PEDRO MATEUS

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NOS LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE DO POTNO DE VISTA DA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

PEDRO MATEUS

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NOS LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE DO POTNO DE VISTA DA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.***

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** _______________

Dedico este trabalho a *Lewis* e *Sinclair*,
sinal de meu crescimento

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos sinceros a todos os que, direta ou indiretamente, me apoiaram para que este trabalho fosse produzido.

À *Fundação Ford,* o meu reconhecimento por ter proporcionado apoio financeiro para que os estudos fossem possíveis;

À Dra. Célia Maria Rodrigues Diniz, representante do The Africa-America Institute, em Moçambique, meus reconhecimento e agradecimentos por ter-me enquadrado no programa de pós-graduação e apoiado moralmente.

A todos colegas que estudaram comigo na PUC durante os quatro semestres do curso, que tão valiosas foram as suas contribuições e trocas de idéias para que este trabalho fosse uma realidade; em particular: Benedita Tojo, António Borges, Irene C. R. Prestes, Maria Helena do Amaral, Ednaldo e Celso.

Agradecimento especial vai para meu orientador, Professor Doutor Saddo Ag Almouloud pela orientação do trabalho, incentivo moral e confiança para que este trabalho fosse desenvolvido.

Aos Professores Doutores João e Benedito A. Silva por aceitarem participar da banca examinadora, além das críticas e contribuições inestimáveis que determinaram, em grande medida, a concretização deste trabalho.

Aos Professores Doutores Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Maria Inez Rodrigues Miguel, Maria José Ferreira da Silva, Sandra Magina, Ana Paula, Janete Bolite Frant, Leila Z. Puga, Maria Cristina S. de A. Maranhão, Sonia B. C. Igliori, Laurizete F. Passos, Sônia P. Coelho, Célia M. C. Pires, Vincenzo Bongiovanni e

Ubiratan D’Ambrósio que tanto me encorajaram para que me sentisse da PUC em casa;

À minha esposa Rosa Mapsuca Muchanga e aos meus filhos Lewis, Sinclair e Marlen pelo apoio incondicional para a realização deste trabalho e pelos momentos de suas vidas que não pude estar presente;

Ao meu colega Salvador Amosse, com quem partilhei as vivências do dia a dia em São Paulo;

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Pedagógica (UP) – Beira pelo encorajamento para os estudos que culminaram com este trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa tem o objetivo de analisar e compreender melhor como atualmente os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são tratados em alguns livros didáticos disponíveis. A discussão é feita sobre o Cálculo Diferencial e Integral por considerá-lo uma área da Matemática que tem dado grande contributo para o progresso científico e tecnológico. O trabalho focaliza a análise do livro didático pela importância de que ele se reveste na ação do professor em sala de aula do Cálculo Diferencial e Integral e por constituir uma fonte de conhecimento do aluno.

A pesquisa assenta-se nas hipóteses de que alguns dos fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão diretamente relacionados com a organização didático-matemática dos livros didáticos do Cálculo Diferencial e Integral; analisar esta organização praxeológica dos livros didáticos pode reforçar a compreensão das causas de dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e propiciar algumas atitudes tendentes à sua utilização correta e criativa. A questão de pesquisa é: o que é que os livros didáticos disponíveis sugerem quanto à construção de conceitos e estratégias de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral? As bases teóricas foram a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1977). A primeira teoria serviu para avaliar o grau de articulação entre os registros de representação semiótica usados nos livros selecionados, a segunda serviu para analisar o tipo de tarefas, técnicas e o discurso teórico-tecnológico que as justifica; a terceira teoria serviu para avaliar os contextos criados na exposição do conteúdo matemático. Os resultados apontam que a articulação entre os registros de representação semiótica é débil, pois há preferência do uso de registros algébricos e seus tratamentos em vez de promover a articulação com a conversão entre os registros; trabalha-se mais sobre o bloco prático-técnico do que a combinação entre o bloco prático-técnico e o bloco tecnológico-teórico; a exposição formal do conteúdo é a predominante em vez da contextualização como fio condutor das idéias para a formalização.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático, Teoria das Situações Didáticas, Teoria de Registros de Representação Semiótica, o livro didático.

ABSTRACT

This research aims at analysing and better understanding how currently the concepts of Differential and Integral Calculus are dealt with in some available text-books. The discussion is related with Differential and Integral Calculus because we consider them as a branch of mathematics with enormous contribuition for scientifical and technological progress in our society. The research focuses on text-books analysis because of their outstanding role on teacher's activities in classroom of Differential and Integral Calculus on one hand, and they are source of knowledge for pupil, on another hand. The work is based in the hypotheses that some interfering factors in teaching and learning Differential and Integral Calculus are directly related to the way the text-books of Calculus are organized in didactical and matehmatical terms. Analysing this praxeological organization of text-books may strengthen understanding the causes of difficulties in teaching and learning Differential and Integral Calculus in classroom and may create a sound base to use them correctly and with some initiative. The research question is: what do the available text-books suggest to build the concepts and strategies for teaching and learning Differential and Integral Calculus? The theoritical framework was based on Registers of Semiotic Representation Theory of Duval (2003), the Anthropological Theory of Didactics of Chevallard (1999) and the Theory of Didactical Situations in Mathematics of Brousseau (1970-1990). The first theory served to evaluate the joint degree of registers of semiotic representation used in selected text-books, the second theory was used to analyze the types of tasks, techniques and technological and theoritical discourse whic justifies them. The third theory was used to evaluate the contexts set to expose the mathematical content. The results point out that the joint degree of registers of semiotic representation is weak, because there is preference to use algebric registers and their treatments instead of promoting articulation with conversions of registers; more posed activities are on practical-technical bloc than balancing with technological-theoritical bloc; formal exposition of content is predominant one, instead of taking the contextualization as a thread of ideas to get the formalization.

Key-words: Anthropological Theory of Didactics, Theory of Didactical Situations, Registers of Semiotic Represetantion Theory, the text-book.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 16
CAPÍTULO 1. Problematização 19
1. 1 Revisão bibliográfica 19
1. 2. Questão da pesquisa 39
1. 3. justificativa 40
1. 4. Hipóteses da pesquisa 41
1. 5 Procedimentos metodológicos 42
1. 6 Estudos realizados sobre a análise de livros didáticos 43
CAPÍTULO 2. Fundamentação teórica 45
2. 1. Teoria de Registros de Representações Semióticas. 46
2. 2. Teoria Antropológica do Didático 52
2. 3. Teoria das Situações Didáticas 58
CAPÍTULO 3. Considerações históricas e epistemológicas do Cálculo Diferencial e Integral 61
3. 1. A coroação dos resultados de esforços seculares: Newton e Leibniz79
3. 1. 1. Isaac Newton 80
3. 1. 2. Gottfried Wilhelm Leibniz 84
3. 2. Outros passos em frente: aperfeiçoamento e o rigor 87
CAPÍTULO 4. Análise dos livros didáticos 97
4. 1. Os livros selecionados 99
4. 2. Análise dos livros 100
4. 2. 1 Análise da organização didática dos livros selecionados. 101
4. 2. 2. Discussão dos resultados da organização didática dos livros selecionados 111
4. 2. 3. Descrição e análise da organização matemática dos livros selecionados 115
4. 2. 4. Algumas constatações da organização matemática dos livros selecionados 150

CAPÍTULO 5. Análise e interpretação dos resultados do estudo dos livros selecionados segundo o referencial teórico e a literatura revista 152
5. 1. Os resultados e sua discussão 153
CAPÍTULO 6. Conclusões da pesquisa 171
6. 1 Os principais resultados em relação às hipóteses da pesquisa 171
6. 2 O quadro teórico e a emergência de tendências. 173
6. 3 Algumas Reflexões e Sugestões 178
CAPÍTULO 7. Bibliografia 183

LISTA DE FIGURAS

Figura nº 1: Visualização geométrica da relação derivada-integral 27
Figura nº 2: Relação primitiva-função derivada...29
Figura nº 3: Reta tangente como limite das secantes 31
Figura nº 4: Integral definida como área sob o gráfico 33
Figura nº 5: Interpretação geométrica da diferencial. 35
Figura nº 6: Diferencial como área, segundo Simmons 36
Figura nº 7: Modelo do Oresme para a descrição do movimento 64
Figura nº 8: Stevin procurando o centro de gravidade de um triângulo. 65
Figura nº 9: Capa do livro de Cavarieri sobre os indivisíveis 66
Figura nº 10: Indivisíveis no Conóide 66
Figura nº 11: A representação de indivisíveis segundo Wallis 68
Figura nº 12: Relação entre as áreas do triângulo e do retângulo da mesma base e da mesma altura 69
Figura nº 13: Relação entre os volumes do conóide e do cilindro correspondente (circunscrito) 70
Figura nº 14: áreas sob o gráfico segundo Wallis 70
Figura nº 15: área sob o gráfico da hipérbole segundo Fermat 71
Figura nº 16: método das tangentes de Descartes. 73
Figura nº 17: método da tangente de Fermat...74
Figura nº 18: Roberval e o método da tangente...75
Figura nº 19: A relação entre integração e diferenciação segundo Torricelli e Barrow 76
Figura nº 20: Quadratura segundo Torricelli. 77
Figura nº 21: Método de construção da tangente segundo Torricelli. 77
Figura nº 22: Isaac Barrow e o Teorema Fundamental do Cálculo. 79
Figura nº 23: Newton e a relação entre a derivada e a integração 82
Figura nº 24: Leibniz explorando a relação entre a diferenciação e a integração 84
Figura nº 25: Leibniz, visualizando os conceitos de base da diferenciação e da integração. 86

Figura nº 26: Representação dos declives de uma função em certos pontos de seu gráfico 117
Figura nº 27: Determinação experimental do gráfico da função declive..................117
Figura nº 28: O declive da tangente como limite do declive das secantes. 120
Figura nº 29: A inclinação de uma função em um ponto 121
Figura nº 30: Declive da tangente como inclinação da função no ponto de tangência. 121
Figura nº 31: Visualização da não existência da derivada em um ponto anguloso. .123
Figura nº 32: Visualização da não existência do coeficiente angular para a reta vertical..123
Figura nº 33: Situação de introdução à antidiferenciação 131
Figura nº 34a) A área da região sob o gráfico de *f* em [0, 1] em a) é aproximada pela soma das áreas dos quatro retângulos em b). 135
Figura nº 34b) Quando n cresce, o número de retângulos cresce, e a aproximação se torna melhor. 135
Figura nº 35: A área da região sob o gráfico de *f* em [a, b] em (a) é aproximada pela soma dos n retângulos mostrados em (b). 135
Figura nº 36: Integral definida como diferença de áreas 137
Figura nº 37: curva de uma função demanda 142
Figura nº 38 : Aproximando o excedente de consumo pela soma de retângulos.....143
Figura nº 39: Excedente de produção 144
Figura nº 40: Análise do comportamento da função e o esboço do gráfico usando o sinal da função derivada 161
Figura nº 41: Representação gráfica de uma função e sua primitiva 161
Figura nº 42: Gráfico para uma possível interpretação como primitiva ou como derivada. 162
Figura nº 43: Visualização geométrica da relação derivada-integral.......................167
Figura nº 44: Representação dos declives de uma função em certos pontos de seu gráfico 168
Figura nº 45: Determinação experimental do gráfico da função declive..................169

LISTA DE QUADROS

Quadro nº 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático 47
Quadro nº 2: Resultados da descrição e análise da organização didática dos livros 110
Quadro nº 3: Organização matemática dos livros estudados..................................148

LISTA DE TABELAS

Tabela nº 1: Articulação entre os registros de representação semiótica nos livros analisados. 153
Tabela nº 2: Gêneros de tarefas encontrados nos livros analisados 156
Tabela nº 3: Demonstração versus apresentação da técnica nos livros analisados. 156
Tabela nº 4: Problemas (abertos) requerendo equacionamentos 165

ESQUEMA

Esquema: A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão – dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas. 48

INTRODUÇÃO

Na nossa prática docente, tivemos oportunidade de discutir diversos assuntos relacionados com o Cálculo Diferencial e Integral. Nas discussões, fomos constatando que existiam dificuldades por parte de nossos alunos (futuros professores) na utilização dos conceitos aprendidos, particularmente no tratamento do Teorema Fundamental do Cálculo na sua forma geométrica, quer dizer, dado um gráfico da primitiva para produzir o da derivada e vice-versa. Outra experiência com o assunto foi sendo obtida durante o acompanhamento dos nossos formandos nas práticas pedagógicas nas escolas do ensino médio em Moçambique. Nas atividades práticas, os formandos tinham que discutir com os alunos da escola secundária, entre outras coisas, alguns assuntos do Cálculo Diferencial e Integral. Nessas discussões fomos observando que na maioria dos casos as aulas eram centradas no professor, levando muito tempo a apresentar o conteúdo no quadro preto (lousa) e sempre em contextos formais. E nós como acompanhantes do processo, tínhamos que dar algumas sugestões na condução das aulas. As nossas sugestões eram limitadas, pois não estávamos muito claros sobre o que realmente devia ser feito para mudar o curso do processo. Portanto, as nossas sugestões não podiam contribuir o suficiente para melhorar o processo de ensino. E as dificuldades dos alunos secundários eram visíveis: dificuldades de aplicação das fórmulas aprendidas. Essas dificuldades acentuavam-se quando fosse para resolver um problema de contexto fazendo uso de noções do Cálculo Diferencial e Integral. Assim, refletindo sobre este processo de ensino que estava sendo implementado, fomos conjeturando que:

- era colocada ênfase na memorização dos fatos e não na compreensão. Os alunos eram levados a memorizar algoritmos sem compreender as propriedades e a lógica envolvida na técnica visada; memorizavam os processos de resolução de problemas dados como exemplos, mas sem desenvolver as suas próprias estratégias de solução;

- procurava-se chegar rapidamente à formalização, sem grandes momentos de reflexão sobre as diferentes fases da construção das fórmulas e sem apelo à participação ativa dos alunos.

Dessa situação, começamos a tirar algumas lições no sentido de que um treino isolado e, de certa maneira, mecanizado de termos matemáticos, fatos e procedimentos, não ajuda os alunos a compreender o que é o Cálculo Diferencial e Integral, não se constitui num pré-requisito para o desenvolvimento de capacidades ligadas ao raciocínio e à resolução de problemas e nem sequer garante que os alunos sejam capazes de utilizar na prática os conhecimentos adquiridos na escola.

O presente trabalho resulta dessa reflexão, procurando encontrar alguns fatores que contribuem para tal prática tecnicista, por um lado e, por outro, alternativas didáticas capazes de engajar o aluno num processo de uma aprendizagem consciente do Cálculo Diferencial e Integra.

O trabalho é composto de 7 capítulos. No capítulo 1 fazemos a problematização da questão da pesquisa a partir de uma revisão bibliográfica dos estudos realizados sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e também os estudos sobre a análise de livros didáticos; apresentamos a questão levantada da pesquisa, sua justificativa, as hipóteses do trabalho e os procedimentos metodológicos.

No capítulo 2, fazemos a fundamentação teórica do estudo, baseada principalemte em três teorias: a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1970-1990).

No capítulo 3, faz-se uma análise histórico-epistemológica do Cálculo Diferencial e Integral, na qual se constata que a sua evolução seguiu um caminho longo e com muitas dificuldades de conceituação e representação até chegar à forma atual. Os trabalhos de Newton e Leibniz ocupam uma posição de destaque nessa caminhada histórica pois estes trabalhos estabeleceram modelos concisos, explícitos e gerais para lidar com o Cálculo Diferencial e Integral.

O capítulo 4 faz uma descrição e análise dos livros didáticos selecionados para o efeito. A análise focaliza o tipo de tarefas que os livros escolhidos sugerem para construir as noções do Cálculo Diferencial e Integral, as técnicas usadas para resolver as tais tarefas e as justificações que são fornecidas para essas técnicas. Esta análise é feita segundo a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999), e ao mesmo tempo, com alguma consideração sobre as representações semióticas usadas e o contexto das situações didáticas sugeridas.

O capítulo 5 faz uma análise e uma interpretação dos resultados do estudo dos livros didáticos selecionados à luz das três teorias de aprendizagem, que fundamentam o estudo, apresentadas no capítulo 2 e da literatura revista.

O capítulo 6 é dedicado às conclusões do estudo

O capítulo 7 apresenta a bibliografia usada no estudo.

CAPÍTULO 1. PROBLEMATIZAÇÃO

1. 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os PCNEM (1999, p. 111 – 112) apontam que, em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas de conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida quotidiana, ou ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. Os tais documentos realçam a questão nos seguintes termos:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino da matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (PCNEM, 1999, p. 112).

Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos, o que se traduz na construção de uma atitude de perseverança na busca de soluções.

A problematização contextualizada, articulada com outras disciplinas e conhecimentos prévios do aluno, é um importante campo de significados, ou seja, uma fonte que pode contribuir para um aprendizado mais significativo do ponto de vista do aluno, tendo como meta o desenvolvimento integral do homem caracterizado pelo domínio das formas de representação e comunicação; investigação e compreensão, marcadas pela capacidade de enfrentamento e resolução de problemas e análise crítica de dados. Bosch et al. (2004c) apontam que a resolução de uma questão problemática sempre produz muito mais conhecimentos do que uma simples produção de respostas pois, nesse processo surgem novos problemas, novas técnicas e novo discurso teórico-tecnológico bem como um rearranjo do conhecimento anterior. Portanto, aprender matemática consiste em tentar resolver questões problemáticas usando técnicas e elementos teóricos conhecidos para elaborar novas técnicas, novas explicações e justificações dessas técnicas.

A história mostra-nos que o homem se desenvolveu graças a uma luta permanente com o meio para sua sobrevivência. Gomide (1996), na apresentação da 2ª edição do livro de Boyer, escreve: "*tudo o que já nos parece trivial, agora que sabemos alguma coisa, custou esforço, erros, tentativas até que um resultado foi construído*." Portanto, nessa luta acumularam-se muitas experiências matemáticas que se constituíram num corpo organizado de informações que hoje é o conhecimento matemático. Esse conhecimento é objeto de ensino e aprendizagem na escola. A nossa esperança é de que esta prática de ensino e aprendizagem se traduza em competências e habilidades que facilitem a resolução de problemas com os quais nos deparamos e que também, deve aguçar o espírito criativo e o desenvolvimento intelectual dos que aprendem para dar resposta a novas situações que o nosso desenvolvimento contínuo exige.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma área da matemática que tem dado grande contributo para o progresso científico. Segundo Franchi (1993, p. 14) a ciência é uma forma de conhecer e explicar o mundo. O Cálculo Diferencial e Integral (associado a outros conhecimentos científicos) facilita a compreensão do mundo, tecnologicamente desenvolvido e a sua apropriação pelo indivíduo. A origem do Cálculo Diferencial e Integral mostra-nos o caráter de linguagem (e ao mesmo tempo de instrumento) que ele tem. Seus precursores, desde a época dos gregos procuravam compreender e explicar a natureza, e as idéias de Cálculo Diferencial e Integral foram, muitas vezes, recursos usados como linguagem. Segundo Franchi (ibid, p. 17) a partir da linguagem de Cálculo dá-se grande desenvolvimento na ciência como um todo, observando-se avanços significativos na Física, Engenharia, Astronomia, entre outros.

No prefácio do livro de Boyer (1949), Courant reitera a importância científica do Cálculo Diferencial e Integral. Para ele, o Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática em geral são uma das grandes conquistas da mente humana, e seu lugar entre as ciências humanas e naturais, faz dele um meio peculiar da educação superior.

A importância conferida ao Cálculo Diferencial e Integral faz com que ele tenha algum lugar nos currículos de ensino, quer a partir do ensino secundário para alguns países como Moçambique (segundo nossa experiência) e França (segundo Artigue 1991, p. 173), quer a partir da Universidade, que é o caso do Brasil, tal como a Vianna refere:

> O curso de Cálculo é usualmente o primeiro curso em matemática que os alunos encontram na universidade. É, portanto, muito importante que os alunos formem conceitos corretos das idéias matemáticas nesta área, algumas das quais envolvendo alto grau de generalização e abstração. O curso de Cálculo pode ser também considerado o primeiro encontro que o aluno tem com o raciocínio dedutivo fora do contexto da Geometria Euclidiana. (VIANNA, 1998, p. 11).[1]

Não obstante sua importância e presença nos currículos, o Cálculo Diferencial e Integral é uma das disciplinas que provocam muita inquietação no processo de ensino e aprendizagem da matemática, caracterizada, principalmente pelo ensino tecnicista (centrado nas técnicas) e uma aprendizagem mecânica (caracterizada pela memorização dos fatos matemáticos sem a devida compreensão). Essa situação tem gerado diversas pesquisas em Educação Matemática, envolvendo muitos atores, entre os quais nos referimos de Sad (1998), Artigue (1991), Vianna (1998), Franchi (1993), Araújo (2002) e Villarreal (1999). As pesquisas procuram identificar a especificidade dos problemas relacionados com o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e algumas formas alternativas de os abordar.

Araújo (2002, p. 2) na sua tese de doutorado investiga “as discussões que ocorrem entre alunos de Cálculo Diferencial e Integral I quando estão desenvolvendo

[1] Tradução nossa

projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais", na seção que ela intitula "A Prática Docente Provocando Questionamentos", identifica a natureza de alguns problemas que são motivo de inquietação:

> Trabalhei com a disciplina Cálculo I por 4 semestres. Desde o início, minha preocupação com a disciplina foi aumentando: era fácil perceber a existência de um grande número de problemas envolvendo os alunos, os professores, o conteúdo trabalhado, a metodologia de ensino usada, etc.. Os problemas se manifestavam de várias formas, como por exemplo, no grande número de reprovações e desistências na disciplina, no desinteresse dos alunos e na falta de ânimo dos professores. Isso fazia com que os problemas se tornassem mais intensos, levando à paralisação de alguns professores ou, em um extremo oposto, à busca de ações de outros, visando à alteração da situação problemática. (ARAÚJO, 2002, p. 2)

A autora continua:

> A prática comum é a seguinte: "estudam-se" derivadas e "aplicam-se-as" em problemas da taxa de variação, "estudam-se" máximos e mínimos de uma função, que são "aplicados" em problemas de máximos e mínimos e, assim, sucessivamente, durante todo curso. Mas esse tipo de aplicação parecia não fazer sentido para grande parte dos alunos. Esperava-se que lessem um problema, dado pelo professor ou pelo livro-texto. ... O professor, por sua vez, se desdobrava, tentando "ensinar" como um problema devia ser tratado, sem na maioria das vezes, obter sucesso. (ARAÚJO, 2002, p. 2)

E, no decurso da pesquisa, é notável que a negociação de significados a que ela se propõe a desenvolver com os alunos, num ambiente computacional, às vezes, se esbarra com a dificuldade de abertura para o desenvolvimento pleno de interações. A pesquisadora interpreta isso como sendo

> ... conseqüências de características dos contextos nos quais as atividades são realizadas. Normalmente, nas salas de aula de matemática, o padrão de comunicação é aquele característico do absolutismo da sala de aula, no qual o professor e aluno têm seus papéis bem definidos: o professor explica a matéria, designa tarefas, corrige exercícios, enfim, é ele que direciona todos acontecimentos; o aluno faz exercícios, responde às questões colocadas pelo professor e só se manifesta quando lhe é permitido. Além disso toda escola está organizada de tal forma a dar suporte para esse absolutismo: existe um programa a ser cumprido dentro de um prazo. (ARAÚJO, 2002, p. 154)

Sad (1998), na sua tese de doutorado sobre “Uma abordagem Epistemológica de Alguns Aspectos” do Cálculo Diferencial e Integral, expressa-se nos seguintes termos sobre as dificuldades similares de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral:

> As dificuldades que permeiam o ensino e aprendizagem das noções fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral são questões que, em diferente intensidade, têm correlações com outros problemas, inclusive de ordem não epistemológica. O convívio nas salas de aula dos mais variados cursos que necessitam esta parte da matemática nos coloca em contato direto com essas dificuldades que são também denunciadas no índice de reprovação e de desistência que marca esta disciplina no início dos cursos nos quais é ministrada. (SAD, 1998, p. 10).

Os dados de pesquisa de campo reportados na tese da autora provém de quatro fontes:

1. entrevistas individuais gravadas em audio ou filmadas em audiovisuais com professores e com uma estudante do Cálculo I, que já havia cursado esta disciplina pela Engenharia e pela Matemática;
2. gravações de grupos de alunos em atividade em sala de aula de Cálculo;
3. observações escritas (caderno de campo);
4. soluções escritas de problemas.

Estes dados mostram que existem diferentes formas de produção de significados a partir do Cálculo Diferencial e Integral, tal como a autora refere na conclusão:

> Destacamos como resultado central da pesquisa de campo a confirmação da existência de diversos modos de produção de significados a partir do Cálculo e, juntamente a esses, quais as estipulações locais predominantes. A análise epistemológica dos dados, tendo por base o MTCS, mostrou que o ponto principal desse resultado central é a produção de objetos diferentes a partir do Cálculo, não apenas objetos de aparências diferentes. A fonte dessa conclusão está nos discursos, nas falas colhidas, as quais aparecem na forma de afirmações distintas a partir de um mesmo texto.

> Nesse sentido, temos nas entrevistas com os professores, um indicativo de que na defesa natural e necessária de uma unicidade a respeito de noções ou objetos do Cálculo, os professores tendem a esquecer a pluralidade dos modos de produção de significados e a importância disso para novas relações, novas descobertas e criações. (SAD, 1998, p. 296).

Sugerimos que a expressão estipulações locais, referida na citação anterior seja interpretada como Campo Semântico (sem precisar de detalhes como aparece no texto original).

A citação anterior evidencia que há situações cruciais a que não se presta a devida atenção no ensino, caracterizadas pela falta do ambiente em que o aluno discute e procura significados no que aprende. Para a autora, o sujeito ao falar constitui-se e produz seus significados, objetos e conhecimentos. Assim, a aprendizagem está ligada não à transmissão de conhecimentos, mas sim, à produção de significados pelo sujeito das enunciações (fala intencional).

Vianna (1998, p. 24) no seu trabalho de doutorado examina a compreensão dos alunos do Teorema Fundamental do Cálculo, identifica problemas parecidos aos identificados anteriormente e sua origem:

> O limite é considerado como ferramenta poderosa que vai permitir ao aluno resolver problemas que, sem o qual a resolução seria aproximada. Ele constitui também a base sobre a qual as definições de continuidade, derivada e integral de uma função se fundamentam. (VIANNA, 1998, p. 24).[2]

E referindo-se a trabalhos de Tall e Vinner (1991), Orton (1983a), Heid (1988) e Cornu, (1991) a autora escreve:

> De diferentes maneiras, estes autores anotam que o ponto de vista dinâmico de que um limite se aproxima cada vez mais pode conduzir os alunos a interpretarem o limite como um processo, não como um número ... os alunos podem ser capazes de avaliar limites que resultarão em números, mas esta habilidade parece dissociada nas suas mentes de um ponto de vista de limite. ... (VIANNA, 1998, p. 24).[3]

[2] Tradução nossa

[3] Tradução nossa

Para a autora, esta maneira de ver a noção de limite irá afetar diretamente a interpretação dos alunos das definições de uma derivada e de uma integral definida.

Referindo-se aos trabalhos de Orton (1983b) e Heid (1988) a autora destaca que entre os resultados por eles obtidos, uma parte é relacionada com a associação de uma derivada com o declive de uma reta tangente. Os alunos têm uma grande dificuldade em compreender a tangente como limite de uma sucessão de secantes; o que eles pensam é que "as linhas se tornam cada vez mais curtas". Este resultado é partilhado por Artigue (1991, p. 177). As derivadas são interpretadas como as aproximações de declives de retas tangentes em vez de as interpretar como iguais aos próprios declives. Ainda referindo-se a Orton (1983a), a autora considera que em relação à associação da integral com a soma de Riemann há um problema similar: ao analisar uma seqüência de somas, cujo limite é a área sob uma curva, os alunos pensam que obterão a melhor aproximação para cada vez que realizam tal aproximação, mas não afirmam que o limite deve ser igual a área sob a curva.

Por causa desse comportamento dos alunos, Orton (1983a, apud Vianna 1998, p. 25) afirma que eles (alunos) têm uma fraca percepção do poder dos processos de limite em matemática.

Sobre os resultados acima, a autora comenta nos seguintes termos:

> Este problema é também refletido na compreensão de taxa de variação, que é, do ponto de vista de ambos autores, muito difícil para os alunos compreenderem. Há aspectos específicos com a taxa de variação que não são diretamente envolvidos com o conceito de limite, como por exemplo, a interpretação da taxa de variação como valor da ordenada y. Mas há outros aspectos diretamente relacionados com o ponto de vista dinâmico do limite, é o caso da distinção entre taxa de variação em um ponto e taxa de variação num intervalo. Para o caso de uma reta é verdade que a taxa média de variação num intervalo é igual à taxa de variação em qualquer ponto do intervalo, todavia, o mesmo não é verdadeiro para qualquer curva e o limite na avaliação da taxa de variação em um ponto é muitas vezes mal compreendido. (VIANNA, 1998, p. 24).[4]

[4] Tradução nossa

Nos questionários e entrevistas que a pesquisadora realiza com alunos, são reportadas algumas das dificuldades que eles enfrentam na compreensão dos conceitos de derivada e integral de uma função. A seguir apresentamos alguns exemplos.

No estudo piloto, 72 alunos tinham que responder a um questionário previamente preparado. A primeira questão tratava de calcular o valor de cada uma das seguintes integrais:

a) $\int_0^2 (3x^2 - 1)dx$ b) $\int_{-1}^1 |x|dx$

Segundo a autora 88,9% dos alunos responderam corretamente a questão 1a). Todavia, apenas 29,2% dos alunos responderam corretamente a questão 1b). Neste caso, muitos dos alunos deram 0 como resultado. Alguns escreveram $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ mas não usaram esta informação para responder corretamente ao problema.

Na análise das respostas, segundo a pesquisadora, apenas 28% dos alunos usaram tal associação, e os restantes não conheciam a associação, ou se a conheciam, então não estavam acostumados a usá-la.

Uma das sugestões que a autora fornece é de que os alunos devem entender as definições e os teoremas e seu significado geométrico. Na caracterização inicial do Teorema Fundamental do Cálculo, a autora sugere o seguinte modelo geométrico para reforço à associação entre as relações algébricas e as representações gráficas:

Seja f uma função definida por f(x) = k, onde k é um número real positivo.

Seja F uma função de área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo das abscissas, como a figura mostra:

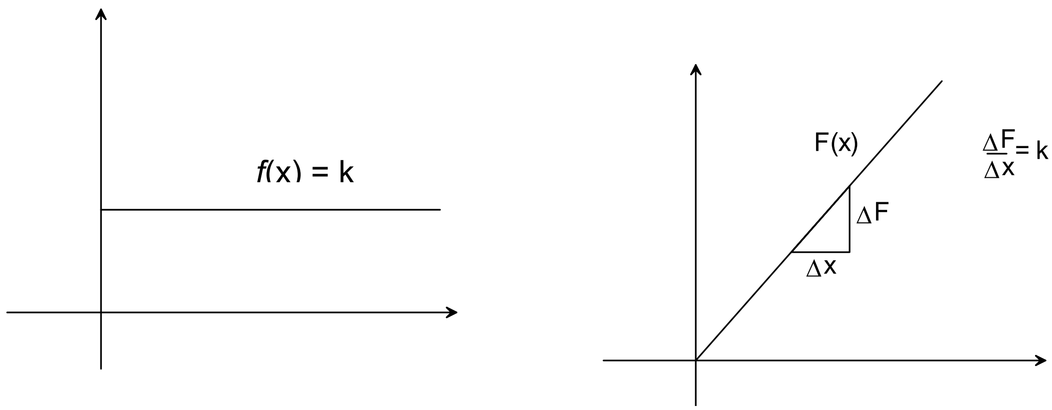


Figura nº 1: Visualização geométrica da relação derivada-integral
Fonte: Vianna (1998, p. 17)

O declive da tangente de *F*, isto é, a derivada de *F* é igual a k para todo x que é o valor da função *f*(x) para qualquer x.

Na verdade, a área sob o gráfico de *f* é igual a: $A(f) = k \cdot x$ uma vez que a região (sob o gráfico) é um retângulo de base x e altura k.

Outras dificuldades que a tese levanta estão relacionadas com a aplicação incorreta de regras de primitivação, como os exemplos que se seguem ilustram algumas respostas referidas na pesquisa da autora:

$\int |x| dx = \frac{x^2}{2}$ ou $\int |x| dx = \left|\frac{x^2}{2}\right|$ ou ainda $\int |x| dx = \frac{|x|^2}{2}$ e

$$F(x) = \left[\frac{f(x)^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \left[\frac{f(x)^2}{2} - \frac{f(-1)^2}{2}\right]$$

A autora relata outras dificuldades: confusão entre a continuidade e a diferenciabilidade, problemas com as notações, por exemplo, a falta de utilização do termo *dx* em alguns casos e dificuldades de utilização das definições.

Villarreal (1999), quando na sua tese de doutorado, visa a observar, compreender e mostrar o pensamento de estudantes de Cálculo em um ambiente computacional, as concepções surgidas, as relações entre o estudante e o computador e outras mídias utilizadas, levanta uma série de questões relativas ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Na revisão bibliográfica, expõe os problemas similares aos expostos nos parágrafos anteriores sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. As críticas ao ensino tradicional vigente (ETV), denominação de Baldino a que ela se refere, resume-se na seguinte citação:

> O ETV concebe o conhecimento como uma espécie de substância que se transmite do professor ao aluno por comunicação. O professor fala, codifica, o aluno ouve e decodifica. A culpa pelo fracasso da aprendizagem é lançada sobre o ruído na comunicação. Para diminuir o ruído o aluno deve prestar atenção, fazer silêncio. Supõe-se que o cérebro desempenha melhor o trabalho de decodificação quando o corpo está imóvel. Numa palavra o ETV *pressupõe que o professor ensina mostrando e o aluno aprende vendo.* (BALDINO, 1998, p 15-16, apud VILLARREAL, 1999, p. 24).

Para pesquisadora, existe no ensino de Cálculo um processo de algoritmização e formalização precoce tanto nas aulas quanto nos livros, seguindo um modelo ritual: exposição – exemplos – exercícios. Diversos trabalhos (como os de Nemirovsky (1993) e Palis 1995, apud Villarreal (1999)) assinalam que o efeito desta atitude é o afastamento do Cálculo das idéias quotidianas de variação, ligadas a ele. Características similares são reportadas a partir de Silva (1993, apud Vilarreal) no seu estudo que procurava compreender o modo de funcionamento das concepções didáticas pedagógicas do professor-pesquisador na sala de aula de matemática e a relação dessas concepções com as concepções oriundas da prática científica. Para Villarrel (ibid), as propostas visando a superação deste quadro legado do ETV são variadas, podendo ser mencionadas algumas, entre as quais o relacionamento entre os fatores teóricos e experimentais e o emprego da tecnologia computacional como auxiliar na aula. Na tese da autora o computador permitiu evidenciar discrepâncias entre o gráfico e o algébrico, mostrando as concepções relacionadas com a derivada e retas tangentes das 6 estudantes que participaram dos experimentos de ensino. Tais concepções se mostraram estáveis e se repetiam nas diferentes duplas (das alunas), quase sem variações. Para autora,

> ... algumas dessas concepções têm sua origem em experiências relacionadas com a mídia lápis e papel, freqüentemente empregada nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Estas concepções estão, às vezes, amarradas a imagens geradas durante

> a escolarização prévia (tal é o caso da reta tangente associada à imagem de tangente a um círculo). Por outro lado, algumas dessas concepções entram em conflito quando é realizada sua interpretação em termos gráficos. (VILLARREAL, 1999, p. 309).

Para algumas alunas que participaram dos experimentos de ensino o conflito estava entre as suas concepções de reta tangente e as imagens gráficas.

Numa das questões foram solicitadas que traçassem os gráficos de $y = x^2$ e sua derivada. As respostas que apareceram foram como a figura ao lado mostra:

E os questionamentos de algumas estudantes eram por que é que a reta da função derivada $y = 2x$ não era tangente ao gráfico da função $y = x^2$.

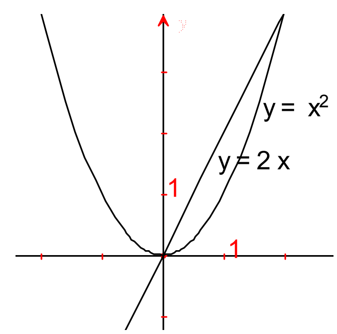


Figura nº 2: Relação primitiva-função derivada

Fonte: Villarreal (1999, p. 240)

A dificuldade aqui colocada está relacionada com o problema de distinção das diferenças entre reta tangente e o coeficiente angular da reta tangente. E a autora comenta que em parte este equívoco está relacionado com o tipo de exemplos que se têm apresentado aos alunos:

> Outra concepção que apareceu foi: identificar a função derivada com a reta tangente. Essa idéia aparece associada às funções quadráticas, já que, neste caso, a função derivada é uma reta, porém essa reta deverá, segundo esta concepção, ser também tangente à curva. ... Na análise feita neste episódio, sugere-se que a origem de tal concepção possa ter sua raiz no próprio ensino quando é feita a construção da função derivada, no caso da função $y = x^2$, no curso da Matemática Aplicada. Inicialmente, foram determinadas algumas retas tangentes em diferentes pontos da parábola e, para calcular a função derivada, foi determinada a equação da reta tangente por (a, a^2). Assim, a derivada fica identificada como sendo o coeficiente angular de uma reta tangente particular, porém as estudantes acabam associando a derivada com reta tangente. (VILLARREAL, 1999, p 316-317).

Para a autora, se a derivada for calculada a partir do traçado da reta tangente, apresentam-se algumas complicações. No caso da função linear, em todo ponto do gráfico, a reta tangente coincide com o gráfico da própria função e se a derivada for identificada com a reta tangente, o gráfico produzido para *f'* é coincidente com o gráfico de *f*.

Uma das conclusões que a autora expressa na sua tese é de que não existe uma linearidade na forma de abordar o conteúdo matemático. Quando a voz do estudante é posta em destaque e os percursos de suas idéias são atendidos, os caminhos percorridos revelam-se particularmente diferentes da seqüência linear característica na sala de aula tradicional. E enfatiza dizendo que

> Esse trabalho, desenvolvido nos experimentos de ensino, evidenciou que, freqüentemente, os processos de pensamento desenvolvidos em um ambiente computacional se caracterizam por um jogo de conjecturas e refutações; algumas estudantes desenvolvem estratégias onde o processo de visualização é central na elaboração dessas conjecturas; outras preferem abordagens mais algébricas; a combinação entre essas abordagens, visuais e algébricas, é importante para a aprendizagem matemática e a fala é fundamental na constituição do conhecimento matemático. (VILLARREAL, 1999, p. 365-366).

Artigue (1991) na análise que faz de algumas pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino de Cálculo, apresenta uma vasta lista de possíveis concepções que os alunos podem associar com as noções de derivada, integral, reta tangente e plano tangente. Para a autora (p 174-175), o aluno pode conceber a tangente a uma curva num ponto A, como:

1. uma reta por A mas sem atravessar a curva na vizinhança de A (ponto de vista usado principalmente por Appollonius para determinar as tangentes às cônicas, sem apelo a uma abordagem diferencial);

2. uma reta tendo uma dupla intersecção com a curva em pontos vizinhos (um ponto de vista presente nos trabalhos de Euler e Cramer, que mais tarde se sistematizou no contexto da geometria algébrica);

3. uma reta passando por dois pontos infinitamente próximos de A sobre a curva (o ponto de vista de Fermat, Leibniz, ...) ou a reta a qual a curva se torna quando se amplia a curva numa vizinhança de A;

4. o limite das secantes (AM) quando o ponto M se desloca para A ao longo da curva, como na figura abaixo (ponto de vista de D'Alembert por exemplo, mais próximo da abordagem tradicional no ensino);

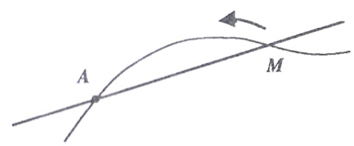


Figura nº 3: Reta tangente como limite das secantes

Fonte: Artigue (1991, p. 175)

5. a melhor aproximação linear ou a única aproximação linear da primeira ordem à curva numa vizinhança de A (conduzindo à idéia mais sofisticada da transformação linear tangente);

6. a reta passando por A cujo declive é dado pela derivada em A da função associada com a curva (onde a derivada é suposta existir);

De igual modo, o aluno pode ver a derivada em x = a da função f como sendo:

1. o limite da razão $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ quando h tende para 0;

2. o coeficiente da primeira ordem da expansão limitada à ordem 1 da função em *a* (como no programa atual francês);

3. o coeficiente do termo da primeira ordem na expansão de séries completas de f nas vizinhanças de *a* (ponto de vista de Lagrange);

4. o coeficiente caracterizando a transformação linear, tangente a *f* em (*a,f(a)*)

5. o declive da reta tangente ao gráfico de *f*.

6. o número ou a função obtida por aplicar as regras usuais de diferenciação, conhecendo as derivadas das funções elementares.

ou ainda

o declive de uma porção ampliada do gráfico em si (para um gráfico “localmente linear” – o ponto de vista defendido por Tall (1986a) e agora adotado pelo Projeto Britânico de Matemática Escolar – The British School Mathematics Project no seu novo currículo).

De igual modo (segundo Artigue, 1991, p. 175-176), há várias concepções diferentes sobre a integração:

1. a operação inversa da diferenciação;

2. um processo de determinação de comprimentos, áreas, volumes,

3. uma forma linear contínua num espaço de funções;

ou em geral

4. um processo de medida.

Das diferentes possibilidades de interpretação da diferenciação e da integração listadas acima, é perceptível que, se não se toma cuidado sobre quais pontos específicos a focalizar e como fazê-lo, quer na discussão dos assuntos em forma de aulas, quer na sua apresentação em livros-texto há um risco de criar confusão. A autora elabora algumas sugestões para colmatar as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo, entre elas o uso do computador nas aulas e uma abordagem não-estandardizada, e associação entre o visual-gráfico e o algébrico.

Sad (1998, p 100-101), referindo-se aos estudos de Cassol (1997), apresenta algumas das concepções referidas anteriormente pela Artigue (1991), com a designação de Campos Semânticos, baseando-se no Modelo Teórico de Campos Semânticos de Lins (1992), (ao qual não entraremos em detalhes neste trabalho, por não fazer parte da nossa discussão). A lista sugerida no trabalho da Sad para os diferentes significados da derivada é a seguinte:

o Campo Semântico de Variação Instantânea (CSVI): derivada como taxa de variação instantânea;

o Campo Semântico de Limite (CSL): derivada como um limite;

o Campo Semântico da Declividade (CSD): derivada como declividade;

o Campo Semântico da Velocidade (CSV): derivada como medida de variação;

o Campo Semântico do Formulário (CSF): derivada como resultado de uma fórmula.

A julgar que estes significados para derivada foram sugeridos pelos alunos (Sad 1998, p. 100), é de supor que o que uma aula ou um livro didático pode sugerir como conhecimento visado, pode ser assumido pelo aluno de modo diferente. Mais adiante (p 135-142) a autora acrescenta que entre os significados produzidos pelos alunos para derivada, os mais constantes são os de limite do quociente de Newton, declividade da reta tangente em um ponto, função *f'* obtida de uma função *f* por uma determinada regra, taxa de variação instantânea, velocidade instantânea, custo marginal e receita marginal. Para a autora estes significados são produzidos de mais de um modo separadamente ou em conjunto. Por exemplo, o significado da taxa de variação instantânea pode ser produzido a partir do CS (Campo Semântico) visual-geométrico, CS de limites, ou em palavras, CS dos infinitésimos, CS dos algoritmos, CS dos números (ao dizer que taxa de variação instantânea é um valor calculado por uma razão $\frac{dy}{dx}$ entre duas quantidades, medindo a variação da quantidade y por unidade de x); ou do CS de velocidades.

Em relação à integração, a autora destaca que os significados proeminentes são: o de área, o de limite de soma de Riemann e o de soma infinita de grandezas infinitesimais (comprimento, área, volume, e outros):

Integral como área

Aproxima-se a área de uma figura plana pela soma das áreas de polígonos (retângulos) calculadas pelos métodos da geometria elementar.

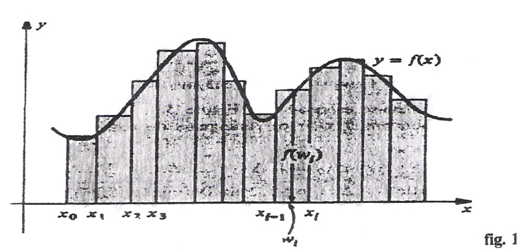


Figura nº 4: Integral definida como área sob o gráfico
Fonte: Sad (1999, p. 139)

Considera-se a partição em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ em que x_i são números tais que

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ é dita ser qualquer, e tal que o maior dos números $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ entre $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, é chamado norma da partição, e denotado por $||P||$.

Além disso, à medida que n cresce (mostra-se outras figuras com mais partições) a soma das áreas dos retângulos

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i$, mais se aproxima da área da figura delimitada pelo gráfico de *f*, pelo eixo dos x e pelas retas x = a e x = b e que há um apelo direto ao visual para entendimento simultâneo da definição de área e integral definida.

Por exemplo, em Ávila (1978, p. 170)

> A área assim definida é chamada a integral de *f* no intervalo [*a, b*], a qual é indicada com o símbolo . Por definição,
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i \quad \text{com wi pertencente a [xi, xi+1]}$$

<u>Integral como soma de Riemann</u>

Definições apresentadas em Swokowski (1983, p. 230 e 233):

> Seja f uma função definida em um intervalo fechado [a, b] e seja P uma partição de [a, b]. Uma soma de Riemann de f em relação a P é qualquer expressão R_p da forma
>
> $$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i ,$$
>
> onde w_i é um número qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$ para i = 1, 2, ..., n

> "Seja f uma função definida em um intervalo fechado [a, b]. A integral definida de f desde a até b, denotada por $\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\to 0} \sum_i f(w_i)\Delta x_i$ desde que o limita exista"

Integral como somas infinitesimais

Em Ávila (1978, p. 171) encontramos:

> O símbolo de integral é devido a Leibniz: ele é uma deformação de S de "soma", usado para lembrar que estamos lidando com o limite de uma seqüência de somas: f(x)dx seria, no entender de Leibniz, a área de um "retângulo infinitesimal" de base "infinitamente pequena" dx e altura f(x); a integral de f, de a até b, seria, então a soma de todos esses retângulos infinitesimais.(ÁVILA, 1978, p. 171, apud SAD, 1998, p. 141).

Sad (ibid) dá um exemplo desta interpretação da integral definida citando um dos professores observados durante a pesquisa de campo:

> As notações usadas hoje e , bem como as expressões cálculo diferencial e integral são devidas a Leibniz. São notações perfeitamente coerentes com o modo de pensar de Leibniz. A letra d indica um operador que faz passar de uma grandeza para uma variação infinitamente pequena desta grandeza, mantendo a natureza da grandeza. Por exemplo, se x é um comprimento, dx representa um comprimento infinitesimal, se A é uma área, dA representa uma área infinitesimal, se V é um volume, dV representa um volume infinitesimal, ddx representa variação infinitesimal de um comprimento infinitesimal, isto é, um infinitésimo da segunda ordem, etc.

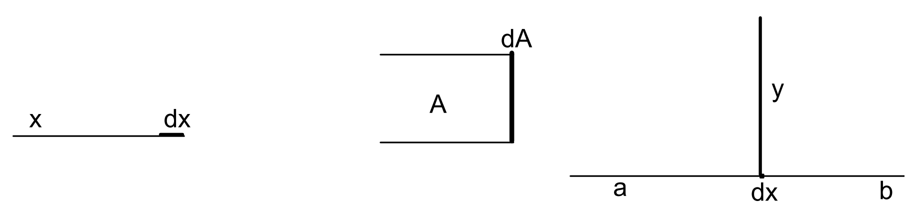


Figura nº 5: Interpretação geométrica da diferencial.
Fonte: Sad (1998, 141)

> Se x é um comprimento, $\int x$ representa uma soma infinita de comprimentos x, $\int dx$ representa uma soma de comprimentos infinitesimais, cujo resultado é, de novo o comprimento x, $A = \int dA = \int y dx$ é uma soma infinita de áreas infinitesimais, reconstituindo a área sob a curva, etc. (SAD, 1998, p. 141).

Referindo-se a Simmons (1987, p 298) ela escreve:

Consideramos a maneira fácil e intuitiva de construir a integral definida:

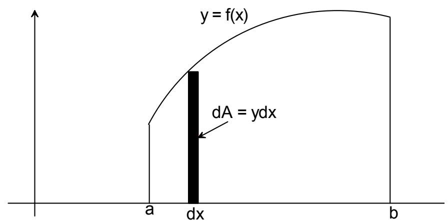


Figura nº 6: Diferencial como área, segundo Simmons

Fonte: Sad (1998, p. 142)

> Pensamos na área sob a curva como sendo composta de uma grande quantidade de faixas retangulares verticais finas. A faixa típica mostrada na figura tem altura y e largura dx e, portanto, área
>
> dA = ydx = $\int$ydx,   pois y = *f*(x). (...)
>
> Agora pensamos na área total A da região como o resultado de adicionar esses elementos de área dA quando nossa faixa típica varre toda a região. Esse ato de adição ou somatório pode ser simbolizado por
>
> A = $\int$dA. (...)
>
> $A = \int dA = \int y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ (SIMMONS, 1987, p. 298, apud SAD, 1998, p. 142).

Uma lição a partir das considerações anteriores sobre os possíveis significados da derivada e da integral de uma função, é de que todo cuidado é necessário na perspectiva do que devemos fazer com os alunos e como fazê-lo de modo a construir efetivamente o pensamento diferencial e integral. Aliás, os autores que estamos analisando apontam como uma das fontes de dificuldades o ensino que não é adequado, como a Vianna (1998) assinala:

O ensino em si também não encoraja os alunos a formar uma atitude madura. De fato, depois dos professores terem apresentado os conceitos teoricamente, muitas vezes eles continuam a ensinar:

> O ensino em si também não encoraja os alunos a formar uma atitude madura. De fato, depois dos professores terem apresentado os conceitos teoricamente, muitas vezes eles continuam a ensinar procedimentos algorítmicos não relacionados aos conceitos teóricos introduzidos. Esta atitude encoraja os alunos a estudar somente o que eles precisam para a aplicação dos algoritmos e, em última

> análise, o que eles precisam para se sair bem nos exames. (VIANNA, 1998, p. 18).[5]

Franchi (1993, p. 1) quando na sua dissertação de mestrado analisa o papel da modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia, para além de reportar dificuldades similares às que são levantadas por outros autores anteriormente analisados, a partir das experiências realizadas com os alunos na prática da modelagem matemática em sala de aula, entende que esta possa ser uma das estratégias a usar, em vez de seguir as prescrições algorítmicas e mecanisticas fomentadas pelo ETV (ensino tradicional vigente).

Nos trabalhos que estamos analisando, são depreendidas algumas dificuldades que os alunos têm com relação ao Cálculo Diferencial e Integral. Algumas dificuldades são de natureza conceitual e outras, de natureza procedimental, e são oriundas, segundo a leitura das pesquisas que fizemos, do próprio ensino. Algumas sugestões avançadas pelos autores que estamos citando, no sentido de ultrapassar as tais dificuldades, quase que convergem em seus pontos essenciais:

Trabalhar mais em conceitos, não algebrização precoce;

Os alunos devem tomar parte ativa na construção dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral;

Deve haver a negociação de significados dos objetos matemáticos em estudo, onde os alunos procuram o consenso e comunicação das suas idéias, condição importante para a compreensão.

Os autores que estamos analisando apontam também a influência do livro didático no desempenho dos alunos.

Vianna (1998, p. 22) diz ter feito uma análise de vários livros sobre o Cálculo no decurso da sua pesquisa. Ela anota que a análise feita mostrou haver confusão nas definições usadas sobre continuidade e que basicamente existem duas definições diferentes para tal conceito:

---

[5] Tradução nossa

A função $f(x)$ é contínua num ponto x_0 de seu domínio se para qualquer ε positivo podemos encontrar um δ positivo tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

para todos valores x no domínio de f para o qual $|x - x_0| < \delta$"

(Courant and John, 1965, p. 33)

e

"A função f é dita contínua no número a se e somente se as três condições seguintes são satisfeitas:

$f(a)$ existe

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$"

(Leithold, 1981, p. 112)

....

Há também inconsistências evidentes nestes textos. Apesar de ter definido continuidade como a citação acima, Courant e John escrevem ainda o seguinte:

"Podemos iluminar a definição de continuidade por contraste com exemplos de descontinuidade, exemplos que não satisfazem a definição acima."

(Courant & John, 1965, p. 36).

Na página 37, eles exemplificam usando a função $f(x) = \frac{1}{x}$, como um exemplo de "descontinuidade infinita" no ponto x = 0. Este exemplo é claramente contraditório com a definição dada (uma vez que a função não está definida em x = 0. (VIANNA, 1998, p. 22).[6]

Na parte do estudo piloto da tese quando a autora pede para os alunos darem exemplos de funções descontínuas, muitos indicaram a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e a autora conclui como tendo havido influência de livros didáticos usados.

No trabalho da Sad (1998, p. 135-142) encontramos uma espécie de levantamento de algumas definições importantes sobre o Cálculo e as respectivas

---

[6] Tradução nossa

fontes. Achamos ser um reconhecimento da importância do livro-texto como fonte de algumas idéias e atividades que se discutem em sala de aula. Para Franchi (1993, p. 34) "*Estando entre os poucos recursos utilizados pelos professores, os livros de Cálculo exercem grande influência no trabalho em sala de aula".* Villarreal (1999) refere também que, durante os experimentos de ensino que desenvolveu com as seis estudantes na sua pesquisa, houve etapas em que faziam a consulta de livros do Cálculo Diferencial e Integral.

1. 2. QUESTÃO DA PESQUISA

Perante o quadro da situação de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral descrito pelas diferentes pesquisas na área, apresentadas em parágrafos anteriores deste capítulo, onde as dificuldades são claramente expressas e algumas sugestões avançadas com vista a contornar o problema, propomo-nos desenvolver nossa pesquisa em torno da seguinte questão, a qual achamos ter algum espaço na grande discussão sobre o que é que devemos fazer para que o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral sejam significativos.

O que é que os livros didáticos disponíveis sugerem quanto à construção de conceitos e estratégias de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral?

Achamos que compreender e descrever bem o que os livros didáticos trazem relacionado com estudo do Cálculo Diferencial e Integral pode propiciar a tomada de posições educacionais efetivas no tratamento deste assunto ao nível escolar, pois teremos informações sobre o que é necessário acrescentar ou retirar, tornando seu estudo mais significativo para os envolvidos (alunos e professores).

Assim propomos o seguinte objetivo para este trabalho:

Analisar e compreender melhor como atualmente os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são tratados em alguns livros didáticos disponíveis.

Esta análise tem em vista a coleta de informações para o conhecimento da real dimensão do problema: o que é que os livros fazem e como fazem a discussão do Cálculo Diferencial e Integral?

1. 3. JUSTIFICATIVA

Escolhemos o Cálculo Diferencial e Integral como foco porque acreditamos que seja um dos grandes pilares da matemática nas classes terminais do ensino secundário em alguns países, e o núcleo duro da matemática dos primeiros anos da universidade (Artigue, 1991 e Vianna 1998), para além de ter uma ampla aplicação em outras ciências e atividades sociais. Para a Vianna (ibid) o curso de Cálculo pode ser também considerado o primeiro encontro que o aluno tem com o raciocínio dedutivo fora do contexto da Geometria Euclidiana.

Pensamos que, através das aplicações do Cálculo Diferencial e Integral na matemática, o professor e o aluno aprendem e conscientizam-se no valor da relação entre o saber e o saber-fazer, desenvolvem a sua capacidade de avaliar o processo de construção e aplicação de conhecimentos matemáticos nos diferentes contextos da realidade de seu ambiente. Fazendo assim, não só ocorre a ampliação do seu conhecimento matemático, mas também o desenvolvimento das suas formas de pensar e agir, aliando a matemática às outras ciências, tornando-a num instrumento de compreensão e de possíveis modificações da realidade.

Procuramos fazer análise dos livros didáticos porque eles são materiais que influenciam diretamente a ação pedagógica do professor bem como a aprendizagem do aluno. Como vimos na literatura analisada, quase todos autores fazem menção ao livro: ou porque se supõe ter influenciado para um determinado comportamento do aluno (Vianna 1998 e Sad 1998) ou porque se considera ser um material de uso indispensável no processo de ensino e aprendizagem (Villarreal 1999 e Franchi 1993). Leinhardt (1994, p. 308) assinala que o livro é amigo das idéias, é um andaime para o professor e alunos, e sua utilização deve ser encorajada. Portanto, levantar os aspectos que um livro didático possui pode ser uma contribuição no sentido de chamar atenção ao usuário sobre o que vai encontrar no tal material e daí tomar atitude em sua utilização. Segundo Leinhardt,

> Se os livros são limitados e com um pouco mais que algumas coleções de exercícios e intermeados com algumas figurinhas, então tais livros deveriam ser redesenhados e expandidos. Se um livro é muito limitado, então alunos e professores deveriam ser encorajados a usar vários livros ao mesmo tempo. (LEINHARDT, 1994, p. 308).[7]

Portanto, a nossa percepção é de que seja muito bem pertinente realizar-se um estudo sobre análise do conteúdo didático-matemático dos livros didáticos.

1. 4. HIPÓTESES DA PESQUISA

As nossas hipóteses para este trabalho são de que:

- Alguns dos fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão diretamente relacionados com a organização didático-matemática dos livros didáticos do Cálculo Diferencial e Integral;
- Analisar esta organização praxeológica dos livros didáticos pode reforçar a compreensão das causas de dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e propiciar algumas atitudes tendentes à sua utilização correta e criativa.

---

[7] Tradução nossa

1. 5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos metodológicos do trabalho foram os seguintes:

- Análise Epistemológica e histórica do Cálculo Diferencial e Integral com objetivo de compreender e mostrar como os tais conceitos evoluíram e os obstáculos encontrados na caminhada;
- A elaboração do referencial teórico que compreende:

1) a teoria de registros de representação semiótica de Duval, em busca do entendimento de como os livros articulam tais registros para aceder aos objetos matemáticos, neste caso, do Cálculo Diferencial e Integral. Achamos que esta teoria seja importante para este estudo pois o tratamento do Cálculo Diferencial e Integral exige uma combinação adequada entre o visual-geométrico e o algébrico. É difícil imaginar uma exposição sobre a diferenciação e a integração sem que se coloque a questão de como articular os dois elementos. A literatura revista anteriormente é quase unânime na sugestão de que deve haver associação entre o geométrico e o algébrico no ensino e aprendizagem do Cálculo. A falta desta associação é uma das causas do fracasso dos alunos na compreensão dos fenômenos de natureza diferencial e integral.

2) a Teoria das Situações Didáticas – TSD de Brousseau, buscando a explicação de como os livros escolhidos expõem o conteúdo matemático para promover a construção do conhecimento do aluno.

3) a Teoria Antropológica do Didático – TAD, de Chevallard, visando a discussão da organização matemática e didática dos livros didáticos selecionados em termos do tipo de tarefas, técnicas e justificações da sua razão de ser. São usados nessa análise alguns livros escolares brasileiros e moçambicanos que tratam o Cálculo Diferencial e Integral e outros americanos traduzidos no Brasil.

- Análise praxeológica dos livros didáticos.

1. 6 ESTUDOS REALIZADOS SOBRE A ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Para além de estudos de análise de livros já referidos nas teses da Vianna (1998), Sad (1998) e na dissertação da Franchi (1992), outros estudos sobre a mesma problemática (de livros) merecem alguma menção.

A dissertação de mestrado da Carlovich (2005), com o título "Geometria Dedutiva em Livros Didáticos das Escolas Públicas do Estado de São Paulo para o 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental", fazendo uso do estudo da classificação das Geometrias proposta por Parsysz (2000), da teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) e da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (1993), ela objetiva-se a responder as seguintes questões:

> Em que medida os livros didáticos paulistas do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental acompanham discussões da Didática da Matemática sobre o ensino da Geometria dedutiva nos períodos anterior e posterior à implantação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para este nível de ensino, em 1995?
>
> - O que distingue os livros didáticos paulistas de 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental do período anterior daqueles do período posterior à implantação do PNLD (1995) quanto a incorporação dos resultados de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem da matemática, mas especialmente sobre o ensino da Geometria dedutiva? (CARLOVICH, 2005, p. 35).

E uma das constatações que ela salienta é de que há tendências específicas para cada época sendo que a maioria das coleções analisadas de 1990 experimente o rompimento com a apresentação no estilo euclidiano, usado em tempos anteriores, passando para aplicações práticas. Enquanto isso, as de 2000 procuram intercalar a Geometria com outras partes da Matemática.

Miguel (2005) na sua tese de doutorado sobre "Ensino e aprendizagem do Modelo Poisson: Uma experiência com modelagem", reserva espaço fazendo uma análise da organização praxeólogica dos livros didáticos. No fim dessa análise ela escreve: "*O livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna, freqüentemente, a única ferramenta disponível para o seu trabalho (PNLD 2005, p. 196, apud Miguel 2005, p. 76).*

Gonçalves (2004) na sua dissertação de mestrado onde discute as "Concepções de professores e o ensino de Probabilidade na escola básica" apresenta um capítulo onde analisa a organização praxeológica dos livros didáticos. No fim do capítulo ele escreve:

> Desta forma, por meio de livros didáticos verificamos as diversas tendências em diferentes períodos do Ensino de probabilidades no Brasil, o que, aliados aos estudos das orientações institucionais, oferecerá os elementos de que precisamos para compreender o ensino de Probabilidades desde os anos 70. (GONÇALVES, 2004, p. 78).

Do que listamos acima é apenas uma amostra de que estudos que se valem da análise do livro didático, idênticos ao que é feito neste trabalho, existem e com focos diversificados. Portanto, achamos que nossa pesquisa esteja bem localizada quer na literatura sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, quer no foco sobre a análise de livros didáticos.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente trabalho fundamenta-se em três teorias:

Teoria de Registros de Representações Semióticas (Duval, 2003), Teoria Antropológica do Didáctico (Chevallard, 1999) e Teoria das Situações Didácticas (Brousseau, 1977, 1986 e 1997).

Como salientamos previamente, as três teorias são importantes para este trabalho, pois discutem os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem e as condições que favorecem a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aluno em sala de aula.

- A primeira teoria é usada na análise e avaliação dos registros de representação semiótica usados nos livros selecionados para acessar o conhecimento matemático que é objeto de aprendizagem nas instituições de ensino.

- A segunda teoria é usada na análise da organização matemático-didática dos livros selecionados;

- A terceira teoria é usada para analisar a relação contextualização-descontextualização na discussão dos conteúdos propostos nos livros.

A seguir apresentamos as idéias importantes de cada uma das teorias referidas acima:

2. 1. TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica fornece subsídios para se compreender o papel das representações semióticas no desenvolvimento cognitivo e a origem das dificuldades encontradas pelo aluno na aprendizagem matemática. Duval (2003) identifica fenômenos intrínsecos aos registros de representação e sua influência na aprendizagem. Para ele,

> ... um modelo pertinente para explicar as condições de aquisição dos conhecimentos matemáticos por alunos deve estar prioritariamente centrado nas condições cognitivas de compreensão, isto é, nas condições específicas aos objetos matemáticos. Desse ponto de vista, as representações semióticas ou mais exatamente, a diversidade dos registros de representação semiótica, têm um papel central na compreensão. (DUVAL, 2003, p 28 - 29).

É através das representações semióticas que temos acesso aos objetos matemáticos e a distinção entre a designação e o objeto designado.

Segundo o autor supracitado, a análise do desenvolvimento cognitivo e as dificuldades encontradas na aprendizagem matemática confrontam-se com três fenômenos interligados:

1 **-** Existência de diversos registros de representação semiótica: registro em linguagem natural, registro simbólico (numérico ou algébrico) e registro figural.

2 **-** Diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica, pois os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. Seu acesso está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite representar.

3 **-** Coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

Duval (ibid) classifica os registros de representação semiótica, mobilizáveis no funcionamento matemático (na atividade matemática) em quatro tipos diferentes, ilustrados no quadro a seguir:

Quadro nº 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO - DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças ...; • dedução válida a partir de definição ou teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente em perceptiva; • construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONIAS Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária ...); • algébricas; • simbólicas (figuras formais), Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistemas de coordenadas; • interpretação, extrapolação

Fonte: Duval (2003, p. 14)

Para o autor, a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, e que, para analisar a atividade matemática numa perspectiva de aprendizagem (e de ensino), é preciso tomar em consideração dois tipos de transformações da representação: os *tratamentos* e as *conversões*. O esquema a seguir caracteriza cada tipo de transformação:

Transformação
de uma representação semiótica em
uma outra representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: *Tratamento*	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: *Conversão*
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser usado para que os alunos possam compreender	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada

Esquema: A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão – dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas.

Fonte: Duval (2003 p. 15)

Nos valemos do problema abaixo para exemplificar as etapas onde ocorrem os tratamentos e onde ocorrem as conversões:

> **Problema:** Um estudo preparado pelo departamento de marketing da Companhia Universal Instruments projeta após a nova linha de computadores pessoais Galaxy ser introduzida no mercado, as vendas crescerão à taxa de $2000 - 1500e^{-0,05t}$ $(0 \leq t \leq 60)$ unidades por mês. Encontre uma expressão que forneça o número total de computadores que serão vendidos t meses após se tornarem disponíveis no mercado. Quantos computadores a Universal venderá no primeiro ano em que eles estiverem no mercado? (TAN, 2003, p. 394).

Resolução:

Se denotamos por N(t) o número total de computadores que se espera sejam vendidos t meses após se tornarem disponíveis no mercado, então, a taxa de crescimento de vendas é dada por N'(t) unidades por mês. Assim, temos:

$N'(t) = 2000 - 1500e^{-0,05t}$ (1)

de modo que $N(t) = \int(2000 - 1500e^{-0,05t})dt$ (2)

$N(t) = \int 2000dt - \int 1500e^{-0,05t}\,dt$ (3)

$N(t) = \int 2000dt - 1500\int e^{-0,05t}\,dt$ (4)

$N(t) = 2000t + \frac{1500}{0.05}\,e^{-0,05t} + C$ (5)

$N(t) = 2000t + 30000\,e^{-0,05t} + C$ (6)

Notemos que, para determinar o valor de C temos que considerar que o número de computadores vendidos no final do mês 0 é nulo, ou seja $N(0) = 0$, o que fornece:

$N(0) = 30000 + C = 0$ (7)

ou seja C = -30000 (8)

Portanto a expressão desejada é

$N(t) = 2000t + 30000\,e^{-0,05t} - 30000$ (9)

$N(t) = 2000t + 30000\,(e^{-0,05t} - 1)$ (10)

O número de computadores que a Universal espera vender no primeiro ano é dado por

(11) $N(12) = 2000 \cdot 12 + 30000(e^{-0,05 \cdot 12} - 1)$ (11)

(12) $N(12) = 10464$ unidades (12)

Onde houve tratamentos e conversões no problema acima?

A tradução da expressão em língua natural "*o número total de computadores que se espera sejam vendidos t meses após se tornarem disponíveis no mercado*" por $N(t)$, consistiu na **conversão**; de igual modo houve conversão da tradução da expressão "*a taxa de crescimento de vendas por mês*" pela expressão $N'(t)$. Ainda teríamos a conversão se representássemos a função $N(t) = 2000t + 30000\,(e^{-0,05t} - 1)$ graficamente.

Os **tratamentos** ocorreram do passo (1) ao passo (12), consistindo na execução de técnicas dentro do registro algébrico para determinar a resposta desejada. As transformações foram quase algorítmicas segundo as técnicas do Cálculo da integral indefinida e de equações diferenciais com um problema do valor inicial.

Para Duval

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um Cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; ...
>
> As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2003, P. 16).

Ainda sobre a importância das transformações de registros de representação semiótica, o autor acima citado escreve:

> Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não-congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes. Falando de outra maneira, o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monorregistros. Existe como que um “enclausuramento” de registro que impede o aluno a reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. ...
>
> A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Ora, na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente ... O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. (DUVAL, 2003, p. 21-22).

Na realidade, usando apenas um registro de representação, temos uma grande probabilidade de confundir a representação com o objeto matemático representado.

Para o mesmo autor, o ensino centra-se em registros monofuncionais, cujos tratamentos são principalmente algoritmos, muitas vezes privados de significado e utilizáveis fora do contexto de aprendizagem dos alunos e, geralmente, um sentido de conversão é privilegiado pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido, o que não é verdade. No caso do Calculo Diferencial e Integral, há um grande privilégio do uso de registros monofuncionais (desenvolvidos com a finalidade específica de tratamentos) e o sentido *língua natural* $\rightarrow$ *registro algébrico* $\rightarrow$ *registro gráfico* é muita vezes privilegiado e raras vezes o contrário acontece para o aluno de Cálculo. Duval (2003) acha que as conversões são as que potencializam a compreensão e a aprendizagem. Para ele a conversão deve permitir a apreensão global e qualitativa do objeto representado para fins de controle.

> A conversão entre gráficos e equações deve supor que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, entre outros aspectos) e, do outro lado, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1). ... passar de um registro de representação ao outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. ... É a articulação de registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o “enclausuramento” de cada registro. (DUVAL, 2003, p. 17 e 22).

Achamos que esta teoria nos ajudará na análise dos livros didáticos que queremos fazer, no que respeita a coordenação entre os registros de representação semiótica. A coordenação entre os registros algébrico e gráfico é importante no tratamento do Cálculo Diferencial e Integral. Por exemplo, como o livro introduz a integral de uma função, com uma finalidade específica de tratamento? Quais os elementos o livro recorre para assegurar que o aprendiz tenha a noção de integral como função ou a integral como medida? Como se fala da noção de derivada de uma função? Portanto é crucial que uma certa representação e possíveis transformações adequadas intervenham. Portanto, nas condições como o trabalho está sendo direcionado, ver como os livros organizam o conteúdo que é objeto de ensino e de aprendizagem nas instituições de ensino, uma referência a Duval (2003) é importante. Ele explicitamente diz que as condições de aquisição de novos conhecimentos matemáticos estão nos registros de representação e suas transformações:

> ... o sucesso, para grande parte dos aluno em matemática, ocorre no caso dos monorregistros. Existe como que um "enclausuramento" de registro que impede o aluno a reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (DUVAL, 2003, p. 21-22).

2. 2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático – TAD – situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas regulamente feitas, descrevendo o conhecimento matemático em termos de organizações ou praxeologias cujas noções básicas são as noções de tipos de tarefas T, técnicas τ, tecnologias θ e teorias Θ que permitem modelar as práticas sociais em geral e a atividade matemática em particular (Chevallard 1999 e Bosch et al. 2004).

A noção de tarefa supõe um objeto relativamente preciso para o qual se dispõe de alguma técnica com um entorno tecnológico-teórico mais ou menos explícito. Uma tarefa evoca uma ação, o que é para fazer, por exemplo, calcular a derivada de uma função *f* no ponto x_0 de seu domínio é um tipo de tarefas para o qual se tem a técnica do cálculo do limite de uma função em um ponto, com um entorno tecnológico-teórico sobre funções, sua representação gráfica e limites de funções. Uma técnica τ é uma maneira sistemática e explícita que permite realizar as tarefas do tipo T. Uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas. As tarefas e as técnicas correspondentes formam um bloco que se chama de bloco *prático-técnico* e que se identifica com o que comumente se denomina *um saber-fazer:* precisamente composto de um determinado tipo de tarefas T, e uma determinada maneira, τ, de realizar as tarefas deste tipo. Uma técnica pode ter êxito sobre uma parte $P(\tau)$ das tarefas do tipo T ao qual ela é relativa. Desse modo falamos do alcance da técnica. Quer dizer, a técnica tende a fracassar sobre $T \backslash P(\tau)$ de maneira que se pode dizer que "não se sabe, em geral, realizar as tarefas do tipo T". Cabe assinalar que um mesmo discurso sobre uma tarefa do tipo T pode assumir duplamente a função técnica e tecnológica, que permite por um lado *encontrar* o resultado do pedido (função técnica) e *justificar* que é correto o resultado esperado (função tecnológica).

Para Chevallard (1999), a tecnologia, indicada por θ, é um discurso racional sobre a técnica, com as funções de:

a) justificar "racionalmente" a técnica τ, para assegurar que ela permite realizar as tarefas do tipo T, quer dizer, assegurar que a técnica realiza o que se pretende;

b) explicar, fazer inteligível, aclarar a técnica, expor por que é que a técnica é correta;

c) produção de técnicas. Esta função corresponde a um emprego mais atual do termo tecnologia.

Chevallard (1999) aponta que, em matemática, a função de justificação predomina tradicionalmente, por meio de exigência de demonstração sobre a função de explicação. Por outro lado, o fato de que exista numa instituição I, uma técnica *canônica,* em princípio a única reconhecida e empregada, confere a esta técnica uma virtude de "autotecnológica": sobre a qual se tem toda crença: atuar dessa maneira não exige justificação porque é a boa maneira de atuar (em I). Na aplicação do Cálculo Diferencial nas situações em que as variações das grandezas são instantâneas e inerentes a processos internos da grandeza, usa-se muitas vezes a técnica $\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$, definida e justificada pelo discurso teórico-tecnológico de limites do tipo $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t)$. Esta técnica adquire portanto, o estatuto de "autotecnologia". É uma técnica inquestionável, naturalizada no processo de cálculo da derivada de uma função. Proceder segundo esta técnica é uma boa maneira de calcular a taxa de variação instantânea da grandeza N.

Segundo Chevallard (1999) e Bosch et al. (2004), no nível superior das funções de justificação-explicação-produção, está a teoria que retoma, em relação à tecnologia, o papel que esta tem em relação à técnica, é um discurso amplo que justifica a tecnologia. A descrição do discurso praxeológico em três níveis, apresentada acima (técnica/tecnologia/teoria), em geral, é suficiente para dar conta da análise matemática que se queira realizar. No ensino das matemáticas, segundo Chevallard, (1999) uma técnica de estudo, digamos, da derivada de uma função ou a integral definida, se identifica geralmente com uma tecnologia θ determinada (diferenciação ou primitivação) ou mais implicitamente com o bloco do saber (θ, Θ) correspondente que permite produzir e justificar a título de aplicações técnicas a distintos tipos de tarefas.

Para os autores que estamos citando, as noções de "tarefa", "técnica", "tecnologia" e "teoria", são relativas à função que elas desempenham em uma determinada atividade matemática. Assim, um mesmo objeto matemático (por exemplo, a derivada) pode ser considerado como uma técnica para realizar um tipo de tarefas (por exemplo, para mostrar que a velocidade instantânea de um corpo P é a derivada da função S do espaço percorrido pelo corpo, no lapso de tempo t) ou servir como um elemento tecnológico comum a um conjunto do tipo de tarefas e técnicas (por exemplo as técnicas do cálculo das taxas de variações instantâneas). Chevallard (1999) identifica o que ele chama de penúria praxeológica que se traduz em primeiro lugar por uma falta de técnica, o que levanta a questão do tipo: como realizar as tarefas do tipo T? E também, e sobretudo, as questões do tipo como realizar melhor as tarefas do tipo T? Estas interrogações exigem a produção de técnicas e portanto, aparecem como geratrizes da praxeologia pontual que se quer (re)construir. Chevallard (1999 p. 21) ainda aponta que uma questão pode ser colocada no sentido fraco ou no sentido forte. No primeiro caso está-se perante a um simples pedido de informação. Por exemplo, a questão de perguntar se a função *f*(x) = $\sqrt{x}$ é derivável no seu domínio, é um tipo de questão no sentido fraco, e geralmente toma a forma de uma interrogação no sentido gramatical do termo. Estas questões partem da hipótese de que a pessoa a quem se pergunta conhece a resposta ou ao menos pode facilmente descobri-la. As coisas mudam quando a pessoa a quem se pergunta não sabe responder porque ignora se a função dada é diferenciável ou não. Neste caso coloca-se um problema. A tarefa que se deve realizar para responder a questão já não é imediata. Para realizá-la e de uma maneira eventualmente rotineira (que não significa algorítmica) necessita-se uma praxeologia relativa ao tipo de tarefas considerado. A pessoa deve pôr em marcha a técnica que resolve este tipo de tarefas. As coisas se complicam cada vez mais quando a pessoa a quem se pergunta não dispõe de nenhuma técnica para a tarefa pedida. Neste caso a tarefa resulta problemática para o "resolvedor". Então a pergunta se torna uma questão no sentido forte. Ela já não é: "se a função *f* é derivável ou não" mas sim como determinar a derivada da função *f.* Passa-se assim da petição de realizar uma tarefa t, para elaboração de uma técnica τ que permite realizar tarefas do tipo T. A tarefa exige a elaboração de uma técnica, colocando em marcha o discurso tecnológico-teórico que a justifica. A resposta não é uma simples informação, mas sim toda uma organização praxeológica que se está por construir, ou seja, a elaboração de uma praxeologia relativa a um tipo de tarefas problemáticas. Importa realçar que, com o advento das tecnologias de computação, questões mesmo problemáticas podem ser respondidas no sentido fraco, quando simplesmente a máquina dá resposta à questão colocada. Mas, num outro ponto de vista, a máquina pode ser usada para construir o significado da técnica através das possibilidades que ela oferece para experimentações.

Chevallard (1999) alerta-nos para o que devem ser as questões de ensino e aprendizagem. Devem ser aquelas que estimulam o processo, havendo uma situação problemática que se deve resolver.

Estudar problemas é um meio que permite criar e desencadear a marcha da técnica relativa aos problemas do mesmo tipo e essa técnica passa a constituir um meio para resolver de maneira quase rotineira os problemas desse tipo. Para Chevallard (ibid) no contexto escolar, estudar uma questão é quase sempre recriar, para si mesmo (o estudante) e seus companheiros de estudo, uma resposta O já produzida em alguma outra instituição, é estudar uma resposta no sentido forte que se tem por válida. Esta observação chama-nos atenção de que estudar não é resolver tarefas rotineiras (que simplesmente usam transposição analógica, buscando na memória um exercício semelhante e desenvolver passos análogos aos da situação mostrada no exemplo), ou tarefas para as quais o estudante já tem respostas ou pode produzi-las mediante a aplicação de uma técnica já conhecida. Estudar deveria significar atividade de elaboração de técnicas para resolver tarefas. É estudar alguma obra existente em alguma parte da sociedade para reconstruí-la, transportá-la à instituição onde se realiza o estudo. Em outras palavras podemos dizer que é apropriar-se do conteúdo da obra.

A partir do trabalho de Chevallard (1999) levantamos algumas questões de interesse ou seja, alguns critérios que achamos que podem auxiliar na análise dos livros didáticos feita neste estudo. O roteiro das questões é o seguinte:

1 - Que tipo de tarefas os livros didáticos selecionados propõem para a produção de técnicas desejadas no estudo do Cálculo Diferencial e Integral?

2 – Como as técnicas são produzidas, a partir do questionamento ou dadas sem o levantamento de situações problemáticas?

3 – Como os livros selecionados articulam os blocos prático-técnicos e tecnológico-teóricos?

4 – Até que ponto as técnicas são justificadas?

5 – A aplicação de técnicas inclui a justificação e a interpretação dos resultados?

6 – Há tarefas (abertas) de aplicação de conhecimentos da diferenciação e da integração na resolução de problemas de contexto requerendo equacionamentos?

Estas 6 questões são as nossas diretrizes para análise da organização matemática e da organização didática dos livros selecionados.

Ainda sobre Chevallard (1999) e (ibid, apud Miguel 2005, p. 37), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se, por exemplo, a uma classe de matemáticas onde se estuda a diferenciação e a integração de funções, desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se ao modo de fazer esse estudo.

Segundo Chevallard (1999, apud Miguel 2005), o conjunto de condições e necessidades que possibilitam o desenvolvimento matemático (ecologia de uma praxeologia matemática), ou seja, as condições e entraves que permitem a produção e utilização das tarefas nas instituições, depende do objeto ostensivo (perceptível aos sentidos humanos e passível de manipulação, tais como sons, grafismos e gestos). Essa dimensão ostensiva de uma praxeologia permite que um saber matemático e os conhecimentos se materializem. Os objetos ostensivos – do latim ostendere, que significa mostrar, apresentar com insistência, são os objetos que têm uma certa materialidade e que por isso adquirem para uma pessoa uma materialidade perceptível. Os objetos não-ostensivos são todos aqueles como as idéias, as intuições ou os conceitos que existem institucionalmente mas que não podem ser vistos, percebidos ou mostrados por si mesmos. Os objetos não-ostensivos só podem ser evocados por uma manipulação adequada de determinados objetos ostensivos associados. Por exemplo o objeto ”primitiva de uma função” é objeto não-ostensivo que aprendemos a identificar e ativar por meio de certas expressões, escritas e gráficos colocados em jogo nas práticas e situações específicas. O desenvolvimento de uma técnica se traduz pela manipulação de objetos ostensivos regulados pelos objetos não-ostensivos.

2. 3. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Uma outra teoria que achamos importante para este estudo é a Teoria das Situações Didáticas.

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau, pesquisador francês, a partir do começo da década 70, buscando criar um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o "milieu" (ou meio) no qual a aprendizagem deve-se desenrolar (Almouloud em prelo, Brousseau, 1997).

Brousseau entende que

> um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo freqüentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1975, p. 6, apud ALMOULOUD, em prelo, p. 1).

Segundo o autor acima,

> O aluno aprende adaptando-se a um "milieu" que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem;
>
> "O "milieu"" não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um "milieu" no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
>
> Esse "milieu" e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem (BROUSSEAU, 1986, P. 49, apud ALMOULOUD, em prelo, p. 2).

A *situação adidática* é uma parte essencial da situação didática e se define como uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz mas é imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar (Almouluod p. 3, em prelo).

Brousseau (1996 p. 49) acha que a concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos “problemas” que propõe ao aluno. Esses problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir e a evoluir por si próprio. Nesta acepção, ensinar consiste na devolução ao aluno de uma apropriada situação adidática e a aprendizagem é a adaptação do aluno a esta situação. Segundo Bachelard (1938, apud Almouloud ibid) ”*no fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização”.*

A Teoria das situações didáticas alarga o olhar sobre como aluno pode participar ativamente na aquisição de seus conhecimentos e o uso de situações-problema como fio condutor na interação professor-saber-aluno, postulando a adequação das situações didáticas a devolver a este. Quer dizer, o professor deve trabalhar com afinco no estudo das questões a propor ao aluno. Os problemas de contexto a usar, os conhecimentos atuais e visados do aluno devem ser previamente analisados e, em função disso, determinar as variáveis didáticas pertinentes; ou seja, determinar as questões susceptíveis de induzir e potencializar a aprendizagem.

E o livro, fazendo parte do “milieu” da aprendizagem do aluno, deve ajudar este a avançar, com questões que lhe permitem construir os seus conhecimentos, ou seja, com problemas matemáticos que lhe permitem agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria. Portanto, achamos que a Teoria das Situações Didáticas é importante no estudo do livro como fator que interfere no processo de ensino e aprendizagem.

Em resumo, segue a proposta de critérios que queremos usar na análise dos livros escolhidos, pois os detalhes já foram apresentados em parágrafos anteriores:

1 – Como referimos atrás, fazendo uso da Teoria de Registro de Representação Semiótica, vamos verificar como os livros selecionados articulam as representações na exposição do conteúdo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral;

2 – fazendo uso da Teoria das Situações Didáticas vamos ver como o livro usa a problematização na discussão do conteúdo sobre o Cálculo Diferencial e Integral;

3 – fazendo uso da Teoria Antropológica do Didático, já temos 6 questões anteriormente identificadas sobre tarefas, técnicas, tecnologias e a coordenação de discursos teóricos que as justificam.

CAPÍTULO 3. CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS E EPISTEMOLÓGICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Esta parte do trabalho tem como objetivo fazer um percurso histórico para compreendermos como é que surgiu aquilo que é a maior conquista da inteligência humana no ramo da matemática: *o Cálculo Diferencial e Integral*, segundo Courant (1949) que citamos anteriormente.

Struik aponta seis aspectos que tornam o estudo da história da matemática atrativo:

> 1) ele satisfaz o desejo de muitos de nós de sabermos como as coisas em matemática se originaram e se desenvolveram; 2) o estudo de autores clássicos pode oferecer uma grande satisfação em si mesmo, mas também pode ser um auxiliar no ensino e na pesquisa; 3) ele ajuda a entender nossa herança cultural, não somente através das aplicações que a matemática teve e ainda tem na astronomia, na física e em outras ciências, mas também devido às relações que ela teve e ainda tem com campos variados como a arte, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais; 4) ele pode proporcionar um campo onde o especialista em matemática e os de outros campos da ciência podem encontrar interesse comum; 5) ele oferece um pano de fundo para a compreensão das tendências em educação matemática no passado e no presente; 6) podemos ilustrar ou tornar mais interessante o seu ensino e conversação com historietas. (STRUIK, 1985, P. 213, apud MIGUEL, 2005, P. 56).

O Cálculo é o resultado de um longo período de pensamento matemático, desenvolvido gradualmente e com muitas dificuldades envolvendo muitos pensadores. Segundo Boyer (1949, p. 15), as manifestações das idéias que conduziram ao estabelecimento do Cálculo começaram com os gregos que sistematicamente analisaram os conceitos de grandezas.

Na procura de uma unidade na natureza e na geometria, os pitagóricos desenvolveram a teoria de comparação de grandezas que mais tarde conduziu ao método de exaustão de Arquimedes, muito próximo ao método moderno de integração, tal como Boyer escreve:

> O método de exaustão corresponde a um conceito intuitivo, descrito em termos de imagens mentais do mundo, da percepção intuitiva. A noção de limite por outro lado pode ser considerada como conceito verbal, a explicação que é dada em termos de palavras e símbolos como números, seqüência infinita menor do que, maior do que, sem qualquer visualização mental, mas à sua definição de elementos à priori não definidos. (BOYER, 1949, p. 36).[8]

As idéias de indivisíveis, infinito e contínuo que os gregos usavam ancoravam-se no senso comum, na percepção intuitiva, na impressão sensorial, tendo a geometria como instrumento de análise das situações, e muito freqüentemente ditadas pelas experiências. Outro ponto fraco caracterizava-se pela dificuldade de produzir as definições satisfatórias com uma elaboração lógica do conceito, dificuldade de distinguir o concreto e o abstrato. Nesse mar de dificuldades, Aristóteles, ao adotar o método científico indutivo não foi para além do que era representável na mente (Boyer, 1949, p. 40). Como conseqüência disso, ele recusou a existência do infinito atual e restringiu o uso do termo para indicar apenas o infinito potencial embora ele distinguisse os dois tipos de infinito: potencial ou atual. Ao recusar-se a reconhecer o infinito atual, Aristóteles estava a prescrever o seu princípio fundamental de que o desconhecido existia apenas como potencial, aliás, é nesse sentido em que ele se expressou: "*qualquer coisa além do poder da compreensão está além do reino da realidade"* (Boyer 1949, p. 41)

Adotar uma atitude deste tipo reduziria o pensamento matemático ao intuitivamente alcançável e excluiria os conceitos da derivada e integral pois seriam a extrapolação para além do pensável. Aristóteles expressou profunda oposição à ideia fundamental de Cálculo – a de taxa de variação instantânea. Ele afirmou que "*nada pode estar em movimento num presente, ... nem pode uma coisa estar em repouso num presente*". Este posicionamento opõe-se à representação matemática dos fenômenos de variação que conduziram posteriormente ao surgimento do Cálculo.

---

[8] Tradução nossa

Ao recusar a velocidade instantânea, Aristóteles estava de acordo com as limitações da percepção sensorial. Apenas a velocidade média $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ é compreensível neste caso. Mas, fazendo uso do limite, deu-se uma rigorosa definição quantitativa da velocidade instantânea, pela relação $v = \frac{ds}{dt}$.

No período medieval, a matemática árabe e hindu pouco se preocupou com questões que mais tarde conduziram ao Cálculo. Todavia, os árabes desempenharam papel importante na preservação e transmissão para Europa do trabalho grego que de outro modo teria sido perdido.

Um dos avanços teóricos a considerar no período medieval, que mais tarde conduziria ao conceito de derivada, foi o início do estudo quantitativo das variações, admitindo tal conceito em matemática.

As discussões sobre variabilidades de quantidades, designadas na altura, por latitude de formas, ganharam espaço. Um dos trabalhos a considerar é do Oresme (1323-1382). Segundo Boyer,

> o trabalho de Oresme marca um avanço notável na análise matemática. Ele tinha percepção clara da aceleração e da aceleração uniforme. Oresme foi o primeiro a dar um passo significativo na representação de uma taxa de variação por uma reta. Apesar de não ter dado uma definição satisfatória da velocidade instantânea, ele se esforçou a clarificar a questão por acentuar que quanto maior for a velocidade, maior é a distância percorrida se o movimento continuar uniformemente a essa taxa. Uma das questões resolvidas por Oresme foi a proposição segundo a qual "a distância percorrida por um corpo a partir de repouso e movendo-se com uma aceleração constante é a mesma que o corpo percorreria se se movesse com a velocidade constante que é a metade da velocidade final. (BOYER, 1949, p. 82).[9]

Oresme considerou uma figura como a seguinte:

[9] Tradução nossa

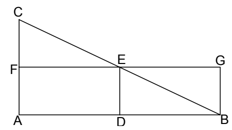


Figura nº 7: Modelo do Oresme para a descrição do movimento

Fonte: Boyer (1949, p. 83)

A prova de Oresme (e também de Galileu) é baseada no fato de que o movimento uniforme, como a ordenada (latitude), neste caso a velocidade, não varia com o tempo, é representado pelo retângulo ABGF e que o movimento uniformemente acelerado em que a razão entre a variação da velocidade (latitude) e a variação do tempo (longitude) é constante, corresponde ao triângulo ABC. Da congruência dos triângulos CEF e BEG ele concluiu a igualdade das distâncias percorridas nos dois casos.

No Cálculo Integral determina-se que as áreas ABGF e ABC representam em cada caso a distância percorrida.

Estes esforços do século XIV em direção à representação matemática das variações, foram passos importantes para o estabelecimento do Cálculo.

Antes de 1545 as equações cúbicas já tinham sido resolvidas por Tartaglia e Cardano e as quárticas, por Ferrari (Boyer 1949, p. 97). Esses resultados criaram base para o uso mais livre do número irracional, negativo e imaginário, em que se destacam os trabalhos de Cardano, Bombelli, Stifel e outros. A generalização do conceito do número, embora não baseado em definições satisfatórias, influenciaram mais tarde na elaboração do conceito de limite e na aritmetização da matemática. E, mais importante do que isso, foi a sistemática introdução de símbolos para as quantidades envolvidas nas expressões algébricas, como o caso de Viète (1540-1603) que usou as consoantes para representar as quantidades conhecidas e as vogais para representar as incógnitas (Boyer 1949, p. 99). Esse simbolismo literal foi crucial para o rápido desenvolvimento da geometria analítica e do Cálculo nos séculos seguintes, pois permitiram que os conceitos de variabilidade e de funcionalidade entrassem no pensamento algébrico. A melhoria da notação conduziu a métodos mais fáceis na aplicação do que os cansativos procedimentos geométricos de Arquimedes. Nessa direção de aperfeiçoamentos, Stevin modifica em 1586 o método de exaustão de Arquimedes ao mostrar que o centro de gravidade de um triângulo está na mediana.

Ele inscreveu no triângulo ABC um número de paralelogramos de igual altura. Depois considerou que o centro de gravidade da figura inscrita deve estar na mediana pelo princípio de que figuras simétricas devem estar em equilíbrio em relação ao eixo de simetria. E podemos inscrever um número infinito de tais paralelogramos, e, em todos casos o centro de gravidade estará sobre AD.

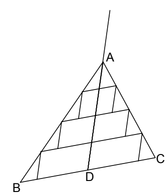


Figura nº 8: Stevin procurando o centro de gravidade de um triângulo.
Fonte: Boyer (1949, p. 100)

Quanto maior for o número de paralelogramos assim inscritos, menor será a diferença entre a figura inscrita e o triângulo ABC. Se de algum modo os pesos dos triângulos ABD e ACD não são iguais, então haverá alguma diferença a considerar. Mas não pode haver uma tal diferença pela lei da simetria. Portanto, os pesos de ABD e ACD são iguais, portanto, o centro de gravidade do triângulo está sobre a mediana AD.

A prova de Stevin mostra a direção na qual o método de limites devia ser desenvolvido, no processo de divisões cada vez menores.

Ainda nesse esforço, apareceram no século XVII os trabalhos de Cavarieri (1598-1647), Kepler (1571-1630), Galileu (1564-1642), Roberval (1602-1675) discutindo sobre os indivisíveis . Segundo Baron (1974, p 11-12, v.2) Kepler e Galileu foram os primeiros a abandonarem a estrutura de demonstração utilizada por Arquimedes em troca do uso dos indivisíveis (ou quantidades infinitamente pequenas). Kepler aplicou suas idéias no Cálculo de áreas e volumes, utilizando a noção de que eles eram compostos de uma quantidade infinita de retas ou planos, enquanto que Galileu usou conceitos semelhantes no desenvolvimento dos princípios da cinemática – o estudo do movimento.

Cavarieri transformou o uso da reta e de superfície “indivisíveis” num conjunto poderoso de técnicas para comparar áreas e volumes. A este respeito, Baron aponta que:

> Para Cavarieri, um plano era constituído de um número infinito de retas paralelas eqüidistantes, e um sólido de um número infinito de planos paralelos. Uma reta (ou plano), chamada *regula,* move-se paralelamente a si próprio, gerando intersecções (retas ou planos) em cada uma das figuras (plano ou sólido), até coincidir com suas bases. Estas intersecções (segmentos de retas ou secções planas) constituem os elementos, os indivisíveis, que compõem a totalidade das figuras. Em resumo, Cavarieri, pensava em comparar áreas de figuras planas e volumes de sólidos utilizando a comparação dos indivisíveis (retas ou planos) de uma figura com os da outra. Em notação moderna, se em duas figuras planas A_1 e A_2, para todo par de intersecções correspondentes l_1 e l_2, $l_1 = l_2$, então $A_1 = A_2$, pois de algum modo $\Sigma l_1 = A_1$ e $\Sigma l_2 = A_2$. De maneira semelhante, se em duas figuras sólidas S_1 e S_2, para todo par de intersecções correspondentes p_1, p_2, se $p_1 = p_2$, então $S_1 = S_2$.(BARON, 1974, p 12-13, v. 2).[10]

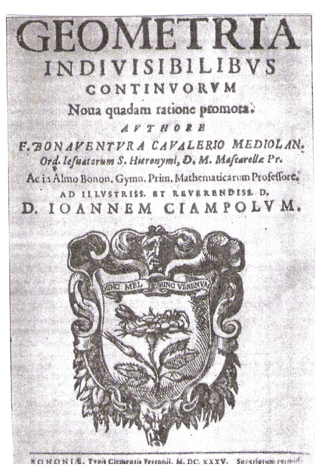


Figura nº 9: Capa do livro de Cavarieri sobre os indivisíveis
Fonte: Baron (1974, p. 13, v.2)

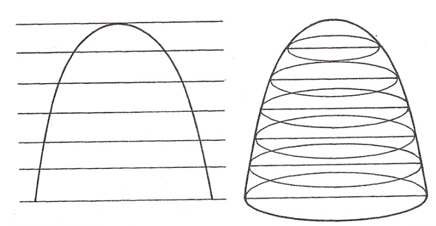


Figura nº 10: Indivisíveis no conóide

Fonte: Baron (1974, p. 12, v. 2)

[10] Tradução de José Raimundo Coelho

O resultado acima corresponde ao que se chama teorema de Cavarieri, que anunciamos a seguir:

> **Teorema**: Se construirmos duas figuras planas quaisquer entre as mesmas paralelas e se ao traçarmos retas eqüidistantes às paralelas os segmentos que interceptam as figuras forem iguais, então as figuras planas serão também iguais e se construirmos duas figuras sólidas entre os mesmo planos paralelos e ao traçarmos planos eqüidistantes dos planos paralelos às secções que interceptam as figuras forem iguais, então as figuras sólidas serão também iguais. (BARON, 1974, p. 14, V. 2).[11]

O trabalho de Cavarieri tornou-se fonte indispensável para os métodos de integração.

Roberval considerou justificável o uso de indivisíveis (retas e planos) e seus argumentos se basearam em três conceitos: linhas entendidas como constituídas de pontos, superfícies de linhas e sólidos de superfícies.

Roberval esclarece o seu ponto de vista dizendo:

> Em tudo isto, é necessário entender que a infinidade de pontos pode ser imaginada como uma infinidade de pequenos segmentos compondo toda reta; a infinidade de retas representa a infinidade de pequenas superfícies compondo toda superfície; a infinidade de superfícies representa a infinidade de pequenos sólidos compondo todo sólido. (BARON, 1974, p. 21 v. 2).[12]

Segundo Baron (idem), Pascal (1623-1662) também defendeu o uso de termos tais como “a soma de retas”, “a soma de planos”, e acentuou que os indivisíveis deviam ser distribuídos uniformemente, no caso de retas e planos a distribuição devia ser tal que as distâncias entre eles fossem iguais.

Na Inglaterra também surgiram idéias de indivisíveis, tal como Baron nos escreve:

> Nenhuma importância fundamental foi atribuída a John Wallis (1616-1703) à diferença entre linhas e paralelogramos, no sentido de que

---

[11] Tradução de José Raimundo Coelho

[12] Tradução de José Raimundo Coelho

um paralelogramo cuja altura é *infinitamente pequena,* ou seja, sem altura (pois quantidade infinitamente pequena não é uma quantidade), difere muito pouco de uma linha. Entretanto, ele afirma que a linha tem que ser vista como se possuísse uma espessura tal que, por processo de infinitas multiplicações, ela se torne capaz de adquirir uma altura igual àquela na qual é inscrita. ...

Wallis introduziu o símbolo $\propto$ para representar muitas linhas (ou paralelogramos) constituindo uma superfície plana: assim se B é a base de um triângulo e A é a sua altura, $\propto$ será o número de linhas na superfície.

O comprimento total das retas é $\propto\frac{B}{2}$ e a altura de cada paralelogramo é $\frac{A}{\propto}$; segue-se que a área dos triângulos é $(\propto\frac{B}{2}) \times (\frac{A}{\propto}) = \frac{AB}{2}$. (BARON, 1974, p. 22-23, v. 2).[13]

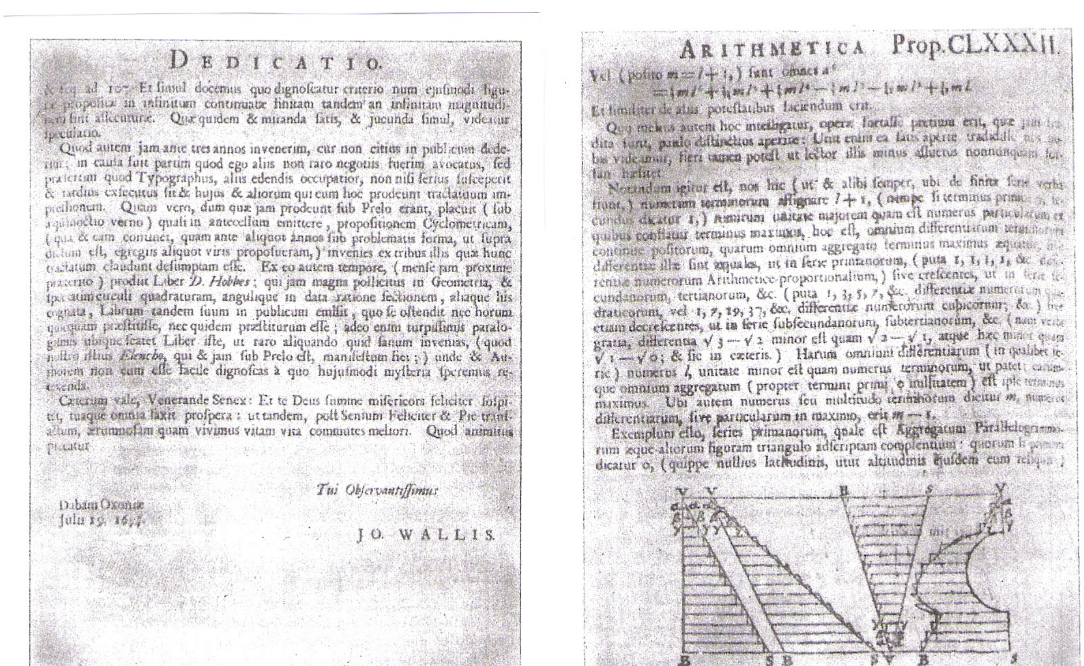


Figura nº 11: A representação de indivisíveis segundo Wallis

Fonte: Baron (1974, p. 22-23, v. 2)

13 Tradução de José Raimundo Coelho

A concepção de Wallis sobre o símbolo $\propto$ era dualista, ora tomado como um número infinitamente grande, ora sujeito às operações aritméticas elementares. Portanto, a explicação que ele oferece não é satisfatória. Contudo, o desenvolvimento do Cálculo é o resultado deste tipo de esforços, tentando substituir o fastidioso método de exaustão por uma análise aritmética direta.

Wallis investigou as potências de Cavarieri na forma aritmética, livre do modelo geométrico, com o seguinte tratamento:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2}$$

em geral: $$\frac{0+1+2+3+...+n}{n+n+n+n+...+n}=\frac{1}{2}$$

Pensando em termos geométricos:

$$\frac{\text{área do triângulo}}{\text{área do rectângulo}}=\frac{1}{2}$$

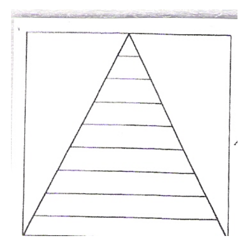


Figura nº 12: Relação entre as áreas do triângulo e do retângulo da mesma base e da mesma altura

Fonte: Baron (1974, p. 24, v. 2)

Para as somas dos quadrados:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

em geral: $$\frac{0+1+4+9+...+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+...+n^2}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2(n+1)}=\frac{2n+1}{6n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

Tomando n suficientemente grande, temos: $$\frac{\sum_{1}^{n} r^2}{(n+1)n^2}\rightarrow\frac{1}{3}$$

Pensando em termos geométricos:

$$\frac{\text{volume do conóide}}{\text{volume do cilindro}} = \frac{1}{3}$$

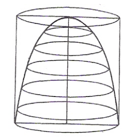


Figura nº 13: Relação entre os volumes do conóide e do cilindro correspondente (circunscrito**)**

Fonte: Baron (1974, p. 24, v. 2)

Wallis prosseguiu seus trabalhos tentando obter resultados adicionais utilizando o mesmo método, para verificar o comportamento geral para parábolas de ordens superiores equivalentes a: $\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$, para p inteiro.

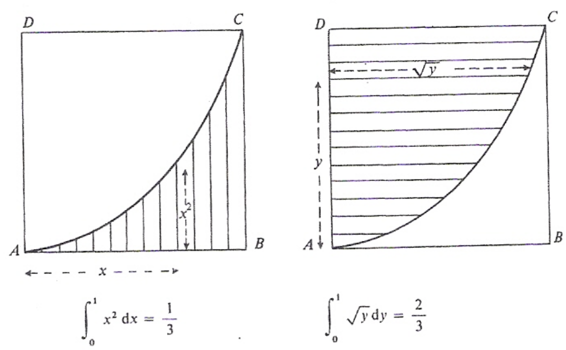


Figura nº 14: áreas sob o gráfico segundo Wallis

Fonte: Baron (1974, p. 25, v. 2)

Algumas conclusões do Wallis sobre as áreas das figuras acima:

Desde que o espaço parabólico ABC dependa das somas dos quadrados [$y = x^2$], segue-se que a área do espaço ABC = $\frac{1}{3}$ do retângulo ABCD e que o espaço ACD (por subtração) = $\frac{2}{3}$ do retângulo ABCD. Mas se tentamos obter o mesmo resultado por adição de retas horizontais (ou faixas) no espaço ACD

[$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$], temos:

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+...+\sqrt{n}} \to \frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

quando n torna-se infinitamente grande.

Segue-se que para preservar a forma geral dos resultados já obtidos, devemos escrever $\sqrt{n} = n^{1/2}$, $n^0 = 1$, e assim por diante.

Fermat (1601-1665) manteve-se fiel à estrutura da demonstração dos gregos e muito crítico a Wallis por se ter afastado dos antigos. Ele estava preocupado em obter métodos mais rigorosos. No exemplo à seguir ele aborda as hipérboles infinitas usando um conjunto de retângulos inscritos cujas áreas se relacionavam por uma progressão geométrica (*proporção continuada* para ele).

Tomando a hipérbole $y = \frac{k}{x^2}$ que é o mesmo que $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)$. Fermat admite que as abscissas estão em progressão geométrica. Assim temos

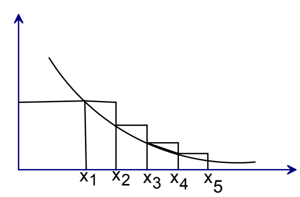


Figura nº 15: área sob o gráfico da hipérbole segundo Fermat

Fonte: Baron (1974, p. 27, v. 2)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = ... \text{ com } \frac{x_1}{x_2} < 1$$

De $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = ...$ segue que $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_3} = ...$ com $x_1 < x_2$.

As áreas dos paralelogramos sucessivos são dadas por: $R_1 = y_1(x_2 - x_1)$, $R_2 = y_2(x_3 - x_2)$, $R_3 = y_3(x_4 - x_3)$ ...

Disso temos que: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_2)} = \frac{y_1 x_1}{y_2 x_2} = \frac{x_2^2 x_1}{x_1^2 x_2} = \frac{x_2}{x_1}$

Do mesmo modo $\frac{R_2}{R_3} = \frac{x_3}{x_2}$ $\qquad \frac{R_3}{R_4} = \frac{x_4}{x_3}$ ...

Então os retângulos estão em progressão geométrica decrescente, e, como tal temos:

$$R_1 + R_2 + R_3 + ... = R_1\left(1 + \frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 ...\right) = \frac{R_1}{1 - \frac{x_1}{x_2}} = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{1 - \frac{x_1}{x_2}} = y_1x_2$$

Na verdade este resultado é a integral de $y = \frac{k}{x^2}$; pois:

$\int_{x_1}^{\infty} ydx = \frac{k}{x_1}$, como $k = y_1x_1^2$, temos: $\int_{x_1}^{\infty} ydx = x_1y_1$

Este resultado falha para $y = \frac{1}{x}$, pois neste caso $\int_1^t \frac{dx}{x} = \ln(t)$. Mas o próprio Fermat já tinha admitido isso.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) desenvolveu um método semelhante.

A integral definida, tal como Boyer (1949, p. 173) se refere, pode ser considerada como tendo sido justamente estabelecida nos trabalhos de Fermat e Wallis. Contudo, estes métodos tinham que ser aperfeiçoados mais tarde para evitar confusões de interpretação como Wallis fez em relação aos infinitesimais onde identifica retângulos infinitamente pequenos com as linhas, a notação $\frac{1}{\propto} = 0$, e ainda à confusão de sujeitar o símbolo $\propto$ às operações aritméticas elementares.

No trabalho de Fermat vemos que o esforço para analisar o problema da quadratura da hipérbole se faz combinando a visualização gráfica da situação e a abordagem algébrica. Há aqui um pensar diferente dos métodos geométricos que constituíam a estrutura de demonstrações desde o tempo dos gregos.

Para além dos problemas de áreas, volumes e centros de gravidades dos corpos que conduziram ao Cálculo Integral, houve uma outra classe de problemas que preocuparam os matemáticos, a classe de problemas que conduziram ao Cálculo Diferencial. Essa classe é de problemas de tangente à curvas em um ponto, problemas de máximos e mínimos e problemas de movimento.

Na definição de Euclides a tangente a um círculo é uma reta que encontra o círculo em apenas um ponto e não o corta (Baron 1974, p. 53, v. 1)

Entre matemáticos que se preocuparam com o problema da tangente encontramos Descartes (1596-1650) e Fermat. Como estes matemáticos estavam envolvidos com a introdução de métodos algébricos na geometria, os novos métodos foram de algum modo expressos em notação algébrica. Na realidade, há uma preocupação de combinar a geometria e álgebra, combinação importante que conduz à formulação correta do Cálculo.

Vejamos exemplos do método de Descartes, a partir de Baron (1974, p. 36, v. 2)

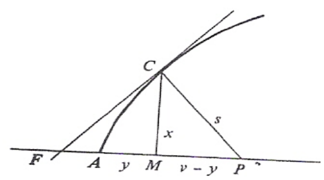


Figura nº 16: método das tangentes de Descartes.

Fonte: Baron (1974, p. 34, v. 2)

Descrição do método:

Dada a parábola de equação: $x^2 = ky$,

Segundo Descartes, tomando v = AP, temos

$x^2 = ky = s^2 - (v - y)^2$ ou seja

$y^2 + y(k - 2v) + (v^2 - s^2) = 0$

P é o centro de uma circunferência que toca a curva em C e de raio CP. Uma equação do segundo grau com duas raízes iguais é dada por $(y - e)^2 = 0$ ou $(y - e)p(x) = 0$, se o grau da equação for maior que 2.

Assim teríamos $y^2 - 2ye + e^2 = 0$.

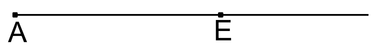
O que implica que $k - 2v = -2e = -2y$, $v - y = \frac{k}{2}$

donde segue que $\frac{k}{2x} = \frac{x}{FM}$ e $FM = \frac{2x^2}{k} = 2y$ e $FA = y$

O método acima baseia-se na determinação da subtangente e da subnormal à curva, onde se observa que

$\frac{\text{subnormal}}{\text{ordenada}} = \frac{\text{ordenada}}{\text{subtangente}}$ = coeficiente angular da reta tangente. Embora com idéias importantes, o método evita o uso de quantidades infinitamente pequenas que é a idéia central para o Cálculo.

Ao contrário de Descartes, Fermat introduziu no seu método algumas idéias associadas ao Cálculo Diferencial. Analisemos algumas passagens do método:

> SOBRE UM MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DE MÁXIMO E MÍNIMO
>
> Dividir o segmento *AC* em *E*, de tal modo que o retângulo *AE · EC* possa ser máximo.
>
> 
>
>
> Seja a reta *AC* dividida em *E*, de tal modo que o retângulo *AE · EC* possa ser um máximo.
>
> Seja *AC* igual a *B* e um dos segmentos igual a *A*: o outro será *B – A,* e o retângulo cujo máximo procuramos, será *BA – Aq.* Agora seja *A + E,* a primeira parte de *B,* o resto será *B – A – E* e o retângulo formado pelos segmentos *BA – Aq + BE - 2AE – Eq,* consideraremos igual a *BA – Aq.* Removendo termos comuns:
>
> *BE ~2AE + Eq*
>
> E dividindo por *E, B* é igual *2A.* Para resolver o problema devemos dividir a reta ao meio: é impossível existir um método mais geral. (BARON, 1974, p. 36, v. 2).[14]
>
> Na notação de Fermat o sinal ~ significava (aproximadamente igual).

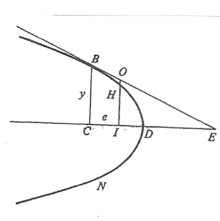


Figura nº 17: método da tangente de Fermat

Fonte: Baron (1974, p. 37, v. 2)

---

[14] Tradução de José Raimundo Coelho

Na notação moderna teríamos:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(A + E) - f(A)}{E} = f'(A) = 0$$

Seja a ordenada de I dada por IH. Como a curva é uma parábola temos $\frac{BC^2}{IH^2} = \frac{CD}{ID}$ e como IO > IH (BE é uma Tangente), então $\frac{CD}{ID} > \frac{BC^2}{OI^2}$;

também $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, logo, $\frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2}$. Tomando CD = x, CE = t (a subtangente),

CI = e; temos $\frac{x}{(x \pm e)} \sim \frac{t^2}{(t \pm e)^2}$ donde se obtém $x(t^2 \pm 2te + e^2) \sim t^2(x \pm e)$

Subtraindo xt^2 de ambos membros; temos $\pm 2xte + xe^2 \sim \pm t^2e$

Ou seja $\pm 2xt + xe \sim \pm t^2$ e removendo ex, temos $2x = t$.

O método de diferenciação de Fermat exige que determinemos a subtangente para determinar a tangente.

Algumas dificuldades em relação a este método, segundo Baron (1974, p. 38, v. 2) relacionam-se com a falta de explicação do aparecimento da quantidade *e*, do seu papel relevante na constituição das equações e do seu desprezo para obter a construção correta. E ainda, tomando a tangente como uma reta que encontra a curva em um ponto, ao invés do limite de cordas, não é fácil imaginar o que na realidade estava sendo maximizado (minimizado).

Usando a idéia de movimento e da propriedade da diretriz focal, Roberval deduziu a tangente a uma parábola num ponto.

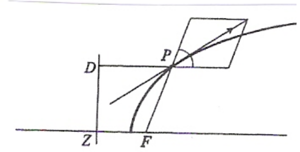
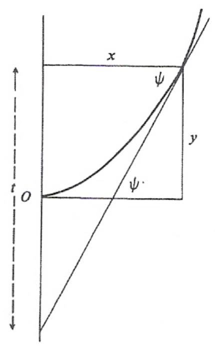


Figura nº 18: Roberval e o método da tangente
Fonte: Baron (1974, p. 39, v. 2)

No desenho acima, Roberval analisou que o ponto P se desloca pela curva através de movimentos compostos iguais, como FP = DP, o movimento ao longo de FP = movimento ao longo de DP e a tangente é obtida por bissecção do ângulo formado por FP e DP.

Segundo Baron (1974, p. 40, v. 2) “O problema de quadratura e construções pelo método de tangente para curvas do tipo y = x^n (n inteiro positivo) foi gradualmente estabelecido, por um método ou outro, durante a primeira metade do século XVII”.



Usando a notação moderna, vamos escrever estes resultados:

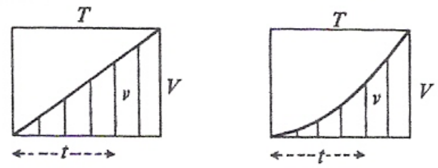
Curva	Quadratura	Subtangente
$y = f(x)$	$\int_0^x f(x)\,dx$	$t = xf'(x)$
$y = x$	$x^2/2 = xy/2$	$y[= x]$
$y = x^2$	$x^3/3 = xy/3$	$2y[= 2x^2]$
$y = x^3$	$x^4/4 = xy/4$	$3y[= 3x^3]$
$y = x^4$	$x^5/5 = xy/5$	$4y[= 4x^4]$
. . . .	. . . .	. . . .
$y = x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{xy}{n+1}$	$ny[= nx^n]$

Figura nº 19: A relação entre integração e diferenciação segundo Torricelli e Barrow
Fonte: Baron (1974, p. 40, v. 2).

Com a mesma preocupação, Torricelli (1608-1647) procurou relacionar tangente e quadratura diretamente através do conceito de movimento, generalizando e estendendo as idéias já desenvolvidas por Galileu e Cavarieri. As idéias nas quais Torricelli se baseou foram:

1 – A noção medieval do gráfico velocidade-tempo, no qual a distância percorrida é representada pela área sob a curva;

2 – A abordagem de Cavarieri da quadratura considerando a soma de retas e os resultados por ele obtidos para quadratura de curvas.



$s = \Sigma\, v = \frac{VT}{2}$ $\qquad$ $s = \Sigma\, v = k\,\Sigma\, t^2 = \frac{VT}{3}$

$$v = kt, \quad s = \Sigma kt = VT/2 = kT^2/2$$
$$v = kt^2, \quad s = \Sigma kt^2 = VT/3 = kT^3/3$$
$$v = kt^3, \quad s = \Sigma kt^3 = VT/4 = kT^4/4$$

e, em geral,

$$v = kt^n, \quad s = \Sigma kt^n = VT/(n+1) = \frac{kT^{n+1}}{n+1}.$$

Figura nº 20: Quadratura segundo Torricelli**.**
Fonte: Baron (1974, p. 41, v. 2)

A seguir apresentamos o raciocínio de Torricelli, segundo Baron, para a construção da tangente:

Agora, considere um ponto movendo-se ao longo de uma curva OPQ com duas componentes de velocidade: uma *horizontal* e uma *vertical*. Suponha que a velocidade horizontal seja *uniforme* de tal modo que a *distância horizontal* pode ser considerada "como uma medida de tempo", isto é, $x = t$, $u = 1$ (onde x é a distância horizontal percorrida no tempo t, e u a velocidade uniforme horizontal). Agora, seja a velocidade vertical no tempo t denotada por v, onde $v = kt^n = kx^n$.

Suponha que, depois de um tempo T, o ponto alcance $Q(X, Y)$ com velocidades horizontal e vertical U e V, respectivamente. Como $U = u = 1$, $V = kt^n$, a construção da tangente será feita por $V/U = V = kT^n = ZR/X$.

Mas $X = T$, $Y = \Sigma kt^n = VT/(n+1) = \frac{kT^{n+1}}{n+1}$, logo

$$Y = \frac{kX^{n+1}}{n+1}$$

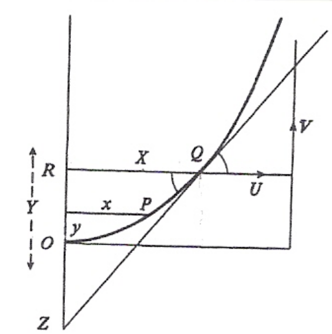


Figura nº 21: Método de construção da tangente segundo Torricelli.
Fonte: Baron (1974, p. 41, v. 2)

Neste trabalho vemos que a subtangente y para qual cada um dos métodos focaliza para sua determinação se assemelha ao Cálculo da integral de $f(x) = kx^n$ (para algum n inteiro positivo). E a tangente é determinada a partir da subtangente. Está havendo aqui um método de relacionamento estreito entre a subtangente e a tangente.

James Gregory (1638-1675) procurou estender e generalizar o método de exaustão no qual a quantidade requerida era inscrita entre seqüências de figuras inscrita e circunscrita, isto é: $I_1<I_2<I_3<I_4< \ldots <I_n<L<C_n<C_{n-1}< \ldots <C_3<C_2<C_1$

Gregory tentou estabelecer as condições para as quais se podia assumir que $L = \lim_{n \to \infty} (I_n) = \lim_{n \to \infty} (C_n)$

Assim Gregory estava esboçando o início de uma teoria de convergência para as seqüências do tipo acima apresentadas. Gregory foi o primeiro a usar a palavra convergir para se referir ao fato das seqüências acima tenderem para L (Boyer, 1996, p. 265). Gregory tinha clara compreensão da relação inversa entre tangente e quadratura. Segundo Baron

> Na proposição VI ele passa diretamente da quadratura de uma curva à construção da tangente de uma outra curva, isto é, $ku = \int_0^x z\,dx \Rightarrow k\frac{du}{dx} = z$. Podemos considerá-la como a primeira afirmação pública, em forma geométrica, do que agora conhecemos como o teorema fundamental do Cálculo. Se Gregory se o considerou como fundamental, é uma outra questão! (BARON, 1974, p. 44, v. 2).[15]

Temos assim que, gradualmente, e com caráter de complementaridade, estão se estabelecendo resultados importantes sobre o Cálculo.

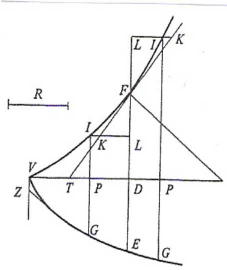
Barrow (1630-1677) teve resultados semelhantes aos do Gregory. Na proposição 11, lição X, usando uma forma geométrica ortodoxa de demonstração (comparável aos métodos geométricos gregos) ele apresentou o que hoje conhecemos como o *teorema fundamental do Cálculo* (Baron, 1974, p. 45, v. 2).

O teorema que ele prova é equivalente a: $Ry = \int_0^x z\,dx \Rightarrow R\frac{dy}{dx} = z.$

Vejamos como ele procede:

---

[15] Tradução de José Raimundo Coelho



XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D, ad quam imprimis applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) eſtque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G, ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde eſt L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, *infra* punctum F, reliquáq; fiant, uti prius; ſimilique jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

1 Seja qualquer curva ZGE, com eixo VD; suponhamos primeiro que
2 as ordenadas VZ, PG, DE perpendiculares a VD, cresçam continuamente a partir do primeiro VZ. Seja a curva VIF tal que, traçando-se
3 qualquer reta EDF perpendicular a VD (que corta as curvas nos pontos E, F e VD em D), o *retângulo* sob DF e qualquer reta dada
4 R, pode ser respectivamente igual ao *espaço* interceptado $VDEZ$;
5, 6 faça agora $DE : DF :: R : DT$, e trace a reta TF: esta tocará a curva VIF.

7 Tome qualquer ponto I na curva VIF (primeiro acima do ponto F, em direção ao início V) e, através disto, trace as retas IG, KL
8 paralela a VZ, VD (cortando a curva, como o esquema) então $LF : LK :: (DF : DT ::)\ DE : R$; então $LF \times R = LK \times DE$. Mas (por
9 superposição) $LF \times R$ é igual ao espaço $PDEG$. Portanto $LK \times DE =$
10 $= PDEG \sqsupset DP \times DE$. Daí $LK \sqsupset DP$, ou $LK \sqsupset LL$.

11 Novamente tome qualquer ponto I, abaixo do ponto F, e faça o mesmo procedimento anterior. Então, por razões semelhantes, parece que $LK \times DE = PDEG \sqsubset DP \times DE$; portanto $LK \sqsubset DP$, ou LI. Donde se conclui que a reta inteira $TKFK$ cai dentro (ou fora) da curva $VIFI$.

As coisas continuam como antes se as ordenadas VZ, PG, DE continuam a decrescer; a conclusão e o raciocínio serão os mesmos, com uma única diferença – é que a curva VIF é côncova com relação ao eixo VD[18].

Figura nº 22: Isaac Barrow e o Teorema Fundamental do Cálculo.
Fonte: Baron (1974, p. 45, v. 2)

A demonstração acima é difícil, como é feito geometricamente e não em coordenadas cartesianas, traz uma certa complicação em ver onde está exatamente o “Cálculo” no processo; a notação usada não é facilmente percebida, especialmente a introdução do elemento R cria dificuldade para perceber o que ele significa realmente.

Apesar destas complicações, Barrow estabelece um dos resultados mais importantes do Cálculo, *o Teorema Fundamental do Cálculo.*

3. 1. A COROAÇÃO DOS RESULTADOS DE ESFORÇOS SECULARES: NEWTON E LEIBNIZ

Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) ocupam uma posição central na história do Cálculo. Com eles os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral alcançaram maturação completa. Analisemos alguns de seus trabalhos:

3. 1. 1. ISAAC NEWTON

Newton desenvolveu seu trabalho tendo como base as ideias de geração de curvas por movimento. Essas idéias constituíram a fundamentação das noções básicas do seu Cálculo do que ele chamou de *método das fluxões.*

Neste sentido se v, x, y, z são os fluentes, isto é, são as variáveis que aumentam ou diminuem com o tempo, então $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ são as fluxões ou as velocidades dessas quantidades. Dada a equação, por exemplo, $y = x^2$, a fluxão de x é $\dot{x}$, a fluxão de y é $\dot{y}$, a relação entre a fluxão de x e a fluxão de y é $\dot{y} = 2x\dot{x}$ e x possui movimento uniforme, portanto $\dot{x} = 1$, assim ficamos com $\dot{y} = 2x$

A seguir é exemplo de como Newton achou uma relação entre as fluxões de quantidades quando uma relação entre os seus fluentes era conhecida:

> DEMONSTRAÇÃO
>
> Os momentos das quantidades fluentes (quer dizer, as suas partes infinitamente pequenas, pela adição das quais elas aumentam durante um período qualquer de tempo infinitamente pequeno) estão relacionados com as suas velocidades de fluxo. Por essa razão, se o momento de cada uma e em particular se x for expresso pelo produto da sua velocidade $\dot{x}$ por uma quantidade *o* que é infinitamente pequena (quer dizer, por $\dot{x}o$) então os momentos das outras *v, y, z, ...* serão expressos por $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$ ... o que mostra que $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ e $\dot{z}o$ estão relacionados como $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$.
>
> Agora, como os momentos (digamos $\dot{x}o$, $\dot{y}o$) das quantidades fluentes (digamos x e y) são os incrementos infinitamente pequenos, pelos quais aquelas quantidades aumentam durante cada intervalo de tempo infinitamente pequeno, segue aquelas quantidades x e y, depois de qualquer intervalo infinitamente pequeno, tornar-se-ão $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$. Conseqüentemente, uma equação que expressar uma relação uniforme entre as quantidades fluentes em todos os

> instantes expressará aquela relação uniforme entre $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ da mesma maneira como entre x e y.
>
> Portanto, $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ podem ser substituídos pelas últimas quantidades x e y na equação considerada. Dada a equação $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, substitua $x + \dot{x}o$ em lugar de x e $y + \dot{y}o$ em lugar de y: surgirá
>
> $$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$
>
> Agora, pela hipótese $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ quando estes termos forem cancelados e o resto dividido por *o*, restará
>
> $$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^2 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x +$$
>
> $$+ a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy + \dot{y}^3o^2 = 0$$
>
> Supondo-se *o* infinitamente pequeno, afim de expressar os momentos das quantidades, os termos que contém *o* como fator podem ser desprezados. Portanto, restará $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$ como no exemplo acima.
>
> Deve-se observar que os termos não multiplicados por *o* sempre desaparecerão, como também os que são multiplicados por *o* em mais de uma dimensão. Da mesma forma, os termos restantes depois da divisão por *o* sempre aceitarão a forma que devem ter de acordo com esta regra. É isso que queria mostrar. (NEWTON, apud BARON e BOS 1974, p. 28-29, v. 3).[16]

O conceito de infinitamente pequeno desempenha um papel crucial na demonstração de Newton. Segundo Boyer (1949, p. 200), Newton desenvolveu três maneiras de interpretar a nova análise: uma em termos de infinitesimais, outra em termos de primeira e última razão e ainda outra em termos de fluxões. Baron e Bos (1974, p. 36, v. 3) referem que no tratado sobre fluxões Newton formulou os dois problemas fundamentais que correspondem à diferenciação e à integração nos seguintes termos:

Dada a relação mútua entre as quantidades fluentes, determinar a relação entre as fluxões;

---

[16] Tradução de Rudolf Maier

Quando for exibida uma equação que envolva as fluxões das quantidades, determinar a relação das quantidades entre si.

Na passagem abaixo Newton mostra essa relação:

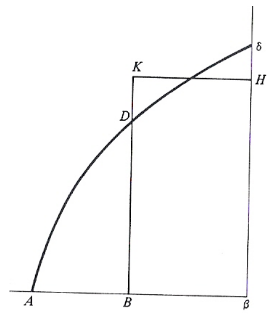


Figura nº 23: Newton e a relação entre a derivada e a integração
Fonte: Baron e Bos (1974, p. 23-24, v. 3)

> Retrospectivamente, dois pontos antes de todos os outros precisam de uma demonstração. Preparação para demonstrar a primeira regra.
>
> 1 A quadratura de curvas simples segundo a regra 1. Seja então ADδ uma curva qualquer que tem a base *AB* = x, a ordenada perpendicular *AD* = y e a área *ABD* = *z,* como antes. Simultaneamente seja $B\beta = o$, $BK = v$ e seja retângulo $B\beta HK$ (ov) igual ao espaço $B\beta\delta D$. Portanto, $A\beta = x + o$ e $A\delta\beta = z + ov$. Com estas premissas procuro y, a partir de um relacionamento arbitrário entre *x* e *z* da seguinte maneira,
>
> Tome $\frac{2}{3}x^{3/2} = z$ ou $\frac{4}{9}x^3 = z^2$. Então, se $x + o$ ($A\beta$) for substituído em lugar de *x* e $z + ov$ ($A\delta\beta$) em lugar de *z* surgirá (pela natureza da curva)
>
> $$\frac{4}{9}(x^3 + 3x^2 o + 3xo^2 + o^3) = z^2 + 2zov + o^2v^2$$
>
> Eliminando-se as quantidades ($\frac{4}{9}x^3$ e z^2) e dividindo-se o resto por o sobra $\frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + ov^2$. Se supusermos que $B\beta$ é infinitamente pequeno, quer dizer, que o seja zero, *v* e *y* serão iguais e os termos multiplicados por o desaparecerão e, conseqüentemente restará $\frac{4}{9} \times 3x^2 = 2zv$ ou $\frac{2}{3}x^2$ (= zy) = $\frac{2}{3}x^{3/2}y$, quer dizer, $x^{1/2}$ (= $x^2/x^{3/2}$) = y. Reciprocamente, portanto, se $x^{1/2} = y$, teremos $\frac{2}{3}x^{3/2} = z$.

Demonstração

Ou em geral, se $\frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n} = z$, quer dizer, ao colocar $na/(m + n) = c$ e $m + n = p$, se $cx^{p/n} = z$ ou $c^n x^p = z^n$, então, se $x + ox$ for substituído em lugar de x e $z + ov$ (ou equivalentemente, $z + ov$) em lugar de z, surgirá

$c^n(x^p + pox^{p-1} ...) = z^n + noyz^{n-1} ....$

omitindo-se os outros termos, os quais foram desprezados, para sermos exatos. Agora, eliminando-se os termos iguais $c^n x^p$ e z^n e dividindo-se o resto por o, vai sobrar $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}(= nyz^n/z) = nyc^n x^p/cx^{p/n}$. Quer dizer, ao dividir por $c^n x^p$, $px^{-1} = ny/cx^{p/n}$ ou $pcx^{(p-n)/n} = ny$; em outras palavras, pela restauração de $na/(m + n)$ para c e $m + n$ para p, quer dizer, m para $p - n$ e na para pc,teremos $ax^{m/n} = y$. Reciprocamente, portanto, se $ax^{m/n} = y$, então $[n/(m + n)]ax^{(m+n)/n} = z$. Como queríamos demonstrar. (BARON e BOS, 1974, p. 23-24, v. 3).[17]

Em notação moderna diríamos que se $y = ax^p$ então $\int_0^x y dx = \frac{ax^{p+1}}{p+1}$

e reciprocamente se $Y = \int_0^x y dx = \left(\frac{ax^{p+1}}{p+1}\right)$, então $Y' = \left(\int_0^x y dx\right)' = \left(\frac{ax^{p+1}}{p+1}\right)' = y$

Das passagens acima vemos que Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para o Cálculo infinitesimal. Ele alargou o âmbito de aplicação das técnicas da diferenciação e da integração, diferentemente do que acontecia com os seus predecessores.

[17] Tradução de Rudolf Maier

3. 1. 2. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Para Baron e Bos, as três idéias importantes que fundamentaram o Cálculo para Leibniz, foram:

> O interesse de Leibniz pelo simbolismo e pela notação, vinculado à sua idéia de uma linguagem simbólica geral;
>
> O reconhecimento de que somar seqüências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que, semelhantemente, a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas;
>
> O triângulo característico e o seu uso para deduzir transformações gerais de áreas (por exemplo a transmutação). (BARON e BOS, 1974, p. 52, v. 3).[18]

Baseando nas idéias de Cavarieri, Leibniz observou que o problema da quadratura poderia ser considerado como a adição de ordenadas eqüidistantes. A figura abaixo ilustra a situação:

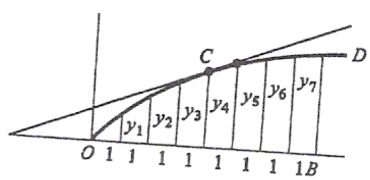


Figura nº 24: Leibniz explorando a relação entre a diferenciação e a integração
Fonte: Baron e Bos (1974, p. 46, v. 3)

Se a distância entre as ordenadas é igual a l, então a soma das ordenadas é aproximadamente igual a área por baixo da curva. As diferenças das ordenadas consecutivas na seqüência é aproximadamente o declive das tangentes . Se a unidade l for escolhida menor, as aproximações da área e do declive da tangente tornar-se-ão melhores. Leibniz esperava que, se a unidade fosse escolhida infinitamente pequena, as aproximações tornar-se-iam exatas. Nesse processo ele viu analogia entre o Cálculo de diferenças finitas e de somas, por um lado, e a

---

[18] Tradução de Rudolf Maier

determinação de áreas e de tangentes, pelo outro (Baron e Bos 1974, p. 46, v. 3). Assim adição das seqüências corresponderia a quadratura de curvas e tomar diferenças corresponderia à determinação das tangentes. A relação inversa entre tomar somas e diferenças sugeriu a Leibniz que

> As determinações de áreas e de tangentes também são operações inversas
>
> Assim surgiu, apesar de estar indefinida nesse período, a idéia de um Cálculo de diferenças infinitamente pequenas e de somas de seqüências de ordenadas que servissem para resolver os problemas de quadraturas e de tangentes, problemas cuja reciprocidade foi reconhecida. (BARON e BOS, 1974, p. 46, v. 3). [19]

Leibniz aperfeiçoou os conceitos de diferenças infinitamente pequenas e somas de seqüências, introduzindo uma notação adequada. Usou o símbolo $\int$ para soma de retângulos infinitamente pequenos, e o símbolo *d* para indicar a diferença entre duas ordenadas vizinhas.

Definições importantes que Leibniz introduziu no seu estudo foram as definições de diferencial e integral. Para Leibniz,

> A diferencial de uma variável y é a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de y. ... dy é a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y e dx é a diferença infinitamente pequena entre duas abcissas x; portanto dx é a distância entre duas ordenadas y consecutivas. ... A soma, ou integral, $\int ydx$ é a soma de retângulos infinitamente pequenos $y \times dx$; portanto, $\int ydx$ é a área da curva (BARON & BOS 1974, p. 59-60).

A figura a seguir ilustra o significado geométrico das definições acima:

[19] Tradução de Rudolf Maier

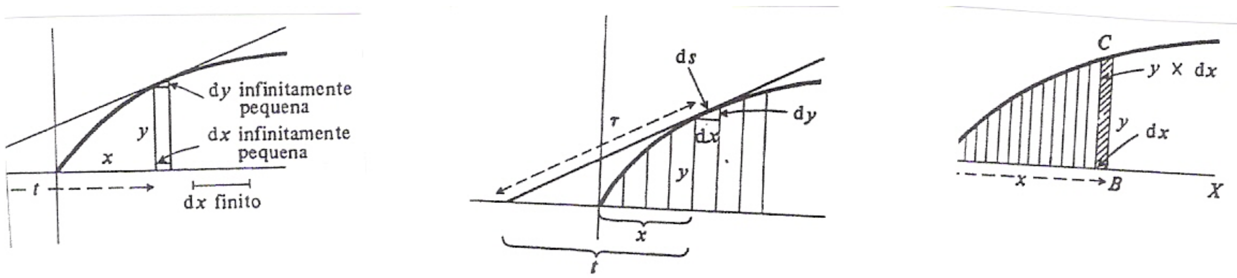


Figura nº 25: Leibniz, visualizando os conceitos de base da diferenciação e da integração.
Fonte: Baron e Bos (1974, p. 58, 60 e 62, v. 3).

Leibniz introduziu as regras operatórias com as diferenciais e a integral

A contribuição de Newton e Leibniz na constituição do Cálculo é inestimável. Estes dois homens, segundo Baron e Bos,

> Criaram um sistema coerente de métodos a fim de resolver problemas sobre curvas (quadraturas, tangentes, ...). Seus métodos não dependeram da natureza especial das curvas tratadas. Portanto, o alcance desses métodos foi mais amplo do que o dos métodos anteriores. Através de Newton e Leibniz os métodos infinitesimais chegaram a formar uma teoria coerente e poderosa. Em resumo, foi a obra deles que permitiu falar em Cálculo pela primeira vez.
>
> A coerência dos sistemas de Leibniz e Newton foi atingida devido ao reconhecimento do teorema fundamental do Cálculo. A relação inversa entre a diferenciação e a integração. Através dele reconheceu-se o relacionamento recíproco entre os problemas de quadraturas e tangentes, que foram considerados anteriormente como problemas separados.
>
> Newton e Leibniz inventaram um sistema de notação e de símbolos pelo qual podiam aplicar analiticamente seus novos métodos, quer dizer, pelo uso de fórmulas ao invés de figuras e a descrição verbal por argumentos geométricos. Seus métodos foram explicitados na forma de um algoritmo claro e simples, um aparato de regras de Cálculo para as formulas. (BARON e BOS, 1974, p. 69, v. 3).[20]

[20] Tradução de Rudolf Maier

Na realidade os trabalhos de Newton e Leibniz representam a coroação de resultados de esforços que se faziam desde Arquimedes para estudar matematicamente as variações.

3. 2. OUTROS PASSOS EM FRENTE: APERFEIÇOAMENTO E O RIGOR

No século XVIII foi-se difundindo o Cálculo leibniziano e newtoniano, com particular destaque nos trabalhos de Jacob e Johann Bernoulli (1654-1705 e 1667-1748 respectivamente) e l´Hospital (1661-1704). A difusão desencadeou debates e críticas sobre as questões básicas do Cálculo. Algumas das críticas no debate foram do George Berkeley (1685-1753) que considerava haver uma falta de consistência nos fundamentos do Cálculo de Newton assim como de Leibniz. Ele considerava vagos os conceitos de base:

> Quantidades extremamente (ou infinitamente) pequenas, chamadas infinitesimais, diferenças, incrementos mínimos ou momentos, não podem ser concebidas claramente.
>
> A prática de trabalhar com tais quantidades no Cálculo envolve uma contradição: primeiramente supõe-se que elas sejam diferentes de zero, e depois iguais a zero,. A falta de clareza ocorre ainda ao considerarmos somente as razões dessas quantidades e interpretarmos essa razão como uma razão primeira ou última de aumentos nascentes ou evanescentes. (BOS, 1974, p. 22, v. 4).[21]

Segundo Bos (1974, p. 22, v. 4) a crítica de Berkeley deixou claro a um grande público aquilo que já era conhecido desde o começo dos trabalhos de Newton e Leibniz: que os fundamentos do novo método eram ainda bastante instáveis. Após muitas tentativas de solução no século XVIII, os conceitos de base do Cálculo foram firmemente fixados no século XIX. A solução foi de:

> considerar variáveis como funções de uma variável independente;

[21] Tradução de Mª José Matoso Miranda Mendes

> usar um conceito de limite bem explícito na definição da função derivada.
>
> Desta forma, as quantidades variáveis do Cálculo de 1700 foram substituídas por funções; as fluxões e diferenciais foram substituídas pela função derivada e a falta de clareza com relação às infinitesimais e razões últimas foi eliminada através do conceito de limite. ... (BOS, 1974, p. 22-23, v. 4).[22]

Com estes desenvolvimentos, os conceitos de função e de limites de funções já podiam prover ao Cálculo uma base rigorosa, que se consegue através dos trabalhos de Cauchy, dos quais apresentamos alguns trechos a seguir.

> Se a função y = *f*(x) for contínua entre dois limites dados da variável x, então, para qualquer valor de x dentro dos limites, um aumento infinitesimal pequeno da variável produzirá um aumento infinitamente pequeno da própria função. Portanto, se dissermos que $\Delta x = i$, os dois termos da *razão das diferenças*
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$
>
> serão quantidades infinitamente pequenas. Mas, enquanto que esses dois termos aproximar-se-ão infinitamente de zero, sua razão pode convergir para algum outro limite positivo ou negativo. Esse limite, quando existe, tem um valor definido para cada valor específico de x, mas varia com x. Portanto, se, por exemplo, tomarmos $f(x) = x^m$, onde *m* é um número inteiro, a razão entre as diferenças infinitamente pequenas será:
>
> $$\frac{(x + i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^{m-2}i + \ldots + i^{m-1}$$
>
> e seu limite será a quantidade mx^{m-1}, que é uma nova função da variável x. Isso será verdadeiro em geral, mas a forma da nova função que serve como limite da razão $\frac{f(x + i) - f(x)}{i}$ dependerá da forma da função inicial y = *f*(x). Indicamos essa dependência chamando a nova função de “função derivada”, designando-a pelo uso de um apóstrofo na notação: *y’* ou *f’*(x). (CAUCHY, apud BOS, 1974, p. 48 –49, v. 4).[23]

---

[22] Tradução de Mª José Matoso Miranda Mendes

[23] Tradução de Mª José Matoso Miranda Mendes

Desta forma Cauchy combina o conceito de limite com o conceito de função. Para x fixo, $\frac{f(x + i) - f(x)}{i}$ é uma função de *i*, não uma mera variável. À medida que *i* aproxima-se de zero, $\frac{f(x + i) - f(x)}{i}$ move-se de uma maneira determinada em seu domínio e seu limite é um conceito bem definido.

Segundo Bos (ibid), tendo apresentado a derivada rigorosamente, sem ter recorrido a diferenciais, Cauchy elabora, então, uma interpretação das diferenciais que o capacita a manipulá-las em fórmulas, como já era feito antes, porém sem considerá-las infinitamente pequenas. Ele define as diferenciais da seguinte forma:

> Seja y = f(x) novamente uma função de *variável* independente x.
>
> Seja *i* uma quantidade infinitamente pequena e *h* uma quantidade finita. Se dissermos que $i = \alpha h$, α será, novamente, uma quantidade infinitamente pequena, e teremos a identidade:
>
> $$\frac{f(x + i) - f(x)}{i} = \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha h}$$
>
> da qual deduzimos
>
> $$\frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i}h. \qquad (1)$$
>
> O limite para o qual converge o lado esquerdo da equação (1) à medida que α se aproxima infinitamente de zero e *h* permanece constante é chamado "diferencial" da função y = f(x). A diferencial é indicada pelo *d* característico:
>
> dy ou $df(x)$.
>
> Seu valor pode ser facilmente determinado se soubermos o valor da função derivada y' ou $f'(x)$. De fato, se tomarmos os limites de ambos os lados da equação (1), acharemos o resultado geral:
>
> $df(x) = hf'(x)$. (2)
>
> No caso especial quando $f(x) = x$, a equação 2 reduz-se a
>
> $dx = h$.
>
> Assim, a diferencial da variável independente x é precisamente a constante finita *h*. Dado isso, a equação (2) torna-se
>
> $df(x) = f'(x)dx$
>
> ou, equivalentemente
>
> $dy = y'dx$.

> Estas últimas equações mostram que a derivada *y'* = *f'*(x) de qualquer função y = *f*(x) é precisamente igual a $\frac{dy}{dx}$, isto é, a razão entre a diferencial da função e a diferencial da variável ou, se quisermos, ao coeficiente pelo qual devemos multiplicar a segunda diferencial afim de obtermos a primeira. É por isso que a derivada é chamada às vezes de "coeficiente diferencial". (BOS, 1974, p. 49-50, v. 4).[24]

Em relação à integração, Cauchy apresentou um outro enfoque, mais próximo dos conceitos de Leibniz e de outros do começo do século XVII, definindo-a como uma soma, ao invés de considerá-la como operação inversa da diferenciação, concepção de Newton e de Bernoulli, geralmente aceita no século XVIII (Bos 1974, p. 50 e Palaro 2006, p. 124). Assim, desfez-se a inter-relação entre a diferenciação e a integração como operações inversas que reinou até a época do Cauchy.

Ele definiu a integral como um somatório que tende a um limite, da maneira como segue:

> Suponhamos que a função y = *f*(x) seja contínua com relação à variável x entre os limites finitos $x = x_0$ e x = X. Marquemos por x_1, x_2, ..., x_{n-1}, novos valores de x entre esses limites, valores esses que supomos variar do primeiro limite ao segundo. Podemos usar esses valores para dividir a diferença $X – x_0$ em elementos:
>
> $x_1 – x_0, x_2 – x_1, x_3 – x_2, ..., X – x_{n-1}$ (1)
>
> que terão sempre o mesmo sinal. Consideremos agora o efeito de multiplicarmos cada um desses elementos pelo valor de *f*(x) correspondente à *origem* do mesmo elemento: assim, multiplicamos o elemento $x_1 – x_0$ por $f(x_0)$, o elemento $x_2 – x_1$ por $f(x_1)$, ..., e, finalmente, o elemento $X – x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$. Seja
>
> $S = (x_1 – x_0)f(x_0) + (x_2 – x_1)f(x_1) + ... + (X – x_{n-1})f(x_{n-1})$ (2)
>
> a soma dos produtos obtidos dessa maneira. A quantidade S claramente dependerá: 1) de n, o número de elementos nos quais a diferença $X – x_0$ foi dividida, e, 2) dos valores reais desses elementos, e, portanto, da maneira como foi feita a divisão.

---

[24] Tradução de Mª José Matoso Miranda Mendes

Deve ser observado agora que, se os valores numéricos dos elementos se tornarem muito pequenos e se o número *n* tornar-se muito grande, a maneira de divisão terá apenas um efeito desprezível sobre o valor de S. Isso pode ser provado como se segue:

Se admitíssemos todos elementos da diferença $X - x_0$ reduzidos a um único, que seria essa própria diferença, teríamos simplesmente

$$S = (X - x_0)f(x_0).$$

Quando, ao contrário, consideramos as expressões (1) como elementos da diferença $X - x_0$, o valor de S, determinado nesses casos pela equação (2), é igual à soma dos elementos multiplicada por uma média entre os coeficientes

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_{n-1}).$$

[...] Aliás, estes coeficientes sendo valores particulares da expressão

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

que correspondem aos valores de θ compreendidos entre zero e a unidade, provaremos, por raciocínios semelhantes aos que usamos na sétima Lição, que a média da qual se trata é um outro valor da mesma expressão, correspondente a um valor de θ entre os mesmos limites. Poderemos, portanto, substitui a equação (2) pela seguinte

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

na qual θ será um número inferior a unidade.

[...] Portanto, quando elementos da diferença $X - x_0$ tornam-se infinitamente pequenos, o modo de divisão não terá mais que uma influência insensível sobre o valor de S; e se diminuir indefinidamente os valores numéricos desses elementos, aumentando seu número, o valor de S terminará sendo sensivelmente constante ou, em outros termos, ele alcançará um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e dos valores extremos x_0 e X atribuídos à variável x. Este limite é o que chamamos uma *integral definida.* (CAUCHY, 1823, p. 122-125, apud PALARO 2006, p. 124-126 e BOS, 1974, p. 50-51, v. 4[25]).

---

[25] Tradução de Mª José Matoso Miranda Mendes

Uma vez que a integração não é mais definida como o inverso da diferenciação, o Teorema Fundamental do Cálculo não é mais um corolário da definição da integração, mas deve ser provado.

> Para apresentar essa prova, Cauchy usou o teorema do valor médio para integrais, ou seja,
>
> $$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)] \qquad \text{(i)}$$
>
> em que $0 \leq \theta \leq 1$; e o teorema da aditividade que garante que
>
> $$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx \qquad \text{(ii)}$$
>
> sendo ξ um valor interpolado entre x_0 e X (CAUCHY, 1823, p. 134-137, apud PALARO, 2006, p. 126-127).

O Teorema Fundamental do Cálculo afirma que: Se *f* é uma função contínua em $[x_0, X]$, se $x \in [x_0, X]$ e se $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$, então $F'(x) = f(x)$.

Para provar o teorema, Cauchy inicia afirmando:

> Se, na integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, variamos um dos limites, por exemplo a quantidade X, a própria integral variará com esta quantidade; e, se substituímos o limite X, que se tornou variável, por x, obteremos como resultado uma nova função de x, que será o que chamamos uma integral tomada a partir da *origem* $x = x_0$. Seja
>
> $$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \qquad (1)$$
>
> esta nova função.
>
> Da fórmula (i) obtém
>
> $$F(x) = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)] \text{ e } F(x_0) = 0 \qquad (2)$$
>
> sendo θ um número entre 0 e 1.
>
> E, da fórmula (ii) obtém

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(\mathrm{x})dx - \int_{x_0}^{x} f(\mathrm{x})dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(\mathrm{x})dx = \alpha f(\mathrm{x} + \theta\alpha) \text{ ou} \qquad (3)$$

$$F(\mathrm{x} + \alpha) - F(\mathrm{x}) = \alpha f(\mathrm{x} + \theta\alpha).$$

> E, então conclui que:
>
> Segue das equações (2) e (3) que, se a função $f(\mathrm{x})$ é finita e contínua na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x, a nova função $F(\mathrm{x})$ será não somente finita, mais ainda contínua na vizinhança desse valor, uma vez que um acréscimo infinitamente pequeno em x corresponderá um acréscimo infinitamente pequeno em $F(\mathrm{x})$. Portanto, se a função $f(\mathrm{x})$ permanece finita e contínua, desde $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ até x = X, será da mesma maneira para a função $F(\mathrm{x})$. Além disso, se dividimos ambos os membros da fórmula (3) por α, passando aos limites, concluiremos que
>
> $$F'(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}).$$
>
> Portanto, a integral (1), considerada como função de x, tem por derivada a função $f(\mathrm{x})$ contida sob o sinal $\int$ dessa integral.
>
> (CAUCHY, 1823, p. 151-152, apud PALARO, 2006, p. 126-128 e BOS, 1974, p. 52-53, v. 4[26]).

Com referência aos trabalhos de Cauchy terminamos o exame dos conceitos fundamentais do Cálculo. Cauchy deu ao Cálculo elementar o caráter que tem hoje.

O conceito de *integral*, conforme definido por Caucy, admite uma classe maior de funções integráveis que a definição do século XVIII. Por exemplo, funções descontínuas podem ser integráveis no sentido de Cauchy. Segundo Katz,

> Essa versão do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser considerada a primeira a satisfazer os padrões modernos de rigor, pois foi a primeira em que F foi claramente definida por meio de uma prova de existência da integral definida. Apesar de Cauchy ter considerado como uma das hipóteses originais, para a existência da integral definida de f, o fato de f precisar ser contínua no intervalo de integração, ele também percebeu que sua definição poderia ser aplicada nos casos em que f tivesse um número finito de descontinuidade no intervalo dado, bastando subdividir o intervalo de integração em subintervalos pelos pontos de descontinuidade e, então, definir a integral como sendo o limite de uma soma. (KATZ, 1998, p. 719, apud PALARO, 2006, p. 128)

[26] Tradução de Mª José Matoso Miranda Mendes

A classe de problemas por abordar usando o Cálculo como ferramenta, fica cada vez mais ampla, não apenas sobre quadraturas e tangentes. É claro que outros aperfeiçoamentos tinham que ser introduzidos para ainda aprimorar o rigor que já se tinha conferido, especialmente no que tange ao conceito de número uma vez que as novas definições se fundamentavam no conceito de limite como número, e isso é conseguido, como Boyer (1949, p. 298) refere, com o trio Weierstrass, Dedekind e Cantor, que põem o Cálculo em bases logicamente rigorosas e com uma precisão formal que os gregos nunca tinham sonhado.

Segundo Boyer (1949, p. 302) o obstáculo para o desenvolvimento do Cálculo se prendeu, de certo modo, com as dificuldades de dar aos conceitos empregados às definições concisas e formais. Era preciso estabelecer uma maneira mais abstrata e formal de pensar, com modelos bem concisos na descrição das idéias.

A nossa análise histórico-epistemológica revela que o surgimento dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral levou muito tempo para chegar à forma atual e envolveu diferentes gerações de matemáticos, à partir dos gregos.

A motivação para seu aparecimento foi a resolução de problemas práticos de tangentes e de quadraturas. Quer dizer, os mesmos problemas que constituem os conceitos de base do Cálculo Diferencial e Integral no nosso tempo.

Pensamos que os resultados da análise que fizemos são pertinentes para a nossa pesquisa porque, tal como nossa citação a Struik no início do capítulo, mostram como realmente os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral se originaram e desenvolveram, por um lado, e por outro, eles oferecem um pano de fundo para a compreensão das tendências do ensino de tais conceitos na escola.

Vemos na análise que todos esforços dos intervenientes se direcionavam à resolução de um tipo de problemas que eles sentiam existir na realidade e na procura do tipo de artefatos (modelos) que deviam ser mobilizados para o efeito. Vemos também que o desenvolvimento dos conceitos depende do tipo de modelos usados na sua representação. A história mostra que o desenvolvimento do Cálculo dá um salto qualitativo quando se descobre que o modelo geométrico era insuficiente para dar conta de uma descrição que se precisava ser abstrata e de natureza variacional.

O final do século XVII e o começo do século XVIII foi um período particularmente importante na história do Cálculo Diferencial e Integral pelo surgimento dos trabalhos de Newton e Leibniz. Estes dois homens, independentemente de um e do outro, produziram modelos concisos, explícitos e gerais; facilmente interpretáveis, manejáveis e aplicáveis a uma classe de problemas muito mais ampla do que os predecessores modelos geométricos. Particularmente o modelo de Leibniz é muito elegante no tratamento do Cálculo Diferencial e Integral. Por exemplo, no que vimos anteriormente, Leibniz identifica a expressão $y \times dx$ como área de um retângulo muito fino de base dx e altura y. E $\int ydx$ significa a soma das áreas de inúmeros retângulos do tipo $y \times dx$. Segundo nossa citação a Sad (1998, p. 141) na revisão bibliográfica, o símbolo $\int$ de integral é devido a Leibniz: ele é uma deformação de S de "soma", usado para lembrar que estamos lidando com o limite de uma seqüência de somas: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i$.

Portanto, a análise histórico-epistemológica ajuda-nos também a entender o significado de certas notações, que muitas vezes são tratadas sem a devida explicitação. Assim, vamos verificar como os livros incorporam as notações importantes que dão significado aos conceitos de diferencial e integral; quais as motivações são colocadas para as discussões, qual o lugar do Teorema Fundamental do Cálculo em tais livros. Newton chamou, ao que hoje dizemos velocidade instantânea, de fluxão e Leibniz chamou, ao que hoje dizemos derivada de uma função, de quociente de diferenciais. Então podemos ver o que é que os livros preferem dizer, como incorporam os fatores históricos nas discussões? Há uma importância especial que é dedicada a esses fatores históricos? Há alguma implicação real no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral decorrente da não consideração de certos fatores históricos? Por exemplo qual, a implicação da soma de Riemann para o entendimento da relação inversa entre a diferenciação e a integração?

Achamos que estes são alguns outros aspectos históricos importantes que servem como pano de fundo na análise dos livros.

CAPÍTULO 4. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta parte do estudo apresentamos uma análise de livros didáticos, na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático. Achamos que fazer uma descrição e análise da estrutura matemática e didática de um livro é importante por ele constituir um meio que "*exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna, freqüentemente, a única ferramenta disponível para o seu trabalho (PNLD 2005, p. 196, apud Miguel 2005, p. 76).* O livro determina em grande medida a opção didática do professor com relação ao tipo de conteúdo a desenvolver na sala de aula e a maneira de como fazê-lo (Chevallard 1999, p. 16), e para o aluno é umas das maiores fontes da aquisição do saber.

Para nosso estudo selecionamos 8 livros didáticos, sendo 3 de autores brasileiros, 2 de autores moçambicanos e 3 livros norte-americanos traduzidos no Brasil. Os livros moçambicanos estão escritos também em língua portuguesa, que é a língua de instrução local.

A escolha dos livros analisados baseou-se nos seguintes critérios:

o primeiro livro foi escolhido a partir de sugestões de colegas da turma de Cálculo (fevereiro-junho 2005) que apontaram ser um dos livros mais usados na introdução ao Cálculo Diferencial. Sentimos que o indicador "sugestões de colegas" não seja muito pertinente para escolha do material, mas por outro lado, achamos que reflete alguma opinião importante a julgar que estas pessoas são professores, provavelmente utilizaram-no nas suas aulas;

o segundo livro foi escolhido por causa de sua grande publicidade, inclusive possui a 2ª edição. Nossa análise incidiu sobre a primeira edição pois um estudo preliminar das duas edições mostrou não haver diferenças em termos de conteúdo;

o terceiro e o quarto livros são moçambicanos e entram no estudo com a intenção de ver se pode surgir algum aspecto saliente comparativamente com as edições brasileiras, a julgar pela experiência que temos na prática de ensino nas condições daquele país. Estes 2 livros foram editados no mesmo ano de 1981;

o quinto livro foi escolhido a partir da percepção que tivemos de que fosse um livro, de certa forma, usado aqui no Brasil, encotramo-lo à venda em diferentes livrarias para além de ser atual (edição de 2003). Assim pensamos que incorporasse algumas idéias inovadoras segundo as discussões contemporâneas em Educação Matemática;

o sexto e o oitavo livros foram escolhidos porque foram citados na tese da Sad (1998, p140) e, portanto, achamos que sejam livros influentes no ensino e aprendizagem do Cálculo no Brasil;

o sétimo livro foi escolho porque é igualmente citado na tese da Sad (1998, p. 137) e a Vianna (1998, p. 22) refere-no como um livro muito popular no Brasil e usado em muitos cursos de Cálculo.

Salientamos que preferimos analisar o material introdutório ao Cálculo Diferencial e Integral porque entendemos que é da base em que toda construção se sustenta. Se ela (base) é fraca, o resto não terá suporte. Nossa posição é partilhada por alguns dos autores que destacamos no capítulo da revisão bibliográfica. Sad (1998, p. 216) diz que "*As três turmas (**T1, T2,** T3) escolhidas e observadas durante um ano, para fins de coleta de dados, foram de Cálculo inicial por entendermos este contexto propício à pesquisa de campo relativa à investigação de produção de pensamento diferencial e integral".*

Vianna (1998) escreve:

> Cálculo I é muito importante no sentido de que irá ajudar a formar a opinião que os estudantes universitários terão à cerca das idéias matemáticas num nível mais alto. É também no Cálculo I onde o aluno começará a estudar segundo a dinâmica requerida na universidade, que será nova para a maioria deles. (VIANNA, 1998, p. 18).[27]

Assim, pensamos que o material selecionado seria pertinente para este estudo. Na parte final da descrição e análise praxeológica do material selecionado,

[27] Tradução nossa

apresentamos os resultados na sua globalidade e a nossa interpretação dos mesmos à luz da literatura apresentada em capítulos anteriores.

4. 1. OS LIVROS SELECIONADOS

Os livros selecionados para o estudo foram os seguintes:

Livro 1: FILHO, B. B.; SILVA, C. X. *Matemática aula por aula. Geometria analítica Números complexos, Polinômios, Limites e Derivadas, Estatística, Matemática financeira. 3 ensino médio (2º grau), São Paulo, FTD S. A. 1998.*

Livro 2: GIOVANNI, J. R.; DANTE, L. R. *Matemática. Teoria – Exercícios – Aplicações. Geometria analítica, Números complexos, Polinômios, Limites e Derivadas. São Paulo, FTD S. A. 1992.*

Livro 3: CARVALHO, A.; BERQUEMBAEV, E.; CHERBAKOV, E.; MOZOLEVSKI, I.; ALEXANDROV, R. *Matemática, Volume 1. Introdução à Análise Matemática. Limites e Derivadas. Manual da 11ª classe. Ministério da Educação e Cultura. Maputo, 1981.*

Livro 4: GRUPO DE MATEMÁTICA. *Matemática, Volume 2. Ensino Técnico Profissional Médio. Serviço de Planificação Curricular. Secretaria do Estado da Educação Técnico Profissional. Maputo, 1981.*

Livro 5: TAN, S. T. *Matemática Aplicada à Administração. 5ª Edição Norte-Americana. Tradução: Edson de Faria. São Paulo. Pioneira Thomson Learnig. 2003.*[28]

Livro 6: ÁVILA, G. S. S. *CÁLCULO 1. Funções de uma variável. Livros Técnicos e Científicos Editoras S. A. Rio de Janeiro. 1981.*

Em relação a este livro, analisamos também o volume 2, que dá continuidade ao que é discutido no volume 1 sobre os temas em estudo. Como o conteúdo tratado

[28] Tradução de Edson de Faria

no volume 2 é a complementação do que inicia no volume 1, preferimos manter apenas a referência ao volume 1.

Livro 7: LEITHOLD, L. *Cálculo com Geometria Analítica. Volume 1, 2ª edição. Tradução: António Paques, Otília Teresinha W. Paques e Sebastião António Filho ambos do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Campinas. Editora Harper & Row do Brasil Ltda. São Paulo. 1982.*[29]

Livro 8: SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica, volume 1, 2ª edição. Tradução*: *Alfredo Alves de Farias, professor adjunto (Aposentado) da UFMG. Com a coordenação dos professores: Vera Regina L. F. Flores e Marcio Quintão Moreno da UFMG. Markon Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo. 1995.*[30]

4. 2. ANÁLISE DOS LIVROS

Como nos referimos acima, neste estudo pretendemos descrever e analisar a organização matemática e didática dos livros que selecionamos no que tange os temas sobre o Cálculo Diferencial e Integral.

Na Teoria Antropológica do Didático, segundo Chevallard (1999), Bosch et al. (2004a) e Miguel (2005), existe uma codeterminação entre a organização matemática e didática, no sentido de que há uma inseparabilidade do matemático (objeto de estudo) e o didático (a organização do estudo). Assim nossa análise se direcionará para dois pontos de vista: ponto de vista da organização didática e ponto de vista de organização matemática. E, no estudo, tomaremos como unidades de análise as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que, segundo Chevallard, são os componentes de toda organização matemática como atividade humana regularmente feita.

---

[29] Tradução de António Paques, Otília Teresinha W. Paques e Sebastião António José Filho.

[30] Tradução de Alfredo Alves de Farias com a coordenação de Vera Regina L. F. Flores e Marco Quintão Moreno

4. 2. 1 ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DOS LIVROS SELECIONADOS.

Análise da organização didática significa identificar tarefas, técnicas e sua justificação que procuram responder as questões sobre como realizar o estudo de um determinado assunto. Assim as situações abaixo se colocam em torno desta problemática.

Observação sobre as notações que usaremos:

∂ **-** deve entender-se como situação problema.

Interpretamos situação problema como sendo uma situação caracterizada por um problema matemático visando a ação do aluno para a construção de seus conhecimentos.

∂_1 – primeira situação problema;

$\mathbf{t_1}\partial_1$ – tarefa referente à primeira situação problema.

$\tau_1\partial_1$ – técnica para a 1^a tarefa da situação problema 1.

μ **-** deve se entender como situação matemática, com foco para o conteúdo matemático.

Diferenciamos as duas situações pela natureza do problema: na situação que designamos por ∂ o problema que se coloca é como fazer a discussão de uma questão matemática, enquanto que a situação que designamos por μ, o que se questiona é: qual o problema matemático que deve ser resolvido?

μ_1 – primeira situação matemática;

$\mathbf{t_1}\mu_1$ – tarefa referente à primeira situação matemática.

$\tau_1\mu_1$ – técnica para a 1^a tarefa da situação matemática 1.

Situação ∂_1: como construir o conceito de derivada de uma função real de variável real em um ponto de seu domínio? (Doravante, função deve-se entender como função real de variável real).

Tarefa $\mathbf{t_1}\partial_1$: construir o conceito de derivada de uma função em um ponto.

Técnica $\tau_1\partial_1$: utilização do limite da razão incremental.

Técnica $\tau_2\partial_1$: uso da noção de declive da reta tangente ao gráfico em um ponto.

Técnica $\tau_3\partial_1$: uso da noção de velocidade instantânea de um corpo em movimento.

Técnica $\tau_4\partial_1$: uso da função derivada.

Técnica $\tau_5\partial_1$: uso da noção de taxa de variação.

Técnica $\tau_6\partial_1$: uso da idéia da derivada como quociente de diferenciais.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_1: ambas técnicas têm como suporte tecnológico a definição da derivada como limite da razão incremental à partir de considerações das variações da função e fazendo uso do conceito de limite de uma função em um ponto.

As técnicas $\tau_1\partial_1$, $\tau_3\partial_1$ e $\tau_4\partial_1$ correspondem à definição tradicional da derivada segundo Cauchy, com pequenas variações de contexto e de ordem que se observam para $\tau_3\partial_1$ e $\tau_4\partial_1$ respectivamente. Na técnica $\tau_3\partial_1$ o contexto é o movimento e a técnica $\tau_4\partial_1$ realiza as tarefas em que primeiro se obtém a fórmula da função derivada, e depois se vai especificando para alguns pontos concretos. A técnica $\tau_2\partial_1$ é um pouco diferente das três anteriores. Ela corresponde a tarefas que começam com a construção do conceito de declive de uma reta tangente a um gráfico em um ponto, para em seguida concluir-se que esse declive é a derivada da função naquele ponto. A técnica $\tau_5\partial_1$ considera a derivada como a taxa de variação de y em relação a x em um ponto *a* de seu domínio. A técnica $\tau_6\partial_1$ parte da definição das diferenciais onde se conclui que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Esta relação em alguns livros (3 e 7) é demonstrada e em outros (4, 6 e 8) é simplesmente dada como uma das formas de apresentar a derivada.

Situação ∂_2: Como interpretar o conceito de derivada de uma função em um ponto?

Tarefa $t_2\partial_2$: interpretar o conceito da derivada de uma função em um ponto.

Técnica $\tau_1\partial_2$: interpretar a derivada como o declive da reta tangente ao gráfico em um ponto dado.

Técnica $\tau_2\partial_2$: interpretar a derivada como a rapidez com que a função se aproxima de um ponto P_0 dado, ou seja a taxa de variação da função nas proximidades de P_0.

Técnica $\tau_3\partial_2$: usar a idéia de linearização da função *f* no ponto P_0 dado.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_2: As técnicas $\tau_1\partial_2$ e $\tau_2\partial_2$ são justificadas pelo mesmo discurso tecnológico da situação ∂_1 mas com o foco nos pontos de vista geométrico e de variação. A técnica $\tau_3\partial_2$ se justifica partindo de considerações de que se uma função *f* é derivável em um ponto P dado, então a inclinação de seu gráfico em P é a inclinação da reta passando por (x_p, $f(x_p)$) que mais se assemelha à curva "nas proximidades" de P. Esta técnica é também defendida por Tall(1986a, apud Artigue 1991, p. 174-175).

Situação ∂_3: Como justificar a existência de casos de não derivabilidade de funções?

Tarefa $t_3\partial_3$: justificar a existência de casos de não derivabilidade de funções.

Técnica $\tau_1\partial_3$: usando a definição da derivada de uma função em um ponto.

Técnica $\tau_2\partial_3$: usando a definição da derivada de uma função em um ponto acompanhada com uma ilustração gráfica.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_3: As duas técnica $\tau_1\partial_3$ e $\tau_2\partial_3$ são justificadas pelo mesmo discurso tecnológico da situação ∂_1, e ainda recorrendo a representação gráfica no caso de $\tau_2\partial_3$, portanto a técnica $\tau_2\partial_3$ é relativamente mais completa do que a técnica $\tau_1\partial_3$ pois esta não tem algum outro suporte visual, senão álgebra e, a literatura que analisamos anteriormente sugere a necessidade de uma associação entre o visual-geométrico e o algébrico para assegurar a compreensão do conteúdo pelo aluno.

Situação ∂_4: Como construir o conceito da função derivada?

Tarefa $t_4\partial_4$: construir o conceito da função derivada.

Técnica $\tau_1\partial_4$: usando a definição da derivada de uma função em um ponto, tomando um x genérico.

Técnica $\tau_2\partial_4$: usando a representação gráfica das variações médias.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_4: a técnica $\tau_1\partial_4$ é justificada a parir da observação de haver uma possibilidade de tomar qualquer x do domínio de *f* que satisfaça a definição da derivada de uma função em um ponto. A técnica $\tau_2\partial_4$ é justificada fazendo uso da geometria analítica, em que a representação gráfica no plano cartesiano dos pontos com a ordenada igual à variação média, é o gráfico da função derivada de *f*. Esta técnica corresponde ao processo experimental da determinação da função derivada e foi observada no livro 4.

Situação ∂_5: Como produzir técnicas específicas de derivação para os diferentes tipos de funções reais de variável real?

Tarefa $t_5\partial_5$: produzir técnicas específicas de derivação para os diferentes tipos de funções.

Técnica $\tau_1\partial_5$: usando a definição da função derivada.

Técnica $\tau_2\partial_5$: usando outras técnicas já produzidas.

Técnica $\tau_3\partial_5$: apresentar a técnica sem justificação.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_5: Para a técnica $\tau_1\partial_5$ a justificação se faz a partir da definição da função derivada. A formulação de tarefas para fazer esta técnica emergir pode tomar duas formas: a forma de declaração simples, a partir da qual começa a dedução da fórmula. O exemplo desta forma é afirmar existir uma certa função *f* de que se necessita determinar sua derivada. E partindo desta afirmação começar a dedução da técnica. Ou tomar a formulação de um teorema onde a dedução da técnica aparece como demonstração do teorema.

Por causa destas duas formas aparentemente diferentes da produção de $\tau_1\partial_5$, preferimos subdividi-la em duas categorias: $\tau_1\partial_{5a}$ e $\tau_1\partial_{5b}$ respectivamente para a 1ª e 2ª maneiras de formulação.

Situação ∂_6: Como assegurar o domínio dos conceitos e técnicas da derivação?

Tarefa $t_6\partial_6$: assegurar o domínio dos conceitos e técnicas da derivação.

Técnica $\tau_1\partial_6$: usando tarefas de imitação às definições (ou teoremas).

Técnica $\tau_2\partial_6$: usando problemas de contexto que requerem equacionamento.

Técnica $\tau_3\partial_6$: usar tarefas de explicação e justificação das técnicas.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_6: uso de definições e das técnicas particulares para os diferentes tipos de funções.

Realçamos que as técnicas $\tau_2\partial_6$ e $\tau_3\partial_6$ são mais eficientes na garantia da compreensão do significado dos conceitos pois, incidem sobre o bloco tecnológico-teórico que justifica e explica o uso das técnicas.

Situação ∂_7: Como usar os conhecimentos da derivação para resolver problemas? Notemos que esta pergunta pode tomar a forma de um questionamento sobre o tipo de problemas que podemos resolver com os conhecimentos que temos da derivada.

Tarefa $t_7\partial_7$: determinar os modos de usar a derivada para resolver problemas.

Técnica $\tau_1\partial_7$: analisando o sinal da função derivada e compará-lo com a monotonia da primitiva.

Técnica $\tau_2\partial_7$: usar as derivadas sucessivas para auxiliar a técnica $\tau_1\partial_7$ no estudo do comportamento da primitiva, muito particularmente da 2^a e 3^a derivadas.

Técnica $\tau_3\partial_7$: usar os conceitos de variação e diferencial na aproximação numérica de funções.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_7: Para a técnica $\tau_1\partial_7$ a comparação se baseia na interpretação da derivada como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função *f* em um ponto. Se a função derivada é negativa num certo intervalo, isso significa que as retas tangentes ao gráfico de *f* nesse intervalo têm o declive negativo. E uma reta tangente a um gráfico de *f* tem o declive negativo em um ponto P se nas proximidades de P a função é decrescente. No caso contrário, declive positivo, a função é crescente. Se o declive for nulo, a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas e a função tem um ponto crítico em P, que pode ser um extremo ou ponto de inflexão.

A técnica $\tau_2\partial_7$ é justificada pela definição das derivadas sucessivas e sua interpretação gráfica, em particular a 2ª e 3ª derivadas que são usadas, juntamente com a 1ª no estudo de funções. A técnica $\tau_3\partial_7$ se baseia nas definições da diferencial e da variação da função.

Situação ∂_8: Como construir o conceito de antiderivada de uma função?

Tarefa $t_8\partial_8$: construir o conceito de antiderivada de uma função.

Técnica $\tau_1\partial_8$: pelo uso da definição de antiderivada de uma função e de teoremas e regras práticas de suporte à definição.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_8: O que justifica a técnica $\tau_1\partial_8$ é a definição de antiderivada como função inversa da derivada. E a operação que obtém a antiderivada é a antidiferenciação, uma operação inversa de derivação. Quer dizer, a antidiferenciação pressupõe a compreensão da derivação em todos seus aspetos: técnicos e conceituais. A antidiferenciação tem o suporte de outros elementos tecnológicos como observações de que uma antiderivada de uma função é uma família infinita de funções, uso da notação adequada, regras operatórias básicas e âmbitos de aplicação, incluindo o uso das noções de valores iniciais. Para além das regras operatórias básicas existem outras que requerem uma atenção cuidada. Dos livros que analisamos que tratam a integração, notamos que o livro 6 pouco desenvolve o assunto sobre antidiferenciação.

Situação ∂_9: Como tornar prático o Cálculo das integrais de funções?

Tarefa $t_9\partial_9$: calcular com mais praticidade as integrais de funções.

Técnica $\tau_1\partial_9$: utilização de técnicas de integração por substituição e integração por partes.

Técnica $\tau_2\partial_9$: utilização da integração numérica.

Técnica $\tau_3\partial_9$: utilização da integração por tabelas.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_9: O que justifica as regras de integração por substituição e a integração por partes são as técnicas correspondentes da diferenciação respectivamente as regras de cadeia e do produto. Para o caso da técnica de substituição, outras justificações são possíveis, como a substituição trigonométrica. A integração numérica é essencialmente parte de processos de

Cálculos aproximados, com a utilização de regras específicas de aproximação, como as regras de trapézios e de Simpson. As técnicas $\tau_1\partial_9$ e $\tau_2\partial_9$ são necessárias pois as regras básicas não são suficientes para dar conta a uma grande gama de funções por integrar. Há funções para as quais não se consegue usar alguma regra prática. Assim outras técnicas mais sofisticadas devem ser mobilizadas para dar conta da situação. A integração por tabelas consiste no uso de fórmulas já dadas e não carece justificação, embora cada fórmula da tabela possa ser deduzida a partir de outras técnicas como de substituição ou integração por partes.

A noção de integração definida é uma outra noção importante no estudo de integrais. A tarefa seguinte visa construir esta noção.

Situação ∂_{10}: Como construir a noção de integral definida?

Tarefa $t_{10}\partial_{10}$: construir a noção de integral definida.

Técnica $\tau_1\partial_{10}$: utilização da noção de área sob o gráfico.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_{10}: o que justifica a técnica $\tau_1\partial_{10}$ é basicamente a definição da área sob o gráfico de uma função num determinado segmento do domínio da função dada. Os conceitos principais para a definição desta área são os conceitos de área de retângulo e de séries numéricas infinitas convergentes que conduzem à soma de Riemann. As ilustrações gráficas ajudam a construção desta noção como área e que, para casos em que temos regiões "positivas" e "negativas", quer dizer, áreas acima e abaixo do eixo das abscissas, então adapta-se ligeiramente a noção anterior, passando a significar resto (diferença) da subtração da área positiva a área negativa. Neste último caso há possibilidade de se obter um resultado negativo. Esta última possibilidade conduz à resultados mais gerais.

Na prática o emprego da soma de Riemann é fastidioso, havendo, portanto o imperativo de flexibilizar o Cálculo de integrais definidas (áreas, volumes ou outras medidas em que a integral definida se torna pertinente). Tal instrumental que torna o Cálculo de integrais definidas mais flexível e rigoroso é objeto de análise na tarefa que se segue.

Situação ∂_{11}: Como calcular de modo flexível e rigoroso a integral definida?

Tarefa $t_{11}\partial_{11}$: calcular de modo flexível e rigoroso a integral definida.

Técnica $\tau_1\partial_{11}$: utilização do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_{11}: O Teorema Fundamental do Cálculo, como a designação o diz, é um artefato tecnológico muito poderoso no Cálculo Diferencial e Integral. Ele estabelece a conexão direta entre a diferenciação e integração. Como vimos em θ/Θ_8 que a integração e a diferenciação podem ser tomadas como operações inversas, o TFC torna esta relação muito mais prática e eficiente na abordagem de respostas às questões de integração e diferenciação. Numa linguagem um pouco simples diríamos que o TFC une as duas noções numa ferramenta para atacar os problemas de Cálculo Diferencial e Integral. A plausibilidade do teorema é demonstrada a partir da articulação entre as noções da integral definida como área, de variação de funções em um intervalo, da definição da derivada como limite da razão incremental bem como da definição da antiderivada como função inversa da derivada. O teorema trabalha em estreita relação com outras técnicas de integração que vimos acima, como as técnicas básicas de integração, integração por substituição, por partes e por tabelas.

Construídas as noções de integrais (indefinidas e definidas) com as respectivas técnicas operatórias temos as possibilidades de atacar uma série de problemas matemáticos e não matemáticos. A pergunta que colocamos abaixo tem por fim explorar os conceitos de integrais na resolução de problemas.

Situação ∂_{12}: Como usar os conhecimentos de integrais na resolução de problemas? Em relação a esta pergunta observamos que há uma grande variedade de problemas que podem ser abordados valendo-se dos conhecimentos de integrais.

Tarefa $t_{12}\partial_{12}$: aplicar integrais na resolução de problemas.

Técnica $\tau_1\partial_{12}$: utilização do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Técnica $\tau_2\partial_{12}$: Aplicação direta da soma de Riemann.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_{12}: Como vimos acima, a utilização eficaz das noções de integrais passa pelo Teorema Fundamental do Cálculo, em combinação com outras técnicas. A técnica $\tau_2\partial_{12}$ usa a soma de Riemann diretamente. Observamos isso nos livro 7 e 8, enquanto que os outros usam a soma de Riemann apenas para definir a integral, para dizer que existe um número real que resulta como limite daquela soma quando o número de partições se torna infinitamente grande. Mas não usam a soma de Riemann para determinar alguns limites. Achamos que esta discussão é incompleta. Deveriam ser resolvidos alguns problemas usando a soma de Riemann, para sentir a sua complexidade e daí mudar para uma forma mais prática, aplicando o TFC.

Entre os vários problemas que os autores analisados discutem como aplicação dos conceitos de integrais, figuram: problemas de Cálculo de área, volume de sólidos, trabalho mecânico, pressão de líquidos, centro de massa de uma região plana e de um sólido de revolução, comprimento de arco de uma curva, economia, aplicações de probabilidade ao Cálculo, entre várias aplicações de que podemos fazer uso da integral. O estilo de abordagem que os livros seguem normalmente é: *definição (ou teorema) → exemplos → exercícios.* O livro 5 ainda sugere *exercícios de exploração da tecnologia e, às vezes, algumas sugestões de exercícios para discussão em grupos e uma secção de 1 ou 2 exercícios que o autor chama de "teste de conhecimentos".* Geralmente, os testes de conhecimentos apresentam as resoluções nas páginas seguintes antes do início da discussão do novo tópico. Nas atividades sugeridas para discussão em grupos o livro tenta insistir na exploração de alguns aspetos delicados do tópico discutido. Os exercícios de exploração de tecnologias recomendam o uso, principalmente, de calculadoras gráficas. As exigências para a exploração de tecnologias e as discussões em grupos achamos serem opções didáticas importantes e pertinentes que o livro procura implementar à luz das discussões atuais em Educação Matemática que apontam para a necessidade de uma aprendizagem significativa, onde o aluno é chamado a desempenhar um papel ativo: discutindo e resolvendo questões pertinentes à sua aprendizagem.

Após o levantamento de algumas opções de como pode ocorrer o ensino e aprendizagem dos conceitos relacionados com a diferenciação e a integração, que identificamos por situações ∂'s, apresentamos no quadro a seguir o resumo dos resultados dessa análise

Quadro nº 2: Resultados da descrição e análise da organização didática dos livros

Tarefa	técnica	Discurso teórico-tecnológico	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
$t_1\partial_1$	$\tau_1\partial_1$	θ/Θ_1	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\partial_1$			√		√	√	√	√	√
	$\tau_3\partial_1$					√		√	√	√
	$\tau_4\partial_1$				√				√	
	$\tau_5\partial_1$						√	√	√	√
	$\tau_6\partial_1$				√		√	√	√	√
$t_2\partial_2$	$\tau_1\partial_2$	θ/Θ_2	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\partial_2$					√	√	√	√	√
	$\tau_3\partial_2$			√						
$t_3\partial_3$	$\tau_1\partial_3$	θ/Θ_3	√			√				
	$\tau_2\partial_3$			√	√		√	√	√	√
$t_4\partial_4$	$\tau_1\partial_4$	θ/Θ_4	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\partial_4$					√				
$t_5\partial_5$	$\tau_1\partial_{5a}$	θ/Θ_5	√	√		√	√			
	$\tau_1\partial_{5b}$			√	√	√		√	√	√
	$\tau_2\partial_5$		√	√	√	√	**	√	√	√
	$\tau_3\partial_5$		√	√	√	√	√	**	**	**
$t_6\partial_6$	$\tau_1\partial_6$	θ/Θ_6	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\partial_6$			√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_3\partial_6$		√	√	√	√	√	√	√	√
$t_7\partial_7$	$\tau_1\partial_7$	θ/Θ_7	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\partial_7$		√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_3\partial_7$				√		√	√	√	√
$t_8\partial_8$	$\tau_1\partial_8$	θ/Θ_8					√	**	√	√
$t_9\partial_9$	$\tau_1\partial_9$	θ/Θ_9					√	√	√	√
	$\tau_2\partial_9$						√		√	√
	$\tau_3\partial_9$						√	√	√	√
$t_{10}\partial_{10}$	$\tau_1\partial_{10}$	θ/Θ_{10}					√	√	√	√
$t_{11}\partial_{11}$	$\tau_1\partial_{11}$	θ/Θ_{11}					√	√	√	√
$t_{12}\partial_{12}$	$\tau_1\partial_{12}$	θ/Θ_{12}					√	√	√	√
	$\tau_2\partial_{12}$								√	

** - ocorrência rara.

4. 2. 2. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DOS LIVROS SELECIONADOS

O quadro da página anterior evidencia que os livros analisados todos eles constroem a noção de derivada usando a definição formal de Cauchy, baseada no limite da razão incremental. É uma técnica inevitável. O livro 4 tenta usar uma estratégia diferente, partindo da determinação experimental da função derivada e do declive da reta tangente. No fim da discussão experimental destaca-se que o método não é exato, havendo necessidade para um método analítico exato. Portanto a introdução que o livro usa cria uma motivação para um tratamento formal do conceito, contrariando as opções tradicionais dos outros.

O quadro acima mostra que há diversas concepções associadas ao conceito da derivada. Este resultado se assemelha aos resultados reportados nos estudos de Artigue (ibid), Sad (ibid) e Vianna (ibid) no que tange à diversidade das concepções sobre a derivada. Portanto, o conceito de derivada não fica completo quando apenas se destaca um aspecto, como muitas vezes acontece no ensino onde a atenção tem sido o limite da razão incremental em si, sem muita reflexão do que tal limite significa para os diferentes contextos.

Quanto à interpretação do significado da derivada de uma função em um ponto, ambos livros identificam-na como um número real que, em termos geométricos, representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função *f* em um ponto dado P. Os livros 2, 4, 5, 6, 7 e 8 têm ainda outras observações sobre o que tal número é, como o quadro anterior mostra:

um número dado pela relação $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ se tal limite existir e for finito;

a velocidade instantânea de um corpo em movimento;

a taxa de variação de uma grandeza y relativamente à outra grandeza x;

um número igual ao quociente de diferenciais $\frac{dy}{dx}$;

o valor de uma função g(x) definida por $g(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ num ponto x de seu domínio.

O livro 2 usa a idéia de linearização local, observando que "nas proximidades" de um ponto P, onde a função *f* é derivável, o gráfico de *f* se assemelha a uma reta tal que seu coeficiente angular é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* em P. Portanto, o falar da inclinação da reta tangente em P é uma conseqüência da sua coincidência com a inclinação do gráfico de *f* em P. Os dois elementos devem ser vistos juntos. Achamos que esta observação que o livro faz, cria uma base sólida para a compreensão do significado da derivada e suas aplicações na resolução de problemas. Ainda voltamos a esta questão mais adiante.

Observamos nos livros 1 e 4 a falta de discussão dos casos onde a derivada de uma função não existe. Esta falta não dá uma informação completa das características do objeto matemático em causa. Os 6 livros que discutem os tais casos fazem-no de uma forma completa, articulando os procedimentos algébricos com a visualização gráfica, o que constitui uma opção didática correta segundo as observações de Vianna (1998), Sad (1998) e Villarreal (1999) que alertam para necessidade de uma combinação harmoniosa entre o visual-geométrico e o algébrico na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Foi constatado que a definição da derivada como limite da razão incremental adquire o caráter auto-tecnológico, segundo (Chevallard 1999), pois quase todas técnicas específicas para os diferentes tipos de funções são deduzidas usando aquela definição. Raros são os casos de técnicas produzidas à partir de outros discursos diferentes da definição. Esta prática, segundo Chevallard (1999) e Bosch et al. (2004), origina uma certa inflexibilidade tecnológica na medida em que não se procuram outras formas de fazer. Houve casos de apresentação de técnicas sem justificação. Esta opção didática assemelha-se ao que Villarreal (1999, p. 23-24) e Araújo (2002) chamam de prática ritual, com prescrições (não justificadas) do que deve ser feito. Este procedimento pouco contribui para uma aprendizagem significativa onde a compreensão é um fim primordial. É sempre bom quando se percebe o que está por trás de uma fórmula, o aluno fica consciente do que faz.

Constatamos ainda que nos livros analisados há muito mais atividades de repetição, visando a rotinização da técnica do que outro tipo de atividades. É inquestionável que desenvolver habilidades para manejar as técnicas rápido e eficientemente é necessário. Mas estas habilidades devem aliar-se à compreensão do que se faz. É a compreensão do significado do que se faz que garante a flexibilidade do uso da técnica em outros contextos diferentes daqueles onde ela é produzida.

Quanto ao uso do conhecimento de derivadas para resolver problemas, notamos haver alguma preocupação nesse sentido apesar de a prática não ser conseqüente em alguns livros, especialmente no livro1. O tipo de problemas propostos é, ou claramente sugestivo a determinadas equações, ou já traz equações para o leitor determinar o valor da incógnita. Sentimos também que nos livros analisados os problemas resolvidos são, na sua grande parte, os mesmos da classe de problemas com os quais a humanidade se vem defrontando há séculos: problemas da tangente, de máximos e mínimos e estudo do movimento. Esta situação confirma o valor do estudo da evolução histórica e epistemológica dos conceitos pois para além de nos dar o panorama de como eles evoluíram, ajuda-nos a perceber o que fazemos hoje, segundo Struik (1985, p. 213, apud Miguel 2005, p. 56).

Em relação a integral, os 4 livros analisados começam a discussão sobre a antiderivada de uma função *f*. A definição apresentada é a seguinte:

uma função *F* é chamada uma antiderivada de uma função *f* em um intervalo I se *F'*(x) = *f*(x), para todo valor de x em *I.*

Para chegar a esta definição, os livros apresentam formas diferentes de discussão. O livro 5 introduz o tema através de um problema de contexto, e os restantes fazem-no formalmente. Achamos que a opção do livro 5 seja aquela que didaticamente motiva o aluno para o assunto. O livro 6 é muito resumido na sua exposição. Esta maneira de proceder pode não ajudar o aluno a ter uma idéia ampla sobre o tema. Fora do livro 6, os outros têm uma discussão suficientemente desenvolvida, destacando várias propriedades de antiderivadas, algumas técnicas de antidiferenciação, e resolvendo alguns problemas formais e de contexto.

A parte de integração definida é muito mais ampla para ambos livros. E de novo, a idéia de área sob o gráfico desempenha o papel de auto-tecnologia para introdução do conceito. Todos os livros analisados falam da área sob o gráfico. Prevendo usar a soma de Riemann, os livros 7 e 8 desenvolvem um conjunto de exercícios sobre as séries numéricas, recorrendo a notação sigma. O livro 5 não desenvolve esta parte de séries numéricas, preferindo introduzir alguns exercícios de aproximação de áreas sob o gráfico usando retângulos, como preparação para introduzir a integral definida. O livro 6, como na introdução da antiderivada, faz muito pouco dessa preparação. Achamos que negligenciar a parte preparatória pode não ser uma opção correta porque a soma de Riemann, para efetivamente ser usada como uma soma infinita de produtos, a compreensão de séries numéricas é importante.

Ambos livros introduzem a integral definida como soma de Riemann. Após a introdução são discutidas as propriedades da integral definida, havendo grande desenvolvimento para os livros 7 e 8. Após a discussão destas propriedades é introduzido o Teorema Fundamental do Cálculo. Daí são resolvidos muitos problemas envolvendo integrais. Quase todos livros seguem a mesma ordem: área sob o gráfico $\rightarrow$ soma de Riemann $\rightarrow$ análise de algumas propriedades $\rightarrow$ TFC $\rightarrow$ resolução de problemas aplicando o TFC. Contudo há variações no tipo de exercícios e na qualidade de aprofundamento, com destaque, como sempre, para os livros 7 e 8. O livro 5 como é da economia recorre à alguns exemplos da economia. Este livro tem, no nosso entender, uma boa apresentação da variabilidade de exercícios pois, para além da forma clássica de exercícios de aplicação, tem opções de discussão em grupos e explorando tecnologias. Isso acontece talvez porque o livro é recente (2003) e tenha incorporado algumas idéias inovadoras decorrentes dos debates atuais em Educação Matemática.

Os outros livros preferem problemas mais diversificados , com tendências para os problemas da mecânica. Estes livros são formais, com o estilo clássico de apresentação do conteúdo, segundo a seqüência: definições – teoremas (propriedades) – exercícios.

A seguir passamos à descrição e análise da organização matemática que determina a praxeologia didática que acabamos de ver.

4. 2. 3. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DOS LIVROS SELECIONADOS

Nesta parte do estudo faremos a descrição e análise da praxeologia matemática que pode ser construída em relação ao Cálculo Diferencial e Integral nos livros escolhidos. O foco será igualmente sobre tarefas, técnicas, tecnologias e teorias mobilizadas no tratamento dos temas em discussão. Por causa do fenômeno de codeterminação (Chevallard 1999, apud Miguel 2005), que se caracteriza pela relação e influência recíprocas entre as organizações matemática e didática, teremos muitas tarefas matemáticas relacionadas com as tarefas didáticas analisadas anteriormente. E modificamos ligeiramente a designação usada na secção anterior, de ∂ (situação problema) para μ (que significa situação matemática ou conteúdo matemático), mantendo outras designações para tarefas, técnicas e o bloco tecnológico-teórico.

Assim a primeira tarefa matemática que se coloca é:

Tarefa $t_1\mu_1$: construir o conceito de derivada de uma função em um ponto.

Técnica $\tau_1\mu_1$: utilização do limite da razão incremental.

Técnica $\tau_2\mu_1$: uso da noção de velocidade instantânea de um corpo em movimento.

Técnica $\tau_3\mu_1$: uso da noção de declive da reta tangente ao gráfico em um ponto.

Técnica $\tau_4\mu_1$: uso da função derivada.

Técnica $\tau_5\mu_1$: uso da noção de taxa de variação.

Técnica $\tau_6\mu_1$: uso da noção da derivada como quociente de diferenciais.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_1: A técnica $\tau_1\mu_1$ exige o conhecimento de limites de funções em um ponto, de modo que,

se *f* é uma função dada por y = *f*(x), contínua e definida em um intervalo A e x_0 um elemento desse intervalo, então podemos ter as variações $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ para dois estágios diferentes da variável independente x, x_0 e x. Tomando a variação média dada por $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, definimos a derivada de *f* no ponto x_0 como o limite desta razão incremental $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se este limite existir e se for finito, e denota-se por $f'(x_0)$. Assim temos $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Este discurso tecnológico difere do discurso usado para a técnica $\tau_2\mu_1$, apenas no ponto de vista. Neste último caso considera-se um corpo em movimento e toma-se o tempo como variável independente e o espaço percorrido no tempo t, a variável dependente. Assim, se s(t) é o espaço percorrido no tempo t, temos $\Delta t = t - t_0$ e $\Delta s = s(t) - s(t_0)$, onde $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v_m$ (velocidade média). Tomando o limite desta velocidade, obtemos: $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = v(t_0)$ (que é a velocidade do móvel no instante t_0). A derivada aqui significa a velocidade instantânea do ponto material P em movimento num determinado instante t_0.

A técnica $\tau_3\mu_1$ pode ser produzida experimentalmente. Este é um caso observado no livro 4, e a figura abaixo mostra o processo:

"Para a função cujo gráfico está traçado ao lado, vamos determinar a "função declive". (Livro 4, p. 84)

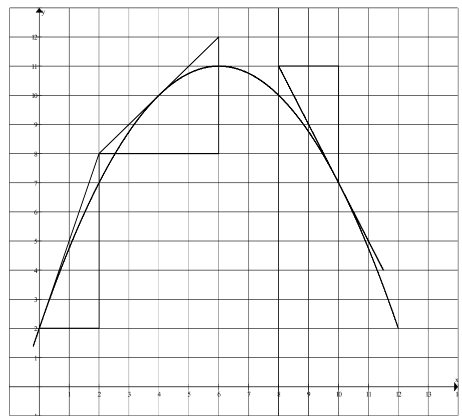


Figura nº 26: Representação dos declives de uma função em certos pontos de seu gráfico
Fonte: Grupo de matemática (1981, p. 84)

x	Δx	Δy	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$(x, \frac{\Delta y}{\Delta x})$
0	1	6	6	(0, 6)
1				
2	2	4	2	(2, 2)
3				
4				
5	1	-4	-4	(5, -4)

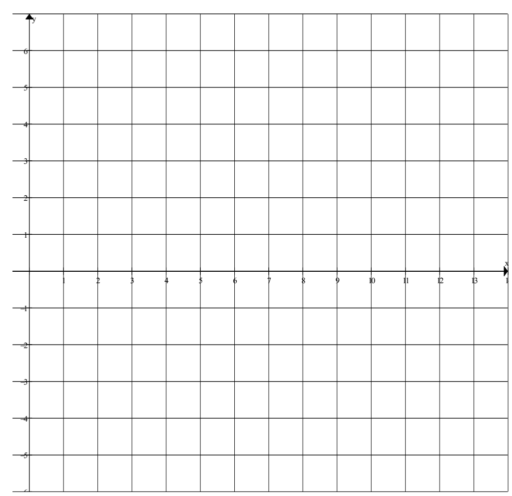


Figura nº 27: Determinação experimental do gráfico da função declive
Fonte: Grupo de matemática (1981, p. 84)

A curva que passa pelos pontos $(x, \frac{\Delta y}{\Delta x})$ é o gráfico da derivada da função representada acima

Na verdade esta técnica não é muito precisa porque baseia-se nas aproximações do traçado das tangentes, mas é interessante porque focaliza no objeto matemático que deve ser discutido, neste caso, a função derivada.

A versão mais exata da técnica $\tau_3\mu_1$ é interpretar a derivada como declive para o qual tendem os declives das retas secantes ao gráfico de *f* quando a variação Δx entre dois estágios diferentes da variável x tende para zero. Na interpretação de Artigue (1991) esta técnica corresponde à estratégia mais usada no ensino tradicional, embora com os equívocos por ela provocados no processo da aprendizagem, onde algumas vezes o aluno interpreta a aproximação como sendo o encurtamento progressivo das secantes (Artigue, 1991 e Vianna, 1998).

O discurso tecnológico para a técnica $\tau_4\mu_1$ parte da definição formal de que a derivada de uma função *f* para um x genérico é dada por $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$. Daqui os casos particulares são obtidos pela concretização de x em *f'*(x).

A técnica $\tau_5\mu_1$ decorre da interpretação da derivada como taxa de variação, e um exemplo extraído do livro 8 (p. 121) mostra essa interpretação:

(i)) Seja *y* = *f*(x) onde *f* é definida no intervalo aberto contendo *a*.

A **taxa média de variação** de *y* = *f*(x) em relação a *x* no intervalo [*a*, *a* + *h*]

é $$ym = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(ii) A **taxa instantânea de variação** de *y* em relação a *x* em *a* é

$$y_a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

desde que o limite exista.

A Técnica $\tau_6\mu_1$ é justificada fazendo considerações de que a derivada pode ser dada como quociente de diferenciais $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Esta relação em alguns livros é dada como definição (4, 6, 8), uma outra maneira de escrever $f'(x)$; em outros, a relação passa por uma construção (livro 3), como mostramos a seguir na discussão sobre a técnica $\tau_3\mu_7$.

Depois da construção da noção de derivada de uma função em um ponto, e os exercícios de aplicação correspondentes resolvidos, segue a tarefa de interpretação do significado da noção construída.

Tarefa $t_2\mu_2$: interpretar o conceito da derivada de uma função em um ponto.

Técnica $\tau_1\mu_2$: interpretar a derivada como o declive da reta tangente ao gráfico no ponto dado.

Técnica $\tau_2\mu_2$: interpretar a derivada como a rapidez com que a função se aproxima de um ponto P_0 dado, ou seja, como a taxa de variação da função nas proximidades de P_0.

Técnica $\tau_3\mu_2$: interpretar a derivada de uma função em um ponto como a inclinação do gráfico da própria função nesse ponto, usando a idéia de linearização da função por volta de P_0 dado.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_2: A técnica $\tau_1\mu_2$ é justificada pelo discurso tecnológico θ/Θ_1 anterior, mas focalizando o aspecto geométrico, como o livro 1, (p. 218-219) mostra:

> Considerando a função
>
> $y = f(x)$ contínua e definida no intervalo A, cujo gráfico é representado pela curva C, sendo x e x_0 elementos desse intervalo, com $x \neq x_0$. Se a reta s, secante à curva C, é determinada pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, podemos dizer que o coeficiente angular de s é $\tan(\alpha) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, que corresponde a razão incremental de f(x) no ponto x_0.

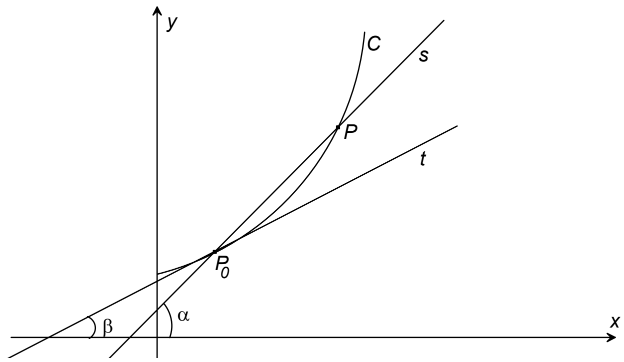


Figura nº 28: O declive da tangente como limite do declive das secantes.
Fonte: Filho e Silva (1998, p. 218)

> Observe que se Δx tende a 0, ou seja, se x tende a x_0, o ponto P se aproxima de P_0 e a reta secante s tenderá à reta tangente à curva no ponto P_0. Se a reta s tende à reta t, então α tende a β, portanto,
>
> $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\beta)$$
>
> Então concluímos que: $\boxed{f'(x_0) = \tan(\beta)}$ ....
>
> A equação da reta t pode ser assim representada: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, ou ainda, se $f(x) = y$, temos: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ... (FILHO & SILVA 1998, p. 218-219)

A técnica $\tau_2\mu_2$, é justificada simplesmente com a observação de que o número $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quando existir significa a rapidez com que a função f se aproxima de x_0.

O discurso tecnológico para a técnica $\tau_3\mu_2$ é de certa forma interessante e refinado para o conceito de derivada como coeficiente angular da rata tangente ao gráfico de uma função f no ponto P. Como dissemos, tal discurso baseia-se na idéia de linearização. Este é um caso tratado no livro 2 (p. 264). Observemos como a discussão é conduzida:

> Vejamos agora o que vem a ser a inclinação de funções em um determinado ponto (ou de curvas que as representam). Intuitivamente, a inclinação de $y = f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$ é a inclinação da reta passando por $(x_0, f(x_0))$ que mais se assemelha à curva ‘nas

proximidades" desse ponto. No gráfico ao lado, tal reta é a t e é chamada de reta tangente em (x_0, f(x_0)) ou simplesmente em x_0.

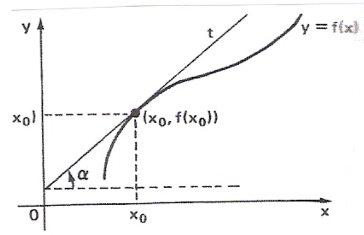


Figura nº 29: A inclinação de uma função em um ponto
Fonte: Giovanni e Dantes (1992; p. 264)

Por exemplo, qual a inclinação da função y = x^2, ou da curva que a representa, no ponto x_0.

A inclinação da secante AB é dada por:

$$\frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{(2x_0h + h^2)}{h} = 2x_0 + h$$

Quando B vai se aproximando cada vez mais de A, ou seja, quando h vai tendendo a zero, a reta AB vai se aproximando cada vez mais da reta tangente t em x_0. Isso significa que a inclinação de f(x) = x^2 em x_0 vai tendendo para $2x_0$.

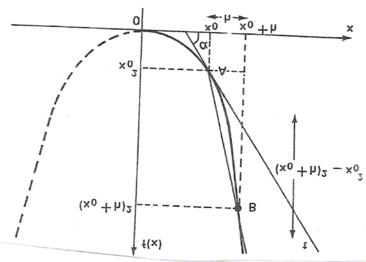


Figura nº 30: Declive da tangente como inclinação da função no ponto de tangência.

Fonte: Giovanni e Dantes (1992, p. 264)

Numa linguagem mais precisa escrevemos:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$ que é exatamente f'(x_0), a derivada da função f no ponto x_0 (com a diferença de que aqui chamamos o acréscimo de h em lugar de Δx). Portanto, existindo f'(x_0), existirá a reta tangente e f'(x_0) = tan(α) que é o coeficiente angular da reta t, tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (x_0, f(x_0)). Assim a equação da reta tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (x_0, f(x_0)) é dada por $f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$ ou y– f(x_0) = f'(x_0)(x – x_0). (GIOVANNI e DANTE, 1992, p. 264).

Achamos que este seja um exemplo da perfeita articulação entre os registros de representação semiótica; linguagem natural, algébrica e a representação gráfica para a apreensão global do objeto matemático em análise. A idéia é de que não basta falar da reta tangente ao gráfico em P, é necessário também identificar o que a função é no ponto considerado ou nas proximidades do ponto de tangência; o que há de comum entre o gráfico de f e a reta tangente ao gráfico de f em P. O livro 6 aborda a idéia similar na sua discussão sobre aproximação linear no capítulo dedicado às aproximações de funções por polinômios.

Um aspecto ainda relacionado com a construção da noção de derivada é a existência de casos onde ela não é definida. Esta situação é objeto de discussão na tarefa a seguir.

Tarefa $t_3\mu_3$: justificar a existência de casos de não derivabilidade de funções.

Técnica $\tau_1\mu_3$: usando a definição da derivada de uma função em ponto.

Técnica $\tau_2\mu_3$: usando a definição da derivada de uma função em um ponto acompanhada com uma ilustração gráfica.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_3: A técnica $\tau_1\mu_3$ é justificada pelo discurso tecnológico θ/Θ_1 e a noção de limites laterais segundo a qual uma função tem limite em um ponto P se os limites laterais em P existirem e forem iguais. Assim, tendo a função $f(x) = |x|$ definida em $\mathbb{R}$ mostra-se, através de tratamentos algébricos, que f não é derivável no ponto $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Como os limites laterais são diferentes, então $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe, e portanto, f não é derivável em $x_0 = 0$.

Um outro exemplo é ilustrado pela função irracional, $f(x) = \sqrt{x}$ definida em $\mathbb{R}$ não negativo, em que a tarefa é igualmente de justificar que *f* não é derivável no ponto $x_0 = 0$.

Usando o discurso θ/Θ_1, temos $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0} = +\infty$. Pelo discurso **θ/Θ₁** o limite devia ser finito, o que não é o caso do nosso exemplo. Portanto a função dada não é derivável no ponto $x_0 = 0$.

A técnica $\tau_2\mu_3$ é justificada articulando o discurso para $\tau_1\mu_3$ com a visualização gráfica, como mostramos a seguir:

$f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \pm 1$

Não há limite de $f(x)$ para $x_0 = 0$. Portanto, f não é derivável em x_0.

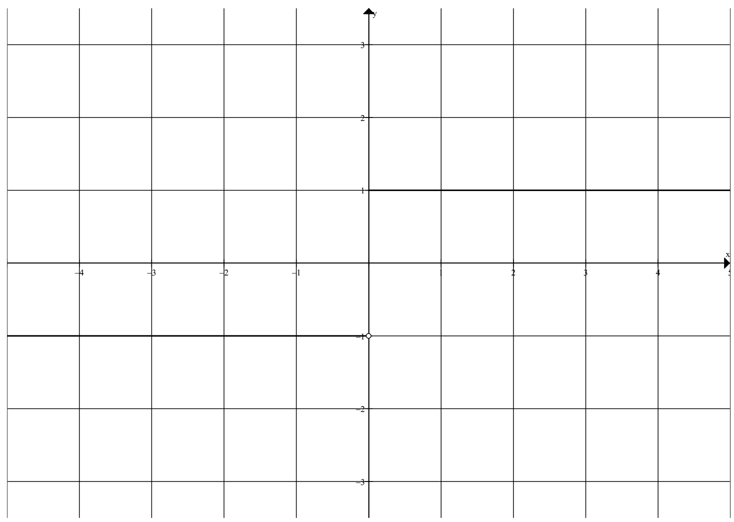


Figura nº 31: Visualização da não existência da derivada em um ponto anguloso.
Fonte: Giovanni e Dantes (1992, p. 262)

Para $f(x) = \sqrt{x}$, temos

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{0} = +\infty$.

Uma reta vertical não tem coeficiente angular

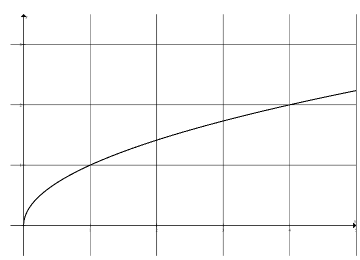


Figura nº 32: Visualização da não existência do coeficiente angular para a reta vertical.
Fonte: Giovanni e Dantes (1992, p. 262)

O discurso tecnológico é mais completo para a técnica $\tau_2\mu_3$, por ter o suporte visual do que para a técnica $\tau_1\mu_3$ que é dado apenas algebricamente.

A tarefa a seguir amplia o ponto de vista sobre a derivada, considerando que ela pode ser vista como uma função que a cada elemento x de algum subintervalo do domínio de *f* associa à derivada *f'*(x) de *f*.

Tarefa $t_4\mu_4$: construir o conceito da função derivada.

Técnica $\tau_1\mu_4$: usando o discurso tecnológico θ/Θ_1, e tomando um x genérico.

Técnica $\tau_2\mu_4$: usando a representação gráfica das variações médias.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_4: O discurso tecnológico para a técnica $\tau_1\mu_4$ é dado em forma de definição à partir da definição da derivada como limite da razão incremental, como o seguinte exemplo extraído do livro 1, mostra:

> Considerando a função y = f(x), contínua e definida num intervalo A, e o intervalo $A' \subset A$, podemos dizer que se y = f(x) é derivável para todo $x \in A'$, então y = f(x) é derivável em A'. Chamamos da função derivada de f(x), ou simplesmente de derivada de f(x), à função f'(x) ou y', para todo $x \in A'$. Podemos obtê-la da seguinte maneira: $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ... (FILHO e SILVA, 1998, p. 220-221).

A visualização acompanha esta apresentação, embora para alguns casos tome o caráter decorativo.

O discurso tecnológico para a técnica $\tau_2\mu_4$ é o mesmo que apresentamos para a técnica $\tau_3\partial_1$, baseado no processo experimental.

A preocupação de substituir técnicas laboriosas por outras mais práticas e específicas sempre surge no processo de resolução de problemas. A tarefa a seguir, que designamos por $t_5\mu_5$ procura responder esta necessidade:

Tarefa $t_5\mu_5$: produzir técnicas específicas de derivação para os diferentes tipos de funções.

Técnica $\tau_1\mu_5$: usando a definição da função derivada.

Técnica $\tau_2\mu_5$: usando outras técnicas já produzidas.

Técnica $\tau_3\mu_5$: apresentar a técnica sem justificação.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_5: O discurso tecnológico para a técnica $\tau_1\mu_5$ é a definição da derivada como limite da razão incremental, com duas pequenas variações na formulação das tarefas envolvidas, as quais denominamos por formulação simples e formulação em forma de teorema. Entendemos que na formulação simples não está explícita a intenção de demonstrar uma afirmação; na formulação em forma de teorema a intenção de mostrar está explícita, partindo do princípio de que um teorema é uma afirmação que requer uma demonstração.

Apresentamos algumas destas duas formas de formulação.

Exemplo de uma formulação simples, extraído do livro 2:

> Vejamos agora algumas regras de derivação que nos permitem calcular diretamente as derivadas sem recorrer à definição envolvendo limites. ...
>
> 4.a) Função potência com expoente natural
>
> Consideremos a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. A derivada de *f* é dada por:
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$
>
> Sabemos que usando o desenvolvimento do Binômio de Newton, temos:
>
> $$(x + h)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} hx^{n-1} + \binom{n}{2} h^2x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} h^{n-1}x + \binom{n}{n} h^n =$$
>
> $$= x^n + nhx^{n-1} + \binom{n}{2} h^2x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} h^{n-1}x + h^n. \qquad \text{Logo:}$$
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nhx^{n-1} + \binom{n}{2} h^2x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} h^{n-1}x + h^n\right] - x^n}{h} =$$
>
> $$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} h\, x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} h^{n-2}x + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$
>
> Portanto, $f'(x) = nx^{n-1}$. (GIOVANNI e DANTE, 1992, p. 271-272).

A seguir exemplificamos outro estilo de formulação, extraído do livro 3:

> "Cálculo da derivada da função $y = x^n$ para n inteiro e positivo.
>
> <u>Teorema:</u>
>
> A derivada da função $y = x^n$, sendo n o número inteiro e positivo, é igual a nx^{n-1}, ou seja $y' = nx^{n-1}$.
>
> <u>Demonstração</u>
>
> Se x sofre um acréscimo Δx, então $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$; (5)
>
> Como se sabe, a fórmula do binômio de Newton é:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + ... +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2) ... (n-(m-1))}{m!} a^{n-m}b^m + ... + b^n \qquad (6)$$

Aplicando (6) à parte direita da (5) vem: $(x + \Delta x)^n = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n$

donde podemos calcular:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n \qquad (7)$$

Calculamos o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1} \qquad (8)$$

Determinamos o limite de (8):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}$$

donde resulta que $y' = nx^{n-1}$. (CARVALHO et al., 1981, p. 208-209).

Temos a percepção de que os dois tipos de formulação são diferentes e isso pode influenciar na atenção prestada ao que se deve fazer. O nosso exemplo que denominamos de formulação simples introduz a discussão com uma proposta de ver uma regra que permite calcular uma derivada. O ver uma regra não sugere explicitamente que se faça a produção da regra pretendida.

A técnica $\tau_2\mu_5$ é justificada por outros recursos já produzidos diferentes da definição. O exemplo a seguir, extraído do livro 2, mostra esta variação de discurso.

Recordamos que, se $f(x) = \ln(x)$ (base e), então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Agora procuramos $f'(x)$ quando $f(x) = \log_a(x)$.

Fazendo a mudança de base de *a* para *e* temos:

$\log_a(x) = \log_a e \cdot \log_e(x)$. Logo $f(x) = \log_a e \cdot \log_e(x)$. Pela derivada do produto temos:

$f'(x) = (\log_a e) \cdot \frac{1}{x}$ ou seja: se $f(x) = \log_a(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$. (GIOVANNI e DANTE, 1992, p. 282).

A técnica $\tau_3\mu_5$ é justificada pelo ensino baseado na mostração ou ostensão (na linguagem de Chevallard 1999) sem nenhum recurso tecnológico plausível, senão uma aprendizagem baseada na observação e reprodução de modelos prontos (Margolinas 2002, apud Almouloud em prelo e Villarreal 1999).

As tarefas que designamos por $\mathbf{t_6\mu_6}$, que visam o domínio dos conceitos e técnicas de derivação, são tratadas pelas seguintes técnicas:

Técnica $\tau_1\mu_6$: usando tarefas de imitação às definições ou aos teoremas dados.

Técnica $\tau_2\mu_6$: usando problemas de contexto que requerem equacionamento.

Técnica $\tau_3\mu_6$: usando tarefas de explicação e justificação das técnicas.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_6: A técnica $\tau_1\mu_6$ tem como discurso tecnológico a repetição, partindo do principio de que ela produz perfeição. Um exemplo deste discurso é pedir que se calcule a derivada da função $f(x) = x^{10} \cdot 10^x$ depois de se terem dado as técnicas de derivação de um produto, da função exponencial e da função potência. O estudante é requerido a usar estes conceitos em um problema dado à partir de algo parecido do que viu anteriormente.

A técnica $\tau_2\mu_6$ se justifica pela necessidade de reconhecer a aplicação do conhecimento adquirido no problema dado e do realce da importância desse conhecimento na resolução de problemas. Nos livros analisados, os problemas colocados são principalmente de determinação de tangentes, estudo de movimentos e situações de máximos e mínimos. Um exemplo de um tipo de problemas é como o que se apresenta abaixo, tirado do livro 2, (p. 302):

"O custo total de fabricação de x unidades de um produto é dado por $C(x) = 3x^2 + 5x + 192$ cruzados. Quantas unidades deverão ser fabricadas para que o custo médio seja o menor possível?"

Neste problema o leitor reconhece que se trata do problema de determinação de zeros da derivada e análise do comportamento da função por volta de tais zeros. A 2ª derivada pode ser um recurso a mobilizar para facilitar a análise.

A técnica $\tau_3\mu_6$ tem como recurso as definições e propriedades da derivada, procurando a compreensão dos significados das técnicas usadas, pois uma explicação visa expor por que é que a técnica usada é correta e, por sua vez, a justificação tem por fim assegurar que a técnica usada resolve o problema colocado, segundo (Chevallard, 1999 e Bosch et al. 2004). Portanto quem justifica percebe o significado da tarefa.

Uma outra categoria de tarefas sobre derivadas procura responder a questão de como a gente usa este conceito para resolver problemas. Este é um tipo de tarefas que identificamos por $t_7\mu_7$.

Tarefa $t_7\mu_7$: determinar os modos de usar a derivada para resolver problemas.

Técnica $\tau_1\mu_7$: analisando o sinal da função derivada e compará-lo com a monotonia da primitiva.

Técnica $\tau_2\mu_7$: usar as derivadas sucessivas para auxiliar a técnica $\tau_1\mu_7$ no estudo do comportamento da primitiva, muito particularmente da 2ª e 3ª derivadas.

Técnica $\tau_3\mu_7$: usar os conceitos de variação e diferencial na análise do comportamento de funções e na aproximação numérica de funções.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_7: A técnica $\tau_1\mu_7$ se justifica exatamente pela comparação entre o “sinal” da função derivada e a monotonia da função primitiva, tal como vimos no problema anterior, de determinação do custo médio de fabricação de algumas unidades de um produto. A comparação que estamos a referir aqui é muito importante, pois garante a compreensão do que se faz na resolução de problemas usando a derivada. Quem não compreende a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da primitiva terá enormes dificuldades para resolver problemas de maximização (minimização). Em alguns livros que analisamos, notamos uma discussão superficial desta comparação, principalmente nos livros 4 e 1. O livro 4 chega ao extremo de resolver apenas 1 problema de máximos/mínimos em toda sua exposição. Achamos ser muito insuficiente para assegurar a compreensão da utilização da derivada no estudo de funções.

A técnica $\tau_2\mu_7$ igualmente se baseia na comparação entre o sinal da derivada de ordem imediatamente a seguir com a monotonia da função derivada de ordem precedente. Muitas vezes isso cria embaraço nos estudantes, comparar o sinal com a monotonia. O mais lógico seria comparar as monotonias. Portanto, para usar a técnica $\tau_2\mu_7$ o aluno deve efetivamente quebrar essa discrepância aparente da lógica. Este conflito lógico aparente é uma das características próprias da situação fundamental da aprendizagem que, segundo Legrand (1993, p 124, apud Almouloud, p. 4, em prelo), deve ter o poder de modificar o conformismo escolar e permitir uma desestabilização e justificar a aceitação de uma mudança de ponto de vista. Para Margolinas (2002, p. 148, apud Almouloud em prelo) o caráter antagonista do “milieu” está relacionado com a existência de uma interação efetiva: “*Um milieu diz-se antagonista se é capaz de produzir retroações sobre os conhecimentos do sujeito ... forçando-o a evoluir em suas estratégias”.* Ainda merece realçar que o discurso tecnológico da técnica $\tau_1\mu_7$ contém algumas idéias fulcrais do Cálculo Diferencial e Integral, traduzidas no que é chamado o Teorema Fundamental do Calculo (TFC) que estabelece a relação entre a derivada e a sua primitiva. Na verdade quando fazemos o estudo de funções estas idéias estão sempre presentes.

A técnica $\tau_3\mu_7$ é justificada a partir da definição do diferencial. Sua utilização exige compreensão da tal definição. Exemplo de como pode decorrer a discussão sobre esta noção é extraída do livro 3 (p. 243-249):

> ... Sabemos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, (1)
>
> sendo $f'(x)$ um número finito. Como já sabemos, se
>
> $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$, então a função $\varphi(x)$ pode ser representada na forma
>
> $\varphi(x) = A + \alpha(x)$, sendo $\alpha(x)$ infinitamente pequeno quando x tende para <u>a.</u> Aplicando esta propriedade na expressão (1), resulta: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$ (2) sendo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$
>
> Da igualdade (2) vem $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. ...
>
> Definição:
>
> Uma função $y = f(x)$ diz-se diferenciável no ponto $x = x_0$ se o seu acréscimo neste ponto ser apresentado na forma: $\Delta y = C\Delta x + o(\Delta x)$,

com C constante. A expressão $C\Delta x$ diz-se diferencial e designa-se por dy ou por $df(x_0)$.

Teorema 1:

Para que uma função $y = f(x)$ seja diferenciável no ponto $x = x_0$, é necessário e suficiente, que ela seja derivável neste ponto.

Demonstração:

Condição necessária: Suponhamos que a função dada é diferenciável ou seja, que verifica a igualdade anterior, $\Delta y = C\Delta x + o(\Delta x)$. Dividindo por Δx e calculando o limite ao tender Δx para zero, resulta: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$, ou seja $y'_x = C$, ou seja a função é derivável neste ponto.

Condição suficiente: a igualdade $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$ foi obtida supondo que a função dada é derivável. Então uma função derivável é também diferenciável.

Segue-se deste teorema que o diferencial da função f, num ponto fixo x_0, tem sempre a forma $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Vamos calcular o diferencial da função $y = x$. Neste caso $y'_x = 1$ e de $dy = f'(x_0)\Delta x$ resulta que $dy = dx = \Delta x$

ou seja "o diferencial do argumento coincide com o seu acréscimo". Então a igualdade $dy = f'(x_0)\Delta x$ pode ser escrita como:

$dy = f'(x_0)dx$, ou para x genérico do intervalo]a, b[, temos $dy = f'(x)dx$

Aplicações

Calcular aproximadamente, o acréscimo do volume da esfera se $r = 1$ e

$\Delta r = 0{,}01$.

Solução:

Da fórmula $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$, verifica-se que, para Δx suficientemente pequeno podemos pôr aproximadamente $\Delta y \approx dy$. ... no problema dado tem-se: $dV = 4\pi r^2 dr$ e para $r = 1$, $\Delta r = 0{,}01$ vem:

$dV = 4\pi \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}01\pi \approx 0{,}314$. (CARVALHO et al., 1981, p. 243-249)

Esta discussão é rica do ponto de vista de notação, pois retira dúvidas do uso indiscriminado da notação $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ que muitos livros fazem em que admitem simplesmente como sendo a mesma notação, ou uma outra forma de notação para *f'(x).* Na verdade não é uma notação casual, de origem arbitrária; ela tem um aspecto conceitual que a justifica.

Tarefa $t_8\mu_8$: construir o conceito de antiderivada de uma função.

Técnica $\tau_1\mu_8$: pelo uso da definição de antiderivada de uma função e de teoremas e regras práticas de suporte à definição.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_8: A técnica $\tau_1\mu_8$ é justificada pelo recurso à definição de antiderivada como função inversa da função derivada. Essa definição parte de considerações sobre as relações possíveis a estabelecer entre a derivada e a função que dá origem a essa derivada. Um exemplo de introdução a este conceito é extraído do livro 5, fazendo referência ao movimento de um trem, que o autor chama de "*maglev*". A propósito do "*maglev*" o autor escreve:

> A partir de dados obtidos de um teste de um protótipo de um *maglev* (trem de levitação magnética), que se move ao longo de um monotrilho retilíneo, engenheiros determinaram que a posição do *maglev* (em pés) a partir da origem no instante *t* é dada por
> $s = f(t) = 4t^2$. (TAN, 2003, p. 94).

Portanto, usamos esta situação para exemplificar a introdução da primitivação, pois ela é uma situação de contexto que tenta chamar atenção ao aluno para os aspectos conceituais a discutir.

Um maglev movendo-se ao longo de um monotrilho

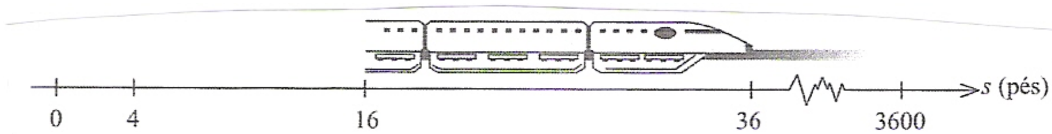


Figura nº 33: Situação de introdução à antidiferenciação

Fonte: Tan (2003, p. 373).

> ... se a posição do maglev é descrita pela função posição f, então sua velocidade é dada por f'(x). A função velocidade do maglev é simplesmente a derivada de f.
>
> ... se conhecemos a função velocidade f' do maglev, podemos determinar sua função posição?
>
> Para resolver este problema precisamos do conceito de antiderivada de uma função.
>
> **Antiderivada** Uma função F é uma **antiderivada** de f num intervalo I se F'(x) = f(x) para todo x em I. (TAN, 2003, p. 373).

Os outros livros que discutem este assunto fazem uma introdução formal.

Da definição anterior decorre que, se uma função *G* é antiderivada de uma função *f*, então qualquer antiderivada *F* de *f* deve ser da forma *F*(x) = *G*(x) + C, onde C é uma constante. Para a compreensão do que é uma antiderivada é imprescindível o domínio dos conceitos de diferenciação. Neste caso deve-se ter em mente que a derivada de uma constante é igual a zero, o que implica que antiderivada de uma função seja uma família de funções.

Algumas regras práticas diretamente relacionadas com a definição são:

Antiderivada (integral) de uma constante que é dada por $\int k dx = kx + C$ (com k constante). Pois $F'(x) = \frac{d}{dx}(kx + C) = k$

Antiderivada de uma potência que é dada por $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $(n \neq 1)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right] = \frac{n+1}{n+1}x^n = x^n = f(x).$$

Outras regras práticas similares decorrem diretamente da definição. A aplicação direta destas técnicas, às vezes, torna o Cálculo difícil ou quase impossível. Por exemplo calcular a integral de $f(x) = -\frac{58}{(3x+2)^2}$ usando uma regra prática não é possível. É necessário introduzir outras regras que permitem a transformação da tarefa complicada à uma tarefa mais fácil, tratável, digamos, com as regras práticas. Daí surgem as técnicas como de integração por substituição, por partes e integração por tabelas.

A regra de substituição pode decorrer diretamente da regra de cadeia da diferenciação. Assim nas condições do problema anterior, temos a substituição:

$u = 3x + 2$ de modo que $du = 3dx$ $dx = \frac{1}{3}du$. Então a nossa integral fica

$\int f(x)dx = \int -\frac{58}{(3x+2)^2}dx = \int -\frac{58}{u^2} \cdot \frac{1}{3}du = -\frac{58}{3}\int u^{-2}du$ daqui podemos aplicar a regra prática $-\frac{58}{3}\int u^{-2}du = -\frac{58}{3}(-1)u^{-1} + C = \frac{58}{3u} + C = \frac{58}{3(3x+2)} + C$

A regra de integração por partes pode ser deduzida a partir da diferenciação do produto, como se mostra a seguir. Na verdade sabemos que se *f* e *g* são funções diferenciáveis, então $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$. Integrando ambos membros da igualdade temos:

$\int \frac{d}{dx}f(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$, ou seja,

$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$, onde,

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$ que é a fórmula de integração por partes. Esta fórmula pode ser simplificada fazendo:

$u = f(x)$ e $dv = g'(x)$;

$du = f'(x)dx$ e $v = g(x)$ estas transformações resultam na seguinte versão:

$\int udv = uv - \int vdu$

É preciso ter alguma precaução com estas transformações: escolher u e dv tais que,

du seja mais simples que u (senão a integração complica-se cada vez mais, contrariando os objetivos da substituição).

dv seja mais fácil de integrar.

O livro 6 dedica pouco tempo a discussão de antiderivadas. Achamos que esta superficialidade na discussão pode não assegurar uma distinção clara entre integral indefinida (uma função) e integral definida (um número). Como o livro 7 realça,

> A diferença entre uma integral indefinida e uma integral definida deve ser enfatizada. A integral indefinida $\int f(x)dx$ é definida como uma função *g*, tal que sua derivada $D_x[g(x)] = f(x)$. Entretanto, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número cujo valor depende da função *f* e dos números a e b e é definida como o limite de uma soma de Riemann. A definição da integral definida não faz referência à diferenciação.
>
> A integral indefinida geral envolve uma constante arbitrária; por exemplo
>
> $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C.$
>
> Esta constante arbitrária C é chamada uma *constante de integração*. Aplicando o teorema fundamental para calcularmos uma integral definida, não precisamos incluir a constante arbitrária C na expressão de *g*(x), o teorema fundamental nos permite selecionar *qualquer* antiderivada, incluindo aquela pela qual C = 0. (LEITHOLD, 1982, p. 259).

Na verdade a distinção entre os dois conceitos é importante, pois os resultados são de naturezas diferentes embora decorrentes de um mesmo processo de calcular sugerido pelo sinal $\int$.

Tarefa $t_9\mu_9$: Calcular com mais praticidade as integrais idenfinidas.

Técnica $\tau_1\mu_9$: utilização de técnicas de integração por substituição e por partes.

Técnica $\tau_2\mu_9$: utilização de técnicas de integração por tabelas.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_9: as técnicas $\tau_1\mu_9$ e $\tau_2\mu_9$ são asseguradas pelo discurso tecnológico que já referimos acima, em θ/Θ_8.

Tarefa $t_{10}\mu_{10}$: construir a noção de integral definida.

Técnica $\tau_1\mu_{10}$: utilização da noção de área sob o gráfico.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_{10}: Como dissemos na análise didática, as noções de área de retângulo, de séries infinitas que conduzem à definição da soma de Riemann, associadas à noção de séries convergentes constituem o suporte da técnica $\tau_1\mu_{10}$, que usa a noção de área sob o gráfico para construir o conceito de integral definida. A definição da soma de Riemann começa com as considerações sobre as aproximações da área sob o gráfico, como alguns exemplos retirados do livro 5 (p. 400-401) sugerem:

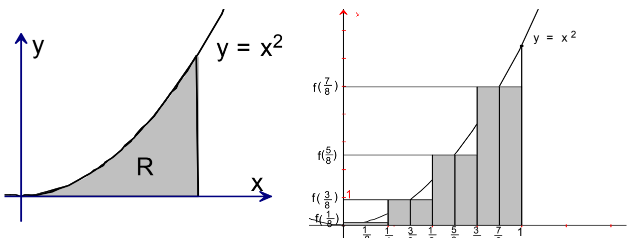


Figura nº 34a) A área da região sob o gráfico de *f* em [0, 1] em **a)** é aproximada pela soma das áreas dos quatro retângulos em **b).**

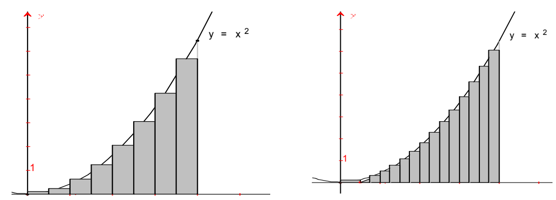


Figura nº 34b) Quando n cresce, o número de retângulos cresce, e a aproximação se torna melhor.
Fonte: Tan (2003, p. 400-401)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{7}{8}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{25}{64} + \frac{49}{64}\right) = \frac{21}{64}
\end{aligned}
$$

De casos particulares passa-se para os casos mais gerais, como a figura abaixo mostra:

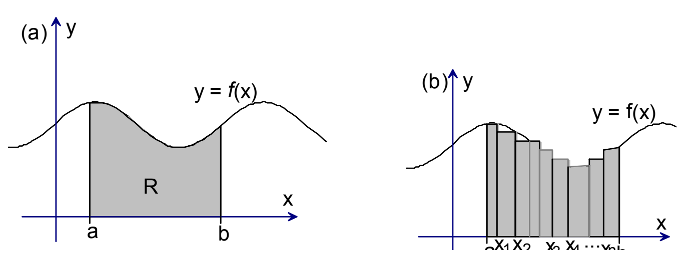


Figura nº 35: A área da região sob o gráfico de *f* em [a, b] em **(a)** é aproximada pela soma dos n retângulos mostrados em **(b)**.
Fonte: Tan (2003, p. 403)

Das observações acima conclui-se que dado um segmento [a, b] dividido em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$ e tomando n pontos arbitrários x_1, x_2, ..., x_n chamados pontos representativos pertencentes ao primeiro, segundo, ... e n-ésimo subintervalos, respectivamente, então aproximando a área A da região R pelos n retângulos de largura Δx e alturas $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, de modo que as áreas dos retângulos sejam $f(x_1)\Delta x$, $f(x_2)\Delta x$, ..., $f(x_n)\Delta x$, temos: $A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$. A soma do lado direito desta expressão é chamada soma de Riemann. Como os exemplos anteriores parecem sugerir, a soma de Riemann deve convergir para um único número quando n se torna arbitrariamente grande. Este número é definido como a área A da região R.

Assim o livro 5 (p. 403) define:

Seja f uma função contínua não-negativa em [a, b]. Então, a área da região sob o gráfico de f é

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\Delta x$$

onde x_1, x_2, ..., x_n são pontos arbitrários pertencentes aos n subintervalos de [a., b] de igual comprimento $\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$ ...

Depois desta definição, é introduzida a definição da integral definida (p . 404).

> Seja *f* definida em [a, b]. Se $\lim_{n \to \infty} \left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x\right]$ existe para todas escolhas de pontos representativos x_1, x_2, ..., x_n nos n subintervalos de [a, b] de igual comprimento $\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$, então este limite é chamado de **integral definida de *f* de *a* a *b*** e é denotado por $\int_a^b f(x)dx$. Assim
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x\right]$$

> O número ***a*** é o **extremo inferior da integração,** e o número ***b*** é o **extremo superior da integração.** (TAN, 2003, p. 404).

Para casos em que por baixo do eixo das abscissas existe alguma área a considerar, a fórmula anterior é adaptada:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{área de } R_1 - \text{área de } R_2 + \text{área } R_3.$$

Nesta última equação temos possibilidades de obter o resultado negativo. Quer dizer, a integral definida pode ter um resultado positivo ou um resultado negativo, positivo ou nulo.

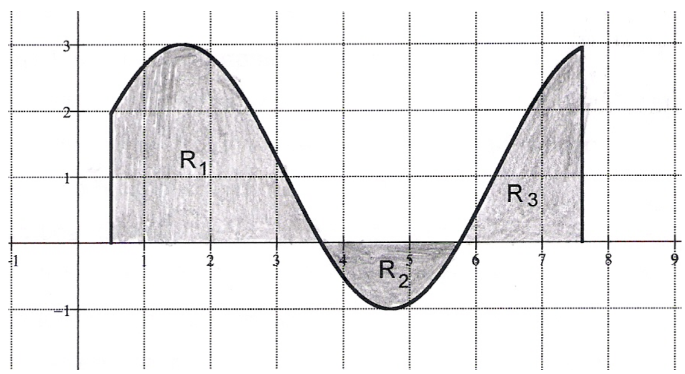


Figura nº 36: Integral definida como diferença de áreas

Fonte: Tan (2003, p. 406)

Uma ferramenta para flexibilizar a utilização da integração definida é o Teorema Fundamental do Cálculo analisado na tarefa que se segue.

Tarefa $t_{11}\mu_{11}$: calcular de modo flexível e rigoroso a integral definida.

Técnica $\tau_1\mu_{11}$: utilização do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_{11}: O Teorema Fundamental do Cálculo torna muito prático e eficiente o Cálculo de integrais definidas. É um teorema formulado em linguagem muito simples apesar da sua enorme aplicação. A formulação do teorema é a seguinte, segundo o livro 5 (p. 409):

> Seja *f* contínua em [a, b]. Então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,
>
> Onde *F* é uma antiderivada qualquer de *f*; isto é $F'(x) = f(x)$

A notação conveniente para fins de aplicação é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + C\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

A demonstração do teorema é feita como se ilustra abaixo

> Denotemos por A(t) a área da região R sob o gráfico de y = *f*(x) de x = a a x = t, onde a ≤ t ≤ b. Se h é um número positivo pequeno, então A(t + h) é a área da região sob o gráfico de y = *f*(x) de x = a a x = t + h. A diferença A(t + h) – A(t) é a área sob o gráfico de y = *f*(x) de x = t a x = t + h. A área desta última região pode ser aproximada pela área do retângulo de largura h e altura f(t) – isto é, pela expressão h · f(t).
>
> Assim A(t + h) – A(t) ≈ h · f(t). Dividindo ambos lados por h, obtemos
>
> $$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} \approx f(t).$$
>
> Tomando o limite quando h tende a zero, vemos, a partir da definição de derivada, que o lado esquerdo da expressão é
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = A'(t), \text{ ou seja } A'(t) = f(t).$$
>
> Uma vez que esta equação é válida para todos valores de t no intervalo [a, b], acabamos de mostrar que a função área A é uma antiderivada da função f(x). Pela definição da antiderivada, conclui-se que A(x) é da forma A(x) = F(x) + C onde F é uma antiderivada qualquer de f e C uma constante arbitrária. Para obter o valor de C, observe que A(a) = 0. Esta condição implica que A(a) = F(a) + C = 0, ou seja C = -F(a). Em seguida, como a área da região R é A(b), vemos que a área em questão é A(b) = F(b) + C = F(b) – F(a)
>
> Como a área da região R é $\int_a^b f(x)dx$ concluímos que
>
> $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. (TAN, 2003, p. 414-415)

Os livros 6, 7 e 8 usam uma demonstração baseada em argumentos muito mais algébricos do que geométricos, a partir do teorema do valor médio para integrais.

As duas idéias principais do Cálculo Diferencial e Integral, a diferenciação e a integração, estão juntas, articuladas no TFC.

Para reforçar a aplicação do teorema são apresentadas algumas propriedades da integral definida, como as apresentadas pelo livro 5 (p. 420).

> Sejam f e g integrais definidas, então:
>
> 1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
>
> 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
>
> 3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (c, uma constante).
>
> 4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
>
> 5 . $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (a < c < b). (TAN, 2003, p. 420)

Como nos referimos anteriormente, o teorema não funciona isoladamente. Sempre se aplica em combinação com outras técnicas.

Há um aspecto que achamos merecer uma observação pontual. Com a introdução da integral definida como área sob o gráfico, devia estar claro por que é que não se deve negligenciar o emprego do termo ***dx*** na notação da integral. Devia se vincar que

dx – é a largura de cada retângulo sob o gráfico infinitamente pequeno;

***f*(x) –** é uma altura de cada retângulo sob o gráfico infinitamente pequeno;

$\int_a^b$ ***f(x)dx*** – é a totalidade de todos retângulos sob o gráfico infinitamente pequenos, no intervalo entre *a* e *b*.

Esta explicação é necessária, pois, esclarece o significado da notação que usamos. Esta seria uma conexão direta com o que Leibniz disse quando produziu esta simbologia. O Cálculo da área de um retângulo envolve altura e largura. Não se fala de área de um retângulo sem cada um destes elementos. Talvez esta explicação evitaria alguns erros, como os detectados na tese da Vianna (1998), em que certos alunos negligenciaram *dx* nas respostas onde era necessário.

Munidos desta noção importante (TFC), temos as possibilidades de atacar um conjunto de problemas muito mais vasto. A aplicação dos conhecimentos adquiridos às vezes exige a adaptação e extensão das técnicas aprendidas para dar conta aos problemas muito específicos. Aliás Chevallard (1999) aponta sobre isso como uma terceira função da tecnologia: *produção de técnicas*. A tarefa a seguir aponta precisamente a aplicação das integrais na resolução de problemas:

Tarefa $t_{12}\mu_{12}$: Aplicar integrais na resolução de problemas.

Técnica $\tau_1\mu_{12}$: utilização do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) e outras técnicas específicas.

Discurso tecnológico-teórico θ/Θ_{12}: A utilização dos conhecimentos adquiridos para resolver problemas (matemáticos e não matemáticos) constitui o centro de atenção de toda aprendizagem. O Teorema Fundamental do Cálculo, pela sua praticidade e poder, justifica sua utilização em uma larga classe de problemas. Entre os vários problemas podemos identificar alguns.

Problemas de Cálculo de áreas. Os problemas de áreas (e de medidas em geral) para além de constituírem a base para a definição da integral definida e da formulação do TFC, formam uma classe de problemas para os quais estes conhecimentos são muito usados. Aliás é este tipo de problemas que deu origem a noção de integral ao longo da história. Alguns destes problemas são:

* <u>determinação do valor médio de uma função</u>: a partir da definição do valor médio de um conjunto de n observações dada na forma $\frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$ podemos estender o conceito para uma função *f* contínua em um segmento [a, b]. Se dividimos o segmento em n subintervalos de mesmo comprimento $\frac{b - a}{n}$ e escolhendo pontos x_1, x_2, ..., x_n respectivamente no primeiro, segundo, ..., e n-ésimo subintervalos, então

o valor médio dos números $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ é dado por $\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$. Esta expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{(b - a)}{(b - a)}\left[f(x_1)\frac{1}{n} + f(x_2)\frac{1}{n} + ... + f(x_n)\frac{1}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{b - a}\left[f(x_1)\frac{b - a}{n} + f(x_2)\frac{b - a}{n} + ... + f(x_n)\frac{b - a}{n}\right]$$

$= \frac{1}{b - a}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x\right]$ e tomando o limite, obtemos:

$$= \frac{1}{b - a}\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x\right]$$

$= \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx$ que é o valor médio da função f no segmento [a, b], se ela for integrável neste segmento.

<u>Áreas entre duas curvas</u>: se f e g são funções contínuas tais que $f \geq g$ no segmento [a, b], então a área da região limitada superiormente por $y = f(x)$ e inferiormente por $y = g(x)$ em [a, b] é dada por $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

<u>Cálculo de integrais impróprias</u>: o TFC combinado com as noções de áreas e de limites no infinito permite calcular integrais impróprias. Isso acontece do seguinte modo:

- Se f é uma função contínua no intervalo ilimitado à direita, $[a, \infty)$, então a integral imprópria de f em $[a, \infty)$ é definida por $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ se o limite existir;

Se *f* é uma função contínua no intervalo ilimitado à esquerda, $(-\propto, b]$, então a integral imprópria de *f* em $(-\propto, b]$ é definida por $\int_{-\propto}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\propto} \int_{a}^{b} f(x)dx$ se o limite existir.

Seja *f* uma função contínua no no intervalo ilimitado $(-\propto,\propto)$. Seja *c* qualquer número real e suponha que ambas as integrais impróprias $\int_{-\propto}^{c} f(x)dx$ e $\int_{c}^{\propto} f(x)dx$ sejam convergentes. Então a integral imprópria de *f* em $(-\propto,\propto)$ é definida por

$$\int_{-\propto}^{\propto} f(x)dx = \int_{-\propto}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\propto} f(x)dx$$

Outros problemas sobre este assunto podem ser analisados.

<u>* Problemas de Negócios e economia:</u> para este tipo de problemas existe uma série de técnicas específicas. Alguns exemplos:

a) O excedente de consumo é dado por $CS = \int_{0}^{\bar{x}} D(x)dx - \bar{x} \cdot \bar{p}$

onde *D* é a função demanda, $\bar{p}$ é o preço unitário de mercado e $\bar{x}$ é a quantidade vendida.

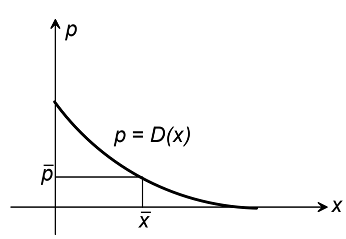


Figura nº 37: curva de uma função demanda
Fonte: Tan (2003, p. 444)

A fórmula anterior é deduzida do mesmo processo que conduz à soma de Riemann:

Para deduzir a fórmula para o excedente de consumo, o intervalo $[0, \overline{x}]$ é dividido em n subintervalos, cada um de comprimento igual a $\Delta x = \frac{\overline{x}}{n}$ e os extremos direitos denominados por $x_1, x_2, ..., x_{n} = \overline{x}$

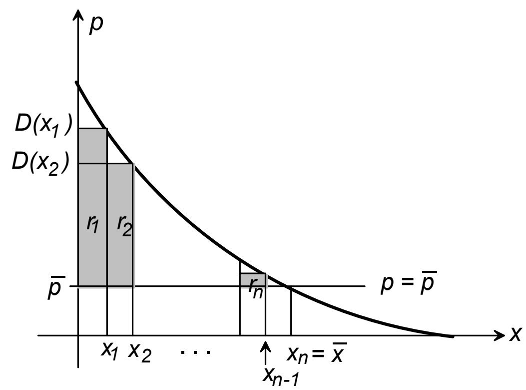


Figura nº 38 : Aproximando o excedente de consumo pela soma de retângulos**.**
Fonte: Tan (2003, p. 445)

Na figura acima, podemos considerar que há consumidores que pagariam um preço unitário de pelo menos $D(x_1)$ pelas primeiras Δx unidades do bem em vez do preço de mercado $\bar{p}$ dólares por unidade. A quantia economizada por esses consumidores é aproximada por

$D(x_1)\Delta x - \bar{p}\Delta x = [D(x_1) - \bar{p}]\Delta x.$

Continuando do mesmo modo teríamos:

$[D(x_1) - \bar{p}]\Delta x + [D(x_2) - \bar{p}]\Delta x + [D(x_3) - \bar{p}]\Delta x + ... + [D(x_n) - \bar{p}]\Delta x =$

$= [D(x_1) + D(x_2) + D(x_3) + ... + D(x_n)]\Delta x - \underbrace{(\bar{p}\Delta x + \bar{p}\Delta x + ... + \bar{p}\Delta x)}_{\text{n termos}}$

$= [D(x_1) + D(x_2) + D(x_3) + ... + D(x_n)]\Delta x - n\bar{p}\Delta x$

$= [D(x_1) + D(x_2) + D(x_3) + ... + D(x_n)]\Delta x - \bar{p} \cdot \bar{x}$

O primeiro termo da última expressão é a soma de Riemann da função $p = D(x)$ no intervalo $[0, \bar{x}]$, com pontos representativos $x_1, x_2, ..., x_n$. Fazendo n tender a infinito, obtemos para o excedente de consumo *CS*, a fórmula

$$\boxed{CS = \int_0^{\bar{x}} D(x)dx - \bar{x} \cdot \bar{p}}$$

b) O excedente da produção é dado por $PS = \bar{p} \cdot \bar{x} - \int_0^{\bar{x}} S(x)dx$

onde $S(x)$ é a função oferta, $\bar{p}$ é o preço unitário de mercado, e $\bar{x}$ é a quantidade em oferta.

Geometricamente o excedente de produção é dado pela área da região limitada superiormente pela reta $p = \bar{p}$ e inferiormente pela curva de oferta $p = S(x)$ de $x = 0$ a $x = \bar{x}$, como se vê na figura a seguir.

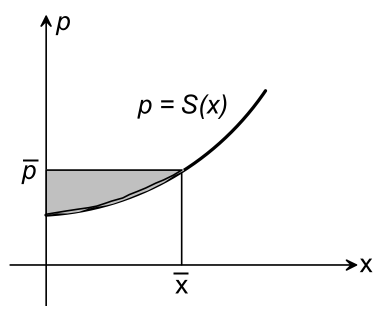


Figura nº 39: Excedente de produção
Fonte: Tan (2003, p. 446)

* <u>Aplicações de probabilidade ao Cálculo:</u> alguns exemplos:

- se *f* é uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória x em um intervalo I, que pode ser limitado ou ilimitado, então a probabilidade de um valor observado da variável aleatória x estar no segmento [a, b] é dada por

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

- se uma função *f* definida no segmento [a, b] é a função densidade de probabilidade, associada à variável aleatória continua x, então o **valor esperado** de x é

$$E(x) = \int_a^b x f(x)dx$$

* <u>determinação do volume de sólidos:</u> exemplos:

- Seja *f* uma função contínua no intervalo fechado [a, b] e admitamos que $f(x) \geq 0$ para todo x em [a, b]. Se *S* for o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas x = a e x = b e se *V* for o número de unidades cúbicas no volume de *S*, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Outras fórmulas sobre a determinação de volumes podem ser produzidas, a partir dos métodos do disco circular, do anel circular e do invólucro cilíndrico.

<u>* determinação do trabalho realizado por uma força atuando sobre um objeto</u>.

- Seja *f* uma função contínua no intervalo fechado [a, b] e seja *f*(x) o número de unidades na força atuando sobre um objeto no ponto x sobre o eixo x. Então, se *w* unidades for o *trabalho* realizado pela força enquanto o objeto se move de *a* a *b*, *w* será dado por

$$w = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$$

Existem muitas outras aplicações da integral na resolução de problemas práticos.

É importante destacar que se o TFC se torna impraticável devido a certas condições do problema, a integração numérica pode ser usada para contornar a situação. Neste caso os resultados são aproximados. Entre as técnicas de integração numérica destacamos a regra de trapézios e de Simpson.

regra dos trapézios: supondo que a área por baixo do gráfico da função a integrar, no segmento [a, b], é dividida em pequenos trapézios de igual largura $\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$ e lados paralelos de comprimentos $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ com $i = 1, 2, ..., n$, a área de cada trapézio deste tipo é dada por $\left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right] \cdot \Delta x$ e sua totalidade fica:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right] \cdot \Delta x = \frac{\Delta x}{2}[\, f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}[\, f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde se conclui que $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}[\, f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

com $\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$

Esta expressão recebe o nome de regra dos trapézios.

- regra de Simpson: observamos em cima que a regra dos trapézios faz a aproximação da área em cada sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ por uma função linear pelos pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ e $(x_i, f(x_i))$. A regra de Simpson faz essa aproximação por meio de porções de gráficos de polinômios do segundo grau (partes de parábolas) quando são escolhidos três pontos de cada subintervalo e admitindo que por 3 pontos não alinhados passa sempre uma parábola. Não fazemos aqui a demonstração da regra de Simpson por não fazer parte da nossa discussão, mas a conclusão que se chega é de que a aproximação da integral é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[\, f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$ e n é par.

Com a discussão das regras de aproximação de integrais definidas terminamos a análise matemática dos livros selecionados restando-nos, não obstante, a apresentação de um quadro que resume os principais aspectos abordos.

Quadro nº 3: Organização matemática dos livros estudados

Tarefa	Técnica	Discurso tecnológico-teórico	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
$t_1\mu_1$: construir o conceito de derivada de uma função em um ponto	$\tau_1\mu_1$: uso de θ/Θ_1:	θ/Θ_1: limite da razão incremental	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\mu_1$: uso da velocidade instantânea			√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_3\mu_1$: método prático.					√				
	$\tau_4\mu_1$: uso do declive da reta tangente.					√	√	√	√	√
	$\tau_5\mu_1$: uso da taxa de variação.						√	√	√	√
$t_2\mu_2$: interpretar a derivada de uma função em ponto.	$\tau_1\mu_2$: uso do coeficiente angular da tangente.	θ/Θ_2: uso de θ/Θ_1 às vezes com auxílio da visualização gráfica	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\mu_2$: método prático.					√				
	$\tau_3\mu_2$: uso da linearização.				√					
	$\tau_3\mu_2$: uso da taxa de variação						√	√	√	√
$t_3\mu_3$: justificar casos de não derivabilidade	$\tau_1\mu_3$: uso de θ/Θ_1 e l. laterais	θ/Θ_3: uso de θ/Θ_1, limites laterais e às vezes com a visualização gráfica	√*	√	√	√*		√	√	√
	$\tau_2\mu_3$: uso de θ/Θ_1 com a visualização gráfica.		√*	√	√	√*	√	√	√	√
$t_4\mu_4$: construir o conceito da função derivada	$\tau_1\mu_4$: uso de θ/Θ_1 para x genérico.	θ/Θ_4: definição a partir de θ/Θ_1 tomando x genérico	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\mu_4$: uso da representação gráfica das variações médias.					√				
$t_5\mu_5$: produzir técnicas específicas de derivação para os diferentes tipos de funções	$\tau_1\mu_{5a}$: uso de θ/Θ_1 com a formulação simples.	$\theta/\Theta_{5\text{-}1^o}$: uso de θ/Θ_1 com algumas variações de formulação das tarefas.	√	√		√	√			
	$\tau_1\mu_{5a}$: uso de θ/Θ_1 com a formulação de teorema.				√			√	√	√
	$\tau_2\mu_5$: uso de outras técnicas já produzidas dif. da defin.	$\theta/\Theta_{5\text{-}2^o}$: uso de técnicas já produzidas.	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_3\mu_5$: apresentar a fórmula sem justificação	$\theta/\Theta_{5\text{-}3^o}$: apresentar fórmula sem justificação.	√	√	√	√	√	**	**	**
$t_6\mu_6$: dominar as técnicas de derivação.	$\tau_1\mu_6$: uso de tarefas rotineiras (de reprodução)	$\theta/\Theta_{6\text{-}1}$: uso de analogias e capacidades de reconhecimento.	√	√	√	√	√	√	√	√
	$\tau_2\mu_6$: uso de problemas que exigem equacionamento		**	√	√	**	√	√	√	√
	$\tau_3\mu_6$: uso de definições e propriedades.	$\theta/\Theta_{6\text{-}2}$:definições e propriedades.	**	√	√	**	√	√	√	√
$t_7\mu_7$: usar os conceitos da derivada para resolver problemas	$\tau_1\mu_7/\tau_2\mu_7$: uso de θ/Θ_2 ou $\theta/\Theta_{5\text{-}2^o}$ às vezes articulados com a comparação do sinal da derivada com a monotonia da primitiva.	$\theta/\Theta_{7\text{-}1}$: uso de θ/Θ_2 ou $\theta/\Theta_{5\text{-}2^o}$ às vezes articulados com a comparação do sinal da derivada com a monotonia da primitiva.	**	√	√	**	√	√	√	√

	$\tau_3\mu_7$: uso da definição do conceito de diferencial e de variação de funções.	$\theta/\Theta_{7\text{-}2}$: definição do conceito de diferencial			√		√	√	√	√
$t_8\mu_8$: construir o conceito de antiderivada de uma função	$\tau_1\mu_8$: pelo uso da definição de antiderivada, regras, técnicas e teoremas de suporte à definição	θ/Θ_8: definição de antiderivada e regras práticas e teoremas de suporte.					√	√		√
$t_9\mu_9$: calcular com mais praticidade as integrais	$\tau_1\partial_9$: uso de integração por substituição e por partes; $\tau_2\partial_9$: uso da integração numérica; $\tau_3\mu_9$: uso da integração por tabelas	θ/Θ_9: Integração por substituição e por partes baseadas nas técnicas de diferenciação em cadeia e do produto. O uso de tabelas não tem suporte tecnológico plausível.					√	√	√	√
$t_{10}\mu_{10}$: construir a noção de integral definida	$\tau_1\mu_{10}$: utilização da definição da integral definida	θ/Θ_{10}: Definição de integral definida à partir da soma de Riemann.					√	√	√	√
$T_{11}\mu_{11}$: calcular de modo flexível e rigoroso a integral definida	$\tau_1\mu_{11}$: pelo uso do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)	θ/Θ_{11}: Teorema Fundamental do Cálculo em articulação com outras técnicas de integração: regras práticas de integração, integração por substituição, por partes e por tabelas					√	√	√	√
$t_{12}\partial_{12}$: aplicar integrais na resolução de problemas	$\tau_1\partial_{12}$: pelo uso do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)	θ/Θ_{12}: mesmo discurso de θ/Θ_{11}.					√	√	√	√
	$\tau_2\partial_{12}$: aplicação da soma de Riemann								√	

* - Discussão incompleta.

** - ocorrência rara.

4. 2. 4. ALGUMAS CONSTATAÇÕES DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DOS LIVROS SELECIONADOS

No livro 4, apesar de haver pontos de vista diversificados na abordagem, muitos “assuntos” não são aprofundados. Como nos referimos anteriormente, apenas 1 caso é resolvido fazendo uso das noções de máximo/mínimo de funções, e não discute os casos em que a derivada não existe (tal como o livro 1). Parece que a preocupação para diversificação de pontos de vista e contextualização, para este caso, não leva ao aprofundamento de certas questões importantes. Por outro lado, o formalismo exagerado, como acontece com o livro 1, parece que igualmente deixa de fora algumas coisas importantes: como a não discussão de casos específicos onde a derivada não existe, a falta de abordagem de problemas de contexto onde se faz uso das noções de derivação, e dificuldades na diversificação de exercícios; todas as questões colocadas são presas à aplicação das fórmulas imediatamente deduzidas.

Os livros 6, 7 e 8 apresentam uma discussão muito mais aprofundada dos conteúdos, com grande rigor matemático e com uma elaboração exaustiva dos conceitos. Por outro lado, notamos alguma falta de convite ao leitor para participar da discussão, uma característica constatada também no livro 1. Problemas introdutórios que justificam a necessidade de uma discussão de um assunto são importantes, o que em certos casos, não é observado nestes livros. Entre alguns exemplos que podemos dar, destacamos um caso, extraído do livro 6, capítulo 6 (p. 197) de introdução às primitivas:

Capítulo 6

A Integral

6. 1. Primitivas

Dizemos que uma função *F* é *primitiva* de uma outra função *f* se esta é a derivada daquela: *F’ = f.* Por exemplo,

x^3 é primitiva de $3x^2$ senx é primitiva de cosx

$\sqrt{x}$ é primitiva de $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ....

Achamos que esta introdução não situa muito bem o leitor a necessidade de discutir primitivas de funções. Talvez a razão resida no fato de que sejam livros relativamente antigos e na altura o formalismo imperava no ensino da matemática.

O livro 5 apresenta um enfoque diferente: com algumas introduções contextualizadas, apelo para discussões em grupos de alunos e sugestões para uso das tecnologias. Este enfoque talvez se deva ao fato de ser um livro novo (2003) e por causa disso tenha incorporado algumas idéias à luz das discussões atuais em Educação Matemática para uma dinâmica que procura contextos e a resolução de problemas como fio condutor do processo de ensino e aprendizagem, tendo o leitor (aluno) incentivado a ser um participante ativo das discussões.

CAPÍTULO 5. ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS DO ESTUDO DOS LIVROS SELECIONADOS SEGUNDO O REFERENCIAL TEÓRICO E A LITERATURA REVISTA

A nossa análise e a interpretação dos resultados do estudo se farão em torno das seguintes questões que identificamos, apoiando-se no quadro teórico e na outra literatura revista:

1 – Como se realiza a articulação entre os registros de representação semiótica nos livros analisados?

Esta questão se fundamenta na teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003).

2 – Que tipos de tarefas os livros analisados propõem?

3 – Como as técnicas para resolver as tarefas são produzidas?

4 – Como os livros analisados articulam os blocos prático-técnico e teórico-tecnológico?

5 – Como as técnicas são justificadas?

6 – Há justificação e interpretação dos resultados da aplicação das técnicas?

7 – Há tarefas (abertas) de aplicação de conhecimentos da diferenciação e integração na resolução de problemas de contextos requerendo equacionamentos?

As questões **2 – 7** se fundamentam na teoria antropológica do didático (TAD) de Chevallard (1999).

8 – Como se articulam a problematização contextualizada e a descontextualização das noções matemáticas nos livros analisados?

A questão **8** se apóia na teoria das situações didáticas de Brousseau (1970-1990).

5. 1. OS RESULTADOS E SUA DISCUSSÃO

A tabela seguinte resume o que encontramos nos livros para a questão **1**, quanto à utilização dos registros de representação semiótica:

Tabela nº 1: Articulação entre os registros de representação semiótica nos livros analisados.

Uso de / LIVRO		Representação Discursiva	Representação não-discursiva
	Registros Multifuncionais		
1	10	10	0
2	43	43	0
3	63	56	7
4	22	21	1
5	101	101	17
6	98	89	9
7	468	400	68
8	394	255	139
	Registros Monofuncionais		
1	214	194	20 (1 tabela)
2	242	204	38 (1 tabela)
3	219	191	28 (10 tabelas)
4	269	233	36 (4 tabelas)
5	734	638	96 (4 tabelas)
6	852	762	90
7	2139	1955	183 (31 tabelas)
8	2996	2655	341 (54 tabelas)

Na nossa classificação consideramos que o livro usa:

* o registro multifuncional e a representação discursiva se o conteúdo da atividade é expresso em língua natural. Neste caso consideramos formulações em palavras de um assunto relativamente longas e completas, embora com algumas intercalações esporádicas de expressões algébricas; exercícios (geralmente de contexto) que não trazem equações correspondentes;

* o registro multifuncional e a representação não-discursiva se o conteúdo da atividade é ilustrado por algum desenho, por exemplo, o desenho de uma caixa cujo conteúdo é objeto a maximizar;

* o registro monofuncional e a representação discursiva se o conteúdo da atividade é expresso através da álgebra e suas transformações; de exercícios do tipo “determine” e também de contexto com indicação explícita da equação a usar nos tratamentos.

* o registro monofuncional e a representação não-discursiva se o conteúdo da atividade for um gráfico de uma função ou tabela de valores.

Entrando na discussão dos resultados acima, constata-se que os livros analisados usam mais os registros monofuncionais onde os tratamentos são algoritmizáveis, segundo (Duval, 2003) com recurso predominantemente à representação discursiva através de sistemas de escritas algébricas. Os tratamentos mediante as transformações algébricas são mais preferidos que as conversões de registros. Estas últimas, pouco acontecem, e, mesmo quando elas têm lugar, são geralmente no sentido do registro algébrico ou da representação discursiva através da linguagem natural para o registro gráfico ou algébrico respectivamente. O contrário quase que não acontece. Assim muitas ocorrências da coluna da representação não-discursiva para os registros monofuncionais são gráficos que traduzem algo expresso algebricamente ou algo expresso através da língua natural. Também ocorrem, mas raramente, as conversões do registro algébrico para a interpretação usando a tabela e desta para o gráfico. Essa transformação acontece nas tarefas onde se faz o estudo da monotonia de funções e quando há necessidade de uma rede de pontos suficientemente maior para plotar um gráfico ou quando se quer comparar os graus de aproximação nas integrações numéricas. Em geral parece não haver necessidade, segundo os dados da tabela, a produção de algum desenho para analisar uma situação. Este tipo de representação ocorre muito raramente, com exceção do livro 8 e um pouco do livro 7 que tentam combinar a exposição algébrica com alguns desenhos das situações em discussão. A relação entre o visual-gráfico e o algébrico é de certo modo desequilibrada, há muito mais tarefas que fazem uso do registro algébrico do que o gráfico e através de tabelas. O caso mais saliente é do livro 6 que nem sequer ousa apresentar alguma tarefa passando por uma representação por meio de tabela.

A partir da tabela nº 1, os livros não asseguram a realização plena da coordenação entre os registros de representação semiótica. E, como conseqüência, podem não proporcionar a compreensão genuína dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral ou levar a confundir os objetos matemáticos em causa com suas representações, pois os objetos são acessíveis através da representação semiótica e a distinção entre a representação e o objeto representado só é possível se tal representação é diversificada. Em relação a esses bloqueios possíveis, Duval escreve nos seguintes termos:

> Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não-congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes. Falando de outra maneira, o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monorregistros. Existe como que um “enclausuramento” de registro que impede o aluno a reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. ...
>
> A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque *não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.* Ora, na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente ... O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. (DUVAL, 2003, p. 21).

Portanto, é possível que a situação dos livros analisados obstaculize a aprendizagem dos alunos, principalmente o livro 1 que toma o limite da razão incremental como solução de tudo e é muito inflexível no olhar a outros problemas senão os formais.

Observamos entretanto que há um esforço (embora não suficiente) no sentido de combinar os procedimentos algébricos com a visualização gráfica, principalmente nos livros 8 e 7 e um pouco nos livros 6 e 5.

Passamos a analisar e a interpretar os mesmos dados segundo a teoria antropológica do didático.

Antes de passarmos às questões, apresentamos as tabelas 2 e 3 que resumem os gêneros de tarefas e ocorrências de atividades de demonstração nos livros analisados.

Tabela nº 2: Gêneros de tarefas encontrados nos livros analisados

Gênero de tarefas / Livro	Calcular Determinar Obter	Veri ficar	Justificar Provar Mostrar	Reso lver	Analisar o gráfico/tabela/ figura	Expli -car	Inter-pretar
1	191	10	3	-	-	-	0
2	187	13	11	-	-	-	16
3	168	-	4	11	-	-	11
4	217	2	2	-	35	-	11
5	591	12	38	3	43	28	114
6	746	-	70	-	-	-	125
7	1663	14	235	7	250	12	407
8	2473	6	135	18	480	2	255

Tabela nº 3: Demonstração versus apresentação da técnica nos livros analisados.

Demonstração vs apresentação da técnica / Livro	Demonstração da técnica	Apresentação da Técnica (não demonstrada)
1	18	3
2	18	4
3	19	1
4	15	4
5	20	10
6	24	9
7	34	17
8	41	21

Análise das questões colocadas:

Começamos com a questão **2**: Que tipos de tarefas os livros analisados propõem?

Percorrendo a tabela nº 2, percebemos que em geral os livros analisados se debruçam sobre 7 tipos de tarefas diferentes e dois posicionamentos em relação às demonstrações, embora não necessariamente com o mesmo grau de incidência para todos os livros consultados: uns são mais completos e outros menos completos. Segundo a nossa classificação baseada em Chevallard (1999) temos tarefas:

do tipo 1: as caracterizadas pelos gêneros calcular, determinar, obter;

do tipo 2: as caracterizadas pelo gênero verificar;

do tipo 3: as caracterizadas pelos gêneros justificar, provar, mostrar;

do tipo 4: as caracterizadas pelo gênero resolver;

do tipo 5: as caracterizadas pelo gênero analisar (o gráfico/tabela/figuara);

do tipo 6: as caracterizadas pelo gênero explicar;

do tipo 7: as caracterizadas pelo gênero interpretar.

A classificação que fizemos leva em conta, no nosso entender, a finalidade da tarefa para a técnica empregue (ou a empregar) na sua resolução. Assim consideramos que as tarefas,

do tipo 1 se limitam à reprodução da técnica nas condições idênticas em que ela é introduzida, às vezes com finalidades de rotinizá-la;

do tipo 2 exigem algum controle do alcance da técnica introduzida;

do tipo 3 exigem uma justificação, assegurando que a técnica introduzida permite realizar o que se pretende (segundo Chevallard, 1999);

do tipo 4 exigem do aprendiz a procura de uma técnica (dentre as que aprende);

do tipo 5 são constituídas por um conjunto de questões preparatórias para iniciar a produção de uma técnica;

do tipo 6 exigem o aprendiz a explicar por que é que proceder segundo a técnica dada é correto (Chevallard 1999);

do tipo 7 exigem do aprendiz a dar significado o resultado produzido pela técnica que está usando.

Com a nossa interpretação dos diferentes tipos de tarefas então a tabela nº 2 ressalta que, em geral, os livros analisados dão grande peso as tarefas de reprodução da técnica, com algumas ligeiras variações para outros tipos. Na linguagem de Bosch et al. (2004) diríamos que os tipos de tarefas diferentes do tipo 1 aparecem de forma anedótica e com caráter decorativo. Contudo, fazemos um reparo sobre os livros 8, 7, 6 e 5 da existência de uma quantidade significativa de tarefas de interpretação e de prova. Tomando Chevallard (1999) e Bosch et al. (2004) diríamos por um lado que estão os livros 1, 2, 3 e 4 enfatizando o bloco prático-técnico, caracterizado por pedidos de realização de tarefas em detrimento de elaboração de técnicas que permitem resolver um certo número de tarefas e, por outro, temos os livros 5, 6, 7 e 8, que trabalham (embora não muito bem articulado) os dois blocos: prático-técnico e tecnológico-teórico. Para Chevallard (1999), o ensino devia caracterizar-se por colocação de questões no sentido forte, exigindo a elaboração de técnicas, colocando em marcha o discurso teórico-tecnológico que as justifica, ou seja, a elaboração de uma praxeologia relativa a um tipo de tarefas problemáticas. E o livro como meio de ensino devia conter esta característica.

Ainda considerando Chevallard (1999) e Bosch et al. (2004), há um certo cunho ostensivo nos livros analisados na abordagem de questões, no sentido de que algumas coisas são simplesmente apresentadas (mostradas) como devem ser feitas e a partir daí passa-se a resolver tarefas segundo a técnica mostrada.

Em relação à questão **3**: “Como as técnicas para resolver as tarefas são produzidas?”, temos a dizer que a partir do resumo dado nas duas tabelas anteriores e dos detalhes que tivemos da análise dos livros, algumas técnicas são simplesmente dadas e daí passa-se a usá-las, outras resultam de algumas justificações (demonstrações) entre as quais, umas não motivadas, e outras, resultantes da motivação problemática decorrente de insuficiências das técnicas aplicáveis a outras tarefas.

Para a questão **4**: “Como os livros analisados articulam os blocos prático-técnico e teórico-tecnológico?”, a constatação é de que tal articulação é de certa forma desigualmente realizada, pois a ênfase é dada, no geral, sobre o bloco prático-técnico, como se mostra a partir das tabelas acima. Salientamos entretanto que, como dissemos anteriormente, há duas tendências que se observam na tabela: por um lado estão os livros 1-4 mais inclinados para a aplicação das técnicas; por outro lado estão os livros 5-8 tendendo para uma combinação entre as aplicações e as justificações e explicações de por que é que as técnicas produzem resultados certos ou questionamentos de situações que podem motivar a produção de técnicas. As idéias intuitivas de linearização local que o livro 2 sugere são interessantes do ponto de vista didático. A lienarização local é uma característica de toda função derivável. Neste caso concordamos plenamente com os autores pois o conceito de derivada fica bem estabelecido e bem relacionado com a reta tangente. Quer dizer, para uma função derivável em um ponto x_0, por volta deste ponto a função é parecida com uma reta tal que seu coeficiente angular é igual ao coeficiente angular da reta tangente no tal ponto. Por outro lado, para justificar que a função, digamos, $f(x) = |x|$ não é derivável em $x_0 = 0$, a idéia de linearização pode ajudar, pois no ponto $x_0 = 0$, nunca o gráfico da função dada se parecerá com uma reta, por mais que se amplie ou reduza a região em torno de $x_0 = 0$. Daqui concluímos que num bico a função nunca é derivável; do que simplesmente anunciar que num bico a função não é derivável. Claro que a idéia de limites laterais pode justificar que em $x_0 = 0$ a função não é derivável, mas descrever uma situação matemática (neste caso, a não derivabilidade da função em um ponto) usando mais que uma maneira ajuda as pessoas a refletir bem sobre o significado da situação dada, tal como se refere na revisão bibliográfica (Vianna 1998, Sad 1998 e Villarreal 1999), bem como em Duval (2003) sobre o papel da associação entre o visual-geométrico e o algébrico na compreensão. Ajuda para distinguir a diferença entre a representação e o objeto representado.

Outro aspecto que achamos que podia ser bem explorado é a relação entre a derivada e a sua primitiva. Como exemplo disso, analisemos um exercício que aparece no livro 2:

Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, determinar:

O conjunto em que f é crescente ou decrescente.

Os pontos nos quais a tangente ao gráfico de f(x) é paralela ao eixo x.

Esboce o gráfico de f(x).

Obs: Notemos que não há concordância semântica entre <u>*determinar*</u> *(expresso na 1ª linha do enunciado para indicar o que deve ser feito nas alíneas subseqüentes) e* <u>*esboce*</u> *que aparece na alínea c. Pensamos que este descuido seja devido a algo mentalizado pelo autor do texto de que* <u>*determinar*</u> *se refira mais a procedimentos algébricos e não condizente com a produção de um desenho geométrico.*

Respostas às questões colocadas:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Sinal de f´(x):

As raízes de $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ são 1 e 3

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9>0$, o que ocorre quando $x<1$ ou $x>3$

Logo, f é crescente em $]-\infty, 1] \cup [3, \infty[$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9<0$ que ocorre quando $1<x<3$. Logo, f é decrescente em [1, 3].

Pontos nos quais a tangente ao gráfico de f(x) é paralela ao eixo x.

São pontos x tais que f´(x) = 0, isto é,

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 5$

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$

Portanto, a tangente ao gráfico de f(x) é paralela ao eixo x nos pontos de coordenadas (1,5) e (3,1).

Esboço do gráfico:

	$-\infty$		1		3		$+\infty$ x
$f'(x)$		positiva	zero	negativa	zero	positiva	
$f(x)$		crescente ↗	5	decrescente ↘	1	crescente ↗	

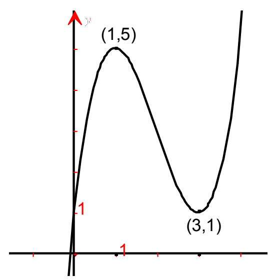


Figura nº 40: Análise do comportamento da função e o esboço do gráfico usando o sinal da função derivada

Fonte: Giovanni e Dante (1992, p. 291)

A tabela que compara o comportamento da função *f* e o sinal da sua derivada, o gráfico da função *f* com os seus extremos representados, tornam claro o papel da derivada para o estudo da função.

Achamos que se o gráfico da função derivada e o da função "mãe" aparecessem juntos, no mesmo sistema de coordenadas, tornaria ainda mais claro o significado da derivada da função *f,* como exemplificamos a seguir:

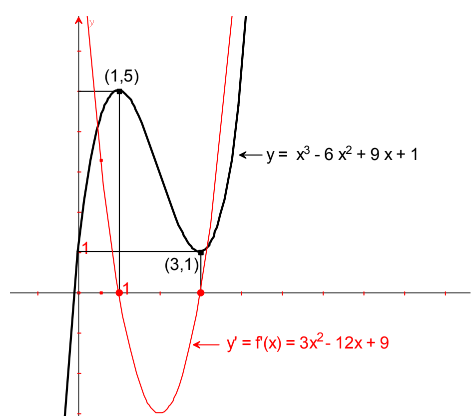


Figura nº 41: Representação gráfica de uma função e sua primitiva

Os dois gráficos juntos, da função *f* e da sua derivada *f’*, complementam a explicação da tabela sobre a relação entre o comportamento de *f* e o sinal de *f’*:

f’ é positiva, isto é, o seu gráfico está acima do eixo das abscissas, então *f* cresce;

f’ é nula, isto é, o seu gráfico corta o eixo das abscissas, então tem-se extremo de *f*.

f’ é negativa, isto é, o seu gráfico está abaixo do eixo das abscissas, então *f* decresce.

A mesma estratégia pode ser usada para visualizar e analisar o significado da segunda derivada, o que torna a situação menos ambígua e menos abstrata. Esta visualização contrasta melhor os elementos de comparação nas duas funções, *f* e *f’*. Nos gráficos vemos (o que admitimos na tabela) que o sinal da derivada (positivo, negativo ou zero) se compara com a monotonia da função “mãe”. Às vezes se confunde, julgando que se compara a monotonia da derivada com a da função “mãe”, criando um embaraço no uso da derivada para analisar fenômenos de natureza funcional.

O que dissemos acima ajuda ainda a evidenciar (graficamente) o conceito básico do Cálculo, o Teorema Fundamental do Cálculo. Por exemplo, dado o gráfico abaixo:

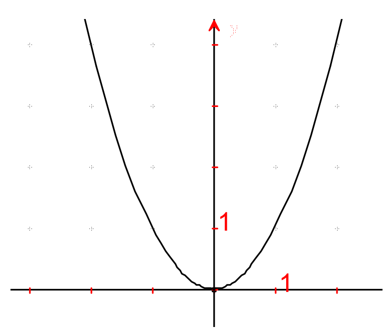


Figura nº 42: Gráfico para uma possível interpretação como primitiva ou como derivada.

O gráfico dado é de uma função *f'*(x), concretamente *f'*(x) = $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)'$ e ao mesmo tempo é o gráfico de uma função *F*(x) = $\int g(x)dx$, concretamente *F*(x) = $\int 2x dx$.

Se tomamos a situação segundo a primeira interpretação, e se temos uma prática na análise gráfica, então temos muita informação a respeito de *f*.

Se a situação é tomada no segundo ponto de vista, então sabemos o comportamento da sua derivada.

Portanto, o bloco teórico-tecnológico não está adequadamente interpretado com a sua contraparte prático-técnica.

Para Chevallard (1999) e Bosch et al. (2004), toda prática matemática que negligencie as justificações, explicações e interpretações pouco faz sobre o bloco teórico-tecnológico. E ainda referindo a Bosch et al. (2004), a insuficiência tecnológica, acarreta como conseqüência à identificação das técnicas matemáticas com os objetos ostensivos (símbolos, palavras e gráficos) que se utilizam para descrevê-las e para aplicá-las. E evidentemente isso produz efeitos perturbadores na compreensão.

Passemos para a questão **5**: “Como as técnicas são justificadas?”. Os dados que temos nos indicam que algumas são justificadas através de demonstrações e interpretações, raramente através de explicações. Este dado é consistente com a observação de Chevallard (1999) segundo a qual em matemática, a função de justificação predomina tradicionalmente, por meio de exigência de demonstração, sobre a função de explicação. Outras técnicas não são justificadas apenas apresentadas como verdadeiras. Na verdade, 5 dos 8 livros que analisamos não exigem explicação alguma, apenas algumas demonstrações e interpretações.

A questão **6**, “Há justificação e interpretação dos resultados da aplicação das técnicas?”, igualmente tem uma resposta a partir das tabelas nº 2 e nº 3: as atividades de interpretação dos resultados das técnicas são poucas quando comparadas com as atividades de reprodução; 1 livro nem sequer propõe alguma atividade de interpretação do resultado. A justificação aparece em cada um dos livros analisados, mas também de forma muito esporádica. Esta é uma conseqüência direta do que falamos acima em que a grande parte das discussões está orientada no saber-fazer.

Para a questão **7**: Há tarefas (abertas) de aplicação de conhecimentos da diferenciação e integração na resolução de problemas de contextos requerendo equacionamentos?:

A seguir apresentamos 2 exemplos deste tipo de perguntas extraídos do material de Bosch et al. (2004), para se ter uma idéia do que realmente são essas tarefas abertas.

> 1. Uma máquina industrial que tem uma antiguidade de x anos, gera uma receita (em dólares por ano) de $I(x) = 5000 – 20x^2$ e tem custos de $C(x) = 2000 + 20x^2$.
>
> Questão: O que faria para calcular o lucro gerado pela máquina durante o período em que ela é rentável? Deixa indicada a operação que crê que fará para calcular o tal lucro.
>
> 2. Numa auto-estrada a velocidade máxima permitida é de 120 km/h. Um carro circula por esta auto-estrada num intervalo de tempo compreendido entre t = 0 h e t = 6 h. Se sua posição em cada instante do intervalo é dada pela equação $f(x) = \frac{-t^3}{3} - 3t^2 + 135t$.
>
> Em algum momento o carro excede o limite de 120 km/h?
>
> Em que momento sua velocidade é máxima? (BOSCH, et al. 2004, p. 43 & 45).[31]

As questões em referência exigem uma reflexão sobre o que se deve fazer a partir dos conhecimentos disponíveis e daí pôr em marcha a técnica que se achar conveniente, pois não há sugestão de como fazer e no caso do primeiro, é necessário dar uma explicação da estratégia usada. São questões que exigem a aplicação e interpretação a partir dos conhecimentos disponíveis da diferenciação para dar reposta ao pedido.

Considerando este ponto de vista, os resultados da análise dos livros didáticos aparecem na tabela 4 a seguir:

---

[31] Tradução nossa

Tabela nº 4: Problemas (abertos) requerendo equacionamentos

Problemas / Livro	de contextos requerendo equacionamentos
1	0
2	16
3	11
4	11
5	114
6	125
7	407
8	255

O livro 1 do nosso estudo não traz nada de questões abertas, preferindo tarefas de questionamento direto. Dos livros que trazem alguma coisa de perguntas abertas, uns apresentam um número reduzido, é o caso dos livros 2, 3 e 4 e outros (os livros 5, 6, 7 e 8) trazem alguma quantidade significativa de tais tarefas, embora quando comparado com as tarefas de questionamento direto, estes números sejam insignificantes.

Para a questão **8**: "Como se articulam a problematização contextualizada e a descontextualização das noções matemáticas nos livros analisados?", tivemos a seguinte percepção: em geral os livros começam a identificar o conhecimento visado no seu nível formal, e depois passam para algumas situações de contexto que se resolvem segundo tal conhecimento. As fases das discussões são geralmente do tipo: Definição (ou teorema) → exemplos/algumas tarefas de discussão → exercícios. A esse respeito o livro 3 explicitamente afirma: "... vamos dar a definição da derivada em linguagem formal, voltando às suas aplicações problemáticas ... A seguir vamos aplicar esse método geral para o Cálculo das derivadas de algumas funções elementares". Mesmo nos casos onde a discussão começa com a análise de alguma situação de contexto, muitas vezes não surge um questionamento insistente de tal modo que a estratégia ótima de solução faça emergir o conhecimento visado (Brousseau, 1997). Por exemplo, o livro 5 ao introduzir a noção de antiderivada começa com uma situação de contexto:

> ... Se conhecemos a posição do maglev em qualquer instante t, podemos determinar sua velocidade no instante t?
>
> Como é sabido, se a posição do maglev é descrita pela função de posição f, então sua velocidade em qualquer instante t é dada por f'(t) – a função velocidade do maglev – é simplesmente a derivada de f. ... Se conhecemos a velocidade do maglev em qualquer instante t, podemos determinar sua posição no instante t?
>
> Dito de outra forma, se conhecemos a função velocidade f' do maglev, podemos determina sua função posição f?
>
> Para resolver este problema, precisamos do conceito de antiderivada de uma função.
>
> | ANTIDERIVADA | Uma função F é uma **antiderivada** de f num intervalo I se F'(x) = f(x) para todo x em I. |
> |---|---|
>
> (TAN, 2003, p. 376).

Nós achamos que o livro devia continuar a questionar a partir da última pergunta, antes de outras sugestões. Por exemplo perguntaria: *Como fazer isso? Supõe que a função velocidade do maglev em cada instante t é dada por S'(t) = 2t, qual sua função posição? A resposta ótima a esta questão é exatamente a antiderivada que se pretende.* Dos livros analisados, alguns são muito formais (1, 3, 6, 7 e 8) pouco se esforçam para envolver o leitor na discussão. O formalismo exagerado às vezes não motiva a discussão. Um outro exemplo podemos destacar sobre o que o formalismo pode acarretar. Todos os livros analisados (os que discutem integral) definem integral definida como sendo área sob o gráfico de uma função *f*. A questão que se levanta é: Por que é atenção sobre esta área? Dos livros analisados não encontramos resposta desta questão. Como se justifica a existência de uma função de área sob um gráfico? Da nossa reflexão admitimos como resposta plausível a esse eximir na procura de razões para as questões acima no formalismo. Pouco se procura partir de algo simples para se chegar ao complexo. Partindo de situações simples, tal como é sugerido pela Vianna (1998) pelo menos haveria razões claras para se falar de uma função de área. Por causa da sua importância didática, na conscientização do aprendiz da existência de uma função de área, preferimos reproduzir, de novo, o tal exemplo.

Seja *f* uma função definida por *f*(x) = k, onde k é um número real positivo.

Seja *F* uma função de área da região limitada pelo gráfico de *f* e o eixo das abscissas, como a figura mostra:

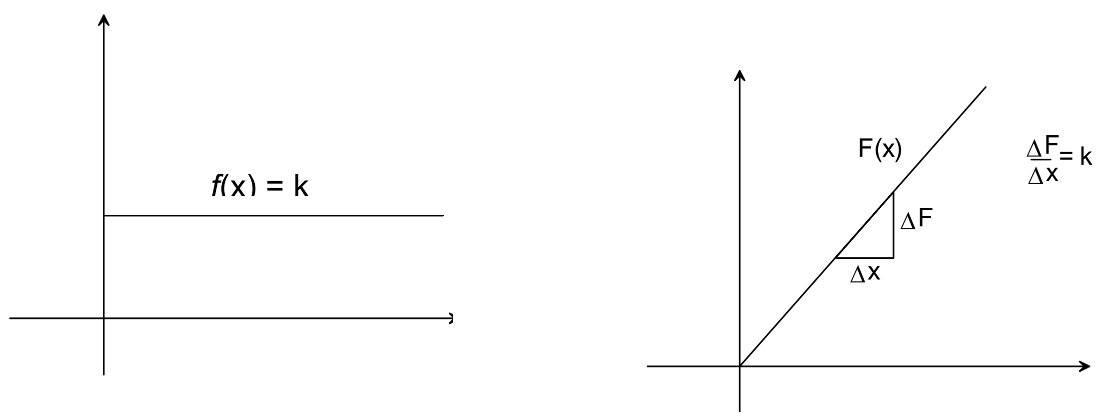


Figura nº 43: Visualização geométrica da relação derivada-integral
Fonte: Vianna (1998, p. 17).

O declive da tangente de *F*(x), isto é, a derivada de *F*(x) é igual a k que é o valor da função *f*(x) para qualquer x.

Os dois gráficos anteriores estabelecem muito bem a relação entre reta tangente e área sobre o gráfico. Na verdade a área sob o gráfico de f é igual a: A(f) = k·x uma vez que a região (sob o gráfico) é um retângulo de base x e altura k. Com este exemplo a existência de uma função de área é explicável.

Se a função f não é constante, mas contínua, é verdade que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para qualquer ponto no domínio da função. Quer dizer, nas proximidades do ponto a do domínio da função f, esta se assemelha a uma função constante. Portanto, pode-se pensar numa função de área como antes, ou o argumento anterior é válido.

Achamos que procedendo assim se evitariam algumas artificialidades em torno da função de área ou de deixar coisas não explicadas.

Não obstante a momentos fracos como este que acabamos de apontar, há sugestões de tarefas muito significativas no material analisado. O livro 5, por exemploo, apresenta algumas seções de exercícios para discussões em grupos e de exploração usando as tecnologias. Achamos que estas seções são inovadoras e propícias para uma aprendizagem significativa, onde há discussão e exploração implica haver uma questão problemática em torno da qual os envolvidos devem agir, formular, refletir e comunicar as suas idéias e hipóteses e procurar formas de validá-las. Na verdade, segundo Brousseau (1997, p. 30), a concepção moderna do ensino requer que se provoque no aluno uma adaptação necessária aos problemas que lhe são colocados, judiciosamente escolhidos a priori pelo professor. Estes problemas, escolhidos de maneira que o aluno possa aceitá-los, devem fazer com que ele aja, fale, pense e desenvolva motivação própria.

O livro 4 tenta fazer alguma coisa nesse sentido, introduzindo a função declive usando procedimento experimental, como o exemplo seguinte sugere:

Para a função cujo gráfico está traçado ao lado, vamos determinar a "função declive".

(Livro 4, p. 84)

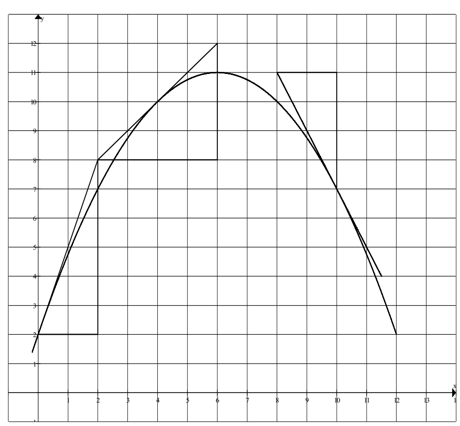


Figura nº 44: Representação dos declives de uma função em certos pontos de seu gráfico
Fonte: Grupo de matemática (1981, p. 84)

x	Δx	Δy	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$(x, \frac{\Delta y}{\Delta x})$
0	1	6	6	(0, 6)
1				
2	2	4	2	(2, 2)
3				
4				
5	1	-4	-4	(5, -4)

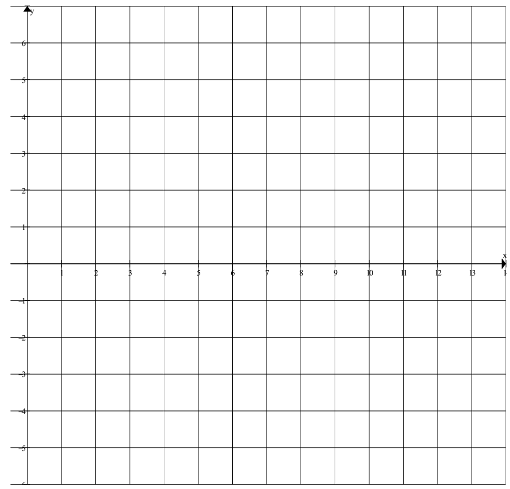


Figura nº 45: Determinação experimental do gráfico da função declive
Fonte: Grupo de matemática (1981, p. 84)

A reta que passa pelos pontos $(x, \frac{\Delta y}{\Delta x})$ é exatamente o gráfico da derivada da função *f* representada graficamente na página anterior. A situação criada é potencialmente rica do ponto de vista didático, leva o aluno a agir tal que a solução do problema é o conhecimento matemático visado (Henry 1991, apud Almouloud em prelo).

Como temos vindo a referir, fora de alguns casos isolados como o anterior, a prática comum que se observou nos livros analisados foi: começar com a descontextualização para a problematização contextualizada, precisamente uma ordem contrária da sugestão de Brousseau (1975). A institucionalização devia ser precedida de momentos em que o aluno é colocado numa situação de ação sobre as tarefas, comunicação das suas produções e validação dos resultados obtidos. Para Brousseau,

> A memorização de conhecimento formal, geralmente desprovido de significado, pode ser muito custosa em termos de exercícios (esforço) de aprendizagem. Estes exercícios podem não prover muito significado, um fato que pode reforçar a sua complicação. E como conseqüência disso, a representação que o aluno constrói do conhecimento matemático e seu funcionamento são profundamente perturbados. Quanto mais o aluno repete e rotiniza exercícios formais, mais difícil é para ele restaurar, mais tarde, o funcionamento com sentido dos conceitos adquiridos dessa maneira. A aplicação do aprendido na forma do conhecimento já pronto corre mal porque a lógica da articulação das aquisições que o compõem é

> exclusivamente interna ao conhecimento e ainda porque o papel das situações tenha sido excluído a priori. (BROUSSEUA, 1997, p. 43).[32]

O aluno deve estar envolvido em todas etapas da construção do conhecimento. E o livro deveria proporcionar esse envolvimento.

Após a discussão dos pontos essenciais dos resultados do estudo, no capítulo que segue apresentamos as conclusões da pesquisa.

[32] Tradução nossa

CAPÍTULO 6. CONCLUSÕES DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos as conclusões do estudo, começando por lembrar que o objetivo que norteou a pesquisa foi:

Analisar e compreender melhor como atualmente os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são tratados em alguns livros didáticos disponíveis.

Esta análise tem em vista a coleta de informações para o conhecimento da real dimensão do problema: o que é que os livros fazem e como fazem a discussão do Cálculo Diferencial e Integral?

6. 1 OS PRINCIPAIS RESULTADOS EM RELAÇÃO ÀS HIPÓTESES DA PESQUISA

Os resultados que temos mostram que os 8 livros analisados, constroem a noção de derivada usando a definição formal de Cauchy, baseada no limite da razão incremental. O livro 4 tenta uma estratégia diferente, fazendo uma determinação experimental da função derivada e do declive da reta tangente. A análise mostrou que há diversas concepções associadas ao conceito da derivada:

1. um número dado pela relação $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ se tal limite existir;
2. a velocidade instantânea de um corpo em movimento;
3. a taxa de variação de uma grandeza y relativamente à outra grandeza x;

4. um número igual ao quociente de diferenciais $\frac{dy}{dx}$;
5. o valor de uma função g(x) definida por $g(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ num ponto x de seu domínio.
6. o declive de uma porção do gráfico localmente linear.

Tivemos 2 livros que não discutem casos onde a derivada de uma função não existe.

A definição de derivada como limite da razão incremental adquire o caráter auto-tecnológico, pois quase todas técnicas específicas são deduzidas usando aquela definição.

Nos livros analisados, há muito mais atividades de repetição, visando a rotinização da técnica do que outro tipo de atividades.

Notamos haver uma preocupação no sentido de resolver problemas de contexto usando derivadas, embora a prática não seja conseqüente em alguns livros, especialmente no livro 1.

Em relação às integrais, os 4 livros que discutem o assunto começam com a noção de antiderivada de uma função e apresentam formas diferentes de discussão: o livro 5 introduz o tema através de um problema de contexto e os restantes, fazem-no formalmente.

A parte da integração definida é discutida muito mais amplamente para ambos livros do que a parte da integração indefinida. Todos livros analisados usam a noção de área sob o gráfico para introduzir o conceito de integral definida. A integral definida é dada como o limite da soma de Riemann. Os livros 7 e 8 desenvolvem um conjunto de exercícios sobre as séries numéricas como preparação para essa introdução. O livro 5 apenas desenvolve algumas atividades preparatórias usando a aproximação da área sob o gráfico, por meio de retângulos. O livro 6 faz muito pouco dessa preparação, apresentando algumas duas ou três séries numéricas.

Depois da introdução da integral definida como soma de Riemann, são discutidas algumas propriedades da integral definida. Após a discussão dessas propriedades, é introduzido o Teorema Fundamental do Cálculo. Daí são resolvidos muitos problemas envolvendo integrais. Quase todos livros seguem a mesma ordem: área sob o gráfico → soma de Riemann → análise de algumas propriedades → TFC → resolução de problemas aplicando o TFC. Contudo, há variações no tipo de exercícios e na qualidade de aprofundamento. O livro 5 como é da economia, recorre a alguns exemplos da economia; os outros preferem problemas mais diversificados , com tendências para os problemas da mecânica. Estes livros são formais, com o estilo clássico de apresentação do conteúdo, segundo a seqüência: definições – teoremas (propriedades) – exercícios. O livro 5 tem apresentação de exercícios mais diversificada. Para além da apresentação clássica no estilo do tipo: calcule, determine, ... tem outras opções em que, como temos vindo a referir, pede também a discussão em grupos e a utilização de tecnologias.

Os resultados que apresentamos nos parágrafos anteriores constituem o resumo que confirma nossas hipóteses da pesquisa segundo as quais:

- Alguns dos fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão diretamente relacionados com a organização didático-matemática dos livros didáticos do Cálculo Diferencial e Integral;
- Analisar esta organização praxeológica dos livros didáticos pode reforçar a compreensão das causas de dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e propiciar algumas atitudes tendentes à sua utilização correta e criativa.

6. 2 O QUADRO TEÓRICO E A EMERGÊNCIA DE TENDÊNCIAS.

O quadro teórico estabelecido, constituído por três teorias: a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria das Situações Didáticas, permitiu que emergissem resultados sobre como os livros articulam as notações para expor o conteúdo matemático, a organização didático-matemática do conteúdo em tarefas e as situações mobilizadas na apresentação do conteúdo.

Em relação à primeira teoria, os livros analisados tendem a usar mais os registros monofuncionais, com recurso predominantemente à representações e tratamentos algébricos. As conversões são raras e quando têm lugar são, geralmente, no sentido do registro algébrico ou da representação discursiva através da linguagem natural para o registro gráfico ou algébrico respectivamente. Tabelas de dados e desenhos para representar uma situação, para combinar com a exposição algébrica ou oral, ocorrem também raramente, senão os livros 7 e 8 que tentam fazer alguma coisa a esse respeito. Portanto, segundo os dados, a coordenação entre os registros de representação semiótica se realiza debilmente.

Quanto à segunda teoria, os livros analisados dão grande peso às tarefas de reprodução das técnicas. Na linguagem de Bosch et al. (2004), diríamos que os tipos de tarefas diferentes do tipo reprodução das técnicas aparecem de forma esporádica. Algumas tendências específicas são notáveis. Os livros 8, 7, 6 e 5 apresentam uma quantidade significativa de tarefas de interpretação e de prova. Portanto, tarefas não de uma mera reprodução de técnicas.

Quanto ao modo de produção das técnicas, os livros analisados apresentaram duas formas: uma de simplesmente dar a técnica e daí passar a usá-la; e a outra, é a produção da técnica através das demonstrações que, por sua vez, podem ter alguma motivação (por exemplo, a insuficiência de técnicas até então conhecidas) ou simplesmente começar a demonstrar.

Como referimos atrás de que os livros analisados apresentam mais exercícios de prática às técnicas, a relação entre o bloco prático-técnico e o bloco tecnológico-teórico é estabelecida desigualmente. Como ainda dissemos, há alguns aspectos específicos que aparecem no conjunto de uma característica comum. É o caso dos livros 1-4 que tendem quase que exclusivamente a permanecer no bloco prático-técnico, e os livros 5-8 com uma componente significativa de exercícios no bloco tecnológico-teórico. O livro 2 apresenta a idéia de linearização local na discussão sobre o significado geométrico da derivada. Esta idéia é bem pertinente, pois uma função derivável é sempre localmente linearizável, e um bico de uma curva nunca é linearizável. Portanto, a idéia apresentada pelo livro constitui uma caracterização geral de uma função derivada.

A articulação entre a problematização contextualizada e a descontextualização das noções matemáticas nos livros analisados, é feita duma maneira tal que, em geral, apresenta-se primeiro o conhecimento visado e depois são identificados alguns contextos onde tal conhecimento é aplicado. Como dissemos antes, as discussões quase que sempre cumprem o esquema: Definição (ou teorema) $\rightarrow$ exemplos/algumas tarefas de discussão $\rightarrow$ exercícios (entre alguns de contexto). E ainda, como fizemos referência atrás, o livro 3 explicitamente afirma: "... *vamos dar a definição da derivada em linguagem formal voltando às suas aplicações problemáticas ... A seguir vamos aplicar esse método geral para o Cálculo das derivadas de algumas funções elementares*". Portanto, o formalismo (na introdução dos conceitos) é real nos livros analisados.

Ainda voltando às hipóteses da pesquisa, os resultados apresentam-nos fatores relacionados com a organização praxeológica dos livros didáticos que interferem diretamente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Esses fatores prendem-se com a formalização precoce dos conceitos, caracterizada pelo domínio do tecnicismo em detrimento da ênfase nos conceitos e na produção de técnicas, ênfase na algebrização durante a exposição do conteúdo, debilidade na articulação entre o algébrico e o visual-gráfico/figural. Esses fatores são também reportados nos trabalhos de Villarrel (1999), Vianna (1998) e Artigue (1991).

Com este resultado, percebemos que algumas das dificuldades do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão relacionadas com a organização praxeológica dos livros didáticos. A partir dessa percepção, podemos pensar no que fazer para corrigir a situação. Por exemplo, o estudo mostrou que há grande diversidade de interpretações do conceito da derivada de uma função. Então, este quadro, pode dar origem a um ambiente de confusão ou de uma aprendizagem superficial quando as possíveis interpretações não são devidamente tomadas em conta no processo de ensino e de aprendizagem da diferenciação.

Um outro exemplo, os 4 livros que discutem o cálculo integral dão pouca atenção às integrais indefinidas, preferindo grande desenvolvimento das integrais definidas. Esta preferência é questionável porque se alguém quer calcular por exemplo, $\int_a^b ax^2dx$ passa por alguma primitiva $\frac{ax^3}{3} + C$, não necessariamente de $C = 0$. Mas o que geralmente se apresenta como solução é $\int_a^b ax^2dx = \left[\frac{ax^3}{3}\right]_a^b$ não se sabendo se os aprendizes têm consciência de que $\int_a^b ax^2dx = \left[\frac{ax^3}{3} + C\right]_a^b$ seja também uma solução.

Para além das dificuldades de primitivar que podem surgir para uma pessoa que estuda pouco a integral indefinida, podemos ainda pensar o que será o desempenho dessa pessoa quando for a estudar as equações diferenciais. Construirá uma imagem sólida de que há soluções de equações que são funções, não valores numéricos?

Portanto, reafirmamos que as nossas hipóteses apresentadas acima são confirmadas pelos resultados de que a organização didático-matemática do Cálculo Diferencial e Integral no livro didático, interfere no ensino e aprendizagem desses conceitos, pois pela nossa experiência, e das constatações reportadas nos trabalhos de Vianna (1998), Villarreal (1999), Araújo (2002) e Artigue (1991), ficamos com a percepção de que o ensino ocorre mais ou menos da maneira como é apresentada a organização didático-matemática dos livros. Então, esses resultados podem reforçar a compreensão das causas de dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e incentivar algumas atitudes tendentes à utilização correta e criativa do livro didático.

Retornando à nossa questão de pesquisa,

O que é que os livros didáticos disponíveis sugerem quanto à construção de conceitos e estratégias de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral?

Embora tenhamos já apontado como está a organização praxeológica dos livros analisados, resumidamente respondemos à nossa questão de pesquisa.

As respostas que temos, a partir dos resultados principais da pesquisa são de que:

A tendência maior é de sugerir a construção de conceitos e estratégias de ensino e aprendizagem por aplicação das técnicas apresentadas em exemplos típicos. A dinâmica sugerida é: apresentar o conceito formalmente, através de exemplos, definições e outras propriedades para em seguida sugerir-se tarefas de aplicação, que podem incluir tarefas de contexto. Alguns casos isolados começam a discussão com exemplos de contexto para formalizar-se depois. Esta tendência isolada foi constada nos livros 4 e 5.

Em geral não se usa a problematização como catalisador da exposição para chegar-se à formalização. Quer dizer, o que se observou é um processo inverso: da formalização para a problematização.

Há uma certa debilidade na articulação entre os registros de representação semiótica, com grande ênfase na algebrização e pouca associação entre o algébrico e o visual-gráfico/figural.

6. 3 ALGUMAS REFLEXÕES E SUGESTÕES

Nos livros analisados emergiram diferentes concepções de derivadas de funções.

Esta diversidade carece de uma abordagem didática adequada. As sugestões dos autores como Sad (1998), Villarreal (1999), Araújo (2002) no sentido de promover a participação dos alunos na produção dos significados, dos objetos matemáticos e dos conhecimentos no pensamento diferencial integral são pertinentes. Uma abordagem segundo o ETV (ensino tradicional vigente) (Baldino 1998, apud Villarreal 1999) em muitos casos, é insuficiente para assegurar uma aprendizagem significativa para um objeto matemático "derivada de funções" que apresenta uma série de interpretações. Os estudos da Sad (ibid) mostraram efetivamente que para uma mesma pergunta sobre o que os alunos entendiam da derivada, surgiam várias respostas. O mesmo comportamento é referido nos estudos da Villarreal (ibid). Para Brousseau (1997) é através do envolvimento pessoal do aluno nas situações que induzem o conhecimento que ele percebe a lógica interna da articulação das aquisições que compõem tal conhecimento. Entendemos que o livro deve criar condições para tal envolvimento através da problematização da exposição do conteúdo.

Pensamos que começar a discutir conceitos como de derivada de funções ou integrais duma maneira puramente formal, fica difícil para o leitor situar a motivação da discussão. Temos o sentimento de que a exposição deste tipo corta uma fase importante preconizada na teoria das situações didáticas, que é a fase de colocação do problema matemático ao aluno para ele agir. Embora a teoria diga respeito a ação do professor em sala de aula, sentimos que o livro também deveria conter esta fase em que se identifica um problema que desencadeia a discussão, que depois se identifica o conhecimento que emerge da análise do problema e, em seguida, é feita a sua formalização. Achamos que seja esta maneira de atuação quando os PCNEM (1999) chamam a resolução de problemas como fio condutor na aprendizagem matemática.

Ainda nos socorremos de Brousseau (1997) para vincar as conseqüências do formalismo:

> A memorização de conhecimento formal, geralmente desprovido de significado, pode ser muito custosa em termos de exercícios (esforço) de aprendizagem. Estes exercícios podem não prover muito significado, um fato que pode reforçar a sua complicação. E como conseqüência disso, a representação que o aluno constrói do conhecimento matemático e seu funcionamento são profundamente perturbados. Quanto mais o aluno repete e rotiniza exercícios formais, mais difícil é para ele restaurar, mais tarde, o funcionamento com sentido dos conceitos adquiridos dessa maneira ... (BROUSSEUA 1997, p. 43).[33]

Interpretando a passagem acima, a exposição formal do conteúdo cria condições para uma aprendizagem rotineira.

A concentração na exposição exaustiva e rigorosa do conteúdo matemático , às vezes, deixa de lado alguns aspectos que didaticamente são importantes na produção de significado das questões de aprendizagem, por considerar tal atitude poder descaracterizar a beleza matemática. Como referimos anteriormente na análise dos resultados, os 4 livros que introduzem a noção da integral definida usam o conceito de área sob o gráfico de uma dada função *f*. Mas não se questiona sobre se se pode conceber uma função de área sob um gráfico. Se a gente faz $\int_a^b ax^2dx = \left[\frac{ax^3}{3} + C\right]_a^b$ é porque $g(x) = \frac{ax^3}{3} + C$ é uma função de área sob o gráfico de $f(x) = ax^2$. A gente coloca os limites *a* e *b* porque estamos interessados com uma porção de área. Então, por que é que não se fala claramente que $g(x) = \frac{ax^3}{3} + C$ representa a área de toda região sob o gráfico de $f(x) = ax^2$?

Didaticamente esta questão é importante porque procura saber a origem de um ato que parece não ter uma justificação clara.

Ainda relacionado com a questão anterior, temos o Teorema Fundamental do Cálculo. É muito bem referido que este teorema é importante porque é um

[33] Nossa tradução

instrumental básico na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral por um lado, e é elemento unificador entre os dois conceitos: Diferencial e Integral, por outro. O que é visível no tratamento do teorema é a parte instrumental: calcular o valor de uma primitiva, diferenciar uma primitiva, desenhar o gráfico de uma primitiva a partir da informação que se tem da sua derivada, desenhar o gráfico de uma função derivada a partir da sua expressão analítica. A história na maioria dos casos, termina por aí. Quando surge uma situação do tipo: desenhar o gráfico de uma primitiva dado o gráfico da sua derivada ou vice-versa, aí surgem problemas. Alguns alunos já ficam incapazes de resolver a questão. Nas teses da Vianna (1998) e da Villarreal (1999) estas dificuldades são reportadas. Quer dizer, o que é conhecido algebricamente já não o é graficamente. Ou seja, o que é dito em palavras e ilustrado graficamente à partir de uma expressão analítica quanto ao comportamento da primitiva quando se tem alguns valores da derivada, já não é reconhecido quando a relação é de gráfico para gráfico. Este fato mostra que o conhecimento está compartimentalizado. Portanto, a falta de discussão da relação: gráfico da primitiva para gráfico da derivada e vice-versa, entendemos como uma condicionante para uma aquisição incompleta do significado do Teorema Fundamental do Cálculo e é encorajado pelos livros didáticos porque não sugerem atividades para relacionar gráficos, ou seja, não há atividades de análise gráfica.. Este é um caso expresso de dificuldades na articulação entre os registros de representação semiótica.

Portanto, para nós, uma definição explícita da função de área deveria ser objeto de discussão antes de começar a falar sobre a porção de uma área. Pensamos que proceder assim ajudaria os alunos a compreender o que está sendo feito, munindo-os com alguns instrumentos de análise.

Achamos que a contextualização (inicial) seja usada no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. A partir de situações-problema ir construindo gradualmente o pensamento formal, onde o aluno tem oportunidade de falar, agir, refletir e validar as suas idéias (mesmo com o livro). No nosso entender, procedendo desta maneira se estariam a construir pontos de referência para o pensamento.

Uma outra questão que merece uma atenção, é a diversificação de contextos. A derivada e a integral deveriam ser tratados de modo muito mais amplo e não apenas sobre alguns de seus contextos como alguns dos livros analisados sugerem. Assim, para a derivada, a lista de seus significados que apresentamos anteriormente deveria ser discutida muito claramente nos livros didáticos. Não só fazendo referência do limite da razão incremental e do coeficiente angular da reta tangente. Há muito mais significados para este objeto matemático como neste texto mostramos. O mesmo podia ser para a integral. Neste último caso, em vez de introduzir separadamente a integração indefinida, como inversa da diferenciação e, depois, a integral definida como área de uma certa região sob o gráfico de uma função, achamos que as duas idéias podiam ser introduzidas juntas: a integral indefinida como uma função de área sob o gráfico e a integral definida como a medida de uma porção de área da região sob o gráfico. Pensamos que assim se manteria a unidade que existe entre a integral e a derivada que algumas discussões observadas nos livros analisados não deixam isso muito claro; e ainda, seria uma forma de diminuir a separação entre a noção da diferenciação e da integração que a definição da integral de Cauchy criou. Pensamos também que procedendo deste modo (função de área para integral indefinida, e medida de área de uma certa região para integral definida), proveria alguns pontos de referência ao trabalhar com estes dois conceitos (derivada e integral). Aliás esta unidade é o que caracteriza o Teorema Fundamental do Cálculo, o que nos livros analisados só se evidencia quando se introduz a integral definida. Mas para lidar com as idéias deste Teorema, fazê-mo-lo mesmo ao nível da integral indefinida. E a prática mostra (Vianna, 1998) que é no uso do TFC ao nível da integração indefinida que muitos problemas de interpretação se salientam por parte de alunos.

Estes resultados dão-nos uma outra visão diferente daquela que tínhamos antes da realização desta pesquisa sobre o que um livro de Cálculo Diferencial e Integral podia conter em termos de diversidades de aspectos. Assim, um sentimento diferente surgiu, no sentido de que há muitos aspectos didáticos e matemáticos que merecem atenção no tratamento do Cálculo Diferencial e Integral com alunos na sala de aula e devem ser objetos de reflexão no livro didático. Se por exemplo, um livro do nível secundário tiver alguma insuficiência de tarefas de construção de técnicas, podem ser recorridos livros de nível universitário, donde encontramos alguma "completude" para certas técnicas, ou podemos recorrer a vários livros ao mesmo tempo.

Nos parágrafos conclusivos, colocamos alguns questionamentos e algumas sugestões para o que podem ser futuras pesquisas com base neste trabalho. Algumas dessas questões são como as seguintes:

- Como incorporar os resultados desta pesquisa em sala de aula ou na produção de um livro de Cálculo Diferencial e Integral?
- Como discutir com os alunos em sala de aula a pluralidade das interpretações da noção de derivada de uma função, de modo que eles percebam esta complexidade do conceito?
- Como incorporar as idéias de função de área juntamente com as de primitiva numa sala de aula? Lembramos que, geralmente, a noção de primitiva de uma função está muito associada a uma definição formal. "primitiva de uma função *f*, é uma *F* tal que *F'* = *f*. Mas, quando falamos da função de área, estamos a ter uma imagem gráfica. Então, como conciliar as duas formas de ver a mesma coisa?

Estas são algumas das questões que se levantam em torno dos resultados da nossa pesquisa que, no futuro, podem desencadear discussões e outras perspectivas de encarar o livro didático no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Ou ainda, discussões sobre como apresentar o Cálculo Diferencial e Integral em um livro didático.

CAPÍTULO 7. BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD, S. A. A Teoria das Situações Didáticas (em prelo). PUC-SP 2006.

ARAÚJO, J. L. *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:* As discussões dos alunos. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – UNESP. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro.

ARTIGUE, M. Analysis. In: Advanced Matematical Thinking. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. p. 167-198, 1991.

ÁVILA, G. S. S. *CÁLCULO 1. Funções de uma variável.* Rio de Janeiro. Livros Técnicos e Científicos Editoras S. A. 1981.

BARON, Margaret E. *Curso de História da Matemática.* Origens e Desenvolvimento do Cálculo, v. 1. Tradução de José Raimundo Braga Coelho do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, Universidade de Brasília, 1974.

__________. *Curso de História da Matemática.* Origens e Desenvolvimento do Cálculo, v. 2. Tradução de José Raimundo Braga Coelho do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, Universidade de Brasília, 1974.

BARON, Margaret E. & BOS, H. J. M. *Curso de História da Matemática.* Origens e Desenvolvimento do Cálculo, v. 3. Tradução de Rudolf Maier do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, Universidade de Brasília, 1974.

BOS, H. J. M. *Curso de História da Matemática.* Origens e Desenvolvimento do Cálculo, v. 4. Tradução de Maria José Matoso Miranda Mendes do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, Universidade de Brasília, 1974.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. H. Incomplettud de las Organizacioes Matematicas Locales en las Instittuciones Escolares. Reserches en Didactique des Mathématique, Grenoble, França, Vol. nº 24/23 p 205-250, 2004 a)

BOSCH, M. & GASCÓN, J. La Praxeología Local como Unidade de Análisis de los Procesos Didácticos, España. 2004 b).

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. & GASCÓN, J. Science or Magic? The use of Models and Theories in Didactics of Mathematics. España. (2004 c).

BOYER, C. B. História da Matemática. 2ª Edição. Revista por Uta C. Merzbach. Tradução de Elza F. Gomide do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo: Edgar Blücher Ltda, 1996.

_________. The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York, Dover Publications, INC, 1949.

BROUSSEAU, G. Theory of Didactical Sitautions in Mathematics. Didactque des Mathématique, 1970-1990. Dordrecht. Kluwer Academic Publisher. Vol. 19. 1997.

__________. Fundamentos y Metodos de la Didáctica das Matemáticas Vol. 7. 1986.

__________. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: Didáctica das Matemáticas, org. Jean Brun. Lisboa: Horizontes pedagógicos, p. 53-113, 1996.

CARLOVICH, M. *A Geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental*. 2005, 150f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CARVALHO, A.; BERQUEMBAEV, E.; CHERBAKOV, E.; MOZOLEVSKI, I.; ALEXANDROV, R. *Matemática, Volume 1*. Introdução à Análise Matemática. Limites e Derivadas. Manual da 11ª classe. Maputo. Ministério da Educação e Cultura. 1981.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las práticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. Reserches en Didactique des Mathématique, Vol. 19, nº 2, p. 221-266, 1999.

COURANT, R. Foreword. In: BOYER, C. B. The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York, Dover Publications, INC, 1949.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Aprendizagem em Matemática, org. Sílvia Dias Alcântara Machado. São Paulo: Papirus, p. 11 – 33, 2003.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. *Matemática aula por aula. Geometria analítica Números complexos, Polinômios, Limites e Derivadas, Estatística, Matemática financeira. 3 ensino médio (2º grau),* São Paulo, FTD S. A. 1998.

FRANCHI, R. H. O. L, . *A Modelagem Matemática Como Estratégia de Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia*. 1993, Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Campus de Rio Claro (SP).

GIOVANNI, J. R.; DANTE, L. R. *Matemática. Teoria – Exercícios – Aplicações. Geometria analítica, Números complexos, Polinômios, Limites e Derivadas*. São Paulo, FTD S. A. 1992.

GOMIDE, E. F. Apresentação. In: Carl B. Boyer. História de Matemática. 2ª Edição. Revista por Uta C. Merzbach. Tradução de Elza F. Gomide do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo: Edgar Blücher Ltda, 1996.

GONÇALVES, M. C. *Concepções de professores e o ensino de Probabilidade na escola básica.* 2004, 150f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

GRUPO DE MATEMÁTICA. *Matemática, Volume 2.* Ensino Técnico Profissional Médio. Serviço de Planificação Curricular. Maputo. Secretaria do Estado da Educação Técnico Profissional. 1981.

LEINHARDT, G. Comments on Thomas Romberg's Chapter. In: Alan H. Schoenfeld: Mathematical Thinking and Problem Solvinng. New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Hillsday, p. 305-311, 1994.

LEITHOLD, L. *Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1, 2ª edição. Tradução: António Paques, Otília Teresinha W. Paques e Sebastião António Filho, ambos do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Campinas. São Paulo. Editora Harper & Row do Brasil Ltda. 1982.

MIGUEL, M. I. R. *Ensino e aprendizagem do Modelo Poisson:* Uma experiência com modelagem. 2005, 266f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. - Brasília: Ministério da Educação, 1999.

PALARO, L. A. *A concepção de Educação Matemática de Henri Lebesque.* 2006, 336 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SAD, L. A. *Cálculo Diferencial e Integral:* Uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 1998, 371f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – UNESP. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica, volume 1*, *2ª edição*. Tradução: Alfredo Alves de Farias, professor adjunto (Aposentado) da UFMG. Com a coordenação dos professores: Vera Regina L. F. Flores e Marcio Quintão Moreno da UFMG. São Paulo. Markon Books do Brasil Editora Ltda. 1995.

TAN, S. T*. Matemática Aplicada à Administração e Economia*. Tradução: Edson Faria 5 ed. Americana. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2003.

VIANNA, C. C. S. *Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus:* An exploration of definitions, theorems and visual imagery. 1998, 285f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Institute of Education, University of London.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. 1999, 402f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – UNESP. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro.