ROGÉRIO FERREIRA DA FONSECA

NÚMERO: O CONCEITO A PARTIR DE JOGOS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2005

ROGÉRIO FERREIRA DA FONSECA

NÚMERO: O CONCEITO A PARTIR DE JOGOS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori*** *com co-orientação do* ***Prof. Dr. Michael Otte.***

PUC/SP

São Paulo

2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a minha esposa Andréa, por sua paciência e compreensão em minha ausência, o que por muitas vezes, acarretou em sua privação de vários bons momentos. Seu apoio foi de fundamental importância para o desenvolvimento desse trabalho. Gostaria de registrar aqui, o quanto sou grato por seu carinho, afeto e por acreditar nos meus ideais.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora *Sonia Barbosa Camargo Igliori*, pela orientação, por sua amizade, paciência e dedicação, mas principalmente por mostrar o caminho na incansável busca pelo conhecimento.

À Professora Doutora *Lulu Healy*, pelas valiosas contribuições, tanto nas suas aulas, quanto nas suas sugestões no exame de qualificação e pela disponibilidade em participar da banca examinadora.

Em especial ao Professor Doutor *Michael Otte*, pela importante e decisiva participação em todas as fases dessa pesquisa, por suas brilhantes idéias, por seus esclarecimentos, e principalmente por sua incansável paciência, mostrando-se sempre muito amigo e interessado em discutir todas as questões que lhe foram propostas, meu especial agradecimento.

Aos Professores do *Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP* pela competência, dedicação e amizade inquestionáveis demonstradas durante as aulas, nos seminários, nas palestras e nos grupos de pesquisa.

O Autor

RESUMO

O tema da pesquisa aqui apresentada é o conceito de número, em especial a abordagem elaborada pelo matemático John H. Conway. O interesse, para a Educação Matemática, pela conceituação de Conway está na possibilidade de ela contemplar os dois aspectos complementares da definição do conceito de número, quais sejam: *intensional* e *extensional*. A extensionalidade é expressa pela aplicabilidade do conceito de número como certos tipos de jogos, incluindo entre eles o jogo Hackenbush, estudado neste trabalho.

Propusemo-nos a investigar uma nova abordagem para o conceito de número, com vistas a buscar nela elementos que favoreçam o ensino e conseqüentemente a aprendizagem. Nossa investigação tem por pressuposto que número é um dos conceitos fundamentais da Matemática e que sua constituição apresenta diversas abordagens, sem que nenhuma delas possibilite responder à questão “O que é número?” .

Como subsídio à investigação, avaliamos algumas respostas de correntes filosóficas sobre a natureza e a existência dos números, as quais nos fornecem pistas das complexidades implícitas nessa noção.

Apresentamos também algumas pesquisas que abordam o conceito de números a partir de jogos, assim como a implicação de tal abordagem para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: **Números, Jogos, Complementaridade, Hackenbush, Conway.**

ABSTRACT

The subject that is presented in this research is the concept of number, in special the approach that was elaborated by the Mathematician John H. Conway. It is very interesting Conway's concept of number in Mathematics Education, because of two complementary aspects of the definition of number, which are: intensional and extensional. The extensionality is expressed by the application of the concept of number to certain games including the Hackenbush game, which is studied in this presentation.

We had the purpose of investigate a new approach to the concept of number, looking for elements that would consequenthy support the teaching – learning process. Our investigation has as presupposition that number is one of the fundamental concepts of Mathematics, that its constitution presents a variety of approaches and that none of them gives the possibility of an answer to the question: "What is number?"

As a subsidy to the investigation we evaluate phylosophical answers aboret the nature and existence of numbers, which provide us clues of the complexity implied in this notion.

We also present some researches that study the concept of numbers coming from games, as well as, the implication of such studies to the teaching – learning process in Mathematics.

Key words: **Numbers, Games, Complementarity, Hackenbush, Conway**.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este trabalho tem por objetivo investigar uma nova conceituação de número, com vistas a colocar em discussão a pertinência de utilizá-la no ensino. Trata-se da conceituação de número elaborada pelo matemático inglês John H. Conway. Tal teoria, além de ser formalmente rigorosa, pode ser explorada por meio de jogos, parecendo-nos, por isso, interessante para ser explorada no processo de aprendizagem do conceito de número. Não nos propusemos estudar especificamente a teoria formal de Conway, mas sim sua aplicabilidade como jogo. Escolhemos para isso o jogo Hackenbush (Conway, 2001, p. 87), o qual é uma generalização do conhecido jogo NIM (Bouton, 1901, p. 35).

A Teoria de Conway, que possibilita uma generalização da teoria dos cortes de Dedekind, pode ser introduzida formalmente a partir de conjuntos, bem como a partir da teoria dos jogos definindo um número como um jogo. Nosso estudo adota a segunda perspectiva e utiliza o jogo Hackenbush, para a partir dele definir de modo exemplar alguns números específicos.

A conceituação de número segundo Conway possibilita e garante a complementaridade entre as características *intensionais* e *extensionais* desse conceito. E, ademais, fornece uma alternativa para abordar o conceito de número para além daquela que explora a relação epistemológica entre os conceitos de número e medida de grandezas, nem sempre satisfatória como no caso da introdução do número negativo.

A descrição desta pesquisa está organizada em quatro capítulos.

No capítulo 1, são apresentados as considerações histórico-epistemológicas sobre a conceituação de número, os procedimentos metodológicos e o referencial teórico da pesquisa.

No capítulo 2, discorremos sobre respostas apresentadas pelas três correntes filosóficas: nominalismo, conceitualismo e realismo, sobre a natureza e a existência dos números.

No capítulo 3, apresentamos algumas pesquisas em Educação Matemática que tratam da construção de conceitos matemáticos a partir de jogos, e mais especificamente, a construção do conceito de números com a utilização de jogos em sala de aula.

No capítulo 4, são descritos o jogo Hackenbush, suas regras e a construção de alguns números a partir desse jogo. Neste capítulo apresentamos também alguns elementos da teoria de Conway a partir de jogos e a representação utilizando conjuntos.

Finalizando este trabalho expomos algumas reflexões a título de conclusão.

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICAS

O conceito de número desempenha papel fundamental na civilização moderna, e as ciências mais avançadas, como a Física, a Química e a Biologia, entre outras, são precisamente aquelas que mais empregam as linguagens dos números. Não se trata de questionar a importância de tais ciências ou a supremacia de uma Ciência sobre as outras, mas, sim, saber de que forma são representados e comunicados os resultados sobre os fenômenos que estudam.

Sem dúvida, deve existir a necessidade de quantificadores tanto para comunicação de tais fenômenos quanto para o controle destes.

A Matemática vem se tornando cada vez mais necessária em todos os ramos do conhecimento humano, da Física à Biologia, bem como nas Ciências Sociais (Economia, Finanças, Psicologia, etc).

Poderíamos refletir sobre o que torna a Matemática o modelo reconhecido das ciências exatas. Na verdade, muitas vezes, não se considera solucionado um problema antes que o fenômeno estudado seja formulado como lei matemática.

Quando analisamos processos matemáticos, descobrimos que na maioria das vezes eles se apóiam em dois conceitos fundamentais: número e função; e que o próprio conceito de função pode, em última análise, ser reduzido ao conceito de número.

Por exemplo, no cálculo diferencial e integral e na análise matemática estuda-se o comportamento de funções; assim, é importante ter clareza sobre as propriedades dos números, visto que tal conceito fundamenta esses ramos da Matemática. No entanto, esta compreensão dos números não é tão simples como parece.

Pesquisas mostram as dificuldades dos estudantes nos diversos níveis de ensino em relação ao conceito de número real (Igliori e Silva, 2001; Tall e Pinto, 1996).

Com o objetivo de analisar uma nova forma de introduzir o conceito de número, faremos inicialmente algumas considerações sobre as características históricas de sua conceituação. Uma delas refere-se ao fato de que a noção de número é uma ferramenta útil para descrever outros objetos matemáticos, e, por isso, demorou mais de dois milênios para se tornar um objeto de estudo em si mesmo.

A conceituação é realizada por meio de diversas formas e nenhuma delas em condições de fornecer resposta definitiva à questão: o que é número?

É importante destacar que a conceituação pela diversidade de formas não é própria apenas da noção de número, mas sim traduz uma especificidade das noções matemáticas, que se transformam em objeto em si mesmo na complementaridade entre as relações estruturais e as interpretações ou possíveis aplicações.

Buscamos nessa pesquisa a complementaridade entre as possíveis conceituações de número, avançando em certos aspectos aquela abordagem que explora a relação epistemológica entre número e medida de grandezas. Com tal relação não se caracteriza o conceito de número, dos naturais aos reais de forma única; com ela poderíamos até introduzir os números naturais ou os racionais positivos, mas não, da mesma forma os números negativos e os irracionais.

Segundo Otte (2004), há que se buscar uma nova perspectiva para a conceituação de número.[1] Para ele as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conceito de número são conseqüência da introdução tradicional dos números, que é geralmente apresentada nos diversos níveis de ensino (básico ou superior). Isto porque tal introdução apresenta algumas “desvantagens” para a aprendizagem, por exemplo: não possibilitar uma construção de maneira uniforme ou geral dos números (dos naturais aos reais); os números irracionais não possuem uma maneira positiva de caracterização, tais números são definidos pela negação como não-racionais.

Além disso, acha ele que não é viável contentar-se com uma introdução axiomática porque com ela não há como tratar os problemas das aplicações. Nas abordagens do conceito de número, devem-se considerar os processos de matematização e as possíveis interpretações desses sistemas.

Segundo Otte (2003b, p. 204), uma teoria, no sentido da Filosofia da Ciência moderna, é concebida como um par: uma estrutura axiomática e um conjunto de vários modelos ou aplicações. Não existe a possibilidade de determinar os significados dos objetos matemáticos, como número, de uma maneira absoluta.

Ao contrário, isto significa um abismo e, então, para entender algo há que representá-lo, buscando várias maneiras novas de expressá-lo.

Recentemente uma nova conceituação de número foi proposta pelo matemático inglês, John Horton Conway da Universidade de Princeton. A

[1] Comunicação pessoal do autor (PUC-SP, 2004).

proposta de conceituação elaborada por Conway é conceitualmente formal e rigorosa.

Além disso, a Teoria de Conway pode ser interpretada por uma classe de jogos, como o jogo Hackenbush que é uma classe de jogos generalizados a partir do tão conhecido jogo NIM.

Tal conceituação permite ainda uma abordagem única dos números naturais aos reais. Garante também a desejada generalidade e complementaridade citada por Otte (2003a, p. 39; 2003b).

É essa abordagem que será por nós pesquisada, buscando ampliar as alternativas existentes para a conceituação de número.

Tem sido comum, desde os tempos de Euclides, apresentar a Geometria na forma de um sistema axiomático. Alguns outros modos de apresentá-la foram adotados pelos matemáticos modernos, contudo o critério axiomático continuou a ser utilizado.

A Matemática dos números, porém, não tem sido tradicionalmente organizada de forma axiomática; tal axiomatização veio acontecer somente no final do século XIX. Quais seriam os motivos para que tal axiomatização só acontecesse aproximadamente dois milênios após a da Geometria?

Desde os seus primórdios, o desenvolvimento da Matemática dos números deu origem a algumas perplexidades filosóficas, por exemplo, a descoberta dos incomensuráveis pelos pitagóricos, originando uma grande crise aos fundamentos da Matemática.

Os números naturais, 1, 2, 3, etc., não são geralmente muito embaraçosos, já que sua legitimidade parece-nos clara, devido a sua utilização em contagens, assim como a legitimidade das frações afigura-se não ser muito perturbadora, já que podemos encará-las como quociente de números naturais, muito utilizados nas comparações de medidas.

Podemos imaginar, porém, a inquietação causada pela necessidade do número zero, ou mesmo a aceitação dos números negativos. Como poderia um número representar o nada, ou mesmo números que representam entes que são menores do que nada?

Como podemos ver em C. B. Boyer (1996), desde seu aparecimento, estes números suscitaram dúvidas quanto à sua legitimidade, por exemplo, Stifel em 1543 ainda os chamava de números absurdos e seu contemporâneo Cardano denominava-os soluções falsas de uma equação.

François Viète, que foi considerado o matemático mais brilhante do final do século XVI, e que é reputado o pai da álgebra simbólica, por ter sido o primeiro a introduzir símbolos literais para os coeficientes e incógnitas de uma equação, não admitia os números negativos nem como coeficientes nem como raízes de equações (Boyer, 1996, p. 209).

As perplexidades filosóficas criadas pelos vários tipos de números reduziram-se consideravelmente graças aos trabalhos dos matemáticos do século XIX, do qual resultou uma teoria unificada dos números.

A importante conquista desses matemáticos foi mostrar de que maneira as teorias matemáticas relativas a tipos mais sofisticados de números podiam ser “elaboradas a partir de” teorias relativas apenas aos números de espécie básica (números naturais). Em outras palavras, aqueles matemáticos revelaram de que modo cada um dos tipos mais complicados de números, bem como as operações (como adição e multiplicação) que com tais números se efetuam, podiam ser definidos em termos dos números naturais e das operações com que esses se efetuam.

Mostrar que isso é viável e que pode ser feito de tal maneira a tornar as leis que governam as espécies mais sofisticadas de números *dedutíveis* das leis que governam os números naturais foi denominado aritmetização da Análise, pois trata de revelar de que modo às partes da Matemática reunidas sob o título de Análise podem ser “reduzidas” à parte elementar da Aritmética. Seria possível interpretar a teoria dos números?

A maioria dos matemáticos limitou-se a trabalhar com os números naturais sem cogitar de que a expressão “número natural” poderia significar e sem cogitar de saber se temos razões para crer que tais entidades realmente existam. Limitaram-se a acompanhar as conseqüências lógicas de hipóteses iniciais, como os axiomas de Peano, admitindo que a Matemática preenche, de modo cabal, as suas finalidades próprias ao estabelecer que seus teoremas são dedutíveis dos seus axiomas.

Algumas pessoas iriam mais longe, dizendo:

> É absurdo cogitar, como fazem os leigos e alguns filósofos, do que sejam os números ou da existência dos números; a Matemática pura é inteiramente hipotética, no seguinte sentido: o que nos importa é somente o fato de que, se certos axiomas forem verdadeiros, então é logicamente necessário que certos teoremas também sejam verdadeiros. As questões levantadas a propósito de significado e existência são inteiramente irrelevantes para a Matemática pura (Barker, 1976, p. 91).

Esse modo de ver é parcialmente justificável; é certo que se pode estudar a Matemática dos números sem levantar questões a propósito da natureza ou da existência dos números.

No entanto, diante da impossibilidade de uma resposta definitiva, a pergunta “O que é um número?” várias questões de ordem filosófica emergem, tais como: Quais seriam as possíveis definições para tal conceito? E os significados de tais definições? Como saber se tais definições caracterizam o mesmo objeto matemático? Investigar as possíveis abordagens desses conceitos nos diversos níveis de ensino, e para tais, quais significados são atribuídos? Quais seriam as possíveis aplicações das leis dos números ao mundo real? Como tratar as diferentes representações dos números?

Uma teoria axiomatizada dos números pode ser encarada como um sistema não-interpretado e pode ser investigada de modo lógico e abstrato. Mas o ponto de vista avança, por certo, o sinal, quando procura impedir reflexões acerca da natureza e da existência dos números.

Matemáticos e lógicos do início do século XX, como Russell, em seu *Principia Mathematica*, esperavam, confiantes, que fosse possível, com o tempo, apresentar cada ramo da Matemática na forma de um sistema axiomático, sistema esse que se revelaria consistente e completo.

Essa confiante atitude foi totalmente derrubada pelo trabalho de Gödel em 1931. Empregando uma engenhosa cadeia de raciocínios metamatemáticos, Gödel demonstrou que a consistência é incompatível com o completamento. Tais sistemas, se consistentes, devem, necessariamente, ser incompletos.

Gödel examinou sistemas como o do *Principia Mathematica* de Russell, em que os termos primitivos e os axiomas são suficientemente numerosos para que se possa falar dos números naturais e deduzir as leis que governam operações como a adição e a multiplicação, efetuáveis com esses números. Gödel chega à conclusão que qualquer axiomatização consistente na teoria dos números naturais nunca abrange, na forma de teoremas, todas as verdades acerca dos números naturais.

Algumas axiomatizações podem abranger mais verdades do que outras e, qualquer que seja a verdade, existe alguma axiomatização que a contém como teorema; não há, porém, uma só axiomatização consistente capaz de incluir todas as verdades.

O resultado obtido por Gödel derruba por completo a idéia de que a verdade matemática poderia ser identificada à dedutibilidade a partir de axiomas.

Segundo Otte (2003b), duas mudanças foram necessárias antes que matemáticos, como Grassmann, Dedekind, Hilbert ou Peano, pudessem pensar sobre a axiomatização dos números. A primeira trata-se da alteração do caráter e compreensão dos axiomas, os quais passariam de verdades objetivas e intuitivamente claras, que nem precisavam nem podiam ser provadas, para premissas hipotéticas do pensamento, ou postulados. Passam a ser perspectivas formais para um campo de conhecimento para que pudessem expressar-se por meio de relações e equações e que a qualquer momento poderiam ser substituídos por outros sistemas axiomáticos.

Esta última observação não é irrelevante, pois ocasiona uma transformação na maneira de pensar e de relacionar. Tudo é transformado num pensamento relacional, pois somente relações tinham um sentido objetivo e seguro.

Às mudanças exigidas no caráter dos axiomas acrescentam-se as relativas ao raciocínio lógico. Na ciência aristotélica a lógica esteve sempre ligada ou relacionada à Geometria. Até o início do século XIX acreditava-se que a Aritmética não podia ter axiomas, pois eles não possuíam lugar nas ciências formais. Nas obras dos lógicos revolucionários do século XIX, como Bolzano, Grassmann, Peirce ou Frege, a lógica é interpretada em termos da atividade semiótica e da linguagem em especial.

Como conseqüência, a noção de objeto matemático necessitou também de uma mudança e a axiomatização formal no sentido de Hilbert teve que ser completada por um pensamento de modelos.

Para Otte (2003a), os objetos matemáticos são elementos de um modelo, ou seja, de um mundo "artificial". Os professores na sala de aula percebem que é quase impossível ensinar o conceito de número negativo devido a um concretismo e empirismo do pensamento cotidiano.

Segundo Otte (2003a, p.38), é preciso criar "mundos artificiais", modelos para fornecer um conteúdo adequado. A Matemática não é um formalismo vazio, mas também não trata dos objetos empíricos e concretos, e por isso precisa de um conteúdo criado por meio de modelos de vários tipos.

Nesse sentido, a conceituação de número proposta pelo matemático John Horton Conway da Inglaterra garante a desejada generalidade e tem a vantagem de poder apresentar a interpretação dos números, em termos de certas classes de jogos, como Hackenbush. Tal abordagem permite ainda a conceituação dos números naturais aos reais de forma única. Temos como objetivo principal analisar tal proposta e a sua aplicação em certas classes de jogos.

A importância intelectual da teoria dos números como um corpo de conhecimentos não brota apenas do fato de ganhar forma de um sistema interessante e logicamente consistente. Depende, também, da existência de algum interessante sentido em que os axiomas da teoria dos números possam ser verdadeiros, ou seja, de possíveis aplicações desse sistema, tanto na própria ciência como no cotidiano ou mesmo em situações lúdicas, como os jogos.

"A importância intelectual do sistema crescerá se pudermos encontrar alguma interpretação interessante que o torne verdadeiro" (Barker, 1976, p. 92).

Parece-nos plausível, portanto, admitir que exista alguma importante interpretação capaz de tornar essa teoria verdadeira. O modo mais direto, embora não seja o único, de explicar por que a teoria dos números encontra aplicações úteis na ciência e na vida prática seria mostrar que a teoria admite alguma interpretação particularmente importante, interpretação que transforma suas leis em verdades de grande valor quando utilizadas como premissas de raciocínios científicos ou de raciocínios comuns.

Procedimentos metodológicos e referencial teórico

Os procedimentos para realização deste trabalho baseiam-se principalmente no estudo sobre a bibliografia pertinente à teoria de John H. Conway. Deparamo-nos com algumas dificuldades em relação a obras sobre essa teoria, pois não encontramos bibliografias nacionais pertinentes ao tema.

Trata-se de uma pesquisa teórica em torno principalmente das referências bibliográficas do próprio Conway, mas pelo fato de a Educação Matemática também ser objeto deste estudo incluímos em nossas referências pesquisas pertinentes a ela que utilizam jogos na construção de conceitos matemáticos, mais especificamente números.

É fato que o principal propósito deste estudo é investigar uma nova teoria, ou seja, uma nova conceituação de número, mas é de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho estabelecer relação com pesquisas realizadas na Educação Matemática em temas próximos. Por essa razão, buscamos pesquisas nessa área desenvolvidas nos últimos cinco anos referente à conceituação de números a partir de jogos.

Realizamos consultas às bibliotecas virtuais das principais universidades brasileiras (consultamos mais de 300 teses e dissertações). Fizemos consulta direta às principais instituições de ensino da cidade de São Paulo.

Para nosso trabalho, optamos por analisar com maior ênfase duas teses de doutorado, por terem como objetivos principais a construção de conceitos matemáticos a partir de jogos, e uma delas, mais especificamente, por ter como propósito primordial a construção do conceito de números inteiros com a utilização de jogos.

Procedemos também a algumas considerações concernentes a um livro publicado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM, por se tratar de uma obra atual e por conceituar frações a partir de jogos e atividades lúdicas. Os autores desse livro são dois educadores matemáticos, Joaquim Giménez e Marcelo Bairral.

Pesquisamos também algumas bibliografias sobre Filosofia, principalmente a respeito da teoria do conhecimento e mais especificamente sobre a Filosofia da Matemática.

A pesquisa está fundamentada no conceito de complementaridade no que concerne à análise de aspectos cognitivos e epistemológicos de conceitos matemáticos. A noção de complementaridade é relevante, em particular, para qualquer estudo das fundamentações epistemológicas da Educação Matemática (Otte, 2003b, p. 205).

Principais obras sobre a teoria de Conway

O livro dos números (Conway e Guy, 1999) traz um completo estudo sobre todos os tipos de números, apresentando os números surreais e sua conceituação a partir de jogos matemáticos, como o jogo Hackenbush. Tal conceituação abrange inclusive os números transfinitos. Número surreal é todo número que pode ser criado a partir da teoria de Conway, com a qual também é possível criar números reais e transfinitos. Então, por volta de 1974 o matemático Donald E. Knuth chamou os números de Conway de números surreais; posteriormente o próprio Conway começou a utilizar essa expressão.

Em *On numbers and game* (Conway, 2001) é apresentada à conceituação de número proposta por Conway de modo formal e rigoroso, além de teoremas e propriedades. Conway mostra também a aplicação desta conceituação em diversos tipos de jogos, entre esses está o jogo do NIM e o Hackenbush.

Em *Winning ways for your mathematical plays,* (Berlekamp; Conway; Guy, 2001), os autores apresentam vários tipos de jogos, assim como algumas estratégias, além da construção dos números a partir de diversos jogos.

Em *Números surreais* (Knuth, 2001) é desenvolvida pelo autor uma novela, na qual duas pessoas estão isoladas em uma praia e começam a desenrolar a teoria de John H. Conway a partir de duas premissas criadas por Conway e encontradas pelos personagens em uma pedra. Não se trata de uma obra que ensina a teoria de Conway, mas, sim, como uma pessoa poderia tê-la descoberta. Mostrando, assim, como seus personagens constroem os números de Conway dia após dia.

Complementaridade

O termo complementaridade tem sido usado por diversos autores para caracterizar aspectos cognitivos e epistemológicos do desenvolvimento da ciência e de conceitos matemáticos.

Para M. Otte (2003b, p. 205), a complementaridade é concebida segundo a noção dual de *extensão* e *intensão* de termos matemáticos.

O debate sobre a relação entre as visões *intensional* e *extensional* de Matemática atinge particularmente e de forma intensa o conceito de número. A visão *intensional*, que implica ordinalidade e descrições axiomáticas, aparece em primeiro lugar e sofre severas críticas dos que privilegiam as aplicações matemáticas.

A dualidade entre essas duas visões é revelada por Russell em seu livro, *Filosofia da matemática*, publicado em 1919, em que trata dos números e tudo o que se relaciona ao número. Inicialmente, na introdução, ao referir-se sobre "a série dos números naturais", ele se utiliza dos axiomas de Peano, e somente atribui um papel ao conceito de número ordinal. Não há menção de cardinalidade. Ela é sugerida no final do primeiro capítulo quando Russel diz:

> [...] que em vez de fixar "0", "número" e "sucessor" como termos que conhecemos, sem os significados que possamos defini-los, poderíamos deixá-los assumir quaisquer 3 termos que verificam os 5 axiomas de Peano. Eles então seriam termos, com um significado, isto é, definidos embora não explicados: eles seriam variáveis (Russel, 1998, p. 9-10 apud Otte, 2003b, p. 221).

A noção de *intensão* de termos matemáticos é caracterizada por descrever as relações entre classes de objetos matemáticos, assim como suas relações estruturais. No entanto, tal noção não descreve o objeto matemático em si, por exemplo, sistemas axiomáticos no sentido de Peano e Hilbert ou uma abordagem axiomática dos números reais. A compreensão comum de uma abordagem axiomática expressa que a aritmética não trata de coisas que existem concretamente, mas sim de relações gerais ou objetos ideais.

Segundo Otte (2001a), Russell julgava o método axiomático incompleto, considerando os axiomas como termos não específicos. Esses termos não interpretados precisam ser especificados de uma maneira que permita estabelecer uma conexão com a aplicação desejada.

A noção de extensão de termos matemáticos caracteriza-se por fornecer a descrição dos objetos matemáticos, assim como a interpretação e as possíveis aplicações dos sistemas axiomáticos.

De acordo com Russell, para poder conceituar um número com alguma *extensão*, que é real, temos que entender "números como um número de quantidade" e dar uma aplicação para o conceito então definido demonstrando a existência de conjuntos de cardinalidade arbitrária. Obviamente, isso só pode ser feito de maneira axiomática. Ao fazer isso, entretanto, a noção de axioma não deve ser entendida de acordo com o senso Peano-Hilbertiano, instrumentalmente; o termo deve ser preferencialmente concebido de acordo com a tradição euclidiana, isto é, como uma verdade intuitivamente evidente e como uma precondição de Matemática.

As teorias do tipo de Russell implicam que conjuntos não podem simplesmente ser o que o senso comum imagina e o que todo mundo que esteve na escola no tempo da reforma da "Nova Matemática" aprendeu. Apesar de Russell ter realizado grandes esforços em partes *extensivas* para reduzir o conceito de número ao conceito de conjunto, tratando este último como um conceito fundamental, fazendo do modo que ele desenvolve seu próprio argumento, mostra que tal concepção precisa ser revista.

Uma aproximação complementarista é induzida pela impossibilidade de definir a realidade matemática independente da própria atividade cognitiva.

Para Thom (1972 apud Otte, 2003b, p. 203, tradução nossa), "o verdadeiro problema o qual é confrontado o ensino da matemática não é o rigor, mas sim um problema de desenvolver um 'significado' da 'existência' dos objetos matemáticos".

Segundo Otte (2003a, p. 31), os objetos matemáticos não podem ser definidos nem indicados com o dedo. Um conceito matemático, tal como o conceito de número ou de função, não existe independente da totalidade de suas representações possíveis, mas também não deve ser confundido com uma representação. "Essa classe ou totalidade de representações possíveis, obviamente, não é uma classe determinada em absoluto, como sugerindo uma concepção *extensional* ou conjunto-teórica da Matemática" (Otte, 2003a, p. 52).

De acordo com Otte (2003b, p. 203), mais do que quaisquer outras práticas, a prática matemática requer uma aproximação complementar para que suas dinâmicas e significados sejam entendidos.

Para ele, uma *moderna teoria axiomática* tornou-se de certa forma uma teoria dual, no sentido de que esse conjunto de axiomas e postulados não determinem somente a *intensão* dos termos teóricos, mas constituam também as *extensões* ou referências e aplicabilidades dessa teoria.

Conforme Otte (2003a, p. 31), uma teoria matemática não existe independente da totalidade de suas caracterizações axiomáticas, e ao mesmo tempo não pode ser confundida com uma delas. Um sistema formal pode ser representado de várias maneiras, e os teoremas têm que ser invariantes em seus valores de verdade, apesar das mudanças de representação.

Por exemplo, na geometria euclidiana, os objetos que nela são tratados parecem ser dados pela intuição, sendo, de certa forma, independentes da teoria. Na geometria de Hilbert a situação é completamente diferente. Para responder as seguintes questões, o que é um ponto? ou o que é um número?, é necessária uma respectiva descrição axiomática de relações ou de leis que governam esses entes.

Otte afirma que:

> O interesse principal de Matemática refere-se a como os objetos poderiam ser introduzidos ao raciocínio matemático ou à teoria. Objetos matemáticos são, em primeiro lugar, objetos intensionais, ou seja, objetos cujos critérios de individualidade devem ser vistos na maneira específica pela qual eles entram na teoria, por meio de

> determinadas representações. Dois objetos matemáticos podem ser idênticos de forma extensional, mas, ao serem apresentados diferentemente, são intensionalmente diferentes. Exatamente como outras Ciências, entretanto, a Matemática tem interesse em obter introspecções objetivas, e, portanto, em objetos extensionais” (Otte, 2003b, p. 203).

A dificuldade desta dualidade implica ser essencial que na Matemática se consiga representar a mesma coisa sempre de novas formas.

A complementaridade se torna visível, e se torna distinguível da mera dualidade, apenas numa perspectiva genética, na qual se concentra o caráter matemático de nosso conhecimento. Apenas dessa perspectiva a relação entre a matéria e o objeto, além do objeto em si, é focada. Segundo Otte (2003b, p. 205), a noção da complementaridade é relevante, em particular, para qualquer estudo das fundamentações epistemológicas da Educação Matemática.

Conhecimentos matemáticos de uma perspectiva genética obrigam-nos a abandonar noções como desconhecer “as coisas em si próprias”, que são objetos matemáticos, que não são representados, ou idéias como “matemática em si” ou a verdade separada de possibilidades de verificar sua autenticidade.

A matemática não é uma teoria vazia; no seguinte sentido, um matemático não monta simplesmente um quebra-cabeça livre de contradições, existe a necessidade de interpretação de sua teoria. Por outro lado, não é possível encontrarmos todas as possíveis aplicações de um conceito matemático. Dessa forma existe a necessidade de uma complementaridade entre o caráter *intensional* e *extensional* de conceitos matemáticos.

A conceituação de número proposta por Conway garante essa complementaridade, pois é uma teoria formalmente rigorosa e pode ser interpretada por várias classes de jogos, como o Hackenbush que é objeto de estudo desta pesquisa.

CAPÍTULO 2

POSIÇÕES DE ALGUMAS CORRENTES FILOSÓFICAS SOBRE A NATUREZA DO NÚMERO

No presente capítulo faremos algumas considerações sobre as respostas encontradas em algumas correntes filosóficas para os questionamentos sobre a natureza do número. Inicialmente apresentamos de forma sucinta algumas observações sobre os termos filosóficos que utilizaremos.

Tradicionalmente, pensadores racionalistas são aqueles que sustentam a primazia do conhecimento *a priori*; empiristas, os que atribuem maior importância ao conhecimento empírico.

Uma das questões fundamentais na Filosofia da Matemática é saber se o conhecimento matemático é empírico ou *a priori*.

O termo "empírico" significa "baseado na experiência", e a expressão "*a priori*" significa possível de obter antes da experiência.

O conhecimento *a priori* é caracterizado pelas idéias inatas. Segundo Hessen (1999, p. 53), tais conhecimentos "existem apenas na medida em que nosso espírito nasce com a faculdade de construir determinados conceitos independentemente da experiência". Em outras palavras, podemos definir conhecimento *a priori* como conhecimento que não necessita da justificação pela experiência.

O conhecimento empírico é caracterizado pelas idéias abstraídas pela mente a partir do que é dado na experiência sensorial, ou seja, podemos dizer que o conhecimento empírico é o conhecimento que requer justificação de experiência.

Segundo Barker (1976, p. 19), um conhecimento sintético é caracterizado por enunciados em que a mente sintetiza ou reúne conceitos de um modo que não espelha qualquer conexão intrínseca que estes possam ter, por exemplo, o enunciado "nenhum gato voa" é um exemplo de um conhecimento sintético, pois nada há no conceito de gato que exclua intrinsecamente o voar.

Para este mesmo autor o conhecimento analítico é caracterizado por enunciados no qual a mente analisa um conceito, separando dele outro conceito que o integrava, por exemplo, o enunciado "todos os solteiros são não-casados" é um conhecimento analítico, pois o conceito de não-casado é parte intrínseca do conceito de ser solteiro.

Resumidamente, podemos dizer que um enunciado é analítico se, e somente se, nada mais do que a sua compreensão for requerida para habilitar-nos como verdadeiro. Um enunciado será sintético se compreendê-lo nunca for suficiente para capacitar-nos a determinar sua verdade.

Nominalismo

Nominalismo é a corrente filosófica que sustenta não existirem entidades abstratas e, mais especificamente, é a corrente que afirma não haver entidades abstratas que possam ser identificadas aos números. Seria possível, então, a um nominalista sustentar que existem meios de interpretar a teoria dos números de modo a torná-la verdadeira? Poderia ele dizer que a Matemática dos números, ao supor que fala de entidades abstratas, não o está de fato fazendo? Poderia ele dizer que a Matemática dos números trata, efetivamente, de coisas cuja existência é aceitável para o nominalismo. Vamos considerar algumas linhas de raciocínio nominalista.

Muitas pessoas, quando questionadas acerca do que sejam os números, responderão que números são idéias da nossa mente.

Essa linha de pensamento é sempre atraente para as pessoas que enfrentam questões filosóficas relativas à existência de alguma coisa problemática. Vamos supor que uma “idéia”, que aqui consideraremos como uma imagem mental, teria que ser algo que surge em dado instante, dura algum tempo, e depois cessa.

Essa idéia estaria perfeitamente localizada no tempo, ainda que não estivesse no espaço, e não seria uma entidade abstrata, tal como entendemos.

A hipótese de que os números são idéias dessa espécie precisa, portanto, ser considerada forma de nominalismo (sendo muito próxima do conceitualismo, quando associa os números à mente).

A proposta de que os números sejam encarados como idéias da mente é facilmente formulada, mas está longe de ser satisfatória.

Em primeiro lugar, segundo a teoria dos números, o número natural zero é único; no entanto, se os números fossem idéias, poderia haver tantos zeros quantas fossem as pessoas que tivessem idéias de zero (não estamos nos referindo a diferentes representações do número zero, um objeto matemático não pode ser confundido com suas representações). E ainda, segundo a mesma teoria, cada número natural admite um sucessor, porém para os números naturais “muito grandes” nenhuma pessoa pode ter chegado a formar idéias de seus sucessores.

A hipótese de que os números são idéias pode acarretar a inexistência de sucessores desses grandes números naturais. Além disso, sabemos que a teoria dos números não pode ser verdadeira, sem que haja uma infinidade de números. E perece-nos duvidoso que as pessoas possuam uma infinidade de idéias de números em suas mentes. Podemos concluir que essa via de pensamento, na qual os números seriam idéias, não oferece qualquer interpretação da teoria dos números capaz de satisfazer de modo a tornar verdadeiros seus axiomas e teoremas.

Outra versão do nominalismo está atrelada a entidades físicas, em vez de recorrer a entidades mentais. Devemos distinguir o conceito de número de suas diferentes representações. Por exemplo, o numeral arábico 5 e o numeral romano V são duas representações diferentes do número cinco. Seguindo a linha de raciocínio dos nominalistas, vamos supor que identificássemos os números aos numerais, vamos supor que os números fossem os numerais. Isso transformaria os números em algo perceptível, no qual não haveria dúvidas sobre sua existência, pois poderíamos vê-los.

Identificando números e numerais, parece que libertamos a Matemática de sua dependência das entidades abstratas. Entretanto, essa versão do nominalismo não é mais satisfatória que a anterior. Essa maneira de interpretar os axiomas da teoria dos números também não os transforma em verdades, literalmente falando.

Assim, por exemplo, a teoria dos números assegura que cada número possua um sucessor; se os números fossem numerais, isso não seria possível. Se um numeral significa um sinal particular, num papel ou em um objeto qualquer, então existe uma quantidade enorme de numerais correspondentes aos “números pequenos”, e não existiriam numerais correspondentes aos “grandes números”, aqueles que supostamente ninguém teria se referido de algum modo específico ou por escrito.

Se não faz sentido considerar que os números sejam numerais, talvez um nominalista pudesse identificar cada número natural a algum objeto particular do mundo físico. No entanto, novamente seria uma visão inadequada, pois seriam necessárias quantidades infinitas de objetos de qualquer espécie. Não se pode ter certeza quanto à existência de uma quantidade infinita de objetos, seja qual for sua espécie. Nunca se chega a observar mais do que um número finito de objetos.

A partir dos raciocínios indutivos baseados na evidência retirada das observações, nunca poder-se-ia estabelecer como provável qualquer conclusão a propósito da existência de um número infinito de coisas observáveis de qualquer espécie.

Concluímos então que a teoria dos números não pode receber uma interpretação nominalista capaz de transformá-la literalmente em verdade. O nominalista convicto terá de considerar o sistema da teoria dos números como incapaz de receber uma interpretação verdadeira segundo sua corrente filosófica.

Conceitualismo e intuicionismo

Conceitualismo é a doutrina segundo a qual os conceitos só existem, como idéias, em nosso espírito, não possuindo nada que lhes corresponda na realidade. Em outras palavras, doutrina segundo a qual as idéias gerais que servem para organizar nosso conhecimento são instrumentos intelectuais criados por nosso espírito, mas sem nenhuma existência fora dele.

A idéia de que os objetos matemáticos, como números e conjuntos, seriam criações do espírito, entidades abstratas nascidas do pensar, pareceu bastante atraente a muitas pessoas.

No entanto, uma forma estremada de conceitualismo sustentaria que o espírito está dotado de poderes para criar os números e as entidades matemáticas que desejasse, de modo inteiramente livre e onipotente.

Os postulados matemáticos poderiam, então, se comparar aos feitos da divindade. Quando o matemático pensasse “postulemos que existam números de tal espécie”, ele traria à luz tal espécie de números, sendo seu poder soberano de criação como o da divindade onipotente que retira do nada qualquer coisa que desejar.

Seria, no entanto, um exagero supor que o matemático estaria completamente liberto de restrições em sua atividade. Não se pode comparar o matemático à divindade criadora.

O matemático está sujeito ao requisito da consciência, não podendo criar autocontradições. Além disso, a Matemática não é um formalismo vazio, mas também não trata dos objetos empíricos e concretos, e por isso precisa de um conteúdo criado por meio de modelos de vários tipos.

O conceitualismo precisa, de qualquer modo, reconhecer que há uma diferença entre desejar e criar, nessa atividade lúdica de criação. Acresce que os principais defensores das concepções conceitualistas admitiriam que os poderes criadores do espírito são muito limitados, estando sujeitos a mais imposições do que a simples consistência lógica.

Segundo Barker (1976, p. 99), é o filósofo Kant o mais ilustre representante da corrente conceitualista relativa à Matemática dos números. Este autor afirma que Kant sustentava que as leis dos números, como as da Geometria euclidiana, eram ao mesmo tempo *a priori* e sintéticas.

Barker afirma também que,

> Embora Kant não tenha deixado tão explícitas as suas idéias sobre a filosofia dos números quanto deixou explícitas as suas impressões a propósito da filosofia do espaço, disse o bastante para fixar, em seus leitores, a noção de que, para ele, nosso conhecimento dos números se assenta numa consciência do tempo, entendida como “forma de intuição pura”, e numa consciência que o espírito possui de sua própria capacidade de repetir, seguidamente, o ato de contar (Barker, 1976, p. 99).

Segundo esse autor, Kant afirma que é por meio de uma visão sintética e *a priori* que chegamos a conhecer fatos particulares relativos aos números, tais como 7 mais 5 é igual a 12. No entanto, isso não é muito plausível, pois fatos particulares como esses, principalmente quando se referem a números grandes, podem e às vezes precisam ser demonstrados.

A concepção baseada na intuição da contagem parece dar indícios de que os números somente poderiam existir se pudessem ser obtidos por meio de contagem; no entanto, é sempre possível seguir a contagem para além de qualquer número a que se tenha contado, conflitando assim com a teoria dos números transfinitos de Cantor.

Um grupo de matemáticos modernos liderados por Kronecker (que fez várias críticas à teoria de Cantor), assim como Kant, acreditam que a pura intuição da contagem seria o ponto de partida para a Matemática do número; a Filosofia desse grupo recebeu o nome de intuicionismo.

O intuicionismo doutrina que tem a intuição por base, ou que atribui à intuição um lugar privilegiado no conhecimento, é uma forma de construtivismo, que considera os objetos matemáticos, tais como números, como construções mentais.

A lógica intuicionista nega o princípio do terceiro excluído, admitindo a existência de sentenças que não seriam nem verdadeiras nem falsas, mas de impossível decisão, uma vez que nessa concepção uma sentença só pode ser considerada verdadeira caso possa ser demonstrada, provada.

O conceito intuicionista de prova é, por sua vez, bastante restrito, já que todas as provas devem ser construtivas, isto é, devem poder ser efetivamente construídas, o que exclui, por exemplo, demonstrações envolvendo o infinito.

Para esses matemáticos modernos, no entanto, o intuicionismo não era apenas uma teoria filosófica, tal como a de Kant; era uma concepção que impregnava o próprio trabalho matemático executado pelo grupo de tal forma que os próprios juízos sobre a validade de seus argumentos matemáticos diferiam dos juízos formulados por matemáticos alheios ao intuicionismo.

Por exemplo, o fato de a teoria de Cantor implicar a existência de "mais" números reais do que números naturais, isto é, a não-enumerabilidade dos números reais, não era aceita pelos intuicionistas, embora fosse considerada legítima por muitos matemáticos.

Os intuicionistas não aceitam o argumento de Cantor destinado a revelar que há "mais" números reais do que naturais e rejeitam assim toda a teoria de Cantor sobre os números transfinitos. A demonstração de Cantor é não-construtiva, requer, em outras palavras, um número infinito de fases.

Do ponto de vista dos intuicionistas, devemos dispor de uma demonstração construtiva, de qualquer enunciado matemático a propósito dos números, antes de estarmos autorizados a admitir a verdade sobre esse enunciado.

Se o enunciado afirma a existência de pelo menos um número de tal espécie, devemos saber como construir ou computar esse número, usando apenas um número finito de fases. Da mesma forma, é preciso dispor de uma contra-demonstração construtiva de qualquer enunciado antes de afirmar sua falsidade.

Segundo Barker:

> O intuicionista acredita que os números sejam criações do espírito e admite, como Kant, que a mente pode conhecer cabalmente aquilo que ela mesma gera. Sustenta o intuicionista que não pode haver verdade ou falsidade incognoscível (isto é, não demonstrável construtivamente) acerca dos números (Barker, 1976, p. 102).

Para os intuicionistas, se não pudermos demonstrar ou refutar de forma construtiva uma determinada asserção, ela não será verdadeira nem falsa.

Seguir os padrões intuicionistas implicaria o sacrifício da teoria dos transfinitos de Cantor, assim como outras partes importantes da Matemática, como o axioma da escolha, formulado pelo matemático alemão Zermelo. Tal axioma é essencial em vários argumentos que dizem respeito aos conjuntos infinitos.

Segundo o axioma de escolha, dado um conjunto cujos elementos são conjuntos não-vazios e mutuamente excludentes, existe pelo menos um conjunto que tenha exatamente um elemento em comum com cada um dos conjuntos pertencentes ao conjunto original (ver Halmos, 1970, p. 64).

A objeção levantada pelos intuicionistas é que esse conjunto, cuja existência é afirmada, não pode ser “construído”. Para os intuicionistas, construir esse conjunto equivaleria a formular uma regra que nos permitisse determinar (relativamente a qualquer objeto, por meio de algum processo finito de contagem e de computação) se o objeto pertence ou não ao conjunto. Não há regra alguma correspondente à espécie de conjunto que o axioma da escolha afirma existir.

“O intuicionismo, uma das mais influentes formas de filosofia conceitualista, mutila, assim, de modo considerável, a Matemática clássica, rejeitando alguns de seus métodos e abandonando alguns de seus axiomas” (Barker, 1976, p. 104).

A doutrina segundo a qual números e conjuntos nascem da pura intuição do processo de contagem é muito vaga e discutível, especialmente se tomada ao pé da letra. O que seria a intuição pura? Quais seriam as evidências de que tal intuição, por exemplo, não poderia alcançar o infinito?

Realismo e a tese logicista

Ao contrário do conceitualismo, o realismo não admite que o reino das entidades abstratas esteja limitado pelos poderes criadores do espírito, pois as entidades abstratas existem em si e por si, e não como construções da mente. O realista acredita que existem, literalmente falando, quaisquer entidades citadas nos axiomas e teoremas da teoria dos números.

Tal atitude sobre a interpretação da teoria dos números é a mais direta possível. Sempre que os termos da teoria dos números parecerem se referir a entidades abstratas, deve-se entender que assim, de fato, sucede, e nessa interpretação os axiomas e teoremas são enunciados verdadeiros.

Barker afirma que:

> Segundo o ponto de vista dos realistas, a tarefa dos matemáticos é comparável a uma viagem de descobrimentos. O matemático não pode criar ou inventar os objetos acerca dos quais fala, esses objetos estão aí para serem descobertos e descritos (Barker, 1976, p. 105).

Para o realista, não parece haver qualquer justificativa para rejeitar demonstrações não-construtivas e definições não-predicativas na Matemática, nem parece haver qualquer justificativa para pensar que um enunciado não seja verdadeiro nem falso.

Se os números e os demais conceitos matemáticos têm realidade independente de nós, os escrúpulos da filosofia dos conceitualistas não fazem qualquer sentido.

Aqui, não há objeções a fazer quanto aos raciocínios não-construtivistas, por exemplo, a demonstração de Cantor da não-enumerabilidade do conjunto dos números reais fala de um número real cuja representação decimal, infinitamente longa, não podemos percorrer, porém não tem a menor importância, pois a realidade do número não depende da nossa capacidade de percorrer os algarismos de sua representação decimal. Cantor determinou um número genuíno, mesmo que não temos condições para determinar, especificamente, de que número se trata.

O mesmo acontece com as definições não-predicativas como a de Zermelo. Se admitirmos que os conjuntos existem por sua própria conta, independentemente do nosso pensamento, temos liberdade, ao definir uma entidade qualquer, de fazer referência a uma classe que contenha a entidade.

O matemático alemão Frege, um dos que mais claramente e com maior força advogou a tese realista, sustentava que nosso conhecimento do número é, em essência, uma questão de visão racional *a priori*. Russel, de maneira geral, concordava com Frege.

Para Frege, o conhecimento que se obtém com o auxílio da razão, contemplando as estruturas atemporais da realidade numérica, é um conhecimento *a priori*. Esse conhecimento não é analítico, no sentido que demos antes à palavra “analítico”; o conhecimento dos números, portanto, não é, para Frege, uma questão de compreensão de significados de vocábulos.

Quando Frege fala de uma razão que conhece objetos matemáticos, associa a essa espécie de conhecimento matemático muito mais do que a compreensão da linguagem. Ele admite que alguém pode entender tão completamente a linguagem do número quanto se possa imaginar, sem saber, todavia, as leis dos números, se a sua razão estiver nebulosa a ponto de não apreender números.

Frege e, logo depois, Russell introduziram uma importante novidade na filosofia do número; admitiram que as leis dos números são todas analíticas.

Frege sustenta que as leis dos números podem ser reduzidas às leis da lógica. Dizer que as leis dos números são analíticas nesse sentido é compatível com dizer que o conhecimento que temos dessas leis depende, basicamente, de uma visão racional. Trata-se do mesmo tipo de visão racional que nos dá conhecimento das leis da Lógica, e este é, para Frege, o mais direto e o mais claro tipo de visão racional.

A doutrina que sustenta serem as leis da Matemática dos números deduzidas da Lógica e inteiramente redutíveis à Lógica veio a ser conhecida como *tese logicista*. Enunciada primeiramente por Frege e depois formulada independentemente por Russell em seu *Principia Mathematica*.

De acordo com o logicismo, as leis da aritmética e todo o resto da Matemática dos números se relacionam às leis da Lógica, da mesma forma que as leis da Geometria se relacionam com seus postulados.

Para evidenciar a tese logicista duas coisas se impõem: uma formulação clara do que são as leis da Lógica e uma série de definições dos termos-chave da teoria dos números, capaz de fazer com que as leis dessa teoria possam ser deduzidas das leis da Lógica.

Frege e igualmente Russell contribuíram muito para a elaboração das leis dessa moderna e poderosa Lógica. É importante ressaltar que, para os seus objetivos, os termos “conjunto” e “par ordenado”, assim como as leis relativas aos conjuntos e aos pares ordenados, eram considerados partes da Lógica e não partes da Matemática.

As definições que se faziam indispensáveis eram definições de todos os termos e símbolos, básicos, não-lógicos, da teoria dos números, incluindo-se o *zero*, *sucessor*, *número natural*, bem como os símbolos + e x.

Russell definia os números naturais como conjunto de conjuntos. O número zero, por exemplo, era definido como o conjunto de todos os conjuntos vazios; o número um como o conjunto de todos os conjuntos não-vazios, cada um dos quais sendo tal que quaisquer objetos a ele pertencentes deveriam ser iguais; o número dois como o conjunto de todos os conjuntos que tivessem um elemento distinto de algum outro elemento, mas tais que quaisquer outros elementos devessem ser iguais a um desses dois elementos; e assim por diante.

Um desses conjuntos se diria sucessor do outro se, e somente se, retirado um elemento de qualquer conjunto da primeira coleção, o conjunto restante viesse a ser da segunda coleção.

O conjunto dos números naturais é o conjunto ao qual pertence o zero e ao qual pertence cada sucessor de algo que está nesse conjunto. Dizer isso, no entanto, não é caracterizar de maneira completa os números naturais, pois há muitos conjuntos nessas condições, por exemplo, o conjunto formado por todos os franceses e por todos os números naturais.

Dessa forma, um número natural pode, portanto, ser definido como qualquer coisa que pertença a cada conjunto que contenha o zero e o sucessor de qualquer objeto que também pertença ao conjunto.

Definições sobre o que significa adicionar e multiplicar tais números também podem ser introduzidas. Assim, com o auxílio de uma Lógica ampliada, na qual figurem leis relativas aos conjuntos e aos pares ordenados ou a seus equivalentes, podem-se deduzir as demais leis da teoria dos números.

Frege sustentava apenas que as leis dos números podiam ser, dessa forma, reduzidas à Lógica. A tese de Russell era mais ambiciosa, sustentando que toda a Matemática poderia ser reduzida à Lógica.

A geometria deveria ser tratada por meio da Geometria Analítica, sendo os pontos do espaço identificados a ternas de números reais. Formas abstratas da Álgebra, em que não se faz o emprego dos números, poderiam ser encaradas como resultados da Lógica das relações, amplamente desenvolvida por Russell.

Certamente não foi por acaso o fato de a tese logicista ter sido desenvolvida pelos adeptos do realismo como filosofia do número, pois tais concepções caminham juntas.

Talvez uma pessoa não simpatizante do realismo poderia perfeitamente aceitar a tese logicista. A hipótese contrária também é concebível. No entanto, foi o realismo que forneceu a motivação intelectual responsável pelo surgimento das obras de Frege e Russell. Segundo Barker (1976, p. 109), “se eles não tivessem abraçado o nominalismo ou o conceitualismo de Kant, ou alguma Filosofia não-literal acerca dos números, dificilmente chegariam a desenvolver a tese logicista”.

A tese logicista foi totalmente derrubada pelo trabalho de Gödel em 1931. Empregando uma engenhosa cadeia de raciocínios metamatemáticos, Gödel demonstrou que a consistência é incompatível com a completação. Tais sistemas, se consistentes, devem, necessariamente, ser incompletos.

Algumas axiomatizações podem abranger mais verdades do que outras e, qualquer que seja a verdade, existe alguma axiomatização que a contém como teorema; não há, porém, uma só axiomatização consistente capaz de incluir todas as verdades. Esse resultado obtido por Gödel derruba por completo a idéia de que a verdade matemática poderia ser identificada à dedutibilidade a partir de axiomas.

CAPÍTULO 3

PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE JOGOS E NÚMEROS

Neste capítulo apresentaremos algumas pesquisas desenvolvidas nos últimos cinco anos que relacionam jogos e números.

Inicialmente, vamos nos referir à pesquisa desenvolvida por Grando (2000), intitulada *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*.

Grando investigou os processos desencadeados na construção e/ou resgate de conceitos e habilidades matemáticas a partir da intervenção pedagógica com jogos de regras, em situação de sala de aula, utilizando dois jogos, o Contig 60® e o jogo do NIM. Buscou também analisar os aspectos envolvidos no processo que vão do jogo livre (jogo pelo jogo), ao jogo pedagógico, esse último sendo usado na construção de conceitos e habilidades matemáticas.

O jogo utilizado como um instrumento pedagógico é “o jogo pedagógico como aquele adotado intencionalmente de modo a permitir tanto o desenvolvimento de um conceito matemático novo como a aplicação de outro já dominado pela criança” (Moura, M. 1992a, p. 53, apud Grando, 2000, p. 4). Dessa forma, um jogo pode ser usado em um determinado contexto como construtor de conceitos e, num outro, como uma aplicação ou fixação de conceitos.

Grando (2000) aponta como objetivos principais de sua pesquisa:

- Investigar as possibilidades do desenvolvimento de um trabalho pedagógico, baseado em jogos e resolução de problemas;

- Evidenciar o processo de construção de procedimentos e conceitos, pelos sujeitos, a partir das intervenções pedagógicas realizadas em ambiente de sala de aula;

- Analisar os aspectos metodológicos do trabalho com jogos no ensino da Matemática.

A pesquisadora realizou a intervenção pedagógica com jogos de regras em sala de aula durante as aulas de Matemática. Segundo Grando (2000, p. 61), "É fundamentalmente importante evidenciar as possibilidades de desenvolvimento cognitivo e aprendizagem de conceitos em situações reais de ensino, ou seja, na sala de aula".

Os sujeitos da pesquisa foram oito alunos da 6.ª série do Ensino Fundamental (11/12 anos) de uma escola particular do município de Campinas – SP. Esses alunos já se mostravam habituados aos procedimentos e regras de trabalho com jogos em grupo.

Os sujeitos foram selecionados aleatoriamente a partir da lista de chamadas do professor. Os oito alunos foram distribuídos em dois grupos de quatro alunos, também escolhidos aleatoriamente. Apenas os oito alunos foram observados pela pesquisadora, e os demais alunos da classe trabalhavam ao lado, desenvolvendo a mesma atividade com jogos.

Os grupos foram organizados por quatro alunos, em parcerias, dupla contra dupla, ficando livre a troca de parcerias nas várias partidas.

Nessa pesquisa, foram utilizados na coleta de dados os seguintes procedimentos: filmagem dos grupos, registro dos jogos e de resolução de situações-problema realizados pelos sujeitos e o registro em protocolos das observações durante as sessões.

Grando usou em sua pesquisa dois jogos, o Contig 60® e o jogo do NIM. O primeiro, segundo a pesquisadora, permite o trabalho com o cálculo mental das quatro operações básicas, expressões numéricas e propriedades aritméticas, a partir de números naturais; o segundo possibilita trabalhar os conceitos de divisibilidade, múltiplos e também o cálculo mental.

Faremos uma descrição sucinta de cada jogo, ressaltando suas regras e o material utilizado na aplicação de tais jogos.

JOGO 1: CONTIG 60®

Material: Tabuleiro (anexo), 25 fichas de uma cor, 25 fichas de cor diferente e 3 dados.

Objetivo: Para ganhar, o jogador deverá ter o número de pontos necessários, definidos inicialmente (30 ou 40 pontos). Uma outra forma de vencer é ser o primeiro a identificar cinco fichas de mesma cor em linha reta.

Regras:

1. Adversários jogam alternadamente. Cada jogador joga os três dados. Constrói uma sentença numérica usando os números indicados pelos dados e uma ou duas operações diferentes. Por exemplo, com os números

2, 3 e 4 o jogador poderá construir (2 + 3) 4 = 20. O jogador, neste caso, cobriria o espaço marcado 20 com uma ficha de sua cor. Somente é permitido utilizar as quatro operações básicas.

2. Contagem de pontos: Um ponto é ganho por colocar uma ficha num espaço desocupado que seja adjacente a um espaço com uma ficha (horizontalmente, verticalmente ou diagonalmente). O jogador marca um ponto. Colocando-se um marcador num espaço adjacente a mais de um espaço ocupado mais pontos poderão ser obtidos. Por exemplo (ver tabuleiro), se os espaços 0, 1 e 27 estiverem ocupados, o jogador ganharia 3 pontos colocando uma ficha no espaço 28. A cor das fichas nos espaços ocupados não faz diferença. Os pontos obtidos numa jogada são somados para o jogador.
3. Se um jogador passar sua jogada por acreditar que não é possível fazer uma sentença numérica com aqueles valores dos dados, o adversário terá uma opção a tomar. Se o adversário achar que seria possível fazer uma sentença com os dados jogados por seu oponente, ele pode realizá-la antes de executar sua própria jogada. Ele ganhará, neste caso, o dobro do número de pontos e, em seguida, poderá fazer sua própria jogada.
4. O jogo termina quando o jogador conseguir atingir o número de pontos definidos no início do jogo ou ao colocar 5 fichas de mesma cor em linha reta sem nenhuma ficha do adversário intervindo. Essa linha poderá ser horizontal, vertical ou diagonal.

JOGO 2: NIM

Material: 27 palitos de fósforo.

Objetivo do jogo: perde o jogo o jogador que retirar o último palito.

Regras:

1. Os 27 palitos são dispostos na mesa, um ao lado do outro.
2. Os jogadores jogam alternadamente.
3. Cada jogador, na sua vez, retira uma determinada quantidade de palitos, devendo retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, 4 palitos.
4. Quem retirar o último palito perde o jogo.

Uma das características do jogo NIM é a formulação de uma estratégia vencedora; é possível simplesmente jogar o NIM aleatoriamente, isto é, sem fazer nenhuma reflexão. Entretanto, para se ter certeza de sempre vencer é necessária a construção da estratégia vencedora. É na formulação desta estratégia que são identificados os vários conceitos matemáticos a serem construídos e/ou aplicados pelos sujeitos.

Em suas considerações finais Grando (2000, p. 201) ressalta que, com a utilização dos jogos como um instrumento pedagógico, os sujeitos foram capazes de perceber algumas regularidades na obtenção dos números e construíram sistemas que representavam, logicamente, a generalização do que era observado.

Em certo momento, os estudantes deixavam o jogo de lado, para analisar as possíveis generalizações de estratégias, procurando construir modelos para a situação analisada. A construção desses modelos fez parte do próprio processo de investigação matemática, que possibilitou descrever um fenômeno observado (regularidades) e generalizá-lo para novas situações, percebendo os limites e possibilidades do sistema construído.

O jogo demonstrou que, quando explorado pelo professor com o cuidado de desencadear o raciocínio e passar do fazer ao compreender, pode ser um recurso eficiente nas aulas de Matemática.

A segunda pesquisa elaborada por Costa (2003), cujo título é *Um jogo em grupos co-operativos. Alternativa para a construção do conceito de números inteiros e para a abordagem dos conteúdos*: procedimentos, condutas e normas.

A pesquisa desenvolvida por Costa esteve voltada à avaliação da utilização de um jogo, o Maluco por Inteiro, em aulas de Matemática. Ao lado de professores, Costa desenvolveu um trabalho com alunos do Ensino Fundamental, usando o jogo em questão, com a intenção de propiciar a formação do conceito de números inteiros e trabalhar com os conteúdos, procedimentos, condutas e normas.

Com esse fim, a pesquisadora, juntamente de oito auxiliares, três professores e cinco estagiários (alunos do curso de Licenciatura em Matemática), discutiram e analisaram os fatos ocorridos em busca de aspectos indicativos tanto dos benefícios quanto dos possíveis problemas que o jogo em foco poderia apresentar para o processo de ensino e aprendizagem, tanto de Matemática quanto de procedimentos, condutas e normas.

Segundo Costa, seu principal objetivo era

> Investigar se o trabalho com o jogo “Maluco por Inteiro” desenvolvido em grupos co-operativos auxilia o aluno a desenvolver o processo de aprendizagem de Números Inteiros, bem como de procedimentos, condutas e normas, conforme recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Costa, 2003, p. 71).

Tal pesquisa foi desenvolvida em salas de aula e em reuniões com professores (auxiliares de pesquisa) trabalhando em 6.ª, 7.ª e 8.ª séries do Ensino Fundamental.

Os trabalhos envolveram alunos do Ensino Fundamental que já haviam passado pelo processo de ensino e aprendizagem de números inteiros sem a utilização do jogo Maluco por Inteiro (três turmas de 7.ª série e três turmas de 8.ª série) e alunos que iniciaram a aprendizagem do tema com o jogo (cinco turmas de 6.ª série). Tal pesquisa investigou a eficiência do jogo para o desenvolvimento do conceito de números inteiros e para a abordagem dos conteúdos procedimentais e atitudinais.

Segundo Costa (2003), o jogo Maluco por Inteiro foi elaborado a partir da análise de textos *Experiências matemáticas*, durante o período em que a pesquisadora ministrava aulas de Prática de Ensino da Matemática em um curso de especialização no ensino de Ciências e Matemática, desenvolvido na Unesp. A base para a criação das etapas do jogo está fundamentada na teoria de Piaget.

O jogo Maluco por Inteiro é uma adaptação da atividade Vai e Vem apresentado no texto: *Experiências matemáticas* – 6.ª série.

Costa (2003, p. 63) ressalta que, “por se tratar de um jogo para o ensino e aprendizagem dos Números Inteiros, a primeira ação foi transformar o tabuleiro, tornando-o isomorfo a tal conjunto”.

Nessa pesquisa a idéia de movimento aos saltos, com passos de extensão uniforme, porém em dois sentidos, é transportada e transformada em operações com os números inteiros. A multiplicação é associada à maior ou menor velocidade (em módulo) de locomoção na reta numérica. Com tais pressupostos, o jogo Vai e Vem foi transformado, dando origem ao jogo Maluco por Inteiro.

Tal jogo visa à formação do conceito de Números Inteiros, e está organizado em cinco fases, duas delas contemplando a etapa intra-objetal, duas, a etapa interobjetal e a última, transcendendo os objetos, caracterizando assim a etapa transobjetal. Nas três primeiras fases, o tabuleiro é um morfismo do Conjunto dos Números Inteiros.

A trajetória orientada deve promover, até a terceira fase, uma correspondência com o conjunto dos números inteiros. O movimento aos saltos, em todas as fases, será o responsável pela correspondência com um conjunto numérico discreto como é o caso dos números inteiros.

As duas primeiras fases representam a etapa intra-objetal. Na primeira, o “objeto” é a adição de números inteiros e, na segunda, os objetos são a adição e a subtração de números inteiros positivos.

Na terceira fase, acontece a etapa interobjetal, já que os números inteiros são adicionados e subtraídos. Nas três fases o negativo é representado pela cor vermelha.

Na quarta fase, o tabuleiro é uma transformação do conjunto dos números inteiros. As casas são marcadas por expressões algébricas que envolvem as operações de adição, subtração e multiplicação. As marcas e a cor dos dados foram substituídas por números de 1 a 6, precedidos pelos sinais + ou - . Esta etapa é uma transição da interobjetal para a transobjetal, com predominância da última.

Na quinta fase, o tabuleiro é o mesmo utilizado na primeira fase, quatro dados são os mesmos da quarta fase e foi acrescentado mais um dado, em cujas faces estão marcados os números: 0, -1, -2, +2, -3 e +3, que será usado para efetuar o produto da soma adquirida pelo lançamento dos quatro primeiros dados com o valor obtido no lançamento do quinto dado. Trata-se da etapa transobjetal.

Para Costa a

> [...] correspondência entre sentido e módulo da velocidade é utilizada para a construção, pelos alunos, de estruturas mentais que, posteriormente, nos trabalhos de sala de aula sem o jogo, sejam transformadas ou utilizadas como instrumento assimilatório para a construção do conceito de números inteiros e suas operações, incluindo a divisão de dois inteiros, que o jogo não aborda (Costa, 2003, p. 64).

Em suas considerações finais Costa (2003, p. 141) comenta que, inicialmente, os professores viam o jogo como uma atividade agradável para os alunos, mas ficavam apreensivos, preocupados com o conteúdo programático. Em suas falas iniciais, os professores revelaram os significados que davam aos jogos, por exemplo, “uma atividade para aliviar as tensões presentes em sala de aula” (Costa, 2003, p. 141).

Com o decorrer do tempo e diante dos resultados obtidos, esses significados foram sofrendo alterações. O entusiasmo dos professores foi mais intenso quando as atividades tiveram de ser traduzidas para a linguagem matemática e as ações foram transformadas em operações.

Os professores começaram a compreender o jogo como uma atividade realmente voltada ao processo de ensino e aprendizagem, percebendo também a seriedade e eficácia desse recurso didático, buscando abordar outros conteúdos matemáticos, tidos por eles como problemáticos, por meio de novos jogos.

Alguns professores comentaram que, antes de perceber a teoria matemática que o jogo envolvia, os alunos continuavam discutindo sobre o jogo, mesmo após a aula, e o faziam com muita satisfação.

Em relação à aprendizagem de números inteiros Costa afirma que

> [...] o jogo foi um grande encadeador de idéias. [...] muitas das falhas de aprendizagem verificadas no desenrolar do jogo puderam ser prontamente sanadas. Para isso os professores utilizaram-se, muitas vezes, dos movimentos nos tabuleiros e também de explicações no quadro negro [...] (Costa, 2003, p. 147).

Para que os alunos aceitem e obtenham êxito no processo de ensino e aprendizagem com os jogos, o professor tem de entender o processo, encarar o desafio e, sobretudo, entusiasmar-se com ele.

Finalizando este capítulo faremos algumas considerações sobre o livro *Frações no currículo do Ensino Fundamental*: conceituação, jogos e atividades lúdicas, dos educadores matemáticos Joaquim Giménez e Marcelo Bairral. Tal livro é uma publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM.

Nesse livro, Giménez e Bairral apresentam um conjunto de material de apoio com atividades lúdicas e jogos para o ensino sistemático das frações. Segundo os autores, as idéias principais dos jogos e das atividades por eles apresentadas são resultados de suas experiências em diferentes espaços de formação profissional docente, como cursos, publicações e congressos.

Nessa obra, os autores apresentam resultados de pesquisas realizadas em turmas de 3.ª a 8.ª séries do Ensino Fundamental.

Giménez e Bairral (2005, p. 7), por meio de uma pesquisa realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, afirmam que tais alunos têm um conhecimento bem restrito e com conexões aparentemente pouco claras sobre as frações.

Os autores apontam três concepções errôneas comumente apresentadas pelos estudantes sobre as frações, a saber: "(a) a fração é uma parte menor da unidade; (b) são dois números separados por um traço; (c) a fração é um operador que sempre indica uma subdivisão e, portanto, um resultado menor" (Giménez e Bairral, 2005, p. 7). Os autores acreditam que, a partir das concepções dos estudantes, fica difícil para estes aceitarem que fração é um número.

Para Giménez e Bairral (2005, p. 10), diferentes aspectos das frações devem ser objetos de explorações e desenvolvidos pela prática docente, sejam eles fração, como quantidade, expressão de um escalar ou medida, função, símbolo, ou como probabilidade.

A equivalência de frações, como um dos aspectos que constrói a noção de fração e número racional, deve ser explorada em situações variadas, de forma significativa, pois a pura definição, desprovida de significado, não proporciona avanço conceitual e inclusive não é reconhecida pelo aluno.

Giménez e Bairral (2005, p. 14) ressaltam que “A ordenação e a equivalência são elementos conceituais importantes que, juntamente com o auxílio do material manipulativo e do resgate histórico, constituem elementos curriculares favoráveis à aprendizagem”.

Esses educadores matemáticos afirmam que as noções sobre frações vão evoluindo e constituindo-se por meio da proposta e desenvolvimento de uma variedade de situações de aprendizagem, de modo que o professor possa ir conhecendo cada vez mais o progresso conceitual de seus alunos.

No capítulo 3, Giménez e Bairral (2005, p. 22) apresentam 25 propostas de jogos que, segundo eles, possibilitam que alunos e professores trabalhem aspectos importantes para a conceituação de frações e que podem auxiliar na comunicação de idéias e na produção de diferentes significados para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Giménez e Bairral (2005, p. 129) afirmam que “Os alunos aprendem numa proposta pedagógica séria com jogos e atividades manipulativas”.

Em suas considerações finais, Giménez e Bairral (2005, p. 129) ressaltam que as dificuldades associadas à construção do conceito de fração podem ser de ordem psicológica ou epistemológica. Entre as de ordem epistemológica está o reconhecimento e a aceitação da fração com um número, entre outras. Sustentam também que

> A inovação das aulas através de uma variedade de atividades e materiais didáticos é importante, porém não será a mera adoção

dos mesmos que resolverá a problemática e a complexidade da construção do conhecimento. Os recursos possuem limitações, potencialidades e, assim, contribuem diferentemente na constituição e significação dos conceitos matemáticos (Giménez e Bairral, 2005, p. 129).

CAPÍTULO 4

DESCRIÇÃO DO JOGO HACKENBUSH

Hackenbush é uma classe de jogos derivados do tão conhecido jogo do NIM. Esses jogos são caracterizados por: (1) somente admitirem um único vencedor; (2) não possuírem informação escondida; (3) possuírem uma quantidade finita de jogadas; (4) não possuírem fator de sorte. Segundo Neto e Silva (2004, p. 11), “é usual chamar a este tipo de jogos, jogos de informação perfeita, ou jogos abstratos”.

Nessa pesquisa, vamos analisar o Hackenbush azul e vermelho. Durante a descrição e análise dessa versão do jogo, vamos nos referir a este simplesmente pelo seu primeiro nome, Hackenbush.

Descrição do jogo

A versão do Hackenbush que analisaremos é composta por peças azuis e por peças vermelhas. É um jogo para dois jogadores, que aqui denominaremos jogadores A e jogador B. O jogador A retira as peças de cor azul, enquanto B retira as peças de cor vermelha. As peças devem estar conectadas a uma linha. Vejamos alguns exemplos na figura 1:

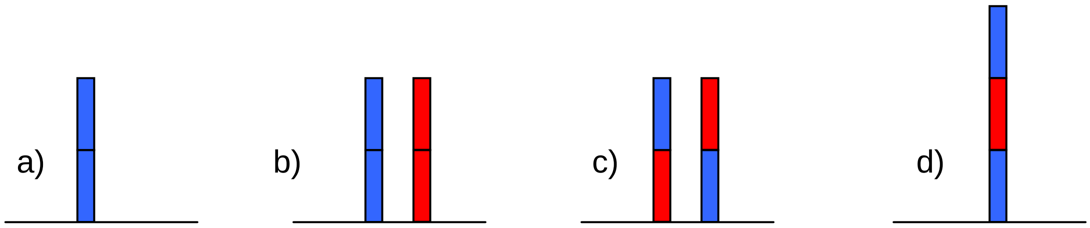


Figura1. Configurações do jogo Hackenbush.

Os jogadores jogam alternadamente; cada jogador somente pode retirar uma peça da cor que lhe pertence. Serão apagadas automaticamente as peças que perderem contato com essa linha. Tomemos como exemplo a figura 1(d) acima: se o jogador A retirar a primeira peça que está em contato com a linha, apagará automaticamente as peças que estão sobrepostas na mesma. Perderá o jogo aquele jogador que primeiro ficar sem peças de sua cor para retirar.

Regras adicionais para construção dos números a partir do jogo

Sempre que o jogador A (jogador que retira somente peças azuis) tiver vantagem em uma configuração do jogo, independentemente de quem comece a partida, essa configuração representará um número positivo; de modo análogo, quando a vantagem for do jogador B (jogador que retira somente peças vermelhas), tal configuração representará um número negativo.

Ao analisarmos o jogo, estaremos sempre interessados na jogada ótima de cada jogador (jogadas que minimizem as chances de seu oponente). Cada jogador terá várias opções de jogada; dentre essas certamente existirão jogadas ótimas e jogadas ruins. Na construção dos números somente consideraremos as jogadas ótimas, tanto do jogador A quanto do jogador B.

Jogo zero

Sempre que o jogador que iniciar a partida perder, isto é, quem começa perde, dizemos que se trata de um jogo zero, ou uma configuração que representa um jogo zero, ou, ainda, um jogo de valor zero. Ao analisarmos a configuração de um jogo, para decidir se esta representa um jogo zero, devemos sempre pensar na jogada ótima de cada jogador. Tomemos as configurações abaixo como exemplos:

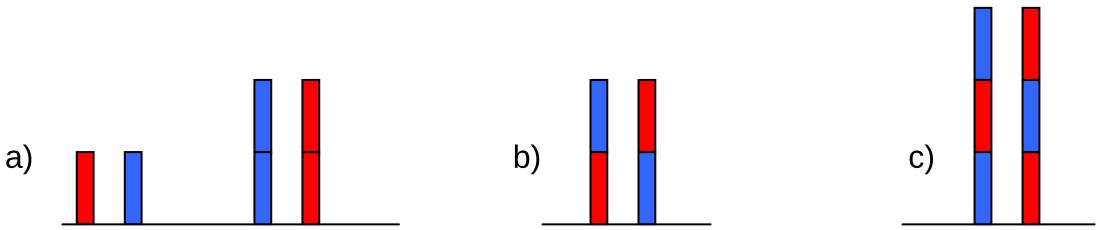


Figura 2. Representações de um jogo zero.

Nos exemplos da figura 2, podemos verificar que o jogador que iniciar a partida certamente perderá. Então, podemos concluir que as configurações acima representam um jogo zero, ou seja, são diferentes representações do número zero. Observemos as configurações da figura 3. Será que tais configurações representam um jogo zero?

Figura 3. Possíveis representações de um jogo zero.

As configurações acima (figura 3) representam um jogo zero. É importante observar nos exemplos anteriores (figura 3) que não se trata apenas de verificar qual dos jogadores tem maior ou menor quantidade de peças para decidirmos qual deles tem a vantagem, ou se a configuração em questão trata-se de um jogo zero. Para chegar a alguma conclusão, devemos analisar cuidadosamente as possibilidades de cada jogador, com o intuito de encontrar sua melhor jogada, ou seja, a jogada que minimize as chances de seu oponente.

Antes de iniciarmos a construção de mais alguns números a partir do jogo, faremos mais algumas considerações sobre algumas configurações mais complicadas.

Nas configurações que analisamos acima (figura 3), consideramos várias representações ao mesmo tempo, para decidir se o jogo em questão representava ou não um jogo zero. Esse raciocínio nos será muito útil, pois utilizaremos diferentes representações do número zero para construir os demais números.

Inicialmente, dissemos que sempre que o jogador A (jogador que retira peças azuis) tiver vantagem sobre o jogador B (jogador que retira peças vermelhas), independentemente de quem comece o jogo, tal configuração representará um número positivo. Observemos as configurações na figura 4:

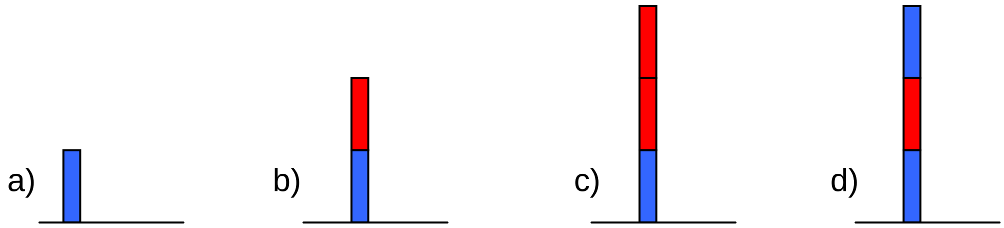


Figura 4. Representações de alguns números positivos.

Ao examinarmos as configurações da figura 4, podemos concluir que elas representam números positivos, pois, independentemente de quem inicie o jogo, o jogador A sempre terá vantagem sobre o jogador B.

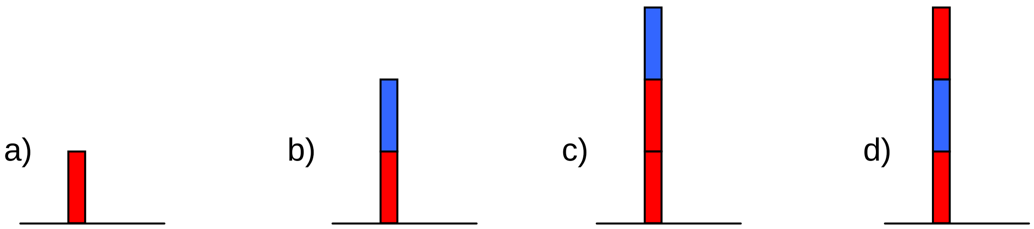


Figura 5. Representações de alguns números negativos.

Analogamente, as configurações do jogo na figura 5 representam números negativos, pois, independentemente de quem inicie o jogo, a vantagem será do jogador B.

Sugestões de jogadas para construir alguns números

Mostraremos algumas sugestões de jogadas para construir alguns números a partir do jogo Hackenbush. Inicialmente representaremos tais números somente por meio de configurações do jogo. Mais adiante representaremos tais números através de conjuntos.

Vamos analisar as seguintes configurações representadas na figura 6:

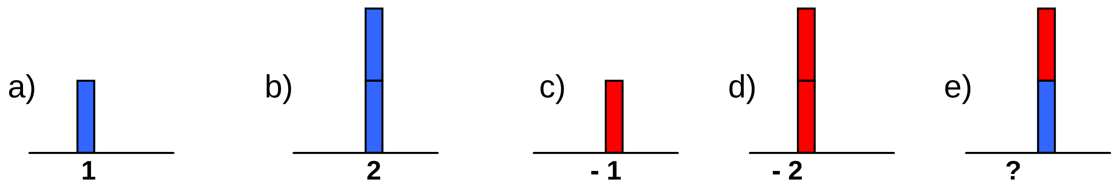


Figura 6. Construção de alguns números.

Observando a figura 6(a), nota-se que o jogador A possui uma única jogada, enquanto o jogador B não tem nenhuma jogada possível; então a vantagem é do jogador A. Tal configuração representa o número 1.

Utilizando um raciocínio análogo ao anterior, analisamos a figura 6(b) e concluímos, então, que tal configuração representa o número 2. Logo, diremos que uma configuração é trivial, sempre que houver peças de uma única cor, isto é, somente um jogador tem possibilidade de jogadas. Na figura 6(c) e 6(d), a vantagem é do jogador B; dessa forma, tais configurações representam dois números negativos. São eles – 1 e – 2, respectivamente.

Os números inteiros são construídos de forma trivial, como descrevemos acima. É importante notar que as configurações 6(a) e 6(c), assim como 6(b) e 6(d), são configurações opostas, ou seja, representam números opostos. Como podemos verificar na figura 2(a), somadas, elas formam um jogo zero (quem começa perde).

Assim, sempre que construímos um número a partir de uma configuração do jogo Hackenbush, construímos também seu oposto aditivo. Tal construção se dá mediante a inversão das peças azuis pelas vermelhas; dizemos então que trocamos as possibilidades de jogadas do jogador A por B, uma pela outra, ou vice-versa.

Vamos analisar a configuração 6(e). Que número tal configuração representa?

a) Percebemos que não se trata de uma configuração trivial, pois existem jogadas possíveis para os dois jogadores.

b) Independentemente de quem comece o jogo, o jogador B perderá; logo, o jogador A tem vantagem. Então, trata-se de um número positivo.

c) Deverá ser um número maior que 0 e menor que 1, pois, apesar da vantagem ser do jogador A, o jogador B tem uma possibilidade de jogada. Entre esses dois números (que já conhecemos) existem infinitos números. Como saber? Jogando!

Devemos sempre construir novos números a partir de configurações que já conhecemos. Como mencionamos no início, devemos elaborar novas configurações e verificar se elas representam um jogo zero. Observemos a figura7:

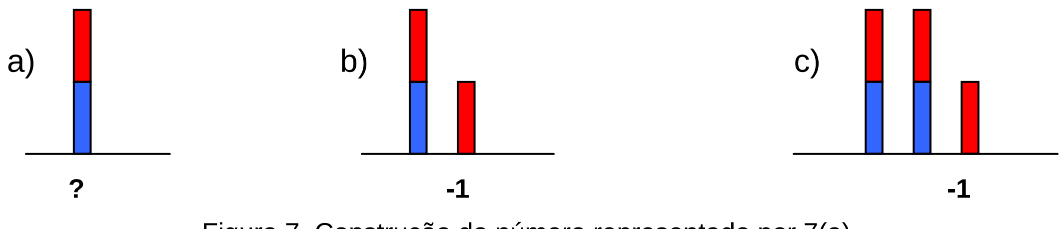


Figura 7. Construção do número representado por 7(a).

Analisando a configuração 7(b), percebemos que a vantagem agora é do jogador B; portanto, não se trata de um jogo zero. Como não conhecemos outros números ou configurações, repetimos a configuração 7(a) formando então 7(c) e novamente jogamos para verificar se esta representa ou não um jogo zero.

Após examinar a figura 7(c), podemos concluir que tal configuração representa um jogo zero, isto é, quem começa perde, sempre lembrando que utilizamos a jogada ótima de cada jogador. Poderíamos também ter recorrido à figura 3(a), pois já tínhamos analisado tal configuração e concluído que ela representa um jogo zero.

Para chegar ao número representado pela configuração 7(a), podemos escrever a seguinte equação: $2x + (-1) = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = 1/2$.

Concluímos então que a configuração 7(a) representa o número 1/2. Logo, a configuração 5(b) representa o número -1/2.

Vamos fazer um breve resumo dos números que já conhecemos, até agora. Construímos os números - 2, - 1, - 1/2, 0, 1/2, 1 e 2. Mostramos também como construir todos os números inteiros, mediante a forma trivial do jogo Hackenbush.

Construiremos outros números, a partir dos números, e das configurações do jogo que já conhecemos. Vamos observar a figura 8 e verificar que número pode ser representado pela configuração 8(a).

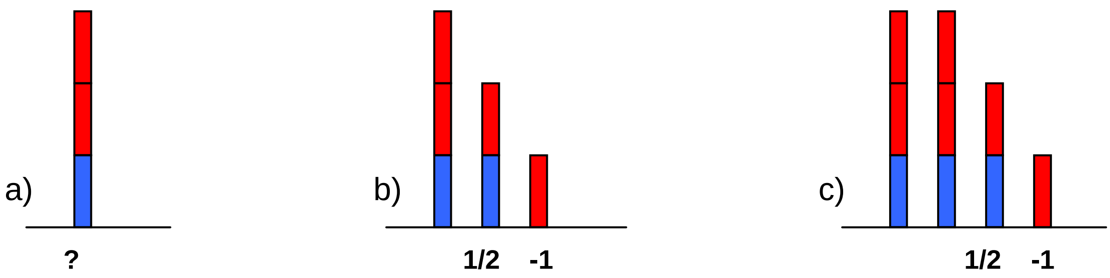


Figura 8. Construção do número representado por 8(a).

Analisando a configuração 8(a), podemos concluir que a vantagem continua sendo do jogador A; portanto, tal configuração representa um número positivo. Entretanto, na configuração em questão, o jogador B tem uma possibilidade a mais de jogada referente a 7(a). Dessa observação concluímos que 8(a) representa um número maior que 0 e menor que 1/2. Vamos jogar novamente para descobrir que número pode ser representado por 8(a).

Observando a configuração 8(b), percebemos que a vantagem agora é do jogador B; esse fato nos leva a tentar uma nova configuração.

Analisando a configuração 8(c), verifica-se que ela representa um jogo zero; portanto, podemos então descobrir que número a configuração 8(a) representa. Primeiro escrevemos a seguinte equação:

$2x + 1/2 + (-1) = 0 \rightarrow 2x = 1/2 \rightarrow x = 1/4$

Concluímos então que 8(a) representa o número 1/4.

Analisando a figura 9, faremos algumas conjecturas para descobrir quais números podem ser representados por essas configurações.

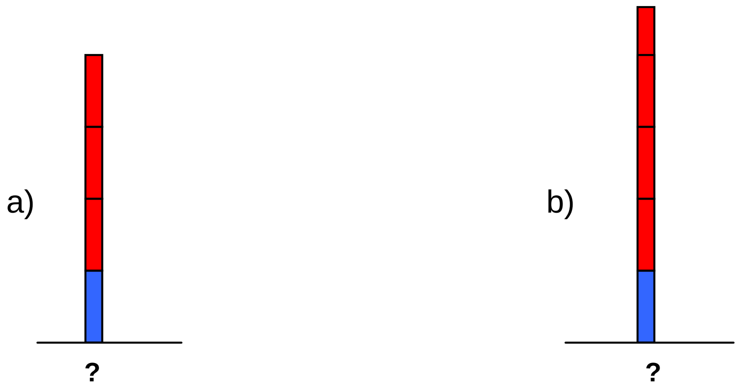


Figura 9. Construção dos números que são representados por 9(a) e (b).

Com raciocínio análogo ao utilizado nas situações anteriores, concluímos que a configuração 9(a) representa o número 1/8. Mostraremos uma forma de chegar a essa conclusão. Observe a figura 10:

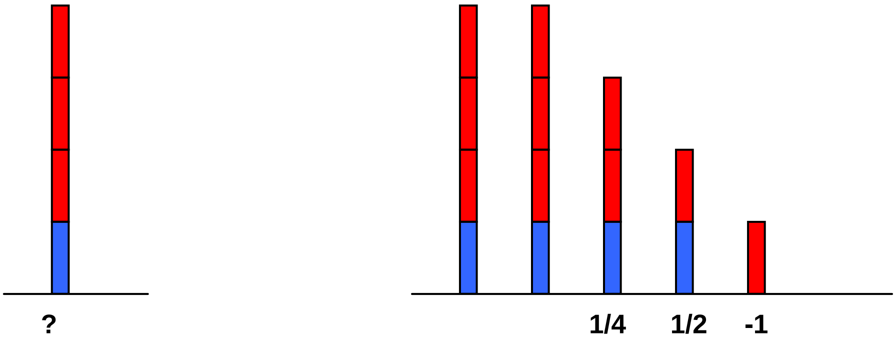


Figura 10. Construção do número representado por 9(a).

Por meio da figura 10 acima escrevemos a seguinte equação:

$2x + 1/4 + 1/2 + (-1) = 0 \rightarrow 2x - 1/4 = 0 \rightarrow 2x = 1/4 \rightarrow x = 1/8$

Se continuarmos acrescentando peças vermelhas sobre a peça azul nas configurações anteriores, o jogador B terá mais possibilidades de jogadas; no entanto, a vantagem continuará sendo do jogador A. Com tal processo poderemos representar todos os números que têm a forma $\frac{1}{2^n}$; se invertermos as chances do jogador A por B, construiremos os números na forma $-\left(\frac{1}{2^n}\right)$, com n = 0, 1, 2, 3, ..., possibilidades de jogadas. Se a vantagem for de A, então n é a quantidade de peças vermelhas; porém se a vantagem for de B, então n será a quantidade de peças azuis. Concluímos assim que a figura 9(b) representa o número 1/16.

Construiremos agora outros números. Anteriormente acrescentamos peças vermelhas à configuração que representa o número 1/2. Agora acrescentaremos peças azuis, aumentando, dessa forma, as possibilidades de jogadas do jogador A. Observe a figura 11:

Figura 11. Construção do número representado por 11(a).

Examinemos a figura 11, analisando que número pode ser representado pela configuração 11(a). Inicialmente, verificamos que o jogador A tem vantagem sobre o jogador B; isso nos leva a concluir que se trata de um número positivo. Se compararmos com a configuração 7(a), notamos que o jogador A tem mais uma possibilidade de jogada; sendo assim, o número em questão é maior que 1/2 e menor que 1.

Agora, devemos jogar e verificar se a configuração 11(b) representa ou não um jogo zero. Analisando a jogada ótima de cada jogador, concluímos que tal configuração representa um jogo zero; portanto, podemos escrever a seguinte equação: $x + 1/4 + (-1) = 0 \rightarrow x - 3/4 = 0 \rightarrow x = 3/4$. Logo, a configuração 11(a) representa o número 3/4. Se invertermos as possibilidades de jogadas do jogador A por B, teremos o número – 3/4.

A configuração 11(a) representa o número 3/4. Vamos acrescentar a essa configuração mais uma possibilidade ao jogador A. Observe a figura 12(a). Que número será esse?

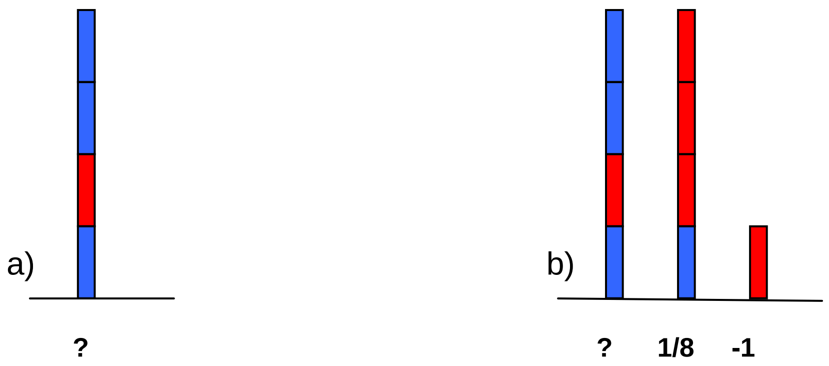


Figura 12. Construção do número representado por 12(a).

Certamente a configuração 12(a) representa um número maior que 3/4 e menor que 1. Sabemos que é maior que 3/4 porque acrescentamos uma possibilidade ao jogador A em relação à configuração 12(a). Jogando, concluímos que 12(b) é um jogo zero, ou seja, quem começa perde. Escrevemos então a seguinte equação: $x + 1/8 + (-1) = 0 \rightarrow x - 7/8 = 0 \rightarrow x = 7/8$.

Logo, a configuração 12(a) representa o número 7/8.

Vamos novamente acrescentar mais uma possibilidade ao jogador A e construir mais um número (figura 13):

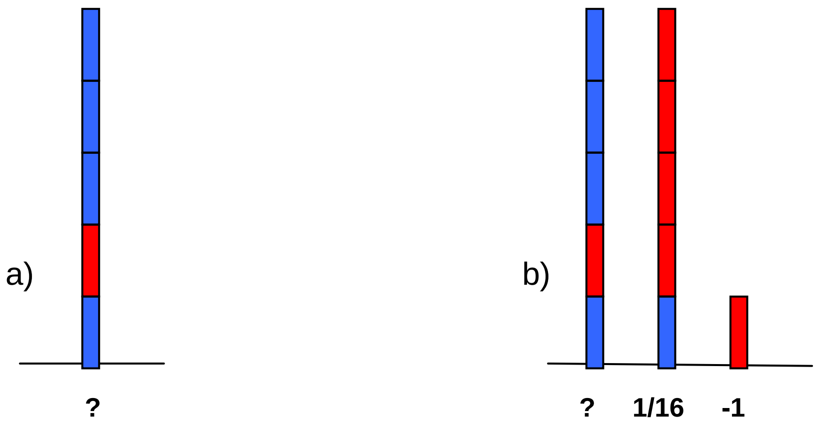


Figura 13. Construção do número representado por 13(a).

A configuração 13(a) representa um número maior que 7/8 e menor que 1. Devemos agora verificar se 13(b) representa ou não um jogo zero. Novamente, por meio do jogo, podemos concluir que 13(b) é um jogo zero; portanto, podemos escrever a seguinte equação:

$x + 1/16 + (-1) = 0 \rightarrow x - 15/16 = 0 \rightarrow x = 15/16$

Desse modo, a configuração 13(a) representa o número 15/16.

Se a essa configuração continuarmos acrescentando peças azuis, isto é, se aumentarmos cada vez mais as chances do jogador A, construiremos os números que podem ser escritos na forma $(1 - 1/2^{n+1})$, com n = 1, 2, 3, ..., onde *n* é a quantidade de peças azuis (possibilidades do jogador A), *acima da peça vermelha*.

Voltemos à figura 11 e analisemos agora que número construiremos, se em vez de acrescentarmos peças azuis à configuração 11(a), acrescentarmos peças vermelhas. Em outras palavras, vamos aumentar as possibilidades do jogador B, como na figura 14(a).

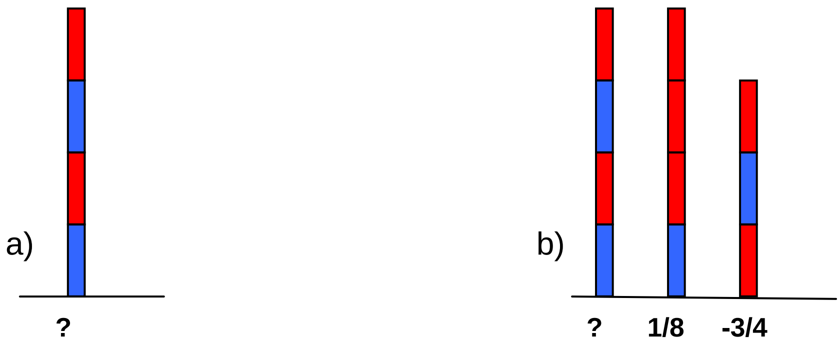


Figura 14. Construção do número representado por 14(a).

A configuração 14(a) representa qual número? Antes de responder a essa pergunta, vamos analisar a situação e refletir sobre as possibilidades que temos: deve ser um número menor que 3/4, pois aumentamos uma possibilidade ao jogador B em relação à configuração 11(a); sabemos também que deve ser um número maior que 1/2, pois, se compararmos a figura em questão com a configuração 7(a), veremos que o jogador A tem uma possibilidade a mais.

Logo, o número em questão é maior que 1/2 e menor que 3/4. Isso quer dizer que poderemos utilizar o número – 3/4 para tentar obter um jogo zero. Isso nos leva a observar novamente a configuração 14(b) para decidirmos "jogando" se tal configuração representa ou não um jogo zero.

Examinando 14(b), uma questão emerge com naturalidade: como concluir que devemos utilizar o número 1/8? A essa pergunta podemos responder da seguinte forma:

Devemos jogar e comparar os números. Dissemos anteriormente que devemos construir novos números a partir daqueles que já conhecemos;

simbolicamente temos $1/2 < x < 3/4$. Se utilizássemos 1/2, teríamos 1/2 + 1/2 = 1; 1 é maior que 3/4. Se tentarmos usar o número 1/4, teríamos 1/4 + 1/2 = 3/4; resta-nos então tentar o número 1/8 e verificar se 14(b) é ou não um jogo zero.

Analisando a configuração 14(b) concluímos que ela representa um jogo zero; logo, podemos escrever a seguinte equação:

$x + 1/8 + (-3/4) = 0 \rightarrow x - 5/8 = 0 \rightarrow x = 5/8$

Portanto, a configuração 14(b) representa o número 5/8.

Abaixo apresentaremos mais alguns números e suas respectivas representações a partir do jogo Hackenbush. Ao lado de algumas configurações colocamos sugestões para encontrar seu valor numérico (figuras 15, 16, 17 e 18).

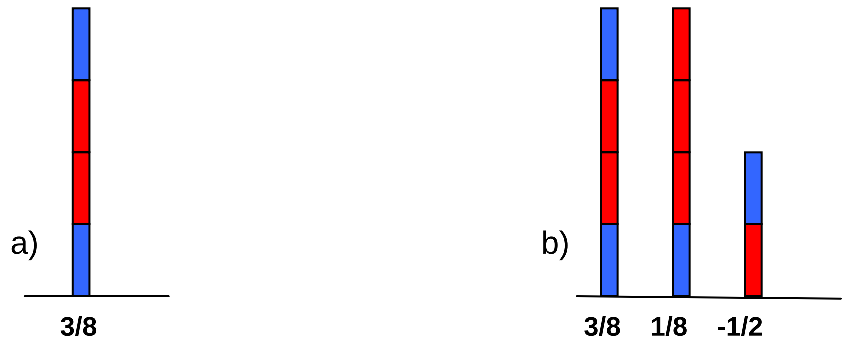


Figura 15. Construção do número representado por 15(a).

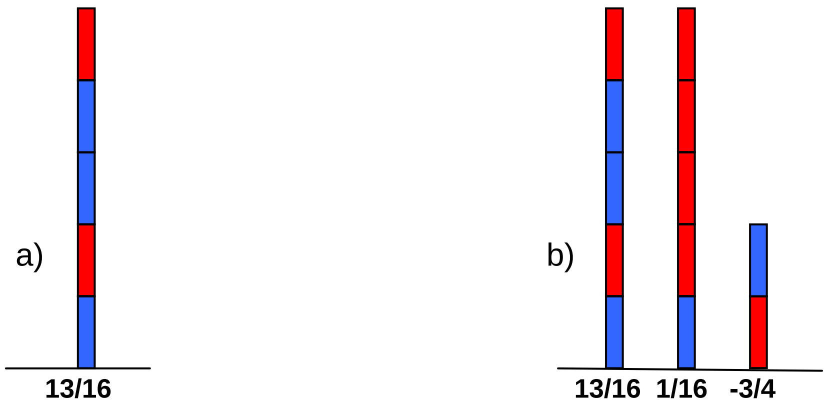


Figura 16. Construção do número representado por 16 (a).

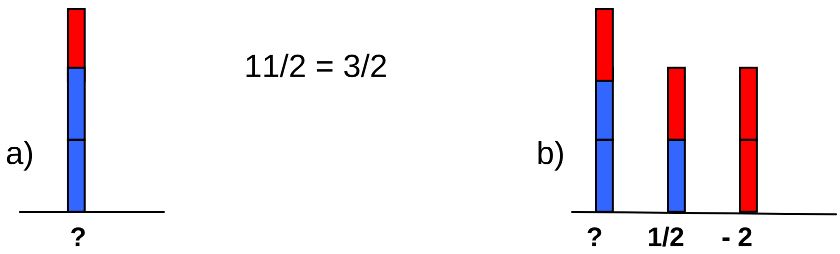


Figura 17. Construção do número representado por 17 (a).

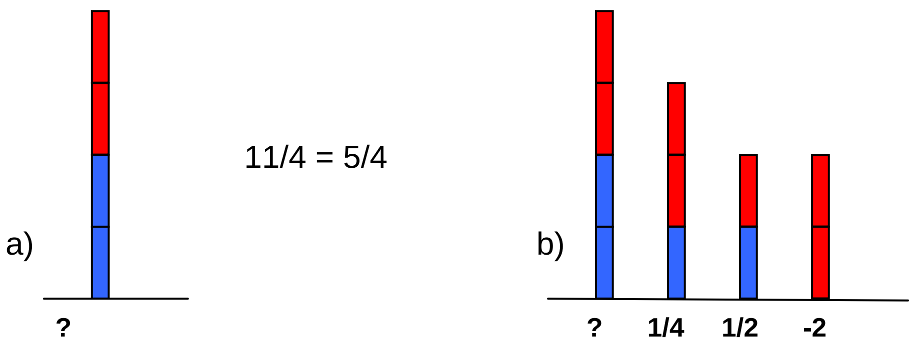
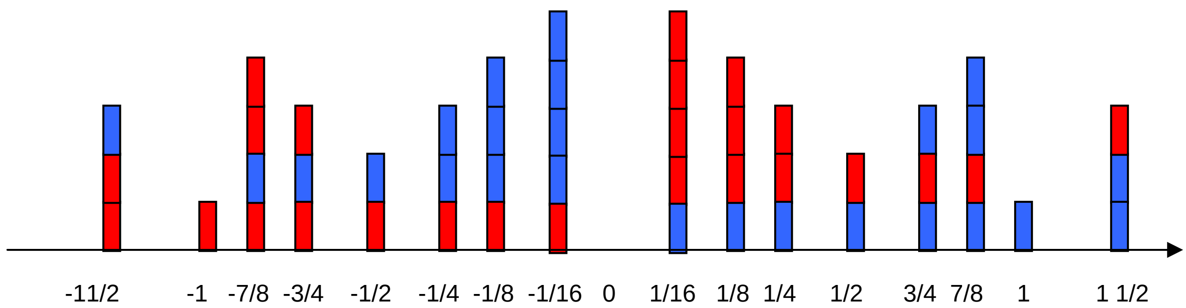
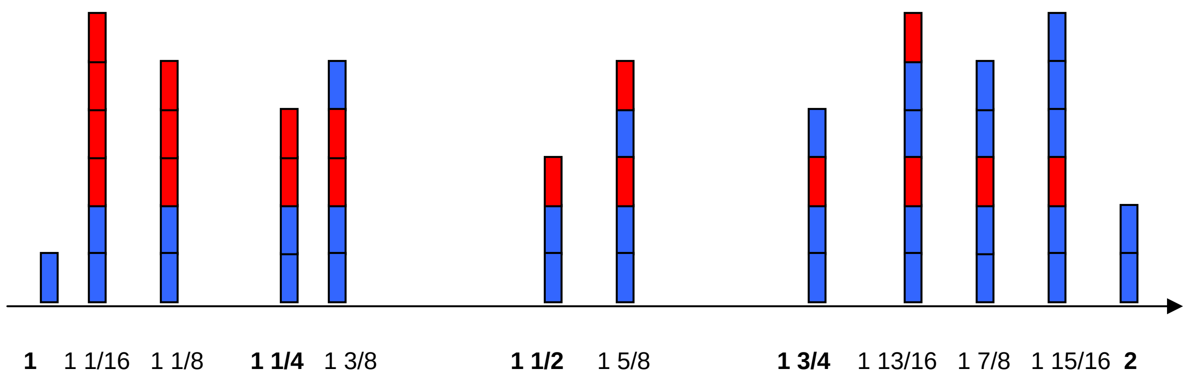


Figura 18. Construção do número representado por 18 (a).





Representações dos números através de conjuntos

No capítulo anterior construímos alguns números a partir do jogo Hackenbush; no entanto, tal construção foi feita somente mediante configurações do jogo.

Como vimos anteriormente, jogos do tipo Hackenbush podem representar números. Vamos generalizar as representações desses números utilizando a seguinte notação $\{\ \ |\ \ \}$. Tal representação foi introduzida por John Horton Conway na construção dos números surreais.

Segundo Conway (1999, p. 299), "o símbolo $\{$*a, b, c, ...* $|$ *d, e, f, ...* $\}$ define "o *mais simples* número estritamente superior a todos os números *a, b, c, ...* e estritamente inferior a todos os números *d, e, f,* ...".

Para Conway (1999, p. 209), a expressão "mais simples" significa o número que corresponde a uma configuração de Hackenbush mais curta. Em outras palavras, o número mais simples entre dois números dados é aquele ao qual corresponde uma menor configuração de Hackenbush. Por exemplo:

$\{\ |\ \}$ = 0, o número mais simples de todos;

$\{0|\ \}$ = 1, o número mais simples maior que 0;

$\{0, 1|\ \}$ = 2, o número mais simples maior que 1.

Dessa forma, poderíamos representar os números naturais. Tais números são representados por configurações nas quais somente o jogador A tem possibilidades de jogadas. Representaremos aqui as chances de tal jogador sempre ao lado esquerdo do conjunto.

Poderíamos também pôr números de ambos os lados da barra. Assim, $\{0|1\}$ é o número mais simples entre 0 e 1, isto é, 1/2. Podem-se também ter números em cuja definição não apareça qualquer número à esquerda da barra. Nesse caso, somente o jogador B terá possibilidades de jogada, por exemplo: $\{\ |0\}$ que é o número mais simples menor que 0, isto é, - 1.

Um número pode ter várias representações diferentes. Podemos representar o número 2 do seguinte modo: $\{1|\ \}$ ou $\{0, 1|\ \}$, visto que o número mais simples maior do que 1 é também maior do que 0. Outras formas que poderíamos utilizar para representar o número 2 são: $\{1|3\}$ $\{1\ 1/2\ |4\}$ e outras.

Naturalmente, pode-se levantar a seguinte questão: como saber quando dois conjuntos distintos representam o mesmo número? A resposta a essa questão é jogando!

Os números podem ser representados por jogos. Qualquer número definido por $g = \{a, b, c, ...|d, e, f, ...\}$ pode ser interpretado como uma configuração do jogo Hackenbush. Tal jogo ocorre entre dois jogadores que designamos anteriormente como jogadores A e B.

Os lances de *g* para *a, b, c, ...* são legítimos para o jogador A, enquanto os lances de *g* para *d, e, f, ...* são legítimos apenas para o jogador B.

Vamos supor que o jogador A (jogador que retira peças azuis) passa de *g* para *b*, por exemplo. Como *b* tem uma representação semelhante, então, $b = \{A, B, C, ... \mid D, E, F, ...\}$; logo, o jogador B (jogador que retira peças vermelhas) pode efetuar um lance para *D, E, F, ...*. Vamos supor que o jogador B passa para $D = \{\alpha, \beta, \gamma, ...| \delta, \varepsilon, \sigma, ...\}$. O jogador A pode agora efetuar um lance para $\alpha, \beta, \gamma, ...$ e assim sucessivamente. O primeiro jogador para o qual seja impossível efetuar qualquer lance perde o jogo; o outro jogador será naturalmente o vencedor.

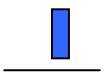
Para representar cada configuração do jogo Hackenbush usaremos a seguinte notação: $g = \{a, b, c, ...|d, e, f, ...\}$, a qual utilizamos anteriormente para definir os números, visto que configurações de Hackenbush são números, e números são configurações dessa classe de jogos. O jogador A pode efetuar lances de *g* para *a, b, c,...*, enquanto B pode efetuar lances de *g* para *d, e, f,...*, e assim sucessivamente.

Vamos analisar algumas configurações do Hackenbush já construídas anteriormente, utilizando a representação de conjuntos. No final de qualquer jogo cada um dos jogadores pode ser confrontado com o chamado desenho vazio, que é caracterizado por não possuir qualquer peça azul ou vermelha e relativamente ao qual nenhum lance é possível.

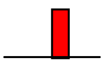
———— = { | }

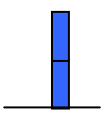
Segundo Conway (1999, p. 302), é natural denotar por 0 o desenho vazio.

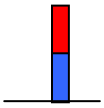
Na configuração de Hackenbush, que contém precisamente uma peça azul (e nenhuma vermelha), o jogador A pode passar para 0, enquanto o jogador B não pode executar qualquer lance:

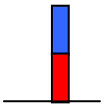
 = {---- | } = { 0| } = 1

Vamos observar mais alguns exemplos:

 = { | ---- } = { |0 } = - 1

 = {----,  | } = {0, 1 | } = 2

 = {---- |  } = {0 | 1 } = 1/2

 = {  | ----} = {-1 | 0 } = - 1/2

O *negativo* de uma configuração de Hackenbush pode-se obter diretamente pela transformação das peças azuis existentes em vermelhas e das vermelhas em azuis. Invertem-se assim os papéis dos dois jogadores. Se for *g* = {*a, b, c,...*|*d, e, f,...*}, teremos - *g* = { - *d*, - *e*,- *f*, ...| - *a*,- *b*,- *c*,...}. Desde modo, por exemplo, o negativo de 1 1/2 = {1 | 2} será – 11/2 = {- 2 | - 1}.

Cada configuração de Hackenbush possui um *valor*, que é um número, sendo cada número o valor de uma configuração de Hackenbush.

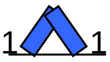
Assim, podemos sempre representar os números em termos de jogos como o Hackenbush. Além do mais, com esse procedimento, podemos fazer comparações entre os números e, em particular, saber se dois números são iguais. Para este fim, fazemos duas configurações de Hackenbush *g* e *h*, cujos valores correspondem àqueles números, jogando-se então o jogo que se obtém por combinação, numa única configuração, de *g* com – *h*, e perguntando: quem ganha?

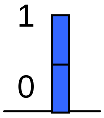
i) Se ganhar o jogador A (jogador que movimenta as peças azuis, que estão denotadas sempre do lado esquerdo do conjunto), independentemente de quem comece, teremos, então, g > h.

ii) Se ganhar o jogador B (jogador que movimenta as peças vermelhas, que estão denotadas sempre do lado direito do conjunto), independentemente de quem comece, teremos, então, g < h.

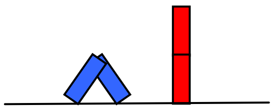
iii) Independentemente de quem comece, se o *segundo* jogador puder ganhar, sempre teremos *g* = *h*.

Como exemplo, analisemos o seguinte jogo:

g = 1  1, cujo valor é {1 | }; observemos agora outra configuração do jogo:

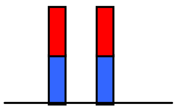
h = 

, cujo valor é { 0,1 | }. O método acima descrito permite-nos verificar que {1 | } e { 0,1 | } são, de fato, re 0 entações distintas do mesmo número. Em *g* os dois lances possíveis para o jogador A têm o mesmo valor 1. Por outro lado, como já observamos, *h* tem o valor { 0,1 | }. Assim, o desenho composto g – h tem a seguinte forma:

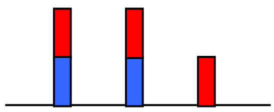


Como podemos verificar, cada jogador pode assegurar duas jogadas, podendo o segundo jogador, seja ele qual for, ganhar sempre*:* logo concluímos que *g* = *h*.

Para *somar* dois números, justamos as configurações que lhes correspondem. Por exemplo, 1/2 + 1/2 pode ser representado pelo seguinte desenho:

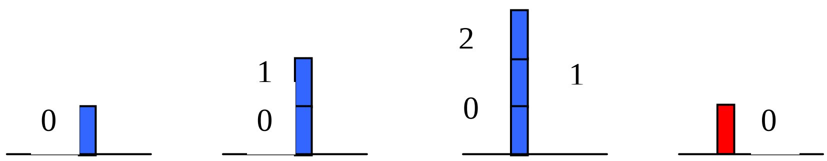


Podemos agora verificar que 1/2 + 1/2 = 1, constatando a partir da próxima figura que o jogo pode ser sempre ganho por quem jogar em segundo lugar. No capítulo anterior explicamos de forma detalhada a maneira de analisar e jogar a configuração em questão. Mais adiante ,definiremos a soma e a multiplicação desses números por meio da representação formal (representação por meio de conjuntos).

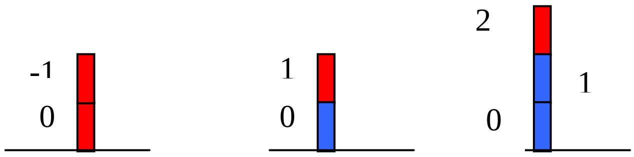


½ + ½ + (-1)

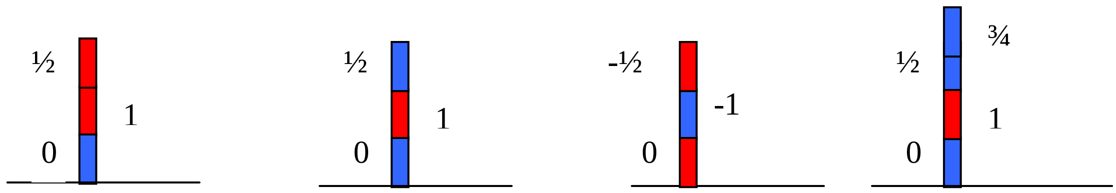
Nas figuras seguintes apresentamos os valores de algumas configurações do jogo. O número pequeno escrito à esquerda ou à direita de cada peça é o valor que se obtém quando o jogador correspondente apaga essa peça.



1={0 | }   2={0, 1| }   3={0,1,2 | }   -1={ | 0}



-2={ |-1, 0}   1/2={0| 1}   1 1/2={0,1| 2}



$1/4=\{0 \mid 1/2, 1\}$ $3/4=\{0, 1/2 \mid 1\}$ $-3/4=\{-1 \mid -1/2, 0\}$ $7/8=\{0, 1/2, 3/4 \mid 1\}$

Generalizando a soma e a multiplicação

Se $\alpha = \{..., a,... \mid ..., A, ...\}$ e $\beta = \{...,b,... \mid ..., B, ...\}$, então,

$\alpha + \beta =\{..., a + \beta, ..., \alpha+b, ... \mid ..., A+\beta, ..., \alpha+B,...\}$ e $-\alpha = \{..., -A, ... \mid ..., -a\}$, enquanto $\alpha\beta = \{..., a\beta + \alpha b - ab, ..., A\beta + \alpha b - AB... \mid ..., a\beta + \alpha B - aB,..., A\beta + \alpha b - Ab, ...\}$

Supôs-se que α foi definido em termos de vários números $a < \alpha$ e $A > \alpha$ e analogamente, para β. Um dos números à direita da barra na definição de $\alpha\beta$ pode ser $\alpha_{13}\beta + \alpha\beta_{7} - \alpha_{13}\beta_{7}$. Assim, por exemplo:

$8 \times 25 = \{0, 1, ..., 7 \mid \} \times \{0, 1, ..., 24 \mid \} = \{7 \mid \} \times \{24 \mid \} = \{7 \times 25 + 8 \times 24 - 7 \times 24 \mid \} = \{199 \mid \} = 200$. Estas definições são indutivas supondo-se, em cada passo, que todos os produtos mais simples já foram calculados.

Elwin Berlekamp propôs uma regra simples para estabelecer uma correspondência entre os números reais positivos e as configurações do Hackenbush.

O primeiro par de peças de cores distintas que aparecerem contando de baixo para cima representará a vírgula binária; as peças azuis e vermelhas que seguem este par são os dígitos 1 e 0, respectivamente, que aparecem à direita da vírgula, sendo ainda adicionado um último 1 no caso em que a configuração for finita. A parte inteira é igual ao *número de peças* que aparecem antes do par que representa a vírgula. As configurações do jogo Hackenbush podem ser infinitas. Vejamos na figura 19 abaixo alguns exemplos de números reais positivos: π, e, √2, 1/3, 1 1/64 e 4 7/8, respectivamente.

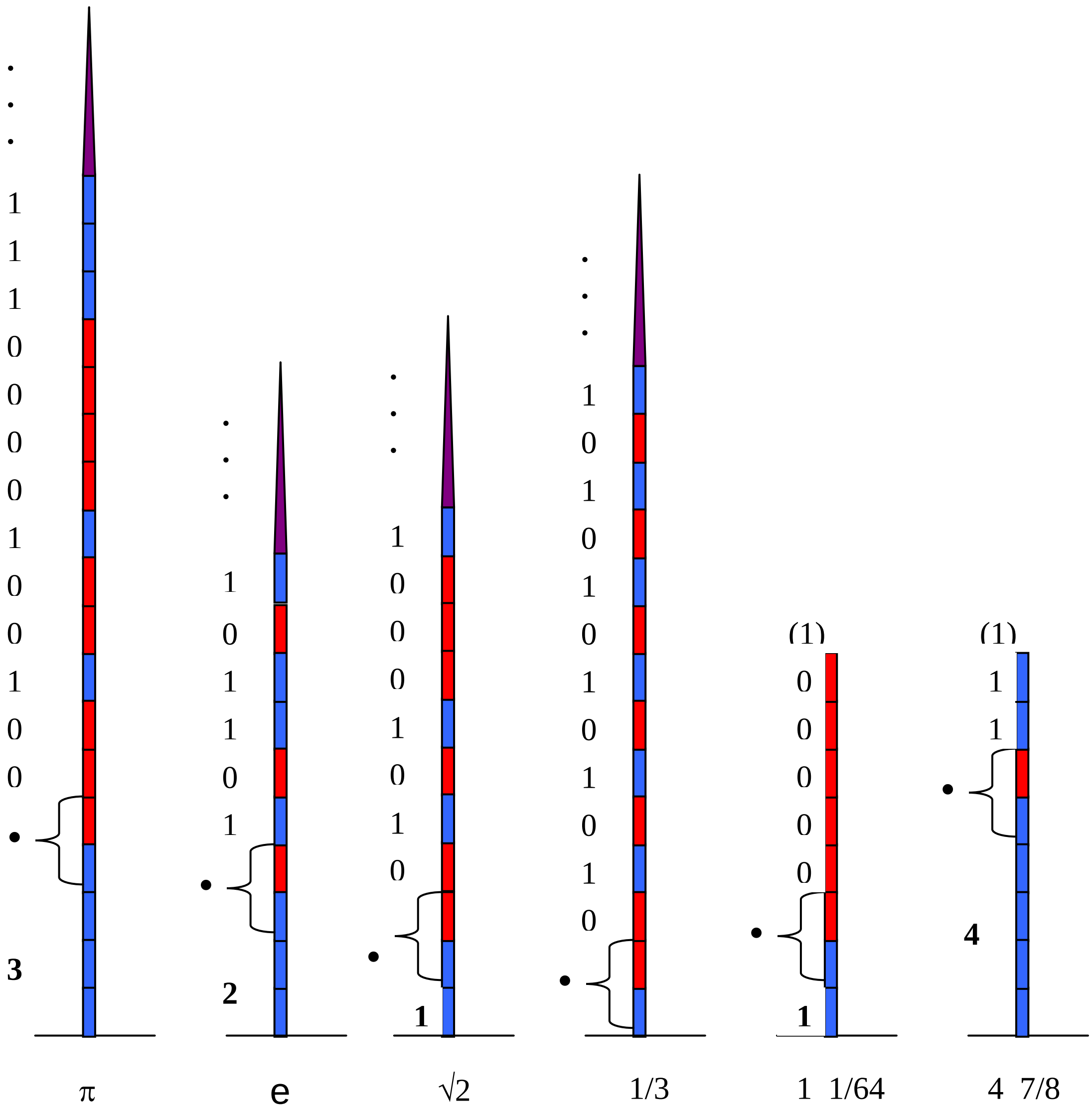


Figura 19. Representações de alguns números reais por meio de configurações do jogo Hackenbush.

A representação de π em notação binária é 11,001001000011111101101...; a representação binária é infinita e não periódica, portanto trata-se de um número irracional. O mesmo acontece com o número e, que pode ser representado em notação binária da seguinte forma: 10,101101... . O número $\sqrt{2}$ também é irracional; sua representação binária é 1,01010001... .

Já os números 1/3, 1 1/64 e 4 7/8 são números racionais, 1/3 em notação binária tem a seguinte representação 0,01010101..., tem uma expansão binária infinita; no entanto, tal expansão é periódica, logo é um número racional. A representação binária do número 1 1/64 é 1,000001; tal número tem uma expansão binária finita, portanto é um número racional. O mesmo acontece com o número 4 7/8, que é representado em notação binária da seguinte forma 100,111.

Podemos também representar os números reais positivos que aparecem na figura 19 utilizando conjuntos. Tais números podem ser representados da seguinte forma:

$\pi = \{$ 11,001; 11,001001; 11,00100100001; ... $|$ ...; 11,0011; 11,01; 11,1$\}$

$e = \{$10,101; 10,1011; 10,101101; ... $|$ ...; 10,11001; 10,1101; 10,11$\}$

$\sqrt{2} = \{$1,01; 1,0101; 1,01010001; ... $|$ ...; 1,01011; 1,1011; 1,1$\}$

1/3 = $\{$0,01; 0,0101; 0,010101; ... $|$ ...; 0,0101011; 0,0111; 0,011; 0,1 $\}$

1 1/64 = $\{$1, 0000001 $|$ 1,00001$\}$

4 7/8 = $\{$100,110 $|$ 100,11101$\}$

CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

1. Aspectos *intensional* e *extensional* de conceitos matemáticos

Finalizando nossa pesquisa queremos ressaltar nosso principal objetivo: investigar uma nova abordagem para a conceituação de números a partir de jogos, mais especificamente a conceituação proposta por Conway. Tal proposta permite contemplar dois aspectos complementares dos conceitos matemáticos, em especial, o conceito de número, quais sejam: *intensional* e *extensional*.

Na conceituação elaborada por Conway, o caráter *extensional* expressa a aplicabilidade da teoria a uma classe de jogos matemáticos, ou seja, possibilita a interpretação dessa teoria a partir de um modelo concreto. O caráter *intensional* da teoria de Conway são seus axiomas iniciais e sua representação por meio de conjuntos, isto é, a teoria formal de Conway, a qual não abordamos no presente trabalho.

Buscamos subsídios para nossa investigação, tanto no contexto histórico-filosófico como no desenvolvimento epistemológico do conceito de número, e percebemos que por quase dois milênios os números foram utilizados como ferramenta para descrever outros conceitos matemáticos. Somente no final do século XIX e início do século XX se tornou objeto de estudo em si. Por exemplo, alguns matemáticos dos séculos XVI e XVII empregavam os números inteiros como soluções falsas de uma equação.

A Aritmética diferentemente da Geometria não foi criada sobre uma base axiomática, isso ocorreu por volta do século XIX. Para tal, foram necessárias mudanças antes da axiomatização dos números. Uma delas trata-se da alteração do caráter e compreensão dos axiomas, que deixam de ser verdades objetivas e intuitivamente claras, para premissas hipotéticas do pensamento. Na outra mudança, os axiomas passam a ser perspectivas formais para um campo de conhecimento que pudessem expressar-se por meio de relações e que a qualquer momento poderiam ser substituídos por outros sistemas axiomáticos.

Como conseqüência, a noção de objeto matemático necessitou também de uma mudança e a axiomatização teve que ser completada por um pensamento de modelos, ou seja, uma teoria matemática, no sentido da Ciência moderna, torna-se um par, um conjunto de axiomas (sistema axiomático) e as possíveis aplicações ou interpretações desse sistema, caracterizando assim a dualidade complementar entre o caráter *intensional* e *extensional* dos objetos matemáticos.

Tal ponto de vista deve levar em conta os aspectos *intensionais* e *extensionais* dos objetos matemáticos. O caráter *intensional* desses sistemas descreve as propriedades e relações de um sistema, são os chamados modelos abstratos, que constroem e fundamentam uma teoria.

Sob os aspectos epistemológicos e cognicista existe a necessidade de interpretação desses sistemas, ou seja, possíveis aplicações ou modelos que interpretam suas leis. Esse ponto de vista está relacionado com o aspecto *extensional* dos objetos matemáticos; em outras palavras, são os modelos concretos de uma teoria. É importante considerar os processos de *matematização*.

Uma teoria é um sistema axiomático ou um conjunto de proposições, já um modelo não é uma entidade lingüística; uma teoria trata de conceitos, ou seja, definições, enquanto um modelo tem objetos. Poderíamos citar como exemplo as figuras geométricas que são modelos concretos, mas não objetos da teoria.

Para alcançar os modelos abstratos teríamos que construir classes de equivalência e para isto precisaríamos da teoria, ou melhor, dos sistemas axiomáticos. Na geometria euclidiana, por exemplo, dois triângulos congruentes são equivalentes e por isso representam o mesmo objeto geométrico e a congruência estabelece os modelos abstratos.

2. A complementaridade e as respostas de correntes filosóficas sobre a natureza dos números

As correntes filosóficas que estudamos fornecem respostas pouco satisfatórias sobre a natureza dos números. Nenhuma delas consegue responder de modo definitivo à questão: o que é número? Como podemos perceber, tais correntes filosóficas, na maioria das vezes, têm uma postura extrema quanto às suas idéias.

O nominalismo é uma corrente filosófica segundo a qual não há entidades abstratas e, mais especificamente, não existem entidades abstratas que possam ser identificadas aos números. Quando tomam tal postura em relação aos números, os adeptos a essa corrente filosófica dão indícios de estar considerando somente o caráter *extensional* dos objetos matemáticos, não levando em conta o caráter *intensional* de tais objetos.

Os nominalistas têm por hipótese que os números são idéias de nossa mente. Para esta posição dos adeptos a essa filosofia não se apresentou justificativa satisfatória. Uma segunda forma de nominalismo está atrelada a entidades físicas; isso, segundo os nominalistas, transformaria os números em algo perceptível. Nenhuma das duas maneiras pelas quais o nominalismo interpreta os axiomas da teoria dos números os transforma em verdadeiros, literalmente falando. E essa segunda forma de interpretar a teoria dos números parece reforçar os indícios de uma característica unicamente *extensional* dos números.

O mesmo acontece com o conceitualismo e mais especificamente com o intuicionismo. Essa doutrina parece também não levar em conta a necessidade de uma aproximação complementar. Quando atribui aos objetos concretos as características dos números, parece dar indícios de acreditar apenas na noção *extensional* dos objetos matemáticos, quando confere aos números a necessidade de uma existência concreta, ou seja, algo perceptível, acreditando ainda que a pura intuição da contagem seria o ponto de partida para a Matemática dos números. Essa doutrina é muito vaga e discutível e, além disso, conflita com uma parte relativa da Matemática clássica.

Já o realismo, diferentemente das correntes anteriores, acredita que existem, realmente, quaisquer entidades citadas nos axiomas e teoremas da teoria dos números. Dessa forma, parece fornecer uma resposta que leva somente em conta as características *intensionais* dos objetos matemáticos. Nela há a crença de que os matemáticos podem ser os criadores de quaisquer leis, comparando seu poder de criação ao da divindade, liberando assim a construção de um matemático das possíveis interpretações ou aplicações de uma teoria. Tal ponto de vista parece dar indícios de apenas considerar os modelos abstratos de uma teoria, sem dar a menor importância aos modelos concretos. Isso parece reforçar o caráter *intensional* dos objetos matemáticos.

Portanto, como podemos ver, nenhuma dessas correntes filosóficas nos fornece respostas coerentes e satisfatórias que contemplem os aspectos complementares do conceito de número, bem como sobre a natureza deste.

3. A utilização de jogos na conceituação de números

As pesquisas em Educação Matemática, investigadas por nós, apontam as vantagens na utilização dos jogos como instrumento pedagógico, tanto para construção como para o resgate de conceitos e habilidades matemáticas.

Vamos fazer algumas considerações para melhor delimitar a perspectiva dos jogos no ensino da Matemática, e mais especificamente na conceituação de números e, além disso, ressaltar aspectos que, para nós, são de fundamental importância para tal abordagem.

O conhecimento matemático apresenta uma lógica própria de elaboração. Tal lógica se revela essencialmente relacional, o que significa que o conhecimento matemático tem por objeto essencialmente relações.

O desafio que se apresenta no ensino da Matemática é elaborar seqüências de ensino-aprendizagem que criem condições efetivas para que os estudantes se apropriem dessa lógica das relações, ou seja, que eles aprendam os conceitos, como relações.

Segundo Jardinetti (1996, p. 52), as abstrações podem se revelar concretas no momento em que possibilitem a elaboração de procedimentos que traduzam um sistema, que o englobem e que dêem sentido às abstrações. Em tais sistemas, as abstrações não seriam compreendidas enquanto abstrações vazias e desvinculadas de qualquer relação.

Os conceitos podem se apresentar aos estudantes repletos de significação, se forem originados de uma metodologia que permita uma instrumentalização lógica e eficaz para apreensão dos aspectos relacionais implícitos nos conceitos.

A eficácia de determinado jogo para a conceituação de número está na sua necessidade de encarnar as propriedades lógicas do conceito. Sem isso um determinado jogo pode se revelar uma abstração vazia de significado, tal atividade pode ser desviada do objetivo central que a justifica.

Exatamente sob essa perspectiva, mostram-se essenciais à complementaridade dos aspectos matemáticos, além dos sistemas axiomáticos, possíveis aplicações desses sistemas, ou seja, modelos que traduzam seus processos lógicos e possibilitem que suas relações sejam carregadas de significados.

As pesquisas investigadas neste trabalho apresentaram as vantagens na utilização dos jogos, como ferramenta pedagógica na conceituação dos números.

Entretanto, a teoria de Conway não se reduz a uma ferramenta pedagógica ou a uma metodologia. Tal teoria permite conceituar os números a partir de um processo de matematização. A aplicabilidade dessa teoria a certas classes de jogos possibilita explicitar as propriedades e a lógica que constituem a conceituação dos números.

Além disso, possibilita a conceituação dos números naturais aos reais de forma única. As duas teses por nós investigadas se mostraram eficazes, mas abordaram apenas duas categorias de números, quais sejam: os números naturais e os inteiros.

O livro de Giménez e Bairral tem como objetivo conceituar apenas as frações. As propostas desses pesquisadores também se mostraram vantajosas, segundo os resultados das pesquisas desenvolvidas por eles, mas abordam uma única categoria de números.

Não queremos aqui desqualificar qualquer das pesquisas citadas por nós, muito pelo contrário, somos adeptos a suas abordagens. Estamos apenas apontando as possíveis vantagens que podem ser exploradas em futuras pesquisas utilizando a teoria de Conway.

Finalizando nosso trabalho, queremos ressaltar a necessidade do desenvolvimento de pesquisas utilizando jogos na construção de conceitos matemáticos, e mais especificamente o conceito de números, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior, principalmente nas Licenciaturas em Matemática.

Ao longo do desenvolvimento de nossa pesquisa não encontramos investigações que utilizassem a perspectiva de jogos na construção de conceitos matemáticos nesses níveis de ensino.

BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BARKER, S. F. *Filosofia da matemática*. Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

BERLEKAMP, E. R.; CONWAY, J. H.; GUY, R. K. *Winning ways for your mathematical plays*. 2. ed. Massachusetts: A. K. Peters, 2001.

BOUTON, C. L. *Nim, a game with a complete mathematical theory*. Annals of *Mathematics*, ser. II, v. 3, n. 1, p. 35, 1901.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. Revisão de Uta C. Merzbach. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BROLEZZI, A. C. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática*. 1996. Tese (Doutorado em Educação) –Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CONWAY, J. H. *On numbers and games*. 2. ed. Massachusetts: A. K. Peters, 2001.

———; GUY, R. K. *O livro dos números*. Tradução de José Sousa Pinto: Lisboa: Gradiva, 1999.

COSTA, L. de Q. *Um jogo em grupos co-operativos. Alternativa para a construção do conceito de números inteiros e para abordagem dos conteúdos*: *procedimentos, condutas e normas*. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, São Paulo.

DIAS, M. S. *Reta Real*: *conceito imagem e conceito definição*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética*. Tradução, prefácio e notas de Antônio Zilhão. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional; Casa da Moeda, 1992.

GARDNER, M. *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*. Tradução de Luis Bou Garcia. Barcelona: Labour, 1985.

GIMÉNEZ, J.; MARCELO, B. *Frações no currículo do Ensino Fundamental*: conceituação, jogos e atividades lúdicas. Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação matemática – Gepem. Rio de Janeiro: Edur, 2005. v. 2. (Série Pensamento em ação.)

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, São Paulo.

HALMOS, P. R. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Polígono, 1970.

HESSEN, J. *Teoria do conhecimento*. Tradução de João Vergílio Gallerani Cuter. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. *Concepções dos alunos sobre os números reais*. In: LAUDARES, João Bosco (Org.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, 2001.

JARDINETTI, J. R. B. *Abstrato e Concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões*. Boletim de Educação Matemática. Rio Claro-SP: UNESP: Bolema, ano 11, n. 12, p. 45-57, 1996.

KNUTH, D. E. *Números surreais*. Tradução de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Gradiva, 2002.

LIMA, E. L. *Análise real*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. v. 1.

MARANHÃO, M. C. S. de A. *Matemática*. São Paulo: Cortez, 1991. (Coleção Magistério 2.º grau – Série Formação geral).

NETO, J. P.; SILVA, J. N. *Jogos matemáticos. Jogos abstractos*. Lisboa: Gradiva, 2004.

NUNES, T.; BORBA, R. E. S. R. *Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo*. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo: EDUC, v. 6, n. 1, p. 73-100. 2004.

OTTE, M. *B. Russell's "introduction to mathematical philosophy"*. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo: EDUC, v. 3, n. 1, p. 11-55, 2001a.

———. *Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico*. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: EDUC, vol. 3, n. 2, 2001b. p. 11-58.

———. *Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico*. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo: EDUC, v. 5, n. 1, p. 13-55, 2003a.

———. *Complementarity, Sets and Numbers*. Educational Studies in Mathematics. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. vol. 53, 2003b. p. 203-228.

POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Revisão técnica de Ildeu de Castro Moreira. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995. p. 13-25.

ROBBINS, Herbert; COURANT, Richard. *O que é matemática?*. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

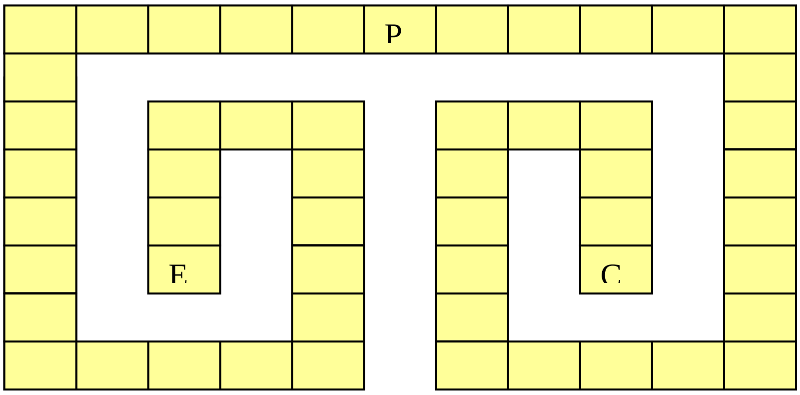
TALL, D.; PINTO, M. *Stundent teacher's conceptions of the rational numbers*. Published in Proceedings of PME 20, Valencia, v. 4, p. 139-146, 1996.

TABULEIRO DO JOGO CONTIG 60®

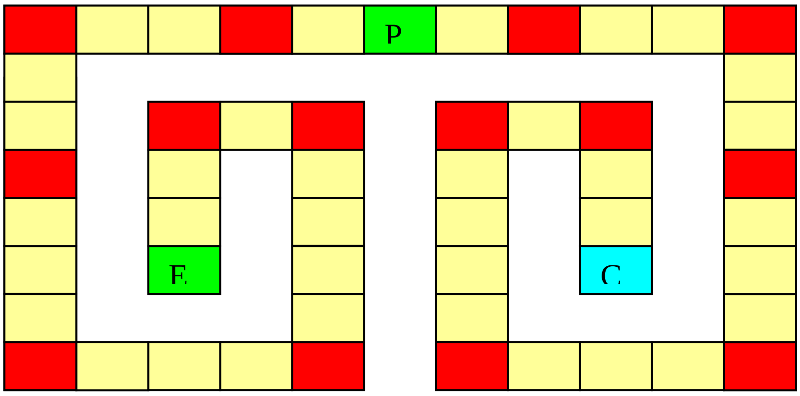
0	1	2	3	4	5	6	7
27	28	29	30	31	32	33	8
26	54	55	60	64	66	34	9
25	50	120	125	144	72	35	10
24	48	108	180	150	75	36	11
23	45	100	96	90	80	37	12
22	44	42	41	40	39	38	13
21	20	19	18	17	16	15	14

MALUCO POR INTEIRO – PRIMEIRA FASE

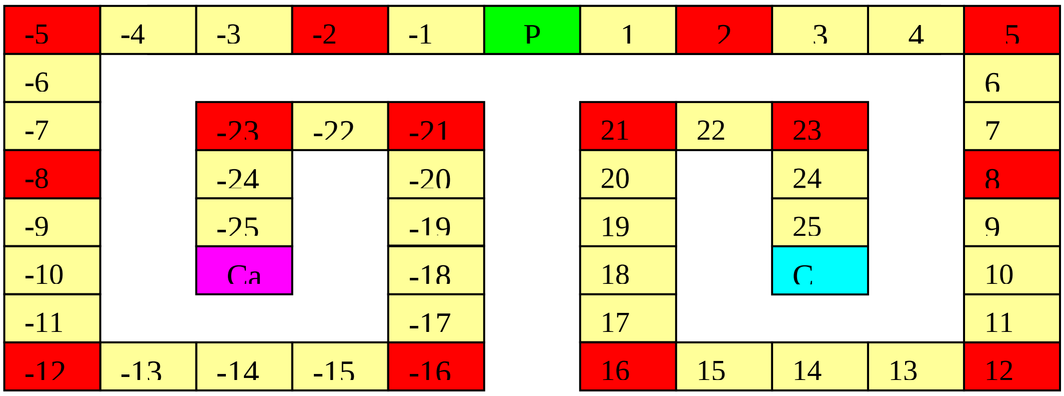
P = partida
E = espera
C = chegada
Ca = castigo



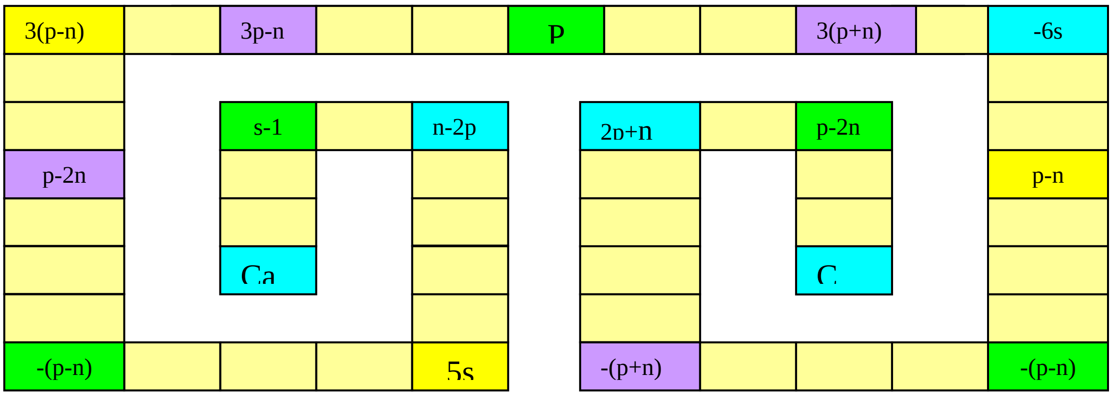
MALUCO POR INTEIRO - SEGUNDA FASE



MALUCO POR INTEIRO – TERCEIRA FASE



MALUCO POR INTEIRO - QUARTA FASE



MALUCO POR INTEIRO - QUINTA FASE