam o uso do *software* de maneira positiva. Constata-se simpatia em relação ao seu uso.

As duplas observam que o fácil manuseio do *software* pode ajudar na compreensão dos conceitos referentes à geometria analítica, mais especificamente a equação da reta.

Um aspecto, em especial, foi destacado pelos alunos, o fato de poderem movimentar a reta, essa faceta do *software* funcionou como um fator motivador, pois puderam movimentar o que antes, com o uso de lápis e papel ou da lousa, era imóvel. A fácil manipulação das ferramentas do GeoGebra também foi destacada pelas três duplas, ou seja, a utilização do *software* não foi um empecilho para a realização das atividades.

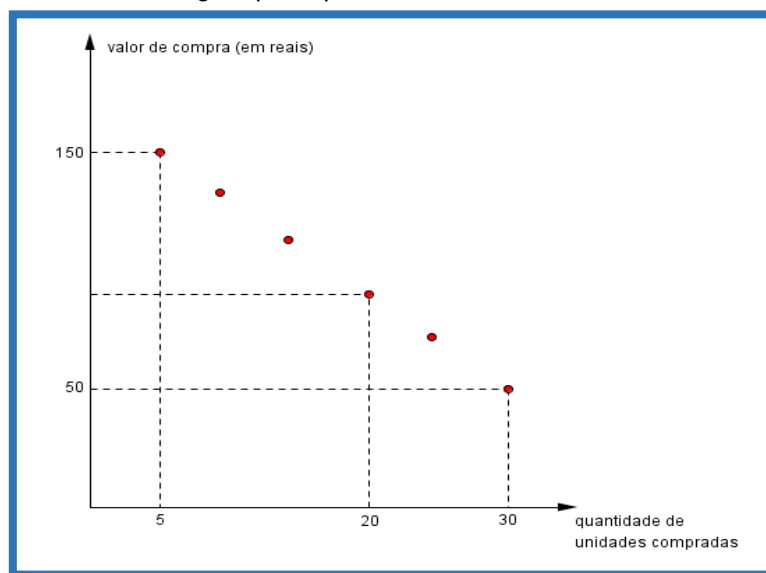
Durante a aplicação, os alunos mencionaram que baixariam o programa para poderem usá-lo em suas casas, isso pode ser avaliado de maneira positiva.

5.3.6 Análise *a posteriori* da Atividade 4

Nesta atividade foi apresentado um gráfico e uma situação, conforme mostra o quadro abaixo.

Quadro 42 - Enunciado da Atividade 4

Leia a questão abaixo e utilize o *software* GeoGebra para resolvê-la.
A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico a seguir, por 6 pontos de uma mesma reta:



Fonte: IEZZI, 2005, p. 234

Para a solução desta atividade os alunos deveriam usar o *software* GeoGebra para desvendar a situação e responder algumas perguntas. As respostas dadas pelas três duplas são apresentadas a seguir.

Quadro 43 - Protocolo das respostas dadas pelas três duplas para a Atividade 4

Se uma pessoa comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará quanto por unidade, em reais?	
Dupla 1	Quando se compra 20 unidades, pagase 90 reais.
Dupla 2	Ela pagará R\$ 90,00.
Dupla 3	$A = (5, 150)$ $F = (30, 50)$ $D = (20, 90)$ R\$ 90,00
Qual é a equação da reta que contém os seis pontos representados?	
Dupla 1	$4x + y = 170$
Dupla 2	A equação da reta é $-4x - y = -170$
Dupla 3	$y = -4x + 170$
Se uma pessoa gastou R\$ 70,00, quantas unidades dessa mercadoria, na promoção, essa pessoa comprou?	
Dupla 1	25 unidades.
Dupla 2	Ela comprou 25 unidades.
Dupla 3	$70 = -4x + 170$ $(25, 70)$ $4x = 170 - 70$ $4x = 100$ $x = \frac{100}{4} = 25$

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

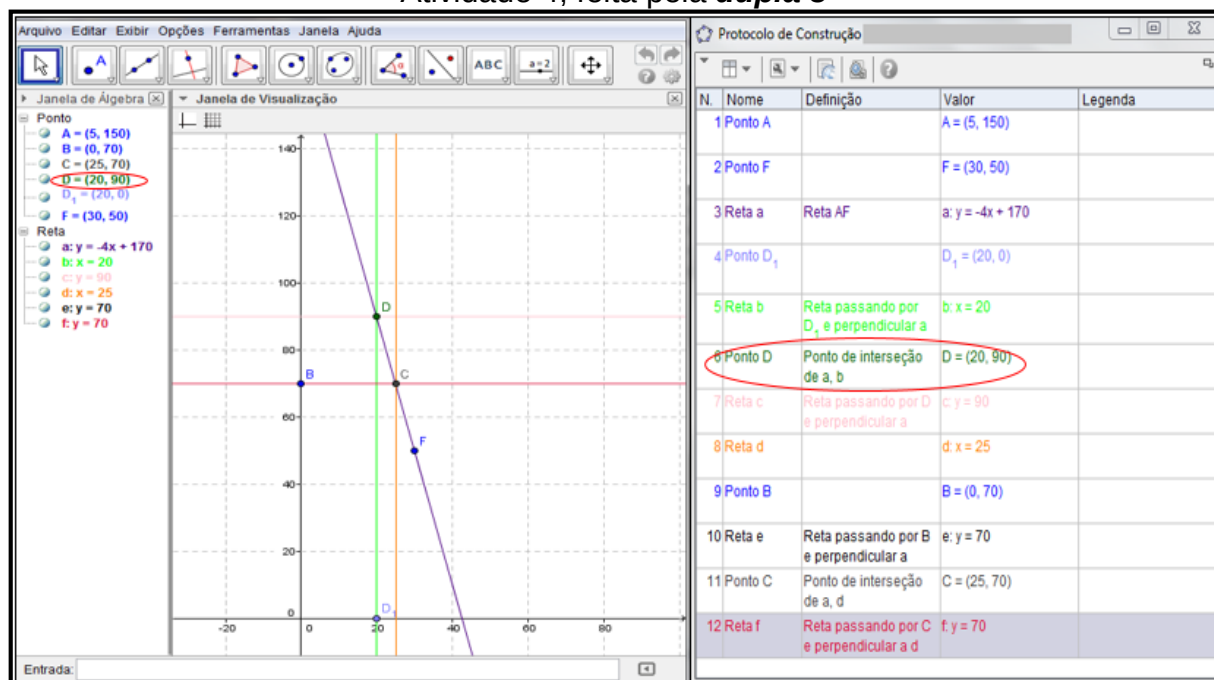
Em relação à primeira questão, as três duplas responderam R\$ 90,00, apesar de a dupla 3 não dar uma resposta no registro da língua natural e apenas indicar o valor.

Na segunda questão as duplas 1 e 2 apresentaram a equação tal como ela é exibida no *software*, forma que não pode ser definida como equação geral. A dupla 3 apresentou a equação na forma reduzida.

A terceira questão foi respondida pelas duplas 1 e 2 apenas com a indicação de 25 unidades. A dupla 3 mostrou como chegou a esse resultado e apresentou a solução com a substituição do valor 70, que significa o gasto para a compra de x unidades de determinado produto representado no eixo y . Na equação e ao isolar o x obteve o resultado 25.

Novamente esta dupla não apresentou uma resposta no registro da língua natural, mas sim de maneira simbólica como um ponto pertencente a uma reta. A construção feita pela dupla 3 para a resolução da Atividade 4 é apresentada a seguir.

Figura 33 - Protocolo da construção realizada no GeoGebra para resolução da Atividade 4, feita pela **dupla 3**



Fonte: Protocolo da dupla 3 feito com o *software* GeoGebra.

Esta dupla utilizou uma solução gráfica para encontrar o solicitado na primeira questão da Atividade 4. Notam-se todos os passos dados pela dupla 3 durante a construção e verifica-se que essa dupla não teve dificuldades para realizá-la. Houve a coordenação entre os registros gráfico e algébrico, pois na questão a resolução foi gráfica, conforme observado na figura 33, já na questão 3 a solução foi algébrica conforme apresentado no quadro 43.

Em seguida as três duplas deveriam descrever como fizeram para resolver tal situação com o auxílio do *software* GeoGebra e as respostas são apresentadas a seguir.

Quadro 44 - Protocolos das três duplas para a descrição da resolução da Atividade 4 com o uso do GeoGebra

Descreva como você utilizou o software GeoGebra para resolver a situação proposta.	
Dupla 1	Primeiro colocamos os pontos dados pelo gráfico, depois colocamos uma reta perpendicular ao eixo x e encontramos a interseção de Dois Objetos, e repetimos o processo com relação ao eixo y .
Dupla 2	Nós utilizamos as retas perpendiculares e os pontos de interseção para descrever os valores de x e y .
Dupla 3	Nós colocamos os valores referentes aos pontos e seus eixos e marcamos um ponto sobre os respectivos valores. Em seguida, traçamos uma reta perpendicular ao eixo x assim encontramos o ponto de interseção. Repetimos o procedimento em todas as situações e chegamos ao resultado.

Fonte: Protocolos das duplas 1, 2 e 3.

A dupla 1 apresentou, em sua descrição, uma solução gráfica para a situação proposta pela Atividade 4 na qual utilizou retas perpendiculares para encontrar os pontos desejados.

A dupla 2 apesar de mencionar as retas perpendiculares não fez uma descrição clara de como as utilizou, sua resposta foi muito simplificada causando incerteza a respeito de como realmente chegou a tal resultado. Por esse motivo a dupla foi questionada e as respostas são apresentadas a seguir.

Pesquisadora: Vocês tiveram dificuldade para resolver a Atividade 4?

Aluno 4: “Visualizar o eixo x e o eixo y .”

Aluno 3: “Encontrar a coordenada.”

Aluno 4: “A gente não conseguiu enxergar o que tava aí e o que tava escrito, porque...”

Aluno 3: “E fazer essa relação aí das retas e do eixo x e do eixo y e de encontrar os valores, teve uma certa dificuldade.”

A dupla 3 também citou como forma de resolução uma situação em que utilizou o gráfico, apesar de ter apresentado uma solução puramente algébrica para a questão 3, mas a descrição apresentada está de acordo com o protocolo de construção do software GeoGebra da figura 33.

Os alunos das três duplas tiveram dificuldades em utilizar os conceitos referentes à equação da reta para resolver o solicitado. Esta dificuldade pode ser resultado do fato de a atividade não ser exatamente sobre uma reta, ou seja, uma atividade na qual os conceitos são utilizados, mas não representam a situação exatamente. Talvez um outro tipo de situação poderia ter um melhor resultado. Apesar de terem acertado, foi um processo bem mais demorado, diferente das demais atividades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa o objetivo principal é a utilização de um *software* de geometria dinâmica para contribuir na apreensão do objeto matemático reta. Para realizá-la, utilizou-se como base a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

De acordo com essa teoria, a análise pode ser feita a partir dos pontos de vista cognitivo e matemático, pois são dois aspectos extremamente importantes para a realização de qualquer atividade em matemática.

A escolha do GeoGebra decorreu do fato desse *software* apresentar tanto a parte algébrica quanto a parte gráfica. De acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica a apreensão de qualquer objeto matemático só é possível quando há a coordenação de pelo menos dois registros de representação diferentes.

Portanto verificou-se no *software* GeoGebra a oportunidade de trabalhar num ambiente diferente do habitual para a maioria dos alunos. Além disso proporcionar o exercício com dois registros importantes para o entendimento do objeto matemático reta ao mesmo tempo, utilizando uma única ferramenta.

Outro aspecto para a escolha desse *software* foi a agilidade com que realiza conversões e tratamentos, pois os alunos participantes da pesquisa já haviam tido contato com o assunto no mesmo ano. Portanto não era interessante gastar muito tempo com construções, resoluções etc. já feitas anteriormente. O foco principal foram as observações, comparações e conjecturas realizadas pelos alunos ao observarem os diferentes registros.

Entende-se, de acordo com a prática, que o objeto matemático reta não é compreendido por alguns alunos, segundo Duval (2011) a reta não é um objeto real, não é possível encontrar algo que possa ser considerado reta. Isso diferencia a matemática de outras áreas do conhecimento como por exemplo a física. Na verdade a matemática é utilizada para modelar e explicar fenômenos, mas ela já existe bem antes de ser utilizada dessa maneira.

Normalmente os alunos associam a reta apenas ao registro gráfico. Para eles, ao combinar esse registro com o registro algébrico, por exemplo, percebem-se várias dificuldades.

Relacionar uma equação a um gráfico é algo em geral complicado para os alunos. Outro registro muito importante para a compreensão de qualquer objeto matemático é o registro da língua natural, muitas vezes o entendimento dos enunciados fica prejudicado pela falta de coordenação entre esse registro e os demais.

Essas dificuldades observadas são apontadas por várias pesquisas e também pelo próprio Duval em sua teoria. A partir de todos esses aspectos iniciou-se a reflexão de como seria possível reparar tais dificuldades e ao mesmo tempo proporcionar a oportunidade de uma melhor compreensão a respeito do objeto matemático reta.

Diante de tudo isso elaborou-se uma sequência de atividades com o objetivo de atingir os problemas apontados com base na teoria para, a partir de sua resolução, encontrar algumas conclusões. A sequência era composta de quatro atividades a fim de tratar o assunto de maneira que a coordenação de quatro registros fosse privilegiada.

Os registros trabalhados na sequência foram o registro da língua natural, o registro gráfico, o registro algébrico e o registro simbólico. O registro da língua natural foi escolhido, pois apesar de estar presente nos enunciados, explicações etc. não é muito explorado em matemática e a sua conversão para qualquer outro registro não dar-se-á de forma direta, para isso é necessário o registro *auxiliar de transição*, no caso da sequência criada, o registro simbólico. Os registros gráfico e algébrico foram escolhidos por representarem um par que complementa-se, ou seja, as informações presentes em um podem ser usadas para a compreensão do outro e vice-versa.

Após a elaboração da sequência, foi apresentada aos colegas do GPEA, a fim de contribuírem com sugestões e melhorias. Posteriormente às adequações feitas com base nas contribuições dos colegas, a sequência de atividades estava pronta para ser aplicada.

Aspectos da metodologia denominada Engenharia Didática de Michèle Artigue foram utilizados como metodologia de pesquisa. Não foi usada com o caráter de estratégia de ensino, em função dos alunos já terem tido contato com o assunto. Foi usada como metodologia de pesquisa para organizar a elaboração, aplicação e análise dos dados.

O próximo passo foi a realização da análise *a priori* para levantarem-se as possibilidades de respostas dadas pelos alunos.

Após a análise *a priori*, a sequência de atividades foi aplicada para 6 alunos da 3ª série do EM organizados em duplas. Realizaram as quatro atividades durante uma única sessão que durou 5 horas, uma manhã inteira.

O fato de não ser possível usar os computadores da sala de informática, em virtude de a escola não ter um estagiário do Programa ACESSA Escola, foi difícil, pois se não houvesse a possibilidade de usar *notebooks* não seria factível a realização das atividades.

Com a intenção de ter mais informações sobre o escrito nos protocolos o áudio dos diálogos de uma das três duplas foi gravado. Após esse momento optou-se por entrevistar as outras duas duplas a fim de agregar mais informações e certezas sobre os escritos nos protocolos.

De posse do material iniciou-se a análise *a posteriori*. Na análise verificou-se muita dificuldade, dos alunos com relação a conversões envolvendo o registro da língua natural. Em muitas situações o entendimento a respeito do que fora escrito só foi possível porque havia acesso ao áudio ou à entrevista, caso contrário seria impossível compreender. O problema referente à relação entre a língua materna e a linguagem matemática ficou evidente durante a realização da sequência de atividades.

A coordenação entre os diferentes registros é um aspecto ainda não dominado pelos alunos, assim ainda não conseguem realizá-la de maneira rápida e eficiente. Dentre as três duplas, a dupla 2 chamou atenção, por apresentar maior dificuldade em relação à coordenação dos registros. Em algumas questões sequer respondeu o que fora perguntado e isso revela bloqueio no entendimento dos enunciados, ou seja, na conversão do registro da língua natural para qualquer outro registro. Além disso a dificuldade quanto a matemática também fora um obstáculo nesta situação.

As duplas 1 e 3 tiveram mais facilidade para realizar as atividades, porém vale ressaltar a dupla 1 que apresentou muitos problemas em relação a escrita, referentes à língua portuguesa e alguns também referentes à linguagem matemática, como exemplo a utilização da expressão “*valores dos pontos*” ao invés de “*coordenadas dos pontos*”.

A dupla 3 teve menos dificuldades, apesar de também apresentar problemas no que concerne à linguagem matemática, porém em menor escala em comparação com a dupla 1.

Com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica constata-se que a dupla 2 apresenta dificuldades do ponto de vista cognitivo no que diz respeito as conversões envolvendo o registro da língua natural, e do ponto de vista matemático há problemas referentes a linguagem matemática e conhecimentos prévios que os alunos dessa dupla mostraram não possuir.

As duplas 1 e 3 do ponto de vista cognitivo, também apresentam dificuldades em relação as conversões que incluem o registro da língua natural, porém em um nível menor, a dupla 1 apresenta mais dificuldades que a dupla 3. Do ponto de vista matemático as duas duplas estão “empatadas” apesar de exprimirem alguns problemas relacionados à linguagem matemática, os conhecimentos prévios desses alunos estão mais consolidados do que os da dupla 2.

Um aspecto positivo foi o deleite dos alunos das três duplas em usar o *software* GeoGebra. Elogiaram muito, ressaltaram a fácil manipulação e o melhor entendimento da geometria analítica de modo geral proporcionado pelo *software*. O fato de poderem movimentar e acompanhar os acontecimentos tanto com o registro gráfico quanto com o registro algébrico foi um aspecto salientado por eles.

Considera-se ter havido melhor compreensão por parte dos alunos a respeito da reta, as três duplas tiveram a oportunidade de assimilar aspectos não percebidos durante as aulas sobre o assunto. Não é possível afirmar que todos saíram desta experiência com total domínio dos diferentes registros e estabelecendo todas as conexões desejadas, porém acredita-se que esta sequência associada ao uso do computador cumpriu com o seu papel de proporcionar maior reflexão em relação ao assunto.

Um fator relevante a ser colocado é o fato de a sessão ter sido única, talvez se o mesmo trabalho fosse feito em duas ou três sessões os resultados pudessem ser diferentes. Apesar da satisfação e vontade dos alunos em participar, por terem sido cinco horas seguidas, ao realizarem a última atividade certo cansaço foi observado. Este cansaço pode ter influenciado em resultados negativos observados nos protocolos das três duplas.

Em referência a questão de pesquisa proposta no início desse trabalho pode-se afirmar sobre o uso do computador que grandes contribuições para a apreensão do objeto matemático podem ser verificadas, seu uso acelera as conversões e tratamentos a serem realizados e permite ao aluno manipular o objeto matemático como se fosse real, fato impossível com lápis e papel.

Para a eficácia dessas contribuições é preciso a associação do uso do computador com uma sequência de ensino elaborada, e bem planejada, pelo professor. O computador funciona como uma ferramenta muito eficiente, porém não substitui o trabalho do professor.

Confia-se na potencialidade das contribuições da sequência de atividades elaborada para o estudo da reta na geometria analítica. Alterações poderão ser feitas na sequência para ser utilizada no início do estudo da reta com o uso do computador e isto pode trazer bons resultados em relação à aprendizagem.

Para futuros trabalhos sugere-se a análise do ponto de vista da geometria analítica vetorial do ensino superior. No tocante ao estudo da reta, sob uma perspectiva dos conhecimentos prévios necessários para os alunos compreenderem-no em um nível mais avançado.

A realização deste trabalho de pesquisa foi muito especial. Durante seu desenvolvimento foi possível perceber as dificuldades dos alunos sob um ângulo diferente, o de pesquisadora. É possível afirmar que contribuiu muito para o meu aprimoramento e desenvolvimento profissional, certamente os conhecimentos adquiridos durante esse processo refletirão no meu desempenho profissional.

ANEXO I

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Você está prestes a desenvolver uma sequência de atividades, elaboradas pela pesquisadora *Raquel Santos Silva*. Esta sequência de atividades tem o objetivo de contribuir com a pesquisa para a dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Antes de iniciarmos a sequência de atividades, responda as seguintes questões:

Você já teve contato com o assunto *equação da reta*, nas aulas de matemática, neste ano de 2013. O que você lembra de ter estudado sobre esse assunto?

Quais dificuldades você teve durante o estudo desse assunto?

Você usa o computador com muita frequência? Para qual finalidade?

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Orientações: Após o término de cada uma das atividades salve o que você fez usando o seguinte procedimento:

*No menu, clique em arquivo, em seguida clique na opção **gravar como**. Denomine da seguinte forma: **nome_atividade (número da atividade). ggb***

*Exemplo: **Raquel_atividade1.ggb***

Atividade 1

Abra o *software* GeoGebra. No campo de entrada na parte inferior da tela digite os pontos $A=(-1,1)$, $B=(1,3)$ e $C=(2,4)$. Em seguida, ligue os pontos com o auxílio da

ferramenta “*reta definida por dois pontos*” -



, localizada na barra de ferramentas.

Os três pontos que você digitou, A, B e C são colineares? Por quê?

Agora, também no campo de entrada digite os pontos $D=(-2,-1)$, $E=(4,-3)$ e $F=(0,5)$.

Em seguida ligue os pontos com o auxílio da ferramenta “*polígono*” -



localizado na barra de ferramentas.

Os pontos D, E e F são colineares? Por quê?

O que aparece na janela de álgebra?

De acordo com o que você estudou, qual é o método para verificar se três pontos são colineares?

No espaço abaixo use o método que você já estudou para verificar se os três pontos estão alinhados, no caso dos pontos A, B e C. Em seguida use o mesmo processo para D, E e F.

Compare o método utilizado acima com os elementos que você já observou na janela de álgebra. Qual a sua conclusão?

Complete:

Três pontos estão alinhados se:

Quando três pontos não estão alinhados:

Salve suas construções conforme as instruções dadas no início.

Atividade 2

No campo de entrada, na parte inferior da tela digite os pontos:
 $A = (-2,5)$ e $B = (2,-2)$.

Na barra de ferramentas clique em “*reta definida por dois pontos*” - , em seguida clique sobre o ponto A e sobre o ponto B.

O que aparece na janela de álgebra?

Na janela de álgebra clique com o botão direito do mouse sobre a expressão e selecione a opção “*equação $y=ax+b$* ”.

O que aconteceu com a equação da reta na janela de álgebra? Por quê?

Na janela de visualização, o que aconteceu com a reta que você construiu? Por quê?

Agora vamos variar o ponto B. Digite as coordenadas dos pontos indicados abaixo no campo de entrada, em seguida clique sobre a ferramenta “*reta definida por dois*

pontos” -  na barra de ferramentas e construa a reta que passa pelo ponto A e os novos pontos. Lembre-se de, na janela de álgebra, clicar na opção “*equação* $y=ax+b$ ”. Então escreva as equações das retas obtidas abaixo:

d) Digite B_1=(-3,2). Equação da reta b: _____

e) Digite B_2=(-2,-3). Equação da reta c: _____

f) Digite B_3=(0,-5). Equação da reta d: _____

As equações das retas são iguais? Qual é a diferença entre elas? Por que?

Na barra de ferramentas selecione a opção “*mover*” -  então clique sobre o ponto B, na janela de visualização e movimente-o.

Na janela de álgebra, o que acontece com as equações das retas? Por que você acha que isso acontece?

Agora, na janela de visualização, clique sobre a reta que passa por A e B e movimente-a.

Na janela de álgebra, o que acontece com as equações das retas? Por quê?

A partir de suas observações, responda:

Ao movimentar o ponto B apenas os coeficientes a e b da primeira equação da reta mudaram. Por quê?

Ao movimentar a reta que passa por A e B os coeficientes a e b de todas as equações das retas na janela de álgebra mudaram exceto em duas delas. Por que você acha que isso acontece?

Comparando o que já foi estudado com o que você observou, o que você pode concluir em relação aos coeficientes a e b da equação da reta do tipo $y=ax+b$? O que o coeficiente a representa na equação da reta? E o coeficiente b ?

As equações das retas poderiam ser escritas de outra maneira? Qual?

Escreva as equações das retas dadas de outra maneira:

a) Reta a: _____

b) Reta b: _____

c) Reta c: _____

d) Reta d: _____

O que você pode concluir?

Salve suas construções conforme as instruções dadas no início.

Atividade 3 – Parte 1

No campo de entrada digite as equações das retas abaixo:

f) $y = 2x + 2$

g) $y = 2x - 2$

h) $y = 2x + 5$

i) $y = 2x$

j) $3y = 6x + 15$

Qual é a posição relativa entre as retas? Por quê?

Quantas equações de retas você observa na janela de álgebra? Quantas retas você observa na janela de visualização? Por quê?

Na barra de ferramentas, clique sobre a ferramenta “*mover*” -  em seguida clique sobre cada uma das retas e movimente-as.

A posição relativa entre as retas se altera?

E na janela de álgebra em relação as equações das retas, há alguma alteração em seus coeficientes?

Existe alguma maneira de identificar a posição relativa entre as retas apenas observando suas equações? Qual?

O que você pode concluir?

Salve suas construções conforme as instruções dadas no início.

Atividade 3 – Parte 2

No campo de entrada digite as equações das retas abaixo:

f) $y = 3x + 2$

g) $y = -2x - 2$

h) $y = x + 1$

i) $y = 2x$

j) $y = 0.5x - 1$

Qual é a posição relativa entre as retas? Por quê?

Na barra de ferramentas, clique sobre a ferramenta “*mover*” -  , a seguir clique sobre cada uma das retas e movimente-as.

A posição relativa entre as retas se altera?

Existe alguma maneira de identificar a posição relativa entre as retas apenas observando suas equações? Qual?

O que você pode concluir?

Complete:

As retas são paralelas distintas se:

As retas são paralelas coincidentes se:

As retas são concorrentes se:

Você já percebeu que quando duas retas são concorrentes existe um ponto em comum entre elas. Dadas as equações das retas:

$$b) y = x + 1$$

$$b) y = 2x - 1$$

Encontre o ponto em comum entre as retas no espaço abaixo sem o auxílio do *software* GeoGebra. Depois confira as coordenadas do ponto que você encontrou utilizando o *software*.

Descreva como você fez para encontrar esse ponto utilizando o *software* GeoGebra.

Experimente digitar outras equações de retas criadas por você, movimente pontos, retas e verifique se as observações feitas até aqui valem também para essas novas equações de retas. Registre suas observações abaixo:

Salve suas construções seguindo as instruções dadas no início.

Qual é a relação entre as atividades que você desenvolveu aqui e o assunto *equação da reta*, estudado anteriormente?

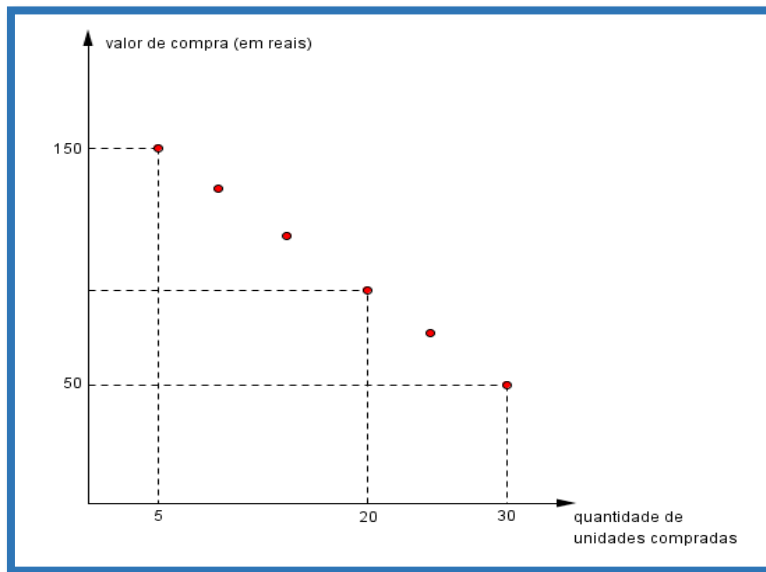
Qual a sua opinião sobre o uso do *software* GeoGebra? Você teve dificuldades em utilizá-lo?

Você acha que a utilização do *software* GeoGebra ajudou na compreensão do assunto *equação da reta*? Por quê?

Atividade 4

Leia a questão abaixo e utilize o *software* GeoGebra para resolvê-la.

(UE/RJ) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico a seguir, por 6 pontos de uma mesma reta:



Obs. As questões foram adaptadas para esta atividade, pela pesquisadora.

Se uma pessoa comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará quanto por unidade, em reais?

Qual é a equação da reta que contém os seis pontos representados?

Se uma pessoa gastou R\$ 70,00, quantas unidades dessa mercadoria, na promoção, essa pessoa comprou?

Descreva como você utilizou o *software* GeoGebra para resolver a situação proposta.

Salve suas construções conforme as instruções dadas no início.

TCLE -TERMO DE CONSSSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro para os devidos fins que fui esclarecido em relação aos termos abaixo:

- Não poderei esperar benefícios pessoais advindos da participação deste projeto;
- Não existem possíveis desconfortos e riscos decorrentes da participação deste projeto;
- Minha privacidade será respeitada de modo que qualquer dado ou elemento que possa, de qualquer maneira, me identificar será mantido em sigilo;
- Posso me recusar a responder qualquer pergunta durante a participação deste projeto e retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar-me, e não sofrerei qualquer prejuízo;
- Terei o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências durante e depois da participação do projeto de pesquisa.
- Fui orientado(a) quanto ao teor do projeto e compreendido o objetivo do mesmo.

Com base nos termos acima eu,

_____,
portador(a) do RG _____ e do
CPF: _____, responsável pelo participante

manifesto meu livre consentimento em relação a participação do projeto de pesquisa.

REFERÊNCIAS⁵³

ANDRADE, R. C. D. **Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio**. 2007. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Núcleo pedagógico ao desenvolvimento científico, Universidade Federal do Pará – UFPA. Pará, 2007.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia na prática escolar**. 14 ed. Campinas: Editora Papirus, 1995. Série Prática Pedagógica.

ARTIGUE, M. **Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products**. In: BIEHLER, R. (ed.). *Didactics in Mathematics as a Scientific Discipline*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. v. 13, 481 p. Cap. 1, p. 27-39.

ARTIGUE, M. **Ingeniería Didáctica**. In: GOMÉZ, P. (ed.). *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática*. 1 ed. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. Cap. 4, p. 33-59.

BRASIL; Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (OCEM-EM)**. 2006. v. 2. 140 p. Brasília, 2006. **(a)**

_____; Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio: Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2000. 58 p. Brasília, 2000. **(b)**

_____; Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2002. 141 p. Brasília, 2002. **(c)**

⁵³ De acordo com: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6023: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. 1 ed. São Paulo: Editora Ática, 2008. 128 p. Série Educação em ação.

CAMARGO, I. BOULOS, P. **Geometria Analítica: Um tratamento vetorial**. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall Brasil Editora, 2005.

CASTRO, S. C. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**. 2001. 111 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2001.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **Periódicos**. Disponível em: <<http://www.periodicos.capes.gov.br>>

DANTE, L. R. **Matemática**, Ensino Médio-3ª série. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2005.

DUVAL, R; CAMPOS, T. M. M. (org.). **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. 1.ed. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p. Volume I.(a)

_____, R; MORETTI, M. T. (trad.). Gráficos e equações: a articulação entre dois registros. Florianópolis. **REVEMAT**. v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011. (b)

_____, R; LEVY, L.F; SILVEIRA, M. R. A. (trad.). **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 110 p. Fascículo I.

ENEM, sobre o. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>> Acesso em: 7, Jan 2014.

ESCOLA, _____, acessa. _____ Disponível _____ em: <<http://acessaescola.fde.sp.gov.br/Public/Conteudo.aspx?idmenu=11>> Acesso em: 26, Nov 2013.

GEOGEBRA. Versão 4.2.56.0. ÁUSTRIA: GeoGebra Institute. Software. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/cms/pt.BR/download/>>

GRAVINA, M. A. A aprendizagem da Matemática e ambientes informatizados. Porto Alegre. **PGIE-UFRGS. Informática na educação: Teoria e Prática**. v. 2. n. 1. p. 73-88. 1999.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277 p. Tese (Doutorado em Informática na Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Porto Alegre, 2001.

HAJNAL, F. **O estudo do paralelismo no ensino da geometria analítica plana: do empírico ao dedutivo**. 2007. 236 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2007.

HONHEWARTER, M. JONES, K. Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. In: **Proceedings of the British society for research into learning mathematics**. v. 27, n. 3. Novembro, 2007. p. 126-131.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**, 7: Geometria Analítica. 5. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

LEITE, M. S. **Recontextualização e transposição didática**. Introdução à leitura de Basil Bernstein e Yves Chevallard. Araraquara, São Paulo: Junqueira&Marins, 2007. Cap. 3, p. 45.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. A. (org.) **Educação Matemática: Uma nova introdução**. 3. ed.. São Paulo: EDUC, 2010. 254 p. Série Trilhas.

MISFELDT, Morten. **Aspects of ICT in mathematical activity: tool and media.** Artigo. Aarhus University, Copenhagen, Denmark. 6 p. Outubro, 2010.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, A. G.; FERREIRA, V. G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **QUADRANTE**. v. XVII, nº 2, 2008.

NETO, J. R. D. **Registros de Representação Semiótica e o GeoGebra:** Um ensaio para o ensino de funções trigonométricas. 2010. 130 p. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina – -UFSC, Florianópolis, 2010.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO (PUC-SP). **Educação Matemática.** Disponível em: <<http://www.pucsp.br/pos-graduacao/mestrado-e-doutorado/educacao-matematica>>

SIGNIFICADOS, dicionário de. Disponível em: <<http://www.significados.com.br>>. Acesso em 07, Jan 2014.

SÃO PAULO (Estado); Secretaria de Educação. **Caderno do Aluno – Matemática:** 3ª Série – v. 1. 76 p. São Paulo. 2013. **(a)**

_____; Secretaria de Educação. **Caderno do Professor - Matemática:** 2ª Série- – v. 2. 61 p. São Paulo. 2013.

_____; Secretaria de Educação. **Caderno do Professor - Matemática:** 3ª Série- – v. 1. 61 p. São Paulo. 2013. **(b)**

_____; Secretaria de Educação. **Currículo do estado de São Paulo- Matemática.** 76 p. São Paulo. 2011. **(c)**

TALL, D. **Computer environments for the learning of mathematics.** . In: BIEHLER, R. (ed.). Didactics in Mathematics as a Scientific Discipline. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. v. 13, 481 p. Cap. 4, p. 189-199.

VARELLA, M. **Prova e demonstração na Geometria Analítica**: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos. 2010. 213 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 2010.