

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Fabio Meneses Costa

**Concepções e competências de Professores
Especialistas em Matemática em relação ao Conceito de
Fração em seus diferentes significados**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**São Paulo
2011**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Fabio Meneses Costa

**Concepções e competências de Professores
Especialistas em Matemática em relação ao Conceito de
Fração em seus diferentes significados**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Sandra Maria Pinto Magina**.*

São Paulo

2011

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura _____ Local e Data _____

“Tudo vale a pena quando a alma não é pequena”

Fernando Pessoa

*À minha família,
em especial a minha esposa
Ivaní e meus amados filhos
Vinícius e Gabriel.*

AGRADECIMENTOS

É com grande satisfação e muita alegria que chego ao final desse estudo. Um sonho idealizado na graduação e que por diversos motivos só pude realizá-lo agora. Esse momento me faz refletir e relembrar momentos de intensa alegria e também momentos de tristeza e decepções, mas graças a Deus e Nossa Senhora Aparecida encontrei nessa trajetória vários amigos que me guiaram e, principalmente, acreditaram que sou capaz. A esses amigos que deixo aqui registrada toda a minha eterna gratidão.

À minha esposa Ivani Ferreira Dias Meneses Costa, que sempre esteve ao meu lado com todo seu amor, carinho e cumplicidade.

Aos meus pais: Gilberto Pereira da Costa e Maria Meneses Costa e aos irmãos: Cláudia Meneses Costa, Cristiano Meneses Costa e Elisângela Meneses Costa; a minha sogra: Josefa Dias, muito obrigado a todos, amo vocês.

À Prof. Dra. Sandra Maria Pinto Magina, pela orientação, apoio, incentivo, dedicação, por acreditar na minha capacidade, pela amizade e paciência, fundamentais para a realização desse estudo, meu muito obrigado!

Às professoras Barbara Lutaif Bianchini, Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana, Maria José Ferreira Da Silva e Irene Mauricio Carzola, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, cujas críticas, sugestões e recomendações foram de fundamental importância na realização deste estudo.

A todos os professores do programa de estudos pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP, por meio de seu profissionalismo, dedicação e competência.

Aos colegas do grupo REPARÉ: Adri_Ana, Aida, Perovanni, Cido, Anne, Vera, Rogério, Eduardo, Euri, Franciana, Madeline, Eduardo, Gabriela, Tatiane, Paulo e Claudio, obrigado pelos “pitacos”.

Aos amigos de Mestrado: Emerson, Mauricio, Rafael, Edson, Cristina, Claudia, Antonia e Yara, obrigado pela oportunidade de ter aprendido um pouco com cada um

Ao secretário Francisco Olímpio, pelas orientações sempre corretas, além de seu profissionalismo, eficiência, e amizade.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pelo auxílio concedido através da Bolsa Mestrado, que sem dúvida alguma possibilitou o término desse estudo.

O Autor

RESUMO

O presente estudo teve por objetivo identificar e analisar as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclo do Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração. Para isso o estudo propôs-se a responder à seguinte questão de pesquisa: **“Quais as concepções e competências apresentadas por professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclo do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração em seus diferentes significados?”** Para responder a esta questão, primeiro buscamos apoio teórico para subsidiar o desenvolvimento do estudo. Esse apoio veio das ideias de Vergnaud contidas na Teoria dos Campos Conceituais e das ideias teóricas de Kieren e Nunes no que se refere aos diferentes significados da fração. Em seguida foi elaborado um instrumento diagnóstico composto de quatro unidades: (a) perfil; (b) elaboração de situações-problema; (c) respostas das situações-problema e (d) competências. Esse instrumento foi aplicado a 21 professores que foram divididos em dois grupos, sendo o grupo 1 (G1) formado por 11 professores que estavam atuando no 3º ciclo do Ensino Fundamental (6º e 7º anos) e o grupo 2 (G2) formado por 10 professores que estavam atuando no 4º ciclo do Ensino Fundamental (8º e 9º anos) distribuídos em seis escolas. Em relação à concepção os professores dos dois grupos apresentaram uma concepção restrita de fração, voltada apenas para dois significados: parte-todo e operador multiplicativo. Além disso, houve uma ênfase em tratar fração apenas do ponto de vista do algoritmo. No que tange a competência o G2 apresentou-se mais competente do que o G1. Concluímos isso baseado no fato de que o G1 apresentou um maior índice de confusão em utilizar a razão como fração, assim como apresentou um maior índice da utilização da percepção como principal estratégia de ensino para fração, distanciando-se assim dos invariantes lógicos presentes nesse conteúdo e que, quando apropriados, permitem sua sólida compreensão.

Palavras-chave: significados da fração; concepção e competência; formação de professores; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study aimed to identify and analyze the concepts and skills of specialist teachers in mathematics who work in the 3rd or 4th cycle of primary education in relation to the concept of fraction. For this, the study aimed to answer the following research question: "What are the concepts and skills presented by specialist teachers in mathematics who work in the 3rd or 4th cycle of primary education on the concept of fraction in their different meanings?" To answer this question, first we seek theoretical support to subsidize the development of the study. This support came from the ideas contained in Vergnaud Conceptual Fields Theory and theoretical ideas of Kieren and Nunes in relation to the different meanings of the fraction. Then a diagnostic tool was developed consisting of four units: (a) profile, (b) development of problem situations, (c) answers the problems and situations (d) skills. This tool administered to 21 teachers who were divided into two groups: group 1 (G1) consisting of 11 teachers who were working in the 3rd cycle of primary education (6 and 7 grades) and group 2 (G2) comprised 10 teachers they were working in the 4th cycle of primary education (8 and 9 grades) distributed in six schools. In relation to conception the teachers from both groups showed a narrow fraction, only to face two meanings: part-whole and multiplicative operator. In addition, there was an emphasis on treating only fractionally from the standpoint of the algorithm. Regarding the competence G2 presented as more competent than the G1. We conclude that based on the fact that the G1 had a higher rate of confusion in using the ratio as a fraction, and showed a higher rate of use of perception as the main strategy for teaching fractions, thus distancing from the content present in this logical invariants and, when appropriate, allow a solid understanding.

Keywords: Fraction'signifies, conception and competence, teachers'formation, basic school.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I	17
1.1 Justificativa	19
1.2 Objetivo e questão de Pesquisa	25
1.3 Descrição dos Capítulos	26
 CAPÍTULO II	 29
PRINCIPIOS DA PSICOLOGIA COGNITIVISTA	29
2.1 A formação do conceito de fração, segundo a teoria dos Campos conceituais de Vergnaud	 29
2.2 Os diferentes significados de fração	35
2.3 Concepções e competências dos Professores de Matemática	47
 CAPÍTULO III	 53
A FRAÇÃO: NA MATEMÁTICA, NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NA ESCOLA	 53
3.1 A Fração na Matemática	53
3.1.1 Na história	54
3.1.2 O objeto matemático	61
3.2 Fração na Educação Matemática: revisão da Literatura	65
3.2.1 As pesquisas focadas na aprendizagem de fração – Estudos diagnósticos	 67
3.2.2 As pesquisas focadas na aprendizagem de fração – Estudos intervencionistas	 74
3.2.3 As pesquisas focadas no ensino de fração – Estudos diagnósticos	75
3.2.4 As pesquisas focadas no ensino de fração – Estudos intervencionistas	 85

3.3 A Fração abordada na Escola.....	86
3.3.1 Fração e os PCN	87
CAPÍTULO IV	95
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	95
4.1 A natureza da pesquisa	95
4.2 Universo do estudo e descrição dos sujeitos	96
4.3 Descrição do instrumento	97
4.4 Descrição e objetivos da unidade 1: Perfil dos Professores	98
4.5 Descrição e objetivos da unidade 2: Concepções dos Professores especialistas em matemática em relação aos cinco significados de fração ..	101
4.6 Descrição e objetivos da unidade 3: Competências dos Professores especialistas em matemática em relação aos cinco significados de fração ..	102
4.7 Apresentação e análise prévia da unidade 4: Competências e estratégias de ensino dos professores especialistas em matemática em relação aos cinco significados de fração	102
4.8 Procedimentos para a coleta de dados	107
4.9 Planejamento da Análise dos Dados	109
CAPÍTULO V	111
ANÁLISE DOS DADOS	111
5.1 Análise da Unidade 1: Perfil	112
5.2 Análise da Unidade 2: Elaboração de situações-problema	117
5.2.1 Enfoque 1: a não elaboração das situações-problema	118
5.2.2 Enfoque 2: inconsistência das situações problema elaboradas	120
5.2.3 Enfoque 3: utilização dos cinco significados de fração	122
5.2.4 Enfoque 4: A utilização da representação com, ou sem, ícone das situações-problema	128
5.2.5 Enfoque 5: invariantes do conceito das situações-problema elaboradas	129
5.2.6 Síntese dos resultados da elaboração de situações-problema	131
5.3 Análise da Unidade 3: Respostas das situações-problema elaboradas	132
5.3.1 Análise da consistência das respostas dadas em relação às situações-problema elaboradas	133
5.3.2 Tipos de respostas consistentes utilizadas por nossos sujeitos, frente às situações-problema por eles elaboradas	136
5.3.3 Síntese da análise das respostas utilizadas por nossos sujeitos, frente às situações-problema por eles elaboradas	140

5.4	Análise da Unidade 4: Competências em relação aos cinco significados de ração	140
5.4.1	Análise das respostas dadas em relação às situações-problema propostas	141
5.4.2	Análise das estratégias utilizadas para resolver as situações- problema propostas	144
5.4.3	Análise das estratégias de ensino propostas	149
5.4.4	Síntese da análise da unidade 4 – situações-problema propostas	150
CAPÍTULO VI		151
CONCLUSÃO		151
6.1	A trajetória da pesquisa	151
6.2	Síntese dos principais resultados	153
6.3	Respondendo à questão de pesquisa	156
6.4	Sugestões para futuras pesquisas	158
REFERÊNCIAS		161
APÊNDICE I		169
APÊNDICE II		175

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Modelo Metodológico Didático elaborado por Magina (2008)	18
Quadro 2: Recorte das questões 1 a 3 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.....	96
Quadro 3: Recorte das questões 4 a 6 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.....	99
Quadro 4: Recorte das questões 7 a 10 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.....	100
Quadro 5: Recorte das questões 11 e 12 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.....	100
Quadro 6: Recorte das questões 13 e 14 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.....	101
Quadro 7: Recorde da situação-problema 1, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado medida do conceito de fração.....	103
Quadro 8: Recorte da situação-problema 2, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado operador multiplicativo do conceito de fração.....	104
Quadro 9: Recorte da situação-problema 3, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado quociente do conceito de fração.....	105
Quadro 10: Recorte da situação-problema 4, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado Parte-todo do conceito de fração.....	106
Quadro 11: Recorte da situação-problema 5, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado número do conceito de fração.....	107

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Situação-problema consistente (S13 – G2).....	120
Figura 2: Situação-problema inconsistente (S5 – G1).....	121
Figura 3: Referente ao significado Operador Multiplicativo (S1 – G1).....	123
Figura 4: Referente ao significado Parte-Todo (S2 – G1).....	124
Figura 5: Referente ao significado Quociente (S7 – G1).....	124
Figura 6: Referente ao significado Número (S14 – G2).....	125
Figura 7: Referente ao significado Medida (S4 – G12).....	125
Figura 8: Referente à situação-problema com ícone (S14 – G2).....	129
Figura 9: Exemplo de uma situação-problema consistente com sua resposta, igualmente consistente (S13 – G2).....	133
Figura 10: Referente a uma situação-problema consistente e sua resposta inconsistente (S5 – G1).....	134

Figura 11: Referente à resposta classificada na categoria Algoritmo (S1 –G1).....	136
Figura 12: Exemplo de uma resposta classificada na categoria com ícone (S5 – G1).....	137
Figura 13: Exemplo de uma resposta classificada na categoria composta (S1 – G1).	137
Figura 14: Exemplo de uma resolução classificada na categoria frações equivalentes.....	145
Figura 15: Exemplo de uma resolução classificada na categoria representação decimal (S7 – G1).....	145
Figura 16: Exemplo de uma resolução classificada na categoria percepção (S17 – G1).....	146
Figura 17: Exemplo de uma resolução classificada na categoria algoritmo (S15- G2).....	147
Figura 18: Exemplo de uma resolução classificada na categoria sem cálculo (S14 – G2).....	147
Figura 19: referente a confusão entre fração e razão.....	148

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Referente ao perfil dos professores especialistas em Matemática do 3º (G1) e 4º (G2) ciclos do Ensino Fundamental.....	114
Tabela 2: Quantidade de situações-problema elaboradas consistentes e inconsistentes.....	121
Tabela 3: Referente à distribuição das situações-problema em relação aos cinco significados do conceito de fração.....	125
Tabela 4: Referente à quantidade de significados de fração utilizado por cada professor.	127
Tabela 5: Referente à utilização da representação com, ou sem, ícone das situações-problema elaboradas.....	124
Tabela 6: Referente aos invariantes do conceito de fração- ordem e equivalência.....	130
Tabela 7: Referente às respostas consistentes e inconsistentes das situações-problema elaboradas.....	134
Tabela 8: Referente às respostas das situações-problema em relação à incidência das categorias: algoritmo, com ícone e composta, por grupos.....	138
Tabela 9: Referente à quantidade de erros, por significados, das respostas das situações-problema propostas.....	142
Tabela 10: Referente às resoluções das situações-problema propostas por grupos em relação às categorias de análise.....	148
Tabela 11: Referente às estratégias de ensino propostas pelos professores nas situações-problema proposta.....	150

CAPÍTULO I

Atuando como professor da Rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo nos últimos 15 anos, ensinando Matemática para o Ensino Fundamental e Médio observei uma grande dificuldade dos meus alunos em compreender o conceito de fração. Diante dessa e de outras dificuldades encontradas, como profissional da educação, resolvi me especializar no estudo da Educação Matemática, o que já me fez ver a educação de uma forma diferente e querer aprender mais ainda. Movido por esse desejo ingressei no curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e passei a integrar o Grupo de Pesquisa REPARE em EdMat (Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática), no qual tive a oportunidade de ter contato com várias pesquisas, algumas delas relacionadas ao tema do Número Racional na sua forma fracionária.

O grupo de pesquisa REPARE tem por objetivo investigar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior. O interesse particular do grupo centra-se em pesquisas sobre números e operações (estruturas aditiva e multiplicativa) e sobre a Tecnologia da Informação, estudando tanto os aspectos relativos ao aluno quanto ao professor e, ainda, os aspectos que dizem respeito às ferramentas de ensino tecnológicas, manipulativas e didáticas.

Dentro dessas duas áreas de interesse, o grupo tem por objetivos específicos, desenvolver pesquisas que enfoquem:

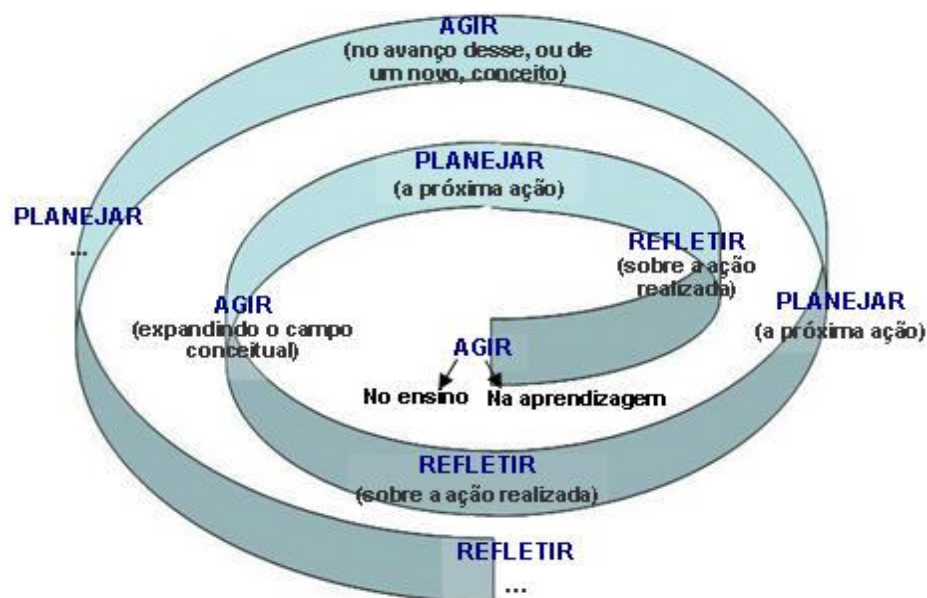
- Formação e desenvolvimento de conceitos;
- Investigação de diferentes metodologias de ensino;

- Elaboração e testagem de ferramentas de ensino;
- Crença, concepção e competência na aprendizagem de conceitos;
- Crença, concepção e competência no ensino de conceitos.

Coordenado pela Professora Doutora Sandra Maria Pinto Magina, o grupo segue as suas ideias, que tem como ponto de partida as contribuições de Shon (2008 apud Magina) para a formação de um professor capaz de ser reflexivo, em que ele sugere um triplo movimento – o conhecimento na ação, reflexão na ação e reflexão sobre a ação – bem como, a reflexão sobre a sua própria prática (PONTE, 1998) nosso grupo de pesquisa estende e amplia o alcance dessa ideia, não apenas para a formação do professor, inicial e continuada, bem como para a formação do aluno.

Assim Magina (2008) propõe um movimento, delineado em formato de espiral, em que a ação, a reflexão e o planejamento de novas ações se sucedem e se influenciam mutuamente, como mostra a figura abaixo.

Quadro 1 - Modelo Metodológico Didático elaborado por Magina (2008).



Em consonância com as ideias de Vergnaud (1990), Magina (2008) tem por premissa que o conhecimento emerge a partir da resolução de problemas, isto é, a partir da ação do sujeito sobre a situação. Porém, entende que essa ação

precisa de uma reflexão para que não se torne apenas uma competência adquirida, mas sim, se caminhe na direção da formação e desenvolvimento do conceito.

Neste contexto tivemos contato com algumas pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem do conceito de número racional na sua representação fracionária, que neste estudo denominaremos simplesmente como fração. Estas pesquisas nos interessaram muito e motivaram a realização do presente estudo, tendo em vista as dificuldades pessoais e profissionais enfrentadas, no nosso dia a dia, relacionado ao ensino e a aprendizagem do conceito de fração.

1.1 Justificativa

A fração tem seu estudo iniciado, fortemente, no 4º ano do Ensino Fundamental estendendo-se por todos os anos de Ensino, desde o Fundamental ao Médio e alcançando o nível Superior, ou seja, sua utilização é bastante exigida em todos os níveis de ensino da Educação Brasileira.

Destacando a importância do estudo das frações, Behr et al. (1983), ressaltam que se trata de uma das mais necessárias ideias matemáticas desenvolvidas no contexto escolar e que, por ocorrer, em grande parte no período da transição do pensamento concreto para o pensamento operacional formal, constituem um contexto ideal para se pesquisar os processos de aquisição do conceito matemático.

Para Behr et al. (1983), o conceito de fração é uma das ideias matemáticas mais complexas e necessárias na formação do aluno e seu ensino e aprendizagem envolve três aspectos: o prático, o psicológico e o matemático.

Do ponto de vista do aspecto **prático**, o estudo do conceito de fração aperfeiçoa a habilidade de dividir, o que permite entender e manipular melhor os problemas do mundo real. Assim, as frações surgem com frequência em diversas situações relacionadas à expressão de medida e quantidade. O fato evidencia a necessidade da extensão do conjunto dos números naturais.

O próximo aspecto refere-se a uma perspectiva **psicológica**, quando o estudo da fração oferece um rico campo, dentro do qual as crianças podem desenvolver e expandir suas estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual.

O terceiro aspecto, diz respeito à perspectiva da **Matemática**, pois a compreensão das frações fornecerá a base sobre a qual a criança, mais tarde, fundamentará ideias matemáticas mais complexas, como as operações algébricas elementares que serão desenvolvidas ao longo de seu ensino.

Diante das ideias expostas por Behr et. al. (1983), reconhecemos a importância de se estudar fração em sua totalidade, e que esse conceito seja devidamente ensinado, para que não haja prejuízo no desenvolvimento acadêmico das crianças. Para tanto, cremos que o professor, “facilitador indispensável no processo ensino-aprendizagem”, segundo Magina (1998, p. 45), poderá, e é seu dever, ajudar na apropriação desse conceito por parte dos alunos.

Revisitando as pesquisas relacionadas ao conceito de fração, que serviram de inspiração para a realização do presente estudo, encontramos do ponto de vista da aprendizagem de fração os estudos diagnósticos de Merlini (2005), Moutinho (2005) e Rodrigues (2005).

Ainda do ponto de vista da aprendizagem de fração, o estudo intervencionista de Bezerra (2001), com alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, estudou a aquisição do conceito e de suas representações com base em situações-problema que fossem significativas e desafiadoras ao aluno. Outro estudo intervencionista é o de Malaspina (2007), que verifica quais os efeitos que cada um dos quatro significados para fração (Parte-todo, quociente, operador multiplicativo e medida) traz à aprendizagem sobre esse conceito.

Esses estudos focam seus olhares no aluno, evidenciando as dificuldades enfrentadas por eles, em relação ao conceito de fração. Magina e Campos (2007), no que diz respeito à aprendizagem, evidenciam que os alunos podem até apresentar algumas habilidades em manipular os números racionais, sem

necessariamente ter uma compreensão clara do conceito. Nunes e Bryant (1997, p. 191) argumentam que:

Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. NUNES e BRYANT (1997, p. 191).

Do ponto de vista de seu ensino encontramos o estudo diagnóstico de Santos (2005), que teve por objetivo compreender o estado – concepções – em que se encontrava o conceito de fração para professores que atuavam nos quatro ciclos do Ensino Fundamental. O estudo propôs-se a responder a seguinte questão de pesquisa: “é possível reconhecer as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialista), do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração?” Se sim, quais? Se não, por quê?

O trabalho de Santos (2005) serviu de inspiração ao estudo de Canova (2006) que, também, tratou de investigar a concepção de professores polivalentes, frente à elaboração de situações-problema que envolvesse fração. A diferença entre os estudos de Santos (2005) e Canova (2006), está no fato deste, além de investigar as concepções, ter buscado também pesquisar as crenças e competências dos professores em relação à fração.

O trabalho de Santos (2005) e Canova (2006) serviram de inspiração para o trabalho de Teixeira (2008) que também tratou de investigar a concepção do professor, frente à elaboração de situações-problema que envolvesse fração. A diferença entre os estudos de Santos (2005), Canova (2006) e Teixeira (2008) ocorre porque este último, além de investigar as concepções e competências dos professores do 2º Ciclo do Ensino Fundamental da cidade de Itabuna-Bahia, ter buscado algumas relações com o livro didático.

Por acreditar, assim como outros pesquisadores, que as dificuldades apresentadas pelos alunos têm uma estreita ligação com as competências e concepções dos professores que propomos nesse estudo focar nossos olhares no conceito de fração. No que se refere ao ensino, o que se tem revelado é uma ênfase exagerada em procedimentos e algoritmos e uma forte tendência para traduzir esse conceito apenas utilizando a exploração do significado Parte-todo, a partir de sua representação a/b com a, b inteiros e $b \neq 0$.

Nesse sentido, Campos e Cols (1997 apud Nunes, p. 191) afirmam que:

O método de ensino [...] simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas – sem entender o significado desse novo tipo de número.

Então assim, como Santos (2005), Canova (2006) e Teixeira (2008), queremos investigar as competências e concepções de professores frente ao conceito de fração, diferenciando quanto ao público alvo que no nosso caso serão os professores especialistas em matemática.

Cabe aqui ressaltar que consideramos professores especialistas em matemática, aqueles que trabalham exclusivamente no ensino da Matemática e com formação em cursos de Licenciatura em Matemática e, ou que tenham habilitação para lecionar tal disciplina.

Justificamos a escolha do nosso tema e público alvo através das afirmações acima, assim como as evidências das dificuldades analisadas em diversas pesquisas sobre o tema fração, pois essas dificuldades, tanto no ensino como na aprendizagem, estão presentes no nosso dia a dia, como mostram os resultados da prova do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) de 2008.

Segundo o relatório pedagógico do Saresp 2008, 42,4% dos alunos da 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental tiveram desempenho classificado no nível abaixo do básico, 42,3% estão no nível Básico, 14% estão no nível adequado e apenas 1,3% estão no nível avançado.

Na 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental 34,5% dos alunos tiveram desempenho classificado no nível abaixo do básico, 53,9% estão no nível Básico, 10,2% estão no nível adequado e apenas 1,3% estão no nível avançado.

Ressaltamos que os níveis de proficiência dos alunos da Rede Estadual de Ensino de São Paulo foram agrupados em quatro níveis de desempenho considerando em cada nível as seguintes características:

- **Abaixo do Básico:** os alunos neste nível demonstram domínio insuficiente dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série escolar em que se encontram;
- **Básico:** os alunos neste nível demonstram desenvolvimento parcial dos conteúdos, competências e habilidades requeridas para a série em que se encontram;
- **Adequado:** os alunos neste nível demonstram domínio dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série em que se encontram;
- **Avançado:** os alunos neste nível demonstram conhecimento e domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima do requerido na série escolar em que se encontram.

Analisando os dados apresentados no relatório do Saresp 2008, podemos inferir que aproximadamente 84% e 89% dos alunos da 6ª e 8ª séries, respectivamente, tiveram desempenho abaixo do adequado para a série escolar que se encontram.

Levando em consideração que a prova do Saresp é realizada na 6ª e 8ª séries (7º e 9º anos) do Ensino Fundamental do Ciclo II, verificamos quais os conteúdos de Matemática da 5ª e 6ª séries (6º e 7º anos), na Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008, tratam diretamente do conceito de fração, assim como na 7ª e 8ª séries (8º e 9º anos).

Na 5ª série (6º ano): Frações – representação, comparação e operações; números decimais: representação, transformação em fração decimal e operações

e na 6ª série (7º ano) entre outros conteúdos, os Números racionais: representação fracionária e decimal, operações com decimais e frações.

Já na 7ª série (8º ano) é retomada a ideia dos Números racionais: transformação de decimais finitos em frações, Dízimas periódicas e fração geratriz e na 8ª série (9º ano) é trabalhado o conjunto dos números racionais.

Esses conteúdos, também são indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997; 1998) e apontam alguns problemas que os alunos podem enfrentar, são eles:

Conceber que a representação com $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ seja um número racional positivo e não dois números naturais com um traço a separá-los, isto é, esse novo número representa o quociente entre dois números naturais quaisquer, sendo o segundo não nulo; Entender que cada fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, a noção de equivalência de frações. Uma determinada medida ou quantidade no campo dos números naturais era representada por um único número e agora, no campo das frações, é necessário conceber infinitas representações para uma determinada quantidade ou medida; A comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terá de compreender uma desigualdade que lhes pareça contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$; Se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1), a expectativa é encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreender-se-ão ao ver que o resultado será menor que 10; Se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não fará sentido; uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que 0,8 e 0,9 estão números, como 0,81; 0,815 ou 0,87. BRASIL, (1998, p. 103)

Frente às possíveis dificuldades apontadas pelos PCN (BRASIL, 1997; 1998) e os resultados de pesquisas que envolveram o conceito de fração, assim como os resultados do Saresp 2008, apresentaremos nas páginas seguintes o objetivo e a questão de pesquisa deste estudo.

1.2 Objetivo e Questão de Pesquisa

Este estudo tem como objetivo identificar e analisar as *concepções*¹ e *competências* dos professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclo do Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração. Para tanto, nos apoiaremos na classificação teórica proposta por Nunes (2003) a qual apresenta a fração com cinco *significados* (Parte-todo, quociente, medida, número e operador multiplicativo). Levaremos, também, em conta, as variáveis de *representação* (icônica e não icônica), além dos *invariantes* do conceito (ordem e equivalência).

Tendo este objetivo, o presente estudo foi elaborado para responder a seguinte questão de pesquisa:

Quais as *concepções* e *competências* apresentadas por professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclos do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração em seus diferentes significados?

Para respondermos tal pergunta, foi elaborado um instrumento diagnóstico de modo a permitir identificar e analisar as concepções e competências dos professores: (1) perfil, (2) elaboração de situações-problema, (3) respostas das situações-problema elaboradas e (4) competências didáticas.

- **Unidade 1:** Perfil do professor (14 questões);
- **Unidade 2:** elaboração de cinco situações-problema pelos professores;
- **Unidade 3:** respostas das situações-problema elaboradas pelos professores;
- **Unidade 4:** competências em relação aos cinco significados de fração.

A partir da análise do instrumento diagnóstico esperamos obter informações suficientes para a elaboração de um mapa, o qual aponte o conjunto de concepções e competências desses professores no que tange a fração. Se assim for, nosso estudo terá contribuído para oferecer uma base para futuras

¹ Estes significados serão detalhadamente apresentados e discutidos no capítulo seguinte.

pesquisas cujo interesse seja o ensino de fração por professores especialistas em Matemática no que se refere ao conceito de fração.

Descrito aqui nossos objetivos e questão de pesquisa, apresentaremos na próxima seção a descrição dos capítulos que configuram nosso estudo.

1.3 Descrição dos Capítulos

No presente capítulo, apresentamos os motivos que nos levaram a investigar o tema fração com os professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclo do Ensino Fundamental.

No capítulo II são apresentadas as ideias teóricas que deram subsídios ao nosso estudo. No que se refere aos campos conceituais, temos Vergnaud (1990; 1993), além de considerarmos outras ideias teóricas, sobretudo aquelas que referem a classificação sobre o significado da fração, como os estudos de Kieren (1988) e a classificação proposta por Nunes (2003), assim como a definição de concepções e competências de Ponte (1998) e Vergnaud (1987) respectivamente.

No capítulo III versaremos sobre o conceito de fração sob três diferentes enfoques:

- O primeiro refere-se à fração na Matemática, momento que descreveremos a trajetória histórica da sua construção, bem como sua definição formal e suas propriedades.
- O segundo enfoque diz respeito ao conceito de fração do ponto de vista da Educação Matemática, momento que revisaremos estudos relevantes correlatos com o cerne de nossa pesquisa.
- O terceiro enfoque refere-se à fração na Escola, momento que descreveremos as recomendações feitas pelos PCN (1997; 1998).

No capítulo IV, Metodologia, é feita a apresentação em detalhes do estudo, no qual consta uma justificativa teórico-metodológica, seguida pela apresentação do universo do estudo e do desenho do experimento.

No capítulo V procede a nossa análise qualitativa e quantitativa dos dados coletados.

No capítulo VI, apresentamos as conclusões fundamentadas nas análises feitas no capítulo anterior, propondo, com base nas reflexões advindas das respostas à nossa questão de pesquisa, com possíveis encaminhamentos para realização de futuras pesquisas no tema fração, que permitam o avanço no conhecimento de como ensinar fração.

Finalmente, apresentamos as referências que colaboraram sobremaneira na elaboração e desenvolvimento do presente estudo.

CAPÍTULO II

PRINCIPIOS DA PSICOLOGIA COGNITIVISTA

Sendo influenciado, é claro, pelas leituras realizadas e na presente necessidade de escolhas quanto a nosso suporte teórico, decidimos que o desenvolvimento desse estudo será baseado na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1987; 1990; 1993), além de considerarmos outras ideias teóricas, sobretudo aquelas que referem a classificação sobre o significado da fração, como os estudos de Kieren (1988) e a classificação proposta por Nunes (1997; 2001), assim como a definição de concepções e competências de Ponte (1998) e Vergnaud (1987) respectivamente.

2.1 A formação do conceito de fração, segundo a teoria dos Campos conceituais de Vergnaud

Baseamo-nos na teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1990), para o estudo sobre a formação do conceito, pois essa teoria cognitivista fornece uma estrutura consistente e alguns princípios que servem de base ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, em especial, com referência à aprendizagem da matemática.

Um dos pressupostos básicos da Teoria dos Campos Conceituais é a afirmativa que o conhecimento se constitui e se desenvolve ao longo do tempo,

em interação adaptativa do indivíduo com as situações que experiência. O funcionamento cognitivo do sujeito frente a uma situação repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados; ao mesmo tempo, o sujeito incorpora novos aspectos a esses conhecimentos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas.

Nessa perspectiva, o estudo do funcionamento cognitivo não pode descartar questões relativas ao seu desenvolvimento. A teoria cognitiva proposta por Vergnaud contempla essa questão, buscando compor, em um mesmo foco de análise, desenvolvimento e funcionamento cognitivo.

Para Vergnaud (1993), os processos cognitivos são entendidos como aqueles que organizam a conduta, a representação e a percepção, assim como o desenvolvimento de competências e de concepções de um sujeito no curso de sua experiência.

O autor, ainda esclarece que “conhecimento” se refere tanto a competências como a concepção e que enquanto as concepções são em geral expressas por uma sequência de enunciados, ou seja, o que o sujeito sabe informar sobre determinado conteúdo verbalmente ou por escrito, as competências se fazem por meio de ações julgadas adequadas para tratar uma situação.

Vergnaud (1993) em sua teoria dos Campos Conceituais retoma e aprofunda os estudos de Piaget, no que diz respeito à noção de esquema, para o autor esquema refere-se à forma estrutural da atividade, ou seja, diz respeito à organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações dadas. Neste contexto, Vergnaud (1993) define:

O conceito de esquema é particularmente bem adaptado para designar e analisar classes de situações para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, a um momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Mas ele é igualmente válido para a descoberta e invenção em situação de resolução de problemas. Muitos esquemas são evocados sucessivamente e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito. (Vergnaud 1993, p. 176).

Para o autor o sujeito frente a uma nova situação poderá utilizar-se de vários esquemas sucessivamente, e até mesmo, simultaneamente para a resolução de problemas. Segundo Vergnaud (1993) os conhecimentos contidos nos esquemas podem ser designados pelas expressões conceito em ação e teorema em ação ou também pela expressão mais global, “invariantes operatórios”.

Conforme Vergnaud (1993):

Os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos (feitos pelo aluno). Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas. Magina (2001, p. 13).

O teorema em ação está relacionado com as estratégias tomadas e utilizadas pelo sujeito em situação de solução de um dado problema, sem que ele seja capaz de explicar ou justificá-las. Aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos, passíveis de serem verdadeiros ou falsos, portanto, tendo um domínio de validade restrito.

O conceito em ação é a manifestação do próprio conceito com suas propriedades e definições e quando são manifestados, geralmente, são explícitos.

Dessa forma, os conceitos de que os sujeitos utilizam estão relacionados à vida cotidiana e não surgem por simples apreensão sensível direta do real, e só funcionam quando estão reunidos em proposições, sentenças, enunciados e teoremas e não operam em vão. Esses conceitos são mobilizados no cotidiano para dar conta dos desafios enfrentados pelo sujeito. O conceito só adquire sentido dentro dessas situações ou conjunto de situações.

Para Vergnaud (1990) um dos pilares de um campo conceitual é o conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, todos com uma estreita ligação entre

si e então, o sujeito frente a uma nova situação mobilizará o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tentará adaptá-lo à nova situação.

O termo “situação” utilizado por Vergnaud (1993) não tem o mesmo significado que assume na teoria das situações didáticas, empregada por Brousseau (1986). Para Vergnaud (1993) situação tem a ver com o contexto, no qual o problema (ou tarefa) encontra-se inserido, de forma a contribuir, para que os conceitos presentes nessa situação ganhem significados, frente à aquisição do conhecimento que ocorre por meio de situações já conhecidas, tendo o sentido de tarefa a ser executada pelo sujeito.

A ideia é que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas com natureza e dificuldades específica. A dificuldade de uma tarefa não é nem a soma, nem o produto da dificuldade das diferentes subtarefas, contudo, o fracasso em uma subtarefa provoca o fracasso total (Vergnaud, 1993).

Portanto, segundo Vergnaud (1988), esse conhecimento tanto pode ser explícito – expresso de forma simbólica, como implícito, usado dentro de uma ação, na qual o sujeito escolhe as operações adequadas frente a uma determinada situação, sem, contudo conseguir expressar, de forma clara ou sistemática, as razões de suas escolhas.

Assim, neste contexto, segundo Vergnaud (1988, apud Santos 2005) podemos destacar três ideias principais:

O conhecimento dá-se pela adaptação do indivíduo ao meio, isto é, o processo de conhecimento é tratado como um caso particular do processo de equilíbrio. Assim, a apreensão de novas estruturas e novos objetos às estruturas já existentes pela ação do sujeito diz respeito à assimilação, enquanto sua modificação às novas características do objeto relaciona-se com a acomodação;

O conhecimento, portanto pode ser traçado pelo modo como um indivíduo atua sobre o objeto, isto é, a ação é o principal fator no processo do conhecimento;

Os indivíduos desenvolvem diferentes tipos de conhecimento, dependendo do tipo de abstração que fazem. Sendo assim, o conhecimento lógico matemático dá-se com base na abstração reflexiva, ou seja, consiste em isolar as propriedades e as relações das próprias operações da pessoa. SANTOS (2005 p. 31).

Diante dessas ideias Vergnaud (1993), analisou os tipos de situações-problema matemáticas, os tipos de formulação dos mesmos aliados às idades psicológicas e à maturação matemática dos estudantes, com o objetivo de entender as filiações e saltos de conhecimentos, chegando às estruturas envolvidas nessa resolução dos problemas.

Assim, entre as muitas estruturas estudadas por Vergnaud (1993) destacaremos as multiplicativas, pois o presente estudo encontra-se inserido dentro do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, que envolve o conjunto de situações, cujo tratamento implica em uma ou várias multiplicações e divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas, que permite analisar tais situações.

Segundo Santos (2005), podemos identificar como conceitos pertencentes às estruturas multiplicativas: a proporção simples e múltipla, função linear e não-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, **fração**, número racional, múltiplo e divisor, entre outros.

Vergnaud (1993) considera que existe uma série de fatores influenciando a formação e o desenvolvimento de um conceito e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema, pois para perceber quais os conhecimentos que o sujeito traz consigo frente a um dado objeto matemático, é necessário buscar o entendimento do que o indivíduo realiza e de como realiza, relacionando esses aspectos.

Em sua teoria, Vergnaud (1990) apresenta a definição de um campo conceitual como sendo um conjunto de situações cujo domínio requer, por sua vez, o domínio de vários conceitos de natureza distinta.

Sendo assim, o estudo do desenvolvimento de um campo conceitual, exige que um conceito seja visto como uma composição de uma terna de conjuntos, representado segundo Vergnaud por S, I, R, no qual:

- S – é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, isto é, a realidade (referência);
- I – é o conjunto de invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) que o sujeito mobiliza para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto (o significado);
- R – é o conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes e, conseqüentemente, as situações e os procedimentos para lidar com eles (o significante).

Para Vergnaud (1993) os conceitos matemáticos formam seus sentidos com base em uma variedade de situações e, normalmente, cada situação não pode ser analisada com a ajuda de apenas um único conceito. Isto porque uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação.

Acreditamos, assim como outros pesquisadores que citaremos nesse estudo que, como sugere Vergnaud (1993) que possa ser possível construir o conceito de fração, coordenando uma interação entre os três conjuntos – o das Situações, dos Invariantes e das Representações. Assim, em nosso estudo assumiremos os seguintes conjuntos:

- **O conjunto de Situações (S):** referente as situações-problema contemplando os cinco significados da fração: Número, Parte-todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo;
- **O conjunto de Invariantes Operatórios (I),** referente as propriedades do conceito – equivalência e ordenação –, objetos e relações que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações;

- **O conjunto de representações (R):** referente as situações que permite ao sujeito representar por intermédio de signos e símbolos matemáticos – representação icônica e não icônica.

Acreditamos, ainda que, como sugere Vergnaud (1993), se o que desejamos é o ensino do conceito de fração, um dos possíveis caminhos de entrada é explorar esse conceito em diversas e diferentes situações, que combinadas favoreçam o entendimento de tal conceito de maneira sólida, pois a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do sujeito frente a essas tarefas (invariantes operatórios) permitem que analisemos as suas concepções e suas competências.

Finalmente, entendemos que a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1993) contribui de maneira ímpar para a Educação Matemática, visto que oferece uma sólida e plausível explicação ao surgimento e desenvolvimento de conceitos e, em especial aqueles relacionados à formação do conceito de fração em seus diferentes significados.

Na próxima seção, dentre os pesquisadores que investigam o conceito de fração, destacaremos alguns autores que defendem que a construção desse conceito se dê por meio de diversas situações que dão significados a esse objeto matemático, indo ao encontro exatamente da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

2.2 Os diferentes significados de fração

Segundo Nunes (2003), Santos (2006), Merlini (2006) e Teixeira (2008) o ensino do conceito de fração se dá por meio de diversas situações que conferem significados a esse objeto matemático.

Nesse sentido é fundamental que as situações sejam contextualizadas, para que assim possam oferecer significados ao conceito. Nesse contexto, entendemos que a aquisição do conceito de fração poderá ser construída, com sucesso, se explorados seus diferentes significados.

Nesse sentido Kieren, em seu artigo publicado em 1976, foi o primeiro pesquisador a chamar a atenção para a complexidade do conceito de fração, levando em consideração o fato de que os números racionais são constituídos de diversos constructos e que a compreensão destes fará com que o indivíduo entenda com sucesso a natureza do número racional.

O autor afirma que os números racionais não podem ser considerados como uma simples extensão dos números naturais, pelo fato de que nos racionais a adição e a multiplicação são operações independentes. Nos números naturais a multiplicação conduz sempre a um número maior, enquanto que nos números racionais nem isso acontece. Kieren (1994) enfatiza a ideia de que o número racional deve ser visto primeiro como um conhecimento humano e só posteriormente como uma construção lógica formal. O autor afirma, ainda que o conhecimento dos números racionais refere-se aos constructos e subconstructos.

Segundo Damico (2007), entende “constructos” como sendo o conceito e “subconstructos” como os pequenos conceitos que juntos formam o conceito maior. Em nosso estudo esses termos serão utilizados nesse mesmo sentido.

A partir das ideias apresentadas, Kieren (1988) identificou os quatro seguintes subconstructos dos números racionais: Quociente, Medida, Operador e Razão.

Cabe aqui ressaltar que o autor não considera o subconstructo Parte-todo como outros pesquisadores, por entender que as ideias que o constituem encontra-se presentes nos subconstructo quociente, operador e medida.

Aprofundando suas considerações sobre a construção do conceito, Kieren (1988) propõe um modelo teórico para sua construção, em que procura apresentar as possíveis interconexões entre as ideias que formam o conceito, partindo das situações presentes no conhecimento intuitivo do sujeito, chegando até o estágio da formalização.

Então é apresentado um modelo, sob a forma de um mapa, onde são identificados quatro níveis pelos quais a construção do conceito de números racionais deve passar (Kieren, 1993), são eles:

- O nível do conhecimento intuitivo;
- Os subconstrutos;
- Um terceiro nível, obtido a partir dos subconstrutos (quociente, operadores, medidas e razões) em direção a um pensamento formal;
- O conhecimento estruturado nos números racionais dentro de um conjunto quociente.

Uma consequência direta e imediata das ideias de Kieren (1988) é a de que os currículos construídos, segundo essa orientação, propiciariam uma melhor interligação dos vários campos da Matemática, pois se os números racionais fossem percebidos apenas como extensão dos números inteiros ou simples algoritmo em uma relação Parte-todo estática, permaneceria apenas no domínio matemático dos números. Assim, segundo as ideias de Kieren, os números racionais permitiriam uma possibilidade para que o sujeito tenha contato com outros domínios da Matemática desde os anos iniciais, de forma, é claro, significativa.

Como exemplo disso, o autor cita o subconstruto medida que oferece uma ligação importante entre a geometria, o espaço e o estudo dos números racionais. Assim como o subconstruto operador que possibilita uma aproximação dos números racionais com a álgebra e com a noção de função composta, em termos não formais. Já o subconstruto razão possibilita a formação dos conceitos de proporção e probabilidade.

O autor sugere que a ideia de partição exerça um papel importante na construção do conhecimento do número racional por parte do sujeito, propondo como ponto inicial para uma posterior construção formal, a partir de bases intuitivas e de seus significados.

Nesta mesma perspectiva, temos o trabalho de Behr et al. (1983) que reconhece os números racionais como sendo uma das mais importantes ideias matemáticas desenvolvidas no contexto escolar.

Esses autores entendem que a importância de se estudar o número racional na escola elementar deve ser justificada segundo três pontos de vista:

- ponto de vista prático: aperfeiçoando a habilidade de dividir, o que permite entender e manipular melhor os problemas do mundo real;
- ponto de vista da psicológica: desenvolver e expandir as estruturas mentais;
- ponto de vista matemático: fornece a base sobre a qual serão construídas mais tarde as operações algébricas elementares.

Os autores criticam a ênfase curricular nos procedimentos e algoritmos, e argumentam que, geralmente, o fraco desempenho dos alunos com relação ao conceito de número racional é consequência desse fator.

Sendo assim, Behr et al. (1983) apresentam seis interpretações (subconstructos), que são: Parte-todo, Decimal, Razão, Quociente, Operador, e Medida.

Behr et al. (1983) ao encontro das ideias de Kieren (1976) frisam que a compreensão completa do número racional requer não somente um entendimento de cada um dos subconstructos, mas requer compreender como eles se inter-relacionam.

Segundo Teixeira (2008), apoiado em uma análise matemática de números racionais feita por Kieren (1988) que sugeriu que as frações são números produzidos por divisões (em vez de por união com números inteiros), elas (as frações) são números no campo dos quocientes. Nunes e Bryant (1997) afirmam que se isso estivesse certo, deveríamos buscar a origem da compreensão das crianças a respeito dos números racionais em situações de divisão.

Os autores citam que o entendimento da divisão começa com a compreensão das crianças sobre distribuição. Mesmo crianças tão novas como as de cinco anos podem dividir conjuntos em quantidades iguais, usando o procedimento um-para-mim-um-para-você, sem erro.

Mas, Nunes e Bryant (1997) afirmam que com as frações, as aparências podem enganar e alguns alunos podem passar pela escola sem dominar diversos aspectos cruciais do conceito de fração, mesmo usando termos fracionais corretos, falando coerentemente sobre frações e resolvendo alguns problemas.

Segundo os autores (1997, p. 212):

[...] quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais, elas vêem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado na escola; concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo do que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação-problema. Portanto, é possível que os mesmos alunos que se engajam em tarefas de raciocínio semelhantes às descritas anteriormente, nos quais eles podem focalizar bem a situação-problema, desempenhem bastante diferentemente de quando eles estão resolvendo problemas em avaliações educacionais escritas: seu desempenho mostra uma lacuna entre o que eles entendem e o que eles podem fazer com símbolos depois destes terem sido aprendidos de uma forma particular. NUNES E BRYANT (1997, p. 212)

Nesse sentido que se faz necessário a compreensão completa do número racional, pois esse requer não somente um entendimento de cada um dos seus subconstrutos, mas requer compreender como eles se inter-relacionam, segundo as ideias de Behr et al. (1983)

Nunes et al. (2003), baseados nas ideias de Vergnaud em relação à Teoria dos Campos Conceituais, apresentam uma classificação teórica dos significados de fração, destacando dois invariantes que são considerados centrais no conceito de fração: a noção de ordenação e a noção de equivalência.

No que se refere à noção de ordenação de fração existem duas ideias básicas e centrais que devem ser levadas em consideração no seu ensino:

- A primeira ideia é a de que para um mesmo denominador, quanto maior for o numerador, maior é a fração;

- A segunda ideia diz respeito a uma situação em que, para um mesmo numerador, quanto maior o denominador menor será a fração.

A primeira ideia é relativamente simples, pois a estratégia utilizada para resolver tal situação é semelhante à comparação de dois números naturais, embora a afirmação que o denominador deve ser constante para uma comparação direta a ser feita entre os numeradores, pode oferecer alguma dificuldade.

A segunda ideia, porém, pode oferecer mais dificuldade, pois as crianças têm que pensar numa relação inversa entre o denominador e a quantidade representada pela fração.

No que diz respeito à noção de equivalência de fração, devem ser levados em consideração dois aspectos essenciais:

- Equivalências em quantidades extensivas, que segundo (Nunes, et al., 2005) se baseiam na comparação de duas quantidades de mesma natureza e na lógica Parte-todo, portanto raciocínio aditivo. Quando juntamos duas quantidades extensivas o todo será igual à soma das partes, e no caso de subtraímos uma parte do todo, a parte que resta é igual ao todo menos a parte retirada;
- Equivalências em quantidades intensivas. No caso das quantidades intensivas, estas referem-se às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes, portanto no raciocínio multiplicativo.

Na busca de solucionar muitas das dificuldades apresentadas na aprendizagem do número racional na forma fracionária, Nunes et. al.(2003), apresentam a proposta de uma classificação de situações em que as frações são usadas, equivalendo a uma teoria sobre os efeitos do raciocínio dos sujeitos sobre frações.

Cientes do fato de que existem outras classificações dos tipos de significados de números racionais, em especial aos que se referem a sua representação fracionária, assumiremos em nosso estudo a classificação

apresentada por Nunes et. al. (2003) que identificam cinco significados possíveis que devem ser considerados no processo ensino-aprendizagem das frações, são eles: Parte-todo, Quociente, Medida, Número e Operador multiplicativo.

Vejamos exemplos das variáveis descritas acima junto a classificação teórica de Nunes et al. (2003) para o conceito de fração e seus diferentes significados:

Significado Parte-todo

A ideia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$.

Assim, assumiremos como o significado Parte-todo, um dado todo dividido em partes iguais em situações estáticas, na qual a utilização de um procedimento de dupla contagem é suficiente para se chegar a uma representação correta.

Exemplo 1 (icônica): Ana comeu um pedaço de chocolate de uma barra que tinha três pedaços de chocolates. Qual a fração da barra de chocolate que Ana comeu?



Exemplo 2 (não icônica): Ana comeu 2 pedaços de uma pizza que tinha oito pedaços. Qual a fração da pizza que ela comeu?

Para resolver essas situações, o sujeito deverá identificar que o todo foi dividido em 3 partes iguais, portanto, trata-se de uma comparação Parte-todo (significado); bem como deve identificar que o número total de partes do exemplo 1, assim como o total de partes do exemplo 2 referem-se ao denominador e que as partes de chocolate e de pizza que Ana comeu, correspondem ao numerador.

Situação Quociente

Este significado está presente em situações em que está envolvida a idéia de divisão – por exemplo, uma pizza a ser repartida igualmente entre 3 pessoas.

Nas situações de quociente temos duas variáveis (por exemplo, número de pizzas e número de pessoas), sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador – no caso, $\frac{1}{3}$. A fração, nesse caso, corresponde à divisão (1 dividido por 3) e também ao resultado da divisão (cada pessoas recebe $\frac{1}{3}$).

Exemplo 3 (icônica): *Dois bolos idênticos foram divididos igualmente para 5 pessoas. Quanto recebeu cada uma?*



Nessa situação-problema, o sujeito deverá perceber que a divisão é uma boa estratégia para resolvê-la, isto é, o quociente (significado) representa a quantidade de bolo que cada pessoa irá receber.

Exemplo 4 (não icônica): *Foram divididas igualmente 20 figurinhas para 4 crianças. Quantas figurinhas cada criança ganhará?*

Para que possamos exemplificar o significado Quociente, podemos reportar as frações chamadas *aparentes*, ou seja, frações que representam números inteiros, por exemplo: $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{4}$, Nesse caso a fração que representa a quantidade de figurinhas é $\frac{20}{4}$, logo cada criança ganhará cinco figurinhas.

Significado Medida

Este significado está presente em situações em que está envolvida a idéia de comparação de duas grandezas.

Exemplo 5 (não icônica): Um pintor mistura um litro de solvente a cada 4 litros de verniz. Que fração da mistura foi feita com o verniz?

Nessa situação temos 4 litros de verniz e um litro de solvente, sendo assim um total de 5 litros, portanto a fração $\frac{4}{5}$ representa a quantidade de verniz em relação à mistura.

Exemplo 6 (não icônica): *Para fazer uma certa quantidade de limonada são necessários 1 medida de concentrado de limão e 4 medidas de água. Que fração representa a medida de água em relação ao total de suco?*

Essa receita é medida pela razão 1 para 4 que pode ser representada como sendo $\frac{1}{4}$ (relação Parte-parte), mas essa quantidade poderá nos remeter a ideia de fração (relação Parte-todo), considerando-se que o todo (a mistura) é constituído de 5 partes, $\frac{1}{5}$ é a fração que corresponde a medida de concentrado de limão na mistura e, $\frac{4}{5}$ é a fração que corresponde a medida de água na mistura.

Significado Número

Assim como o número inteiro, a fração nesse significado é representada por pontos na reta numérica. Os números não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas (discretas).

Existem duas formas de representação fracionária, ordinária e decimal.

Exemplo 7 (não icônica): *Represente na reta numérica a fração $\frac{3}{4}$.*

O sujeito frente a essa situação deverá reconhecer a fração como um número (significado) e não uma superposição de dois números naturais. Devemos perceber ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), isto é, $\frac{3}{4}$ é um número compreendido entre 0 e 1. Mesmo considerando esse intervalo, há a necessidade de que o sujeito compreenda que à direita e à esquerda de $\frac{3}{4}$ há ainda infinitos números. Terá ainda que se admitir a existência de duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal.

Significado Operador Multiplicativo

Este significado está presente em situações em que está envolvida a idéia de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um operador multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades contínuas como uma máquina que reduz ou amplia essa quantidade no processo, enquanto que em quantidades discretas sua aplicação atua como um multiplicador divisor. Nesse sentido, a fração pode ser vista como valor escalar aplicado a uma quantidade, que no caso do número inteiro, por exemplo, podemos afirmar que 2 balas, no caso da fração, corresponderiam a $\frac{3}{4}$ de um conjunto de balas.

Exemplo 8 (não icônica): *Um estojo contém 24 lápis coloridos. Maria deu $\frac{3}{4}$ dos lápis para sua colega. Quanto lápis Maria deu para sua colega?*

Nesta situação, o sujeito deverá perceber que a fração desempenha o papel de transformação, ou seja, deve-se multiplicar 24 por 3 e dividir o total por 4 ou dividir 24 por 4 e multiplicar o total por 3.

Exemplo 9 (não icônica): *Vinicius ganhou uma barra de cereal e comeu $\frac{3}{4}$.*

Represente a quantidade de cereal que Felipe comeu?

O sujeito tem que perceber que a fração que Felipe comeu se refere a uma quantidade, ou seja, $\frac{3}{4}$ de 1.

Como já mencionado anteriormente, neste estudo, assumimos a fração com cinco significados: Parte-todo, quociente, medida, operador multiplicativo e número. Para tanto, consideramos importante justificar o porquê de não utilizarmos a porcentagem, probabilidade e razão como sendo outros três significados da fração.

Embora alguns autores considerem essas possibilidades, este estudo está apoiado na classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003) em que se considera essas possibilidades como sendo interpretações de alguns dos significados apresentados pela autora.

Nas situações que se referem à porcentagem, como por exemplo, Paulo teve aumento de seu salário de 25%, isto é, $\frac{25}{100}$, está implícito em tal situação o significado operador multiplicativo. Só têm sentido em dizer que 25% ou $\frac{25}{100}$, referindo-se a uma quantidade, discreta ou contínua. Logo a porcentagem faz parte do significado operador multiplicativo.

No contexto que se refere à probabilidade, como por exemplo, numa caixa há 3 bolas verdes e 8 bolas vermelhas, qual a probabilidade de sortear ao acaso uma bola verde? A resposta dessa situação é $\frac{3}{11}$, ou seja, de cada 11 bolas contidas na caixa, 3 são verdes. De fato, está implícito nessa situação o significado medida. A fração $\frac{3}{11}$ representa a probabilidade da ocorrência desse evento, que é medida pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis.

No caso das razões é necessário termos um pouco de cuidado, pois estas nem sempre estão presentes em contextos que se pode dar o “status” de fração.

Como a quantidade intensiva é medida pela relação de duas unidades diferentes, essas unidades são representadas por uma razão e podem ser atribuídas de dois tipos:

- Situações nas quais é possível representar a razão como uma fração, ou seja, unidades diferentes, mas quando misturadas formam um todo.

Exemplo 10: *Para fazer um determinado suco é necessário 1 copo de concentrado para 5 copos de água.*

Tal situação pode ser descrita por uma razão: 1 para 5, ou $\frac{1}{5}$; ou ainda, $\frac{1}{6}$ de concentrado para $\frac{5}{6}$ de água. Na primeira representação, o suco é concebido por uma razão de concentrado e água, enquanto na segunda não está mais representando o concentrado em relação à quantidade de água, mas sim à quantidade de concentrado em relação à quantidade total da mistura. Ressaltamos que, nesta situação, reunir num mesmo todo em duas unidades distintas, está implícita dessa forma, o significado medida.

- Situações nas quais não é possível representar uma razão como uma fração, ou seja, unidades diferentes que mesmo misturadas não formam um todo.

Exemplo 10: *Um real para cada 2 quilos de maçã.*

Essa situação pode ser representada pela razão 1 para 2, mas não pode ser representada como uma fração.

Nunes et al. (2005, p. 152) afirmam que:

[...] a fração como uma expressão de quantidade - por exemplo, dois terços, um quinto etc – somente é aplicável a quantidades intensivas quando as duas unidades diferentes podem ser reunidas em um todo, como no caso de dois terços de concentrado e um terço de água. NUNES ET AL. (2005, P. 152)

Fizemos esta discussão com alguns exemplos, na busca de esclarecer o porquê de não considerarmos razão, probabilidade e porcentagem como sendo outros significados de fração, e sim como interpretações que surgem a partir dos significados Parte-todo, medida e operador multiplicativo.

Para esta pesquisa, adotamos a classificação teórica proposta por Nunes (2003) em relação à representação fracionária dos números racionais. A autora, baseada nas ideias de Vergnaud em relação à Teoria dos Campos Conceituais, apresenta uma classificação teórica dos significados de fração.

O conjunto de Situações refere-se à classificação teórica de problemas contemplando os cinco significados da fração: Parte-todo, Quociente, Medida, Número e Operador multiplicativo.

O conjunto de Invariantes, isto é, suas propriedades: Equivalência e Ordenação.

Representações, o qual permite que o sujeito represente as situações por meio de signos e símbolos matemáticos: Icônica e Não icônica.

Tendo em vista responder a nossa questão de pesquisa: “Quais as *concepções* e *competências* apresentadas por professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclos do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração em seus diferentes significados?” apresentaremos na próxima seção o que assumiremos como concepção e competências de professores.

2.3 Concepções e Competências dos Professores de Matemática

Segundo Ponte (1998) o interesse pelo estudo das concepções dos professores baseia-se no pressuposto de que existe um fator conceitual que exerce um papel determinante no pensamento e na ação desses profissionais.

Ponte (1998) afirma que este fator é:

[...] de uma natureza diferente dos conceitos específicos – não diz respeito a objetos ou ações bem determinadas, mas antes constitui uma forma de os organizar, de ver o mundo, de pensar. Não se

reduz aos aspectos mais imediatamente observáveis do comportamento e não se revela com facilidade – nem aos outros nem a nós mesmos. Ponte (1998, p. 192)

As concepções, segundo Ponte (1998) têm uma natureza essencialmente cognitiva e atuam como uma espécie de filtro que, por um lado, são indispensáveis, pois estruturam o sentido que damos às coisas e por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e compreensão.

Assim, para Ponte (1998) as concepções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que os professores estão habituados a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes.

Para o autor, a Matemática é um assunto acerca do qual é difícil não ter concepções, pois é uma ciência muito antiga, que faz parte do conjunto das matérias escolares há vários séculos, é ensinada com caráter obrigatório durante largos anos de escolaridade e tem sido colocada a um importante papel de seleção social.

E nesse contexto a Matemática possui uma imagem forte, suscitando medos e admirações e é geralmente tida como uma disciplina extremamente difícil, que lida com objetos e teorias abstratas. Os professores de Matemática são os responsáveis pela organização das experiências de aprendizagem dos alunos e estão num lugar chave para influenciar as concepções.

Rico et al (2002) em sintonia com Ponte (1992), consideram as concepções como mini-teorias do conceito, ou seja, como elementos organizadores e implícitos do conceito. Esta organização e escolha para abordarem determinadas tarefas, podem estar longe de serem as mais adequadas. As concepções estão estreitamente ligadas com a prática, uma vez que por um lado elas apontam caminhos e fundamentam as decisões, por outro, a prática faz com que brotem concepções para enquadrar as atitudes tomadas. Nota-se, portanto, uma rua de mão dupla entre as concepções e a prática, uma interferindo na outra.

Já para Vergnaud (1987), as concepções e competências são entendidas como sendo as duas faces de uma mesma moeda. As competências se

desenvolvem a partir das ações do sujeito inserido numa dada situação, enquanto que as concepções estão presentes nas expressões simbólicas do sujeito. Vergnaud relata que para analisar competências é essencial o conceito de esquema, ou seja, a competência é analisada como a combinação de esquemas usados frente a uma situação. As competências estão ligadas aos conhecimentos implícitos (teorema-em-ação) que se encontram nas relações que se formam entre os esquemas.

O autor apóia-se nas idéias de que as concepções podem ser traçadas pelas expressões verbais ou simbólicas do aluno, enquanto as competências são percebidas nas ações do sujeito frente a uma situação.

Na área da educação, Perrenoud (1996) é um dos autores que mais tem discutido a origem do termo competência, as suas conotações e consequências, na procura de estabilizar o conceito. Situa-o na interligação entre o conhecimento e a ação e, ao questionar sobre como são investidos os conhecimentos na ação, sublinha que é nesta interligação que a noção de competência pode ser útil. Segundo Perrenoud (1996, p. 15) propõe a seguinte definição: “conjunto dos recursos que nós mobilizamos para agir”, no qual o conhecimento científico e o conhecimento do senso comum, partilhados ou não, fazem parte desses recursos mas não os esgotam.

Perrenoud (1996) usa o termo competência não para ser usado como mais uma destas coisas, mas para conceitualizar uma outra de ordem diferente, ou seja, para designar não os recursos em si mas a sua mobilização. Esta ideia é próxima da interpretação de Le Boterf (apud Perrenoud, 1996, p 16) quando define competência como “a capacidade de um sujeito em mobilizar todo ou parte dos seus recursos cognitivos e afetivos para fazer face a uma família de situações complexas” (p. 16). Salienta ainda que as competências se revelam quando o indivíduo é capaz de utilizar os seus múltiplos recursos cognitivos em situações imprevisíveis, evolutivas e singulares, agindo da melhor forma.

Abrantes (1999), ao esclarecerem a distinção de Chomsky (1977) entre competência e *performance*, em que a ideia de competência surge “relacionada com a capacidade de improvisar e desenvolve-se com a aprendizagem” (p. 99), sublinha que as interpretações feitas sobre o termo competência podem ir desde

a conotação com comportamento ou performance (saber-fazer) até à identificação com uma qualidade de uma pessoa. Neste caso, realça-se a natureza holística e integrada, na qual “O conhecimento está, obviamente, envolvido, assim como a destreza necessária para o usar, mas este uso é emancipatório, baseado na reflexão e implicando algum grau de autonomia” (Abrantes, 1999, p. 99)

Segundo Abrantes (1999), a competência matemática pressupõe o reconhecimento de que a Matemática é fortemente inter-relacionada e que os tópicos se sobrepõem e integram, no desenvolvimento das experiências de aprendizagem, facilitando o avanço dos alunos.

As ideias de Vergnaud (1987) estão voltadas para o universo do aluno, isto é, para a aprendizagem e formalização de conceitos. Direccionando a discussão para o professor, Ponte (1998) entende a competência profissional como a capacidade de se equacionar e resolver (em tempo hábil) problemas da prática profissional. O autor define competência como um carácter explícito, que permite ser observado perante situações-problema. Nesse sentido, o autor afirma que o conhecimento profissional é formado pelas crenças, concepções, mitos que se acumulam durante a experiência profissional do docente, passando por diversas elaborações e reelaborações, tendo sempre um carácter implícito. Em comum, os dois autores trazem em suas definições de competência um carácter explícito, que se manifesta, conforme o indivíduo é colocado para resolver situações-problema.

Acreditamos que os professores, trazem consigo, para o ensino da Matemática, suas concepções. Pensamento semelhante é apresentado por Ponte (1998), quando afirma que o conhecimento profissional é formado pelas crenças, concepções e mitos que se acumulam durante a experiência profissional do docente, passando por diversas elaborações e (re) elaborações, tendo sempre um carácter implícito.

Postas estas reflexões, assumiremos em nosso estudo os termos concepção e competências apoiados nas ideias de Vergnaud (1987) e Ponte (1992) acima apresentadas. Quanto ao termo crença, julgamos que não seja necessário maior esclarecimento, pois o mesmo não será investigado em nesta pesquisa.

Em síntese, assumiremos, conforme Ponte (1992), que as concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva, sendo mantidas pelas convicções que são consensuais e têm procedimentos para valorizar sua validade. Na visão de Vergnaud (1987), as concepções, na maioria das vezes, são traçadas nas expressões simbólicas – explícitas – por meio de problemas práticos e teóricos, ou seja, consideramos como concepções o que o sujeito sabe informar sobre determinado conteúdo verbalmente ou por escrito.

Para Vergnaud (1987), as competências são traçadas pela ação do sujeito, são conhecimentos e conceitos implícitos, analisados como combinação de esquemas, ou seja, as competências se fazem por meio de ações julgadas adequadas para tratar uma situação.

No próximo capítulo apresentaremos o conceito de fração na perspectiva da Matemática, da Educação Matemática e da escola.

CAPÍTULO III

A FRAÇÃO: NA MATEMÁTICA, NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NA ESCOLA

No presente capítulo apresentaremos o conceito de fração sob três diferentes enfoques.

- O primeiro refere-se à fração na Matemática, momento que descreveremos a trajetória histórica de sua construção, bem como sua definição formal e suas propriedades.
- O segundo enfoque diz respeito ao conceito de fração do ponto de vista da Educação Matemática, momento que revisaremos estudos relevantes correlatos com o cerne de nossa pesquisa.
- O terceiro enfoque refere-se à fração na Escola, momento que descreveremos as recomendações feitas pelos PCN (BRASIL, 1997)

3.1 A Fração na Matemática

Nessa seção, apresentaremos uma breve descrição histórica sobre a fração, seu surgimento e suas diferentes representações em algumas culturas e, em seguida, apresentaremos o objeto matemático – a fração, do ponto de vista formal da própria matemática.

3.1.1 Na história

A milenar história dos números, desde a Idade da Pedra até a era dos computadores, reflete a preocupação do homem em representar e quantificar dados, essa história, às vezes hesitante e descontínua, é segundo Ifrah (1996) um acontecimento tão revolucionário quanto o domínio do fogo, a invenção da roda, da máquina a vapor ou, ainda da descoberta da eletricidade.

A história dos números não é somente a História de uma grande invenção, mas uma série de acontecimentos e descobertas que convergem para os números que hoje conhecemos.

Com a abstração dos números, o homem aprendeu a distinção sutil entre número cardinal e ordinal. Seus antigos instrumentos de contagem (pedras, bastões, conchas, etc...) tornaram-se verdadeiros símbolos numéricos, o que veio a facilitar e combinar números inteiros. Conforme o homem aprendeu a conceber conjuntos cada vez mais extensos, surgiram dificuldades em representá-los e um novo problema aparentemente impossível de ser resolvido: como designar números elevados com o mínimo de símbolo possível? A noção de agrupamento dos objetos que, na linguagem matemática, pode ser traduzido como o emprego de “bases” (base 10, base 2, base 60, base 5 e outras), foi uma solução para auxiliar na contagem de grandes quantidades.

Diversas civilizações da Antiguidade desenvolveram seus próprios sistemas de numeração. Alguns deles deixaram vestígios, apesar de terem sido abandonados (Estrada et al., 2000).

Segundo Rico (1996) e Estrada (2000), na antiga Mesopotâmia – “entre rios”, Tigre e Eufrates –, atual Iraque, os especialistas (arqueólogos e antropólogos) estabeleceram que desde o nono milênio até ao quarto a.C. uma grande variedade de fichas de argila (o barro era muito abundante na região) serviram para designar números, medidas e categorias de objetos; os restos conhecidos de notação numérica são anteriores, em vários milênios, às primeiras formas conhecidas de escrita.

Característica comum aos textos matemáticos da antiguidade que remontam aos períodos babilônicos é o uso de um sistema de numeração em que aparece, pela primeira vez, a noção de base. Esta noção estabelece um princípio de agrupamento de quantidades. Assim, cada n unidades de uma ordem constituem uma unidade de ordem superior, por exemplo: na base 10, o número 24 refere uma quantidade de $2 \times 10 + 4$. Mas o mesmo número na base 5 refere uma quantidade de $3 \times 4 + 2$, ou seja 14. Por vezes, recorrem a uma base ou combinam bases distintas – “Em geral, os sistemas de numeração usados dependiam do contexto e diferentes bases eram utilizadas nas necessidades do dia a dia” (Estrada et.al., 2000, p. 70).

Embora também aparecessem as bases 20 e 5, a base dez e a base sexagesimal eram as mais usadas. Temos ainda hoje reflexos desta base, por exemplo, na contagem do tempo, agrupamos de 60 em 60 – sessenta segundos compõem um minuto e sessenta minutos compõem uma hora. Isto é consequência da numeração desenvolvida na Mesopotâmia, há mais de 4000 anos. Lá era usada a base sessenta, por influência do sistema babilônico.

Revoluções sócio-culturais importantes na evolução dos números na Antiguidade segundo refere Rico (1996) que “os sistemas numéricos das três grandes civilizações fluviais – Mesopotâmia e Egípcia – que exemplificam a revolução urbana que teve lugar por volta do ano 4000 a.C. são estruturalmente equivalentes como o são em muitos outros âmbitos da cultura” (ibid).

Tal patenteia a idéia da construção cultural e social dos números e do seu uso, assim como o é o conhecimento científico – “O conhecimento científico é constitutivamente social dado que a ciência está socialmente orientada e os objetivos da ciência estão socialmente sustentados” (Rico, 1996)

Por volta de 1000 a.C. surge uma nova revolução importante que se traduz pelo aparecimento da escrita alfabética nos povos semitas do Próximo Oriente transmitida aos gregos, por volta de 800 a.C, dando origem aos sistemas numéricos alfabéticos, cujos exemplos são as numerações alfabéticas romanas e a etrusca, a grega, a hebraica, a fenícia e a árabe, que vieram, como sabemos, a ter muita influência no nosso sistema de numeração atual.

Rico (1996) destaca três contributos gregos para o desenvolvimento do conceito de número natural:

- a escola pitagórica, que via o número não como uma simples etiqueta para uma coleção, o símbolo de uma quantidade ou uma construção intelectual, mas algo que tinha consistência em si mesmo, uma espécie de átomo, tendo como ideia base considerar cada número como um agregado de pontos sobre figuras geométricas, dando origem aos números figurados;
- a conceitualização do processo de contar como processo indefinido (que nunca mais acaba) da qual Aristóteles é obreiro e;
- a escola de Euclides que estabelece um conceito de número exclusivamente centrado na noção de número natural, tratando os racionais como proporções entre números ou entre longitudes.

O conceito de número de Euclides, junto com a sistematização da teoria dos números conhecida até o momento, encontram-se nos livros VII, VIII, e IX dos Elementos, em cuja base conceitual trabalhou os matemáticos durante dois mil anos.

Um sinal específico para o zero parece ter surgido no norte da Índia pelo século V d.C., dando origem à numeração posicional. O zero denominou-se “sunya” que significa “vazio” em hindu, dando origem ao termo árabe “sifr” de onde surge o termo “zephirum” em latim, ou seja, o nosso atual zero (Rico, 1996, p. 159). Segundo Silva (1997, p. 383)

No que respeita ao zero [...] Brahmagupta define-o como resultado da diferença de duas quantidades iguais e usa-o, de forma correta na soma, na subtração e na multiplicação. Relativamente à divisão, diz que: ‘um número positivo ou negativo dividido por zero é uma fração com zero no denominador’, mas considera $0/0=0$. Isto mostra que Brahmagupta, apesar de ter definido zero de forma correta, não foi sensível ao seu valor matemático. SILVA (1997, p. 383)

É curioso notar ainda que os números negativos também fossem introduzidos pelos indianos e devido à necessidade de representar débitos, enquanto os positivos representaram haveres (Silva, 1997, p. 382).

Entre os árabes, e por divulgação dos hindus das suas tábuas astronômicas, o princípio posicional e o uso do zero passam a ser utilizado, tendo sido consolidado e divulgado o seu uso, dada a grande “expansão da cultura islâmica, o grande desenvolvimento econômico que a acompanhou junto com os interesses científicos e administrativos” (Rico, 1996, p. 159).

O sistema decimal de numeração árabe, cuja única diferença importante em relação ao nosso atual se traduz na forma dos seus algarismos, considera-se ter sido construído na Europa, ao longo da baixa Idade Média, em competição com o sistema de numeração romana que era utilizado pelas classes de mais alto nível cultural e econômico.

Entretanto, e conforme refere Ifrah (1996, p. 326):

[...] a descoberta do princípio de posição não veio apenas satisfazer os apaixonados pelas curiosidades matemáticas. Ela permitiu também, e sobretudo, que os matemáticos dos tempos modernos precisassem e unificassem determinados conceitos aparentemente distintos e edificassem teorias gerais até então inimagináveis. Por exemplo: as frações foram conhecidas na antiguidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram durante muito tempo mal fixadas, não homogêneas e inadequadas às aplicações práticas. [...] A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como 34/1.265: 34 (numerador) e 1.265 (denominador) IFRAH (1996, p. 326)

Citando o mesmo autor, Ifrah (1996) “As frações não foram consideradas desde a sua origem como números; nem se concebia a noção de fração geral m/n , como m vezes o inverso de n . Os egípcios, por exemplo, só conheciam as frações denominadas unitárias” (as de numerador igual a 1) e só exprimiam as frações ordinárias através das somas de frações desse tipo (por exemplo:

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}).$$

Com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador igual a 1). Graças a esta extensão, os números, que outrora serviam apenas para recenseamento, tornaram-se marcas adaptadas a inúmeros usos. A partir daí não só se podiam comparar duas grandezas "por estimação", mas era possível dividi-las em parcelas ou pelo menos supor-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie escolhida como padrão. Mas, apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de fração nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida.

Os babilônios foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, convertendo-as em frações sexagesimais (frações cujo denominador é igual a uma potência de 60) e exprimindo-as mais ou menos como se exprimem as frações de horas em minutos e segundos: 33 min 45s ($33/60h + 45/3.600h$). Mas os babilônios não chegaram ao uso da "vírgula" para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. A expressão (33; 45) tanto podia significar 33 h 45 m quanto 0 h 33 m 45s. Era uma notação "flutuante" que só o contexto podia precisar. Depois deles, os gregos tentaram atribuir uma notação geral às frações ordinárias, "mas a sua numeração alfabética prestava-se dificilmente a esta simbolização, o que os levou a desistir de qualquer tentativa para adotar a notação sexagesimal de origem babilônica nos seus cálculos". (IFRAH, 1996, p. 326-327).

As notações antigas foram depois adaptadas e aperfeiçoadas pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal. Inicialmente, só a parte inteira do número era representada no sistema de base 10; as frações utilizadas eram frações sexagesimais, com exceção do chamado sistema dos astrônomos que usava o sistema sexagesimal para inteiros e frações (ESTRADA, 2000).

Em seguida, graças à descoberta das frações denominadas "decimais" (aquelas cujo denominador é uma potência de 10), foi pouco a pouco transparecendo o interesse em prolongar a numeração decimal de posição no outro sentido, isto é, em termos modernos, na representação dos números

"depois da vírgula" (IFRAH, 1996). O sistema de representação pelas frações decimais surgiu da necessidade de garantir uma divisão equitativa dos bens, numa sociedade em que a retribuição do trabalho era feita dessa forma (Estrada, 2000).

Passou, então, a ser possível representar numericamente todas as frações, inclusivamente os números inteiros, como frações particulares, ou seja, aquelas que não apresentavam nenhum algarismo depois da vírgula (pensando na atual representação).

Segundo a mesma fonte, (IFRAH, 1996, p. 328)

[...] na Europa, foi o belga Simon Stévin que, em 1582, deu o passo decisivo rumo a nossa notação atual, ao anotar do seguinte modo os nossos 679,567: 679(0) 5(1) 6(2) 7(3) (simbolizando deste modo: 679 unidades inteiras, 5 'unidades decimais da primeira ordem' ou décimos, 6 'unidades decimais da segunda ordem' ou centésimos e 7 'unidades decimais da terceira ordem' ou milésimos)

Ou seja, na linguagem atual, uma decomposição do numeral em parte inteira e nas ordens da parte decimal, ou partes da unidade.

Desde então, tal como refere Rico (1996, p.159):

[...] o sistema de numeração converte-se num instrumento essencial, não só para contar e ordenar, mas também para medir e exprimir dados científicos (...) está preparado para sustentar o conceito de número real; o estudo de valores aproximados e a teoria dos erros têm aqui a sua origem). Rico (1996, p.159)

Foi assim que nasceu a notação usada até hoje nos países anglo-saxões, compreende-se por Mundo Anglo-Saxónico ou países anglo-saxões um grupo de nações Anglófonas (falantes da Língua Inglesa) que partilham características históricas, políticas, e culturais enraizadas ou atribuídas à influência histórica do Reino Unido. Quanto à nossa vírgula, segundo o mesmo autor, foi o neerlandês Wilbord Snellius que a inventou, no início do século XVII, passando o mesmo número a ser assim representado: 679,567.

Esta representação está presente nas práticas cotidianas da grande maioria dos cidadãos de vários países, quer no sistema de preços e uso da moeda, quer na utilização das diferentes medidas. (RICO, 1996)

É nesse contexto, que a noção de número está associada através dos tempos, a todos os tipos de atividade humana. As primeiras informações sobre a ideia de número são do período paleolítico; no entanto, poucos progressos foram feitos nesse campo, até ocorrer a transição para o período neolítico, durante o qual já existia uma atividade comercial importante entre diversas povoações.

Assim, podemos afirmar que há um consenso entre diversos pesquisadores da história da Matemática como por exemplo: Boyer (1974); Caraça (1998), entre outros, que o surgimento da Matemática deve-se ao fato de problemas oriundos da vida diária, ou seja, salvo sua evolução e seu formalismo, a Matemática emerge de uma apreensão sensível do real, isto é, de uma tentativa de construir modelos matemáticos para resolver problemas reais.

Considerando todos os fatos históricos apresentados até aqui, encontramos a noção da fração (representando uma medida ou uma quantidade) em diversas civilizações, porém, a maneira de representá-la é diferente.

Então, em síntese, nesse contexto, observamos que, nos séculos XI e XII, se de um lado a aritmética indo-arábica produzia um sistema de numeração e de escrita de frações, no qual o numerador era colocado sobre o denominador; por outro lado, as tradições judias exprimiam as frações por intermédio de uma linguagem retórica, como quantidades de partes de unidades originadas dos pesos e medidas.

Na segunda metade do século XV, a principal linha de desenvolvimento da matemática passa pelo crescimento das cidades mercantis sob a influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura: a grande Era voltada às navegações e descobertas.

Assim, a matemática passou a fazer parte do cotidiano das pessoas e os tipos de representação e conceitos da antiguidade foram aperfeiçoados e adaptados às soluções dos problemas da época.

As frações com numeradores maiores que o inteiro aparecem somente a partir do século XVI, representação essa já bem próxima das contidas nos livros dos séculos XIX e XX, com expressão de divisão. A notação moderna deve-se aos hindus pela sua numeração decimal de posição e aos árabes que inventaram a famosa barra horizontal, separando o numerador do denominador.

Em resumo, neste breve relato histórico, pudemos observar que do ponto de vista histórico para a formação conceitual das frações, os grandes acontecimentos e descobertas vão da pré-história até a Idade Média. Após esse período, observamos que houve uma preocupação maior com o aperfeiçoamento da escrita e utilização da representação decimal dos números racionais.

Finalmente, os números, em geral, estão inseridos em diversos contextos, pois não poderíamos imaginar a existência desses sem a presença dos números: no comércio, nos horários, nos impostos, nas estatísticas, entre outros.

3.1.2 O objeto matemático

Como descrevemos na seção anterior, a necessidade de novos números foi sentida desde muito cedo na história da Matemática, sugerida, naturalmente, por problemas práticos. Seguindo esse raciocínio com a construção do conjunto dos números racionais isso não fora de maneira diferente.

Segundo Ávila (1999), com os estudos de George Cantor (1845-1918), na área de análise matemática, nasceria a teoria dos conjuntos, que permitiu avanços nessa área da Matemática. Assim como, fração é uma representação dos números racionais, cuja identificação é feita por meio do símbolo Q , também define o conjunto dos números racionais, como sendo: o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, ou ainda podemos dizer que:

$Q = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$, na fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b o denominador.

Para quais se adotam as seguintes operações:

i) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{bd}$

ii) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

E, ainda, a seguinte definição:

i) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = d \cdot c$

É possível fazer comparações entre dois números racionais, identificando qual é o maior e o menor. No caso da representação fracionária, devemos comparar as frações, obedecendo às seguintes regras:

- i) Para no caso dos números terem o mesmo denominador, será maior ou menor, o que tiver maior ou menor numerador;
- ii) Para no caso de dois números terem o mesmo numerador, será maior ou menor, o que tiver maior ou menor denominador; e
- iii) Para no caso de dois números terem numeradores e denominadores diferentes, recomenda-se encontrar frações equivalentes que tenham o mesmo denominador e, só depois, far-se-á a comparação.

Para melhor compreensão desse último item, imaginaremos dois números racionais distintos r e s , que serão representados, respectivamente, pelas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, sendo que: m, n, p e $q \in \mathbb{Z}$, com n e $p \neq 0$.

Para obtermos as frações representadas com denominadores iguais, lançaremos mão do seguinte recurso: um número racional não se altera, quando se multiplica ou se divide seu numerador e seu denominador por um mesmo número natural. De maneira que teremos:

$$r = \frac{m \cdot q}{n \cdot q}, s = \frac{n \cdot p}{n \cdot q} \text{ e } q \neq 0$$

Dessa forma dois números com denominadores iguais são obtidos, bastando, portanto prosseguir, comparando-os, a fim de descobrir qual é maior, o

número r ou o número s . No entanto é necessário haver uma fundamentação teórica do ponto de vista da Matemática como ciência, para que o conhecimento campo dos números racionais fique completo. Portanto, apresentaremos a argumentação de que os números racionais possuem uma estrutura de corpo comutativo ordenado que segundo Ávila:

Um corpo (comutativo) é um conjunto não vazio C , munido de operações, chamadas adição e multiplicação, cada uma delas fazendo corresponder um elemento de C a cada par de elementos C , as duas operações estando sujeitas aos axiomas de corpo listados a seguir. A soma de x e y de C é indicada por $x+y$ e a multiplicação de x e y é indicada por xy . (ÁVILA, 1999, p. 15)

Portanto se $Q, +, \cdot$ é um corpo comutativo, então, os axiomas que caracterizam esta estrutura serão:

I) Associatividade

Dados quaisquer $x, y, z \in Q$, em relação à operação de adição podem ser associadas as parcelas da seguinte maneira:

$$x + y + z = x + y + z$$

em relação à multiplicação, a associação será feita da seguinte forma:

$$x \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot z$$

II) Comutatividade

Quaisquer que sejam $x, y \in Q$, pode-se fazer a comutatividade da ordem das parcelas, em relação à adição, de modo que se tenha:

$$x + y = y + x$$

em relação à multiplicação, pode-se comutar a ordem dos fatores, de forma, a obter o seguinte resultado:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

III) Distributividade da multiplicação em relação à adição

Quaisquer que seja $x, y, z \in \mathbb{Q}$, tem-se que:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ e } (y + z) \cdot x = x \cdot y + x \cdot z$$

IV) Existência do elemento neutro

Na adição, existe um elemento em $\mathbb{Q}$, chamado “zero” ou “elemento neutro”, indicado pelo símbolo “0”, tal que $x + 0 = 0 + x = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Na multiplicação, há um elemento em $\mathbb{Q}$, designado “elemento unidade” e indicado com o símbolo “1”, tal que: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

V) Existência do elemento oposto

A todo $x \in \mathbb{Q}$ corresponde um elemento $x' \in \mathbb{Q}$, tal que $x + x' = x' + x = 0$. O elemento x' , que se demonstra único para cada $x \in \mathbb{Q}$, é indicado por $-x$.

VI) Existência do elemento inverso

Para todo elemento $x \in \mathbb{Q}$, com $x \neq 0$, existe um elemento correspondente $x' \in \mathbb{Q}$, com $x \neq 0$, tal que $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$ esse elemento x' , que se demonstra único, para cada $x \in \mathbb{Q}$, é indicado por x^{-1} . Todo elemento admite oposto.

O conjunto dos números racionais é um corpo ordenado, pois existe uma relação de ordem total, em que as operações binárias do corpo são compatíveis com essa relação de ordem, portanto, nele existe certo conjunto P , chamado de conjunto dos elementos positivos, tal que:

- a soma e o produto de elementos positivos resultam em elementos positivos;
- dado $x \in \mathbb{Q}$, ou $x \in P$, ou $x = 0$, ou $-x \in P$.

Portanto, com estas propriedades poderemos provar todas as operações, tais quais:

Proposição 1: Os elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.

Proposição 2: O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.

Proposição 3: Vale a lei do cancelamento em $\mathbb{Q}$

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

Na próxima seção, apresentaremos a fração sob a ótica das pesquisas em Educação Matemática, bem como uma revisão de estudos correlatos com nossa pesquisa.

3.2 Fração na Educação Matemática: revisão da Literatura

Observamos que existem muitos pesquisadores interessados em investigar a aprendizagem e o ensino do número racional, neste capítulo, nosso interesse será apresentar e discutir algumas pesquisas sobre a aprendizagem e o ensino do número racional na forma fracionária. Escolhemos apenas aquelas que consideramos importantes no sentido de trazer contribuição ao presente estudo.

Boa parte dos trabalhos que discutiremos, foram realizados por nosso Grupo de Pesquisa REPARE em EdMat (Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática), no qual tive a oportunidade de ter contato com várias pesquisas, algumas delas relacionadas ao tema do Número Racional na sua forma fracionária.

Estas pesquisas nos interessam porque nosso estudo partiu de vários dos resultados encontrados nos trabalhos do grupo, sobretudo, aqueles focados nos professores.

Iniciaremos apresentando os trabalhos que tiveram por objetivo mapear o conceito de fração na aprendizagem, em que o aluno é o foco das investigações.

Para melhor demonstrar os estudos subdividiremos a seção, em duas subseções, os trabalhos de caráter diagnóstico e os de caráter intervencionista.

Em seguida apresentamos os trabalhos que objetivaram investigar o conceito de fração no ensino, cujo foco das investigações é o professor. Assim, subdividiremos a seção, em duas subseções, os trabalhos de caráter diagnóstico e os de caráter intervencionista.

Apresentaremos os estudos, ainda, de acordo com o esquema abaixo:

As pesquisas focadas na Aprendizagem do conceito de fração:

Diagnósticos:

- Kerslake (1986), alunos de 11 a 15 anos de idade da Inglaterra;
- Campos (1995), alunos de 4ª e 5ª séries do Ensino Fundamental;
- Merlini (2005), alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental;
- Moutinho (2005), alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental;
- Rodrigues (2005), alunos de 8ª série do Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e Ensino Superior.

Intervencionistas:

- Bezerra (2001), 3ª série do Ensino Fundamental;
- Malaspina (2007), 2ª série do Ensino Fundamental.

As pesquisas focadas no Ensino do conceito de fração:

Diagnósticos:

- Santos (2005), professores polivalentes e especialistas;
- Canova (2006), professores polivalentes;
- Teixeira (2008), professores polivalentes;
- Damico (2007), professores em formação inicial;

- Campos (2006), professores polivalentes de 1^a a 4^a série do Ensino Fundamental;
- Sant'Anna (2006), material didático e documentos oficiais da 5^a série do Ensino Fundamental;
- Silva (2011), proposta curricular do Estado de São Paulo e o caderno do Professor.

Intervencionista:

- Silvia (2005), professores da 5^a série do Ensino Fundamental;
- Silvia (2007), professores das séries iniciais do Ensino Fundamental.

3.2.1 As pesquisas focadas na aprendizagem de fração – Estudos diagnósticos

No que tange ao ponto de vista da aprendizagem de fração, iniciaremos com o trabalho Kerslake (1986). Consideramos importante apresentar os estudos de Kerslake (1986), apesar de a sua realização ter mais de 24 anos, pela importância dos resultados que revelam indícios de como as crianças pensam a respeito de frações, na Inglaterra.

Kerslake (1986) procurou investigar, por meio de testes, em 10.000 crianças com idades entre 11 a 15 anos, distribuídas em várias escolas da Inglaterra, durante seis anos, as estratégias de resolução e os erros que essas crianças apresentavam ao resolver problemas que envolviam entre outros os conceitos o de fração.

Buscando encontrar informações a respeito dos caminhos, de como as crianças pensam sobre as frações, o estudo de Kerslake, favoreceu a observação de três aspectos que emergiram dos dados obtidos.

1. Observar se as crianças seriam capazes de pensar as frações, como números ou se eles pensavam que a palavra “número” implicaria somente “números inteiros”;

2. Descobrir os modelos de frações que as crianças dispunham;
3. Descobrir como as crianças visualizavam a ideia de equivalência.

Outro aspecto notado pela pesquisa é a importância de existir um contexto que envolva a fração. Uma das questões propostas pela autora foi um mesmo problema de dois diferentes modos: dentro de um contexto, e sem contexto. O problema sem contexto pedia aos alunos a resolução de 3:5, o problema com contexto foi: Três barras de chocolate foram divididas igualmente para cinco crianças. Quanto cada uma recebeu? No problema com contexto a pesquisadora observou que, quase 65% dos alunos responderam corretamente, e, ao problema sem contexto, o índice foi significativamente inferior (31%), revelando a importância de existir um contexto que envolva fração.

Para a pesquisadora, algumas dificuldades apresentadas pelos alunos ao conceber 3:5, sem contexto, como sendo $\frac{3}{5}$, podem estar relacionadas ao fato de que os alunos não conectam a divisão 3:5 à representação fracionária $\frac{3}{5}$. Outra observação feita pela autora foi o fato de um número relativamente grande de alunos interpretar 3:5, como sendo 5:3.

Ao observar as frações e os números inteiros, notou-se que quando se perguntava aos alunos “quantas frações se escondem entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?” Eles respondiam que havia apenas uma fração: $\frac{1}{3}$ e não deram conta de que entre as frações dadas existem inúmeras outras, dessa forma, podemos concluir que os alunos observam apenas os denominadores das frações.

Durante as entrevistas, Kerslake (1986) pode observar que o uso de figuras, denominado pela autora como diagrama (ícones), facilita a interpretação dos alunos, como, por exemplo, entender a fração como parte de um todo, dividindo um círculo em partes iguais e sombreando algumas dessas partes. Entretanto, o uso desses diagramas no modelo Parte-todo, nem sempre permite ao aluno visualizar situações como, por exemplo, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Havendo necessidade

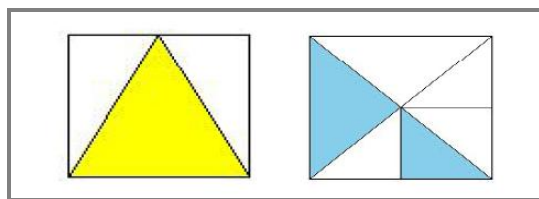
de realizar outras divisões da mesma figura para sua compreensão. Apoiando-se nas ideias de Kieren (1976), a autora argumenta que o conceito de número racional é diferente de número natural, visto que eles não fazem parte do meio natural dos alunos e as diversas interpretações de número racional resultam em uma variedade de experiências necessárias.

Em outra questão abordada nesse projeto de pesquisa por Kerslake (1986) foi o caso das frações equivalentes, em que os alunos não apresentaram dificuldades significativas para esse conceito.

Desta forma, a autora conclui, afirmando que: o entendimento dos números racionais como elemento do campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Destaca a necessidade de estender o modelo Parte-todo e incluir o aspecto quociente da fração e, as frações representadas, como pontos sobre uma reta numerada, devem ser discutidas com os alunos de maneira mais significativa. Segundo a autora uma das grandes dificuldades apresentadas pelos alunos é o fato de pensarem na fração como parte de uma figura, dificultando assim a compreensão da adição e subtração de frações.

No Brasil, Campos et al. (1995) em seus estudos encontram alguns resultados próximos dos apresentados por Kerslake (1986). Realizaram um teste diagnóstico, aplicado em 76 alunos de 4ª e 5ª séries do Ensino Fundamental de três escolas particulares da cidade de São Paulo. Na análise dos resultados deste teste, os pesquisadores perceberam que havia respostas que mereciam serem investigadas mais profundamente, decidindo assim realizar entrevistas.

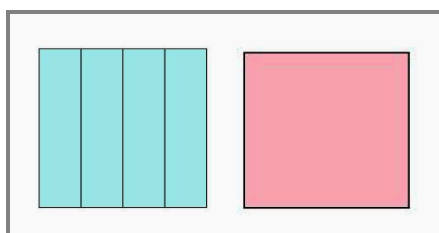
Após a análise dos protocolos e das entrevistas, Campos et al. (1995) concluíram que a maior dificuldade encontrada foi que as crianças, apesar da idade (10 e 11 anos), não possuíam a noção de conservação de área. Essa dificuldade foi constatada, por exemplo, nas figuras abaixo, cuja frações atribuídas, respectivamente, foram $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$:



A autora ressalta que esta dificuldade se dá, uma vez que na escola não é exigido esse conhecimento das crianças. É sempre dada uma figura já dividida em partes iguais, fazendo com que as crianças não percebam essa noção fundamental da fração. A presença da dupla contagem é muito forte, desconsiderando assim, a conservação de área.

Outra dificuldade encontrada é a desconsideração das áreas equivalentes.

Nas figuras representadas abaixo, foram associadas, respectivamente, as seguintes frações: $\frac{4}{4}$ e $\frac{1}{1}$.



Nas entrevistas, a pesquisadora perguntou se não poderia se atribuir uma mesma fração para representar as duas figuras. A criança respondeu que não, pois são figuras diferentes, “Uma tem traço e a outra não”.

Um elemento facilitador percebido pelos pesquisadores foi a presença de frações com o numerador 1, como $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$. As questões que envolviam esse tipo de fração tiveram respostas imediatas. Essa provável facilidade não deve ser uma simples coincidência, visto que, historicamente os egípcios e até mesmo hoje em dia, os povos tidos como primitivos (índios, tribos africanas, etc) usam basicamente as frações unitárias.

Na conclusão de sua pesquisa, Campos et al. (1995) afirmam que o ensino de modo geral – não só do ponto de vista metodológico, como também curricular é deficiente, apresentando falhas que apesar de evidentes, são difíceis de serem rompidas.

Apresentamos agora um dos primeiros trabalhos que tivemos contato dentro do grupo REPARE e que serviu de inspiração para a realização do presente estudo. O trabalho de Merlini (2005) refere-se a um estudo diagnóstico realizado com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental que teve por objetivo investigar as estratégias utilizadas por esses alunos, frente a problemas que abordam o conceito de fração. Intitulado “O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental” o estudo utilizou como aporte teórico a classificação proposta por Nunes et al. (2003), além da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Merlini (2005) em seu estudo envolveu 120 alunos, advindos de duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo; 60 deles cursavam a 5ª série e 60 a 6ª série do Ensino Fundamental.

A pesquisa de campo foi realizada em dois momentos: no primeiro foi aplicado, de forma coletiva um questionário que os alunos responderam, individualmente, questões envolvendo os cinco significados de frações propostos por Nunes. No segundo momento foram realizadas entrevistas clínicas com 12% da amostra.

A autora concluiu baseada na análise de seus resultados, que em nenhuma das duas séries pesquisadas, houve um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração. Outro achado importante, segundo a autora, foi não ter havido regularidade, ou seja, para um mesmo significado foram apresentadas diferentes estratégias, então conclui que a abordagem que se vem fazendo do conceito de fração, não está garantindo que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

Em concomitância ao trabalho de Merlini (2005) se deu o trabalho de Moutinho (2005), inclusive foram usados os mesmos instrumentos diagnósticos e

teóricos. Diferenciado quanto à população investigada: o de Merlini (2005) pesquisou alunos de 5ª e 6ª séries, o de Moutinho (2005) voltou-se a alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.

Intitulado “Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental”, Moutinho (2005) teve por objetivo de estudo identificar qual(is) dos diferentes significados da fração que esses alunos mais utilizavam frente a problemas que abordavam o conceito de fração.

O estudo de Moutinho (2005) foi aplicado a 123 alunos da rede pública estadual da cidade de São Paulo, distribuídos por duas escolas, 65 eram alunos da 4ª série e 58, da 8ª série do Ensino Fundamental. Os resultados foram analisados pelo autor observando dois aspectos: o desempenho e as estratégias que os alunos utilizaram na resolução dos problemas.

Moutinho (2005) percebeu, na análise de seus resultados, que os alunos da 4ª série demonstraram ter maior domínio do significado Parte-todo, como estratégia principal na resolução dos problemas, já os alunos da 8ª série além de usar esse significado, procuravam resolver os problemas usando operações, entretanto não atingiram um índice de acerto favorável, resultando em um desempenho geral menor que os alunos da 4ª série.

Moutinho (2005) concluiu que há a necessidade de se desenvolver um trabalho mais amplo sobre o Campo Conceitual das Frações, tendo como base o uso de diferentes situações, que abordem os cinco significados da fração propostos por Nunes et al. (2003), para buscar um melhor aprendizado desse conceito ao longo do Ensino Fundamental.

Rodrigues (2005) teve sua pesquisa voltada para a aprendizagem sobre as concepções de fração pelos alunos, após o estudo formal, com o objetivo identificar que aspectos do conceito de fração relativos apenas aos significados Parte-todo e quociente permaneciam não apropriados por alunos após o estudo formal.

O autor elaborou um instrumento diagnóstico composto de 48 questões, envolvendo o conceito de fração nos significados Parte-todo e quociente, com

situações apresentadas na forma icônica e não-icônica, em quantidades discretas e contínuas. As questões foram graduadas em três níveis de dificuldades.

O instrumento foi aplicado em três grupos distintos de sujeitos: 29 alunos de Ensino Superior de duas Universidades, uma da cidade de São Paulo e a outra de Campinas; 31 alunos de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola profissionalizante da cidade de Campinas, que seleciona seus alunos, segundo um concurso de admissão em caráter nacional; e o terceiro grupo foi formado por 13 alunos da oitava série do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade de Campinas.

Rodrigues (2005) analisou os resultados de seu estudo sob os pontos de vista qualitativo e quantitativo, e constatando em suas análises que mesmo nesses níveis de escolaridade, os alunos ainda apresentam dificuldades significativas sob três aspectos: o aspecto da compreensão do papel da unidade nos problemas, envolvendo frações; o aspecto da peculiaridade das situações, envolvendo grandezas discretas; e aspectos mais abstratos de construção dos números racionais, como a inclusão dos inteiros e a explicação de soluções em termos de operações com frações.

Rodrigues (2005) restringiu-se a investigar apenas dois significados da fração; Parte-todo e quociente, não sendo do seu interesse avaliar a competência dos alunos, mas sim investigar as concepções em relação a esses dois significados.

Depois de realizada as análises, Rodrigues concluiu que o conceito de fração permanecia não apropriado pelos alunos, mesmo depois de terem passado pela escola formal, o autor entende como escola formal a escolaridade que abrange os quatro ciclos do Ensino Fundamental.

Consideramos que as investigações e as análises oferecidas pelas cinco pesquisas seriam suficientes para nos oferecer um panorama geral da competência dos alunos para resolver problemas sobre fração e ainda nos ajudaram na construção do nosso próprio estudo.

No próximo tópico continuaremos apresentando pesquisas voltadas à aprendizagem de fração, mas, agora estas pesquisas têm caráter intervencionista.

3.2.2 As pesquisas focadas na aprendizagem de fração – Estudos intervencionistas

Iniciaremos essa seção com o trabalho de Bezerra (2001) que realizou um trabalho intervencionista, com alunos da 3ª série do Ensino Fundamental.

Com objetivo de investigar uma abordagem para ensino dos números fracionários o autor pretendeu estudar a aquisição do conceito e de suas representações com base em situações-problema que fossem significativas e desafiadoras ao aluno.

Com base em uma sequência de ensino, elaborada pelo autor, foram estudadas as questões de aprendizagem relacionadas à aquisição do conceito de fração, utilizando-se das representações simbólicas e pictóricas, apoiadas nos pressupostos de participação, resolução de situações-problema, trabalhos em grupo e vivências relacionadas ao dia-a-dia da criança.

O estudo ofereceu pistas significativas sobre o processo de aquisição desse conteúdo. A mais valiosa foi a de que o processo de construção dos conceitos de fração, a exemplo da história, ganha força quando se inicia baseando-se na resolução de problemas concretos, advindos da realidade.

Malaspina (2007) realizou um estudo intervencionista, para introdução do conceito de fração com alunos da 2ª série do Ensino Fundamental.

O estudo foi idealizado para responder à seguinte questão de pesquisa: “Quais os efeitos que cada um dos quatro significados para fração (Parte-todo, quociente, operador multiplicativo e medida) traz à aprendizagem inicial dos alunos do 1º ciclo (2ª série) do Ensino Fundamental sobre esse conceito?” Para tanto, foi realizado um estudo com 61 alunos, que nunca tiveram contato, do ponto de vista formal da escola com o objeto fração.

A autora utiliza como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1988; 2001) e as ideias teóricas de Nunes et al. (2003) com relação aos diferentes significados da fração, razões pelas quais tivemos interesse na referida pesquisa. Os resultados mostraram que cada um dos significados exerceu papel importante na aprendizagem da fração pelos alunos e todos trouxeram contribuições para início da apropriação desse objeto. Dessa forma, foi possível encontrar efeitos distintos na aprendizagem inicial de fração, dependendo do significado que se utilizou para introduzir o conceito.

Embora tenhamos apresentado apenas dois estudos de caráter intervencionista, consideramos que eles são importantes a nosso estudo.

Após apresentarmos estudos voltados à aprendizagem do conceito de fração passaremos a mostrar na seção seguinte os estudos que focam o ensino desse conceito.

3.2.3 As pesquisas focadas no ensino de fração – Estudos diagnósticos

Nesta seção, apresentaremos trabalhos focados na investigação do ensino da fração, sob o ponto de vista do professor, ou seja, tendo como sujeitos professores.

O primeiro trabalho a ser apresentado é o de Santos (2005), que realizou um estudo com professores que atuam no Ensino Fundamental.

O autor teve por objetivo compreender o estado – concepções – em que se encontrava o conceito de fração para professores que atuavam nos quatro ciclos do Ensino Fundamental.

O estudo propôs-se a responder a seguinte questão de pesquisa: “é possível reconhecer as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialista), do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração?” Se sim, quais? Se não, por quê?

Santos (2005) para responder a esta indagação realizou um estudo diagnóstico com 67 professores do Ensino Fundamental, distribuídos em sete

escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. O estudo constou de dois momentos: No primeiro, foi solicitado aos professores a elaboração de seis problemas envolvendo o conceito de fração; e no segundo, solicitou-se a esses docentes que resolvessem os próprios problemas elaborados. Os dados obtidos foram, também, analisados dentro de dois momentos: um voltado à análise dos enunciados dos problemas elaborados e o outro, às estratégias de resolução dos problemas.

Os resultados obtidos no estudo de Santos (2005) apontaram uma tendência, tanto entre os professores polivalentes como entre os especialistas a valorizar a fração com o significado operador multiplicativo na elaboração dos problemas.

Quanto à resolução dos problemas o autor observou que, nos três grupos, houve uma valorização dos aspectos procedimentais – aplicação de um conjunto de técnicas e regras (algoritmo).

Estas evidências levaram Santos (2005), a concluir que não existe diferença significativa entre a concepção dos professores polivalentes e a dos especialistas, seja na elaboração ou na resolução de problemas de fração em seus diferentes significados. O autor salienta que as concepções desses professores carregam fortes influências daquelas construídas na Educação Básica.

O trabalho de Santos (2005) serviu de inspiração ao estudo de Canova (2006) que, também, tratou de investigar a concepção de professores polivalentes, frente à elaboração de situações-problema que envolvesse fração. A diferença entre os estudos de Santos (2005) e Canova (2006), está no fato deste, além de investigar as concepções, ter buscado também pesquisar as crenças e competências dos professores em relação à fração.

O estudo realizado por Canova (2006) objetivou identificar e analisar as crenças, concepções e competências dos professores que atuavam nos 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração. A autora em seu estudo propôs a responder à seguinte questão de pesquisa: “Qual é o entendimento que os professores dos 1º e 2º ciclos de Ensino Fundamental

apresentam em relação ao conceito de fração?”. Após construir uma sustentação teórica baseada nas idéias de Vergnaud (1993); Nunes (2003) e Ponte (1998), a autora compôs um instrumento investigativo composto de 29 questões subdivididas em quatro partes: (1) perfil dos professores; (2) crenças; (3) concepções e (4) competências.

Este instrumento foi aplicado, no primeiro momento, a 51 professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, distribuídos em três escolas da rede Municipal da cidade de Osasco. Num segundo momento, foram realizadas entrevistas clínicas em 10% da amostra.

A análise dos dados foi dividida, seguindo as mesmas quatro partes que compuseram o instrumento. Canova (2006) utilizou a classificação teórica proposta por Nunes et al (2003) e considerou as variáveis de quantidade (contínua e discreta) e a representação (icônica ou não), além dos invariantes do conceito (ordem e equivalência).

Os resultados da pesquisa mostraram que as crenças dos professores não são influenciadas pela sua prática docente, o que não é verdade para as concepções. Estas eram mais restritas entre professores do 1º ciclo (significado Parte-todo em quantidade contínua não-icônica) do que aos professores do 2º ciclo.

Quanto à competência, a autora constatou que não houve um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração e os invariantes. Estas evidências levaram Canova (2006) a concluir que há necessidade de se ampliar o campo conceitual desses professores com relação ao objeto fração.

O trabalho de Santos (2005) e Canova (2006) serviram de inspiração para o trabalho de Teixeira (2008) que também tratou de investigar a concepção do professor, frente à elaboração de situações-problema que envolvesse fração. A diferença entre os estudos de Santos (2005), Canova (2006) e Teixeira (2008) está no fato deste, além de investigar as concepções e competências dos professores, ter buscado algumas relações com o livro didático.

O estudo realizado por Teixeira (2008) objetivou traçar um diagnóstico das competências e concepções de professores do 2º Ciclo do Ensino Fundamental da cidade de Itabuna-Bahia, a respeito do conceito de fração.

O autor fundamentando-se nas ideias de Vergnaud (1993), Kieren (1988), Nunes (2003) e Ponte (1998) na elaboração de instrumento investigativo composto por 33 questões subdivididas em três partes, distribuídas em dois cadernos. A primeira parte voltou-se ao perfil do professor com 10 questões, a segunda parte voltou-se para a concepção com 18 questões e a terceira parte investigou a competência, com base na resolução de problema, cada um envolvendo um dos significados de fração apresentados por Nunes, o instrumento foi aplicado a 52 professores distribuídos em 15 escolas do município.

A análise dos resultados do trabalho de Teixeira (2008) mostrou em relação ao perfil dos professores que 86,6% têm entre seis e vinte e cinco anos de carreira. O autor concluiu que os professores apresentam suas concepções com forte tendência a valorizar a fração com significado Parte-todo e operador multiplicativo e quanto à competência constatou que aparece fortemente ligada ao significado Parte-todo, seguido dos significados, medida e quociente.

Teixeira (2008) conclui que, no geral, os professores apresentam desempenho baixo na resolução de problemas de fração, sendo necessário ampliar o conhecimento matemático desses docentes, bem como realizar trabalhos que ajudem a expandir suas concepções a respeito do conceito de fração e de seu ensino.

Inspirado nos trabalhos de Santos (2005), Canova (2006) e de Teixeira (2008) que propomos a realização do presente estudo. Pois temos objetivos semelhantes, que é investigar a concepção e competência dos professores em relação à fração, diferenciando apenas que o nosso trabalho, como já mencionado no Capítulo I, está focado no professor especialista em Matemática do Ensino Fundamental.

Em sua tese Damico (2007) teve sua pesquisa voltada à formação inicial de professor, seu trabalho tratou de investigar a formação inicial de professores de Matemática para o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental.

Para tanto, foram pesquisados 346 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática (189 iniciantes e 157 concluintes) e 41 formadores de professores de duas universidades do ABC Paulista. O autor utilizou para coleta de dados cinco fontes, denominadas Instrumentos:

- Instrumento 1 – os alunos concluintes foram solicitados a criarem oito problemas envolvendo frações, com o objetivo de avaliar alunos do Ensino Fundamental;
- Instrumento 2 – os alunos concluintes resolveram os oito problemas que criaram;
- Instrumento 3 – todos os alunos, iniciantes e concluintes, foram submetidos a uma avaliação, contendo vinte questões que versavam sobre conhecimentos fundamentais dos números racionais;
- Instrumento 4 – entrevista interativa com 10% dos alunos concluintes participantes da pesquisa; Instrumento 5 – entrevista interativa com 41 professores.

Damico (2007) optou por uma abordagem qualitativa de interpretação dos dados, e em função do grande volume de informações, esta análise sempre foi precedida por um resumo estatístico, com o objetivo de mostrar a frequência com que cada categoria ou subcategoria foi observada.

Os resultados encontrados na pesquisa de Damico (2007) foram apresentados em três unidades de análise, abordando, respectivamente:

- o conhecimento matemático (conceitual e processual) dos estudantes para professores em relação a cinco subconstrutos ou significados das frações (Parte-todo; operador; quociente ou divisão indicada; medida e coordenada linear);
- o conhecimento matemático e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo ou Conhecimento Didático (PCK)² em relação às operações básicas com frações (adição, multiplicação e divisão);

² Trazemos a expressão Conhecimento Pedagógico do Conteúdo ou Conhecimento Didático para um possível entendimento do termo em Inglês *Pedagogical Content Knowledge or didactical knowledge* (PCK).

- os números racionais na formação universitária.

Conforme cita o autor, os dados da sua pesquisa apontam para o fato de que os estudantes para professores têm uma visão sincrética dos números racionais, com um acentuado desequilíbrio entre conhecimento conceitual e processual, com prevalência do processual.

Observou-se também, um baixo nível de conhecimento didático relacionado às formas de representação dos conteúdos, normalmente ensinados no Ensino Fundamental que versam sobre números racionais (frações).

Outro importante estudo foi realizado por Campos (2006), com um grupo de professores não especialistas em Matemática, que atuavam nos dois primeiros ciclos do ensino fundamental em diferentes escolas públicas da rede estadual do Estado de São Paulo. As autoras aplicaram um instrumento diagnóstico com respostas individuais, no qual foi solicitado aos professores que explicassem o raciocínio de crianças na resolução de problemas e pedia, ainda, que os professores explicassem como fariam para ajudar essas crianças a desenvolver o entendimento do conceito de fração.

As autoras basearam-se em diversas pesquisas, para afirmar que os professores brasileiros que atuam no nível de escolarização da 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental costumam utilizar as situações de Parte-todo para introduzir o conceito de fração. Embora esses professores sejam capazes de resolver problemas de frações, lançam mão de um grupo muito limitado de situações para ensinar e ajudar seus alunos a superarem eventuais erros e concepções errôneas sobre o conceito de fração.

Campos ainda pontuam que as situações com o significado Parte-todo, muito usadas no ensino de fração, resumem-se a situações em que uma área é dividida em partes iguais; em nomear uma fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e em analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção. Portanto, essa forma de abordagem leva os alunos a desenvolverem seus raciocínios sobre fração, baseados na percepção, em detrimento das relações lógicas-matemática nelas envolvidas (NUNES e BRYANT, 1997).

Na análise de seus resultados Campos (2006) constataram que, alguns professores propunham como estratégia para resolução dos problemas com fração o uso do material concreto, sem trazer qualquer explicação de como usá-los. Já outras estratégias estavam relacionadas à percepção, que propunha o uso de desenho ou de material concreto.

Na conclusão de seu estudo, Campos (2006), apontaram para dificuldades conceituais dos professores em relação ao conceito de fração. Confirmaram também que os professores apresentavam estratégias limitadas de ensino para superar as concepções errôneas expressas nas respostas dadas pelas crianças.

Os professores do estudo apresentaram como estratégia principal para o ensino dos invariantes (ordem e equivalência), o uso de desenho ou material concreto, ou seja, uma proposta totalmente baseada na percepção do aluno. Concluíram também, que esses invariantes foram pouco acionados pelos professores para promover a compreensão da fração, o que pode significar que esses invariantes, aos professores, têm pouca relevância no ensino de fração.

A pesquisa de Campos (2006) apontou para a necessidade de um planejamento de sequências de ensino que contemplem os invariantes ordem e equivalência, utilizando para tanto a lógica da divisão como estratégia, para alavancar a utilização desses invariantes, para a compreensão de frações pela criança.

Sant'Anna (2006) analisaram documentos curriculares e textos didáticos visando identificar os objetivos e as abordagens indicadas em relação ao conceito de fração para a 5ª série do Ensino Fundamental, explorando a noção de transposição didática proposta Chevallard (1985).

Os autores apresentam a definição de transposição didática dada por Chevallard (1985), na qual:

Um conteúdo do conhecimento, designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar, faz um objeto de ensino, é chamado de Transposição Didática. (CHEVALLARD, 1985, p. 39)

Neste contexto, para delimitar o campo de investigação, os autores, limitaram-se ao estudo de duas instâncias de transposição: os documentos curriculares nacionais e livros didáticos, sendo assim, analisaram a Proposta Curricular da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (SÃO PAULO, 1985), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e dois livros didáticos: Matemática e Realidade, Iezzi (2000) e o livro Matemática na Medida Certa, Jakubo (2002).

Sant'Anna (2006) observaram, a partir dos materiais analisados, que o ensino do conceito de fração antecede o estudo dos números decimais, e é desvinculado do estudo dos números racionais. Os autores destacam ainda que a desconsideração do aspecto de medida associado às frações é mantida, assim como nos livros didáticos dos anos setenta, com uma evidente perda conceitual e que não se nota nenhuma tendência à problematização efetiva do sentido das frações, o que significaria dar um tratamento numérico às frações, a partir de problemas de medida.

De modo geral, os autores afirmam que a grande modificação observada nos materiais considerados é a preocupação com certa contextualização do conhecimento matemático, através de ligações entre este e as outras áreas do conhecimento, assim como através dos temas transversais. Portanto as principais modificações evidenciadas pelos autores referem-se muito mais a mudanças gerais, de ordem educacional e pedagógica, sugeridas pelas prescrições curriculares nacionais, do que a modificações oriundas na reorganização do saber.

Segundo Sant'Anna (2006) essas modificações, por sua vez, são bastante influenciadas pelos resultados provenientes de outras áreas, especialmente a Educação e a Educação Matemática, o que vemos, por exemplo, pelos traços construtivistas, ou pela tentativa de incorporação do papel contextualizador da história da matemática, embora de maneira uma tanto contraditória e superficial. Além disso, os autores acrescentam que a transposição didática, embora evidente nos materiais estudados, permanece geralmente invisível aos próprios professores, que utilizam estes materiais em sala de aula.

Silva (2011), analisaram os pressupostos e diretrizes que alicerçam o atual currículo de Matemática proposto, desde 2009, para o estado de São Paulo, mais especificamente no material de apoio Caderno do Professor, no que se refere a introdução do conceito de fração, com a finalidade de identificar a relação das indicações propostas pelo movimento de implementação curricular e resultados de pesquisas que tratam da mesma temática. Tratou-se de uma pesquisa bibliográfica, na qual a análise foi feita sob a luz dos princípios da Educação Matemática escolar como processo de “enculturação” proposto por Bishop (1997). Segundo as autoras Bishop (1997), aponta a necessidade de que os currículos de Matemática incluam um enfoque cultural caracterizado a partir de cinco princípios básicos:

- O princípio da Representatividade: pressupõe a rerepresentação da cultura Matemática tanto na perspectiva de seus valores como de sua tecnologia simbólica;
- O princípio da Acessibilidade: pressupõe que os conteúdos curriculares não podem estar fora das capacidades intelectuais dos alunos
- O princípio do Poder Explicativo: caracteriza a matemática como fenômeno cultural, a qual possibilita o entendimento do cotidiano.
- O princípio do formalismo: defende que um currículo deve objetivar o nível formal da cultura matemática, mostrando as conexões com o nível informal, ou seja, a conexão com o cotidiano outras áreas do conhecimento.
- O princípio da Visão Ampla e Elementar. Considera importante o trabalho com as ideias mais amplas ao invés aprofundar em uma única ideia. Contrapõe-se ao ensino de matemática que foca na concepção da matemática como técnica e especialista dos conteúdos.

É baseado nesses princípios que Bishop (1997) considera que os currículos deveriam ser concebidos a fim de proporcionar o reequilíbrio dos valores associados ao saber matemático, ou seja, presente o processo de “enculturação”.

Em relação às questões didáticas as autoras utilizaram, assim como em nosso estudo, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993), os estudos de Kieren (1988) e Nunes (2003).

De modo geral, a análise das autoras permitiu concluir que as propostas de trabalho para o Currículo do estado de São Paulo sofreram modificações, pois muitos resultados de estudos foram considerados, nesse novo documento, a proposta inicial traz ideias de Caraça (1952) no que tange a necessidade de estabelecer um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie; ou seja, uma unidade de medida como, por exemplo, centímetros para comprimentos; gramas para peso; segundos para tempo etc.

O enfoque com o trabalho de equivalência, segundo Silva (2011) também aparece muito forte nos documentos analisados, o que reporta influências de pesquisas, como por exemplo de Nunes (2003) no que se refere aos invariantes de ordem e equivalência, sendo que o invariante de ordem não teve espaço significativo explícito. As autoras, ainda salientam que a fração por ser um conceito já rotulado, tanto no ensino como na aprendizagem, como um assunto de difícil compreensão, a abordagem do invariante ordem no material analisado seria muito oportuno e importante.

Destacamos que três dos estudos diagnósticos apresentados acima investigaram crenças, concepções e competências do professor, que já estava atuando. O quarto tratou de investigar a formação inicial desses professores em relação aos conhecimentos matemáticos e pedagógicos. O quinto estudo buscou investigar as estratégias utilizadas pelos professores na resolução de problemas de fração. Os dois últimos estudos analisaram os documentos oficiais, verificando qual é a proposta de ensino oficial para o conceito de fração nesses documentos. Esses trabalhos contribuíram na elaboração e desenvolvimento de nosso estudo, por ser o professor, alvo de nossa investigação.

Na próxima seção, apresentaremos alguns estudos de caráter intervencionista realizados com professores que trabalhavam em diversos níveis de ensino.

3.2.4 As pesquisas focadas no ensino de fração – Estudos intervencionistas

Silva (2005) realizou um estudo, sobre as concepções de um grupo de professores de Matemática a respeito dos números fracionários em relação à aprendizagem de alunos de quinta série, da autonomia e dificuldades nas possíveis mudanças dessas concepções em uma formação continuada.

O trabalho de Silva (2005) procurou responder às seguintes questões: que Organização Didática os docentes constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação? É possível encaminhar professores de Matemática a reflexões que possibilitem mudanças nas concepções que têm de seus alunos, proporcionando-lhes um novo lugar na instituição escolar? É possível em uma formação continuada, promover ações que permitam aos professores alguma mudança em sua prática de ensino de números fracionários para uma quinta série?

No processo de formação, a pesquisadora utilizou as seguintes concepções de números fracionários: Parte-todo, medida, quociente, razão e operador, além das possíveis técnicas para resolução dessas tarefas e o discurso tecnológico-teórico que as justificam.

Após análise, a autora afirma que os docentes constroem para a 5ª série Organizações Matemáticas para números fracionários muito rígidas com tipos de tarefas que associam, sobretudo, a concepção Parte-todo em contextos de superfícies, mobilizando a técnica da dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão mobilizando a mesma técnica.

Mudanças nos sentimentos e emoções dos professores foram constatadas em relação aos fracionários que propiciaram modificações em suas concepções desse conteúdo, e alguns indícios de mudanças em suas práticas de ensino.

Modificações no discurso dos professores foram observadas a respeito da aprendizagem de seus alunos e na maneira de observá-los em ação, desencadeada pela aplicação de uma Organização Didática elaborada na formação em uma sala de quinta série. A formação explicitou a necessidade dos

professores desenvolverem autonomia e reflexão a respeito do conteúdo e de suas práticas docentes.

Já Silva (2007) realizou um trabalho intervencionista, com o objetivo de analisar fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores das primeiras séries do Ensino Fundamental, como resultado de uma formação continuada com a finalidade de discutir questões relacionadas à abordagem da representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados.

Para Silva (2007), a análise das informações permitiu-lhe identificar alguns fatores que podem exercer influência no processo de desenvolvimento profissional dos docentes. Um deles refere-se às dificuldades relativas ao conhecimento matemático dos professores.

A pesquisadora acredita que há necessidade de um enfoque mais amplo do conceito de números racionais, complementado pela análise dos diferentes significados de sua representação fracionária tanto em cursos de formação inicial como de formação continuada.

Na conclusão de seu trabalho Silva (2007) afirma que, para romper crenças e concepções dos professores sobre ensino aprendizagem da Matemática, em específico do objeto matemático frações, é necessária uma constante reflexão sobre a prática, sobretudo em ambientes que propiciem um trabalho colaborativo.

Os dois estudos intervencionistas apresentados procuraram analisar, tanto as concepções dos docentes sobre números racionais, como também os fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional desses professores.

3.3 A Fração abordada na Escola

Nesta seção, descreveremos as recomendações feitas pelos PCN (BRASIL, 1997), para a introdução do conceito de fração, no segundo ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries), já que é nessa etapa escolar que as frações

são introduzidas. Descreveremos, também, as recomendações feitas pelos PCN (BRASIL, 1998), para o desenvolvimento e consolidação do conceito de fração, no terceiro (5^a e 6^a séries) e quarto (7^a e 8^a séries) ciclos do Ensino Fundamental, pois é o nosso foco nesse estudo, como já citado no capítulo I.

3.3.1 Fração e os PCN

Iniciaremos nossa descrição baseada no segundo ciclo do Ensino Fundamental (3^a e 4^a séries), pois é nesta etapa escolar que as frações são estudadas.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), a abordagem dos números racionais no segundo ciclo tem como objetivo principal levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver determinados problemas, sendo necessário explorar situações em que usando apenas números naturais não conseguimos exprimir a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão, assim os alunos identificam nos números racionais a possibilidade de resposta a novos problemas.

A construção da idéia de número racional, no segundo ciclo, definida pelo PCN (BRASIL, 1997) é relacionada à divisão entre dois números inteiros, excluindo-se o caso em que o divisor é zero. Ou seja, desde que um número represente o quociente entre dois inteiros quaisquer (o segundo não nulo), ele é um número racional.

Como no segundo ciclo, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997) trabalha-se apenas com os naturais e ainda não com os inteiros negativos, os números racionais a serem tratados são quocientes de números naturais.

No entanto, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada e ao raciocinar sobre os números racionais como se fossem naturais, os alunos, segundo os PCN (BRASIL, 1997), acabam tendo que enfrentar vários obstáculos:

Um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, $1/3$, $2/6$, $3/9$ e $4/12$ são diferentes representações de um mesmo número;

Outro diz respeito à comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $1/3 < 1/2$;

Se o “tamanho” da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais ($8.345 > 41$), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério;

Se ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $1/2$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;

Se a seqüência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1997, p.101)

Os PCN (BRASIL, 1997) salientam que ao optar por começar o estudo dos racionais pelo seu reconhecimento no contexto diário, deve-se observar que eles aparecem no cotidiano das pessoas muito mais em sua representação decimal (números com vírgula) do que na forma fracionária.

Neste contexto sugerem, como um trabalho interessante, o uso da calculadora em atividades que os alunos são convidados a dividir 1 por 2, 1 por 3, 1 por 4, etc., no qual eles perceberão que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar números naturais, podem ser aplicadas para obter a escrita dos racionais na forma decimal, acrescentando-se ordens à direita da unidade e de forma decrescente.

Nesse cenário, podemos perceber que os PCN (BRASIL, 1997) sugerem a abordagem dos números racionais iniciando-se pela sua representação decimal, já que essa representação aparece com mais frequência na vida cotidiana do aluno.

Quanto à representação fracionária dos números racionais, os PCN (BRASIL, 1997) destacam que o contato dos alunos com essa representação é bem menos freqüente, pois na vida cotidiana o uso de frações limita-se a

metades, terços, quartos e mais pela via da linguagem oral do que das representações.

Os PCN (BRASIL, 1997) pontuam que a prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação Parte-todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais. Essa relação se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes.

Outro significado das frações, apresentado pelos PCN (BRASIL, 1997), é o de quociente; baseia-se na divisão de um natural por outro

$$\left(a : b = \frac{a}{b}; b \neq 0 \right).$$

Esta situação para o aluno diferencia-se da interpretação anterior (Parte-todo), pois dividir “um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas”. BRASIL (1997, p. 103). No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: $\frac{2}{3}$.

Um terceiro significado, apresentado pelo PCN, (BRASIL, 1997), diferente dos anteriores, é aquele em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão.

Esse significado ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes”. Outros exemplos podem ser dados: a possibilidade de sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores (2 em 10); o trabalho com escalas em mapas (a escala é de 1 cm para 100 m); a exploração da porcentagem (40 em cada 100 alunos da escola gostam de futebol).

Podemos observar que além dessas três interpretações já descritas, acrescenta-se mais um significado da fração: operador, isto é, quando ela

desempenha um papel de transformação, ou seja, algo que atua sobre uma situação e a modifica, sugerindo que esse quarto significado seja explorado nos ciclos posteriores.

Resumidamente, constatamos que os PCN (BRASIL, 1997) sugerem que as frações sejam abordadas no segundo ciclo do Ensino Fundamental com os seguintes significados: relação Parte-todo, quociente e razão e o outro significado, fração como operador, a ser trabalhado nos ciclos posteriores.

Neste contexto, a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo; trata-se de um trabalho que apenas, segundo os PCN (BRASIL, 1997), é iniciado no segundo ciclo do Ensino Fundamental e consolidado nos dois ciclos finais.

Neste sentido, apresentaremos as recomendações dos PCN (BRASIL, 1998), para o terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental, pois nesse estudo estamos preocupados com o ensino do conceito de fração nesse nível de ensino.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos no segundo ciclo do Ensino Fundamental, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número, e tão pouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal.

Cabe aqui ressaltar que a explicação para as dificuldades encontradas pelos alunos no terceiro e quarto ciclos, nos PCN (BRASIL, 1998), são as mesmas apresentadas nos PCN (BRASIL, 1997), já citadas acima, referente ao segundo ciclo do Ensino Fundamental.

No terceiro e no quarto ciclos a abordagem dos racionais, em continuidade ao que foi proposto para o ciclo anterior, tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

Sob essa perspectiva, os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que, para abordar o estudo dos números racionais, dever-se-ia recorrer aos problemas históricos, envolvendo medidas, de forma a possibilitar bons contextos para seu ensino.

Nesse sentido, poderia ser discutido com os alunos, por exemplo, como os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C., para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles empregavam apenas frações unitárias, com exceção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Assim, numa situação em que precisavam dividir 19 por 8 eles utilizavam um procedimento que na nossa notação pode ser expresso por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. A partir dessa situação pode-se propor aos alunos que mostrem que essa soma é $\frac{19}{8}$, que encontrem outras divisões que podem ser determinadas por soma de frações unitárias e que pesquisem outros problemas históricos envolvendo os números racionais.

Os racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte/todo, divisão e razão.

Observamos que os PCN (BRASIL, 1998), no 3º e 4º ciclos, reforçam a idéia já sugerida para o ensino dos números racionais no segundo ciclo de que os números racionais assumem diferentes significados em diversos contextos: relação Parte-todo, divisor e razão e acrescenta outras interpretações diferentes, tais como:

O número racional usado como índice comparativo entre duas unidades, reforçando a idéia já explicitada anteriormente para o segundo ciclo nos PCN (BRASIL, 1997);

O número racional envolvendo probabilidades: a chance de sortear 1 bola verde de uma caixa, em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores é de $\frac{2}{10}$;

O número racional explorado em contextos de porcentagem como, por exemplo: 70 em cada 100 alunos de uma Escola gostam de futebol: $\frac{70}{100}$, 0,70 ou 70%, ou ainda, $\frac{7}{10}$, e 0,7;

O número racional com o significado de um operador, já sugerido anteriormente, isto é, quando ele desempenha o papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

Os PCN (BRASIL, 1998) pontuam que, na perspectiva do ensino, não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações, ou seja, a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo dos 3º e 4º ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema.

Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos frequentes nas situações do cotidiano, segundo o PCN (BRASIL, 1998) seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). E neste contexto, temos também as situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, em que a representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com maior precisão, uma vez que na forma decimal é preciso fazer aproximações.

A familiaridade do aluno com as diferentes representações dos números racionais (representação fracionária, decimal, percentual) pode levá-lo a perceber qual delas é mais utilizada ou adequada para expressar um resultado.

Numa situação em que se deve comunicar um aumento de salário é mais freqüente dizer, por exemplo, que o acréscimo no salário foi de 12% (12/100) do que de $\frac{3}{25}$.

O conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números.

Quanto ao cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que podemos transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes. Já a compreensão

da multiplicação com frações, segundo os PCN (BRASIL, 1998), pode ser pensada como partes de partes do total. No caso da divisão envolvendo frações pode-se interpretá-la como partes que cabem em partes.

Finalmente, as recomendações feitas pelos PCN (BRASIL, 1997) traduzem uma inovação para o ensino, se analisarmos do ponto de vista da construção do conceito de fração. Essa inovação é traduzida pela ênfase dada por esse documento, ao ensino de fração com base na resolução de situações-problema, levando em consideração os significados que a fração poderá assumir em cada situação e as diferentes formas para sua representação.

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O objetivo do presente estudo é identificar e analisar as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática que atuam no 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração. Para tanto, fez-se necessário realizar algumas escolhas metodológicas. Assim no presente capítulo abordaremos a natureza desta pesquisa, universo de estudo, os instrumentos utilizados para coleta de dados e os procedimentos para sua realização. O capítulo se encerra com a apresentação das variáveis de pesquisa que nos guiarão tanto no que tange a análise quantitativa dos dados, quanto na parte qualitativa.

4.1 A natureza da pesquisa

Para responder a nossa questão de pesquisa: **Quais as concepções e competências apresentadas por professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclos do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração em seus diferentes significados?** Adotaremos como metodologia adequada o estudo descritivo que, segundo Rudio (1992, p. 55), *assegura que o pesquisador procure “conhecer e interpretar a realidade sem nela interferir para modificá-la*. Rudio afirma ainda, que tal tipo de pesquisa deve conter enfoques, os quais subsidiarão a interpretação dos dados. Tomaremos como enfoques deste

estudo as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática.

Tendo em mente os objetivos do estudo e, ainda atendendo ao paradigma da pesquisa descritiva, o qual busca conhecer a natureza e os processos que constituem o fenômeno pesquisado, que no nosso caso é o conceito de fração em seus diferentes significados, utilizaremos como ferramenta de coleta de dados o questionário. Isto porque, segundo Cervo e Bervian (1983), esta é a forma mais usada em estudos descritivos, pois possibilita medir, com melhor exatidão, o que se deseja. Nosso questionário foi formado por questões abertas e fechadas. As fechadas tiveram por objetivo obter respostas mais precisas, enquanto que nas abertas, procuramos por respostas que possibilitem ao sujeito se expressar mais livremente. Acreditamos que essa última possibilitará a chance de conhecer um pouco da natureza desse sujeito, uma vez que por meio de respostas abertas o sujeito poderá explicitar o seu conhecimento, possibilitando assim conhecer algumas de suas concepções.

4.2 Universo do estudo e descrição dos sujeitos

Participaram do estudo 21 professores especialistas em Matemática, que foram divididos em dois grupos: G1 (11 professores especialistas em Matemática do 3º ciclo) e G2 (10 professores especialistas em Matemática do 4º ciclo), que atuam no Ensino Fundamental da Rede Pública de Ensino Estadual, distribuídos em 6 escolas.

Cabe ressaltar que consideramos como professor especialista em Matemática aqueles que trabalham exclusivamente no ensino da Matemática e com formação em cursos de Licenciatura em Matemática e, ou que tenham habilitação para lecionar tal disciplina.

Todas as escolas se localizam no Município de Mauá-SP, distribuídas por vários bairros do município, que são de fácil acesso.

O município de Mauá está localizado na região do grande ABC paulista (Santo André, São Bernardo do Campo, São Caetano do Sul, Diadema, Mauá, Ribeirão Pires e Rio Grande da Serra) é uma região que se destaca não só no cenário paulista, como também no brasileiro, por uma variedade de razões, tais como: alta densidade populacional; reconhecido pólo produtivo e comercial nacional e também pelas profundas desigualdades sociais e baixo índice de escolaridade, segundo o Índice Paulista de Responsabilidade Social de 2004 esse município, embora tenha níveis de riqueza elevada, não é capaz de atingir bons indicadores sociais e educacionais.

Nas escolas visitadas percebemos que todas ofereciam uma boa infraestrutura a seus alunos e professores, tais como biblioteca, sala de informática, pátio, refeitório, quadra poliesportiva, sala dos professores com pelo menos dois computadores e outros recursos disponibilizados pela rede estadual de ensino do estado de São Paulo.

É neste contexto, de divergência que a população anseia por uma educação de qualidade, e que, obviamente necessita de um contingente de profissionais da educação bem qualificados e preparados para atuar, que realizamos nosso estudo.

A escolha das escolas seguiu simplesmente o critério de estarem localizadas no Município de Mauá e a permissão dos diretores e coordenadores, assim como a adesão dos professores especialistas em Matemática, em participar da pesquisa da forma como a idealizamos.

4.3 Descrição do instrumento

Para alcançarmos nossos objetivos, já mencionados no capítulo I, elaboramos um instrumento que foi dividido em quatro unidades denominadas: (1) perfil, (2) concepções, (3) competências e (4) estratégias de ensino.

- **Unidade 1:** Perfil do professor (14 questões);
- **Unidade 2:** Concepção do professor (5 questões), elaboração de cinco situações-problema.

- **Unidade 3:** resolução das cinco situações-problema, elaborada pelo professor na parte 2.
- **Unidade 4:** competências em relação aos cinco significados de fração.

4.4 Descrição e objetivos da unidade 1: Perfil dos Professores

Constituída por catorze (14) questões, a primeira unidade do instrumento tem como objetivo traçar o perfil dos professores no que diz respeito à identificação, formação e trajetória profissional, assim como o grau de satisfação com a profissão.

O instrumento encontra-se disponível no Anexo I do presente estudo, tal qual foi apresentado aos professores.

Quadro 2: Recorte das questões 1 a 3 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.

1. Nome:			
2. Idade:	☐ de 21 a 25 anos,	☐ de 26 a 30 anos,	☐ de 31 a 35 anos,
	☐ de 36 a 40 anos,	☐ de 41 a 45 anos,	☐ 46 anos ou mais
3. Gênero:	☐ Masculino	☐ Feminino	

As questões 1, 2 e 3 dizem respeito à identificação pessoal do professor, questionamos nome, idade e gênero.

Com a primeira questão temos a identificação do professor, para ter como controle entre a resolução das unidades 1 e 2, na primeira seção e as unidades 3 e 4, na segunda seção de aplicação do instrumento.

A segunda questão permite saber o intervalo da idade do professor, verificando se esse fator interfere nas concepções e competências dos professores em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados.

Na terceira questão podemos identificar a quantidade de entrevistados que são do sexo masculino ou do sexo feminino.

Quadro 3: Recorte das questões 4 a 6 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.

4. Formação Acadêmica:			☐ Instituição Pública	☐ Instituição Privada
5. Ensino Superior:			☐ Licenciatura em Matemática	☐ Pedagogia
			☐ Outra licenciatura, Qual? _____	☐ Outro curso, Qual? _____
6. Há quanto tempo concluiu o Ensino Superior?				
☐ 1 a 5 anos,	☐ 6 a 10 anos,	☐ 11 a 15 anos		
☐ 16 a 20 anos,	☐ 21 a 25 anos	☐ Mais de 26 anos		

As questões 4, 5 e 6 têm caráter de investigar a formação acadêmica dos professores pesquisados, com o objetivo de verificar se alguns desses fatores interferem em suas concepções e/ou competências em relação ao conceito de fração.

Com a quarta questão pretendemos identificar a formação acadêmica, se instituição Pública ou Privada.

Na quinta questão queremos identificar o curso superior que o professor especialista cursou em sua formação profissional.

A sexta questão esta relacionada há quanto tempo concluiu o Ensino Superior.

Quadro 4: Recorte das questões 7 a 10 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.

7. Há quanto tempo você leciona:

☐ 1 a 5 anos, ☐ 6 a 10 anos, ☐ 11 a 15 anos
☐ 16 a 20 anos, ☐ 21 a 25 anos ☐ Mais de 26 anos

8. Qual o número de horas/aulas semanais que você ministra?

☐ entre 1 e 8 horas, ☐ entre 9 e 16 horas, ☐ 17 a 24 horas
☐ entre 25 e 32 horas, ☐ entre 33 e 40 horas ☐ Mais de 41 horas

9. Normalmente quantas horas semanais você disponibiliza para preparar suas aulas de matemática?

☐ entre 1 e 2 horas, ☐ entre 3 e 4 horas, ☐ 5 a 6 horas
☐ entre 7 e 8 horas, ☐ entre 9 e 10 horas ☐ Mais de 11 horas

10. Neste ano letivo, em que série ministra o maior número de aulas?

☐ 5ª série/6º ano ☐ 6ª série/7º ano
☐ 7ª série/8º ano ☐ 8ª série/9º ano
☐ 1º ano do Ensino Médio ☐ 2º ano do Ensino Médio
☐ 3º ano do Ensino Médio

Nas questões 7, 8, 9 e 10, queremos investigar sobre a prática profissional do professor questionando, há quanto tempo leciona, quantas horas/aulas semanais ministra por semana, quantas horas disponibiliza para preparar suas aulas e qual série/ano ministra o maior número de aulas neste ano letivo, avaliando a carga de trabalho a que o professor está submetido e qual série/ano o professor está atuando e assim como nas outras questões elaboradas, temos como objetivo verificar se algum desses fatores interferem de alguma maneira na concepção e/ou competência dos professores.

Quadro 5: Recorte das questões 11 e 12 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.

11. Qual o seu grau de satisfação com a Profissão de Professor?

☐ Plenamente satisfeito ☐ Parcialmente satisfeito
☐ Pouco satisfeito ☐ Nada satisfeito

12. O que precisa melhorar na profissão de professor (pode listar até 3 coisas)

Com as questões 11 e 12 queremos investigar sobre o grau de satisfação e quais melhorias indicam para a profissão, verificando se há alguma correlação

com a importância do ensino de fração ou ainda se esse fator interfere nas suas concepções e competências em relação ao nosso objeto de estudo.

Quadro 6: Recorte das questões 13 e 14 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil do professor.

13. Qual a importância do ensino de fração?	
☐ Muito importante	☐ Importante
☐ Pouco importante	☐ sem importância
14. Enumere 3 razões que justifiquem sua escolha no item 13.	

A importância do ensino de fração é o foco nas questões 13 e 14, na qual investigamos sua importância e três motivos que justifiquem a importância escolhida na questão 13.

4.5 Descrição e objetivos da unidade 2: Concepções dos Professores especialistas em matemática em relação aos cinco significados de fração

Na unidade 2 do instrumento, foi solicitada a elaboração de cinco situações-problema envolvendo o conceito de fração que o professor costuma trabalhar em suas aulas.

A elaboração das situações-problema tem como objetivo diagnosticar as concepções dos professores em relação ao conceito de fração e seus cinco significados apontados por Nunes et al. (2003), por isso é dada a oportunidade de elaboração de cinco situações-problema.

Em relação a elaboração das situações-problema, ainda temos como objetivos verificar o uso dos invariantes do conceito (ordem e equivalência), assim como a representação com a utilização, ou não, de ícones nas cinco situações-problema solicitadas para cada professor.

Inspirada nas pesquisas de Santos (2005), Canova (2006) e de Teixeira (2008), esperamos que a análise das situações criadas pelos professores nos permita investigar quais suas concepções no que tange ao conceito de fração.

4.6 Descrição e objetivos da unidade 3: Competências dos Professores especialistas em matemática em relação aos cinco significados de fração

Será solicitada a resolução das situações-problema elaboradas pelos próprios professores com o objetivo de identificar se são competentes em responder de forma consistente as suas próprias situações-problema elaboradas e ainda, temos como objetivo identificar quais tipos de resoluções são utilizadas pelos professores.

4.7 Apresentação e análise prévia da unidade 4: Competências e estratégias de ensino dos professores especialistas em matemática em relação aos cinco significados de fração

Composto por cinco problema em que cada um envolvia um dos significados de frações apresentados por Nunes et al. (2003), uma resposta correta ou errada de um aluno fictício e ainda os seguintes questionamentos:

- Como você resolveria o problema?
- Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

Essa parte do instrumento teve como objetivo avaliar as competências dos professores especialistas em Matemática no que tange os cinco significados de fração, para tanto questionamos se a resposta do aluno esta correta ou errada? E como o professor resolveria o problema?

E quando questionamos: que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor maneira de resolver o problema? Estamos interessados em investigar as concepções dos professores em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados.

Quadro 7: *Recorde da situação-problema 1, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado medida do conceito de fração.*

Problema 1: Um pintor fez mistura de tintas para poder pintar uma casa na segunda-feira e na terça-feira, na segunda-feira misturou 3 litros de tinta branca e 3 de tinta azul. Na terça-feira misturou 2 litros de branca e 2 de azul, como mostra o quadro abaixo.

a) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira?
b) Represente a fração da tinta azul com relação ao total de tinta na segunda-feira.

Segunda-feira	Terça-feira
	

Um aluno deu as seguintes respostas:

a) vai, a tinta vai ter a mesma cor na segunda-feira e na terça-feira.
b) a fração é $\frac{3}{6}$.

item a): Na sua concepção a resposta do aluno, para esse item, está: ☐ Certa ☐ Errada
item b): Na sua concepção a resposta do aluno, para esse item, está: ☐ Certa ☐ Errada

Como você resolveria os dois itens?

Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

A questão foi inspirada nas pesquisas realizada por Nunes et al. (2003), Merlini (2005), Moutinho (2005), Canova (2006) e Teixeira (2008) .

O objetivo da questão é focar o significado medida em quantidade continua utilizando-se de ícone para representar a situação. A questão está subdividida em dois itens; “a” e “b”. O termo mistura aparece no enunciado, sendo considerada mistura (quantidade de tinta azul e branca) como todo. Isso faz com que a questão nos remeta à idéia de fração. O significado medida da questão envolvia fração por se referir às quantidades intensivas.

No item “a” é pedido que fizesse a comparação, no caso, se as misturas teriam a mesma cor, na segunda e na terça-feira. No item “a”, há a necessidade de trabalhar com um invariante operatório da fração, a equivalência, pois é

necessário que ele reconheça a equivalência das misturas nos dois dias, e que a relação das duas misturas eram as mesmas.

A resposta apresentada para o item ‘a’ é correta, pois temos três litros de tinta branca e três litros de tinta azul na segunda-feira, dois litros de tinta branca e dois litros de tinta azul na terça-feira, o que equivale a dizer que a mistura é composta por uma metade de tinta branca e a outra metade de tinta azul, tanto na segunda como na terça-feira.

No item “b”, é pedido para representarem por meio de uma fração a quantidade de tinta azul em relação ao total da mistura na segunda-feira.

Como resposta de um aluno fictício apresentamos a fração $\frac{3}{3}$, que é uma resposta errada para esse item, pois apresenta o conceito de razão entre as tintas e não o conceito de fração, a resposta correta para esse item é $\frac{3}{6}$.

Quadro 8: Recorte da situação-problema 2, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado operador multiplicativo do conceito de fração.

Problema 2: Rodrigo gostaria de abrir uma oficina mecânica. Para isso, precisa de $\frac{3}{6}$ das ferramentas representadas abaixo. Quantas ferramentas ele precisa?	
	
Um aluno deu a seguinte resposta: Rodrigo precisa de 3 ferramentas.	
Na sua concepção a resposta do aluno está: ☐ Certa ☐ Errada	
Como você resolveria o problema?	
Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?	

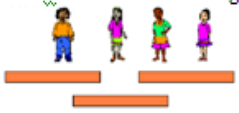
Esta questão foi inspirada nas pesquisas realizadas por Canova (2006) e Teixeira (2008) e aborda o significado operador multiplicativo, em quantidade discreta e com uma representação icônica.

Apresentamos como resposta de um aluno para a questão: *Rodrigo precisa de 6 ferramentas*, que é uma resposta errada para o problema.

A questão tem como resposta correta: *quatro ferramentas*, número de ferramentas necessárias para Rodrigo abrir sua oficina mecânica. Acreditamos que o professor faça a multiplicação da fração referente à quantidade de ferramentas que Rodrigo necessita para a montagem de sua oficina pelo total de ferramentas representada na figura que ilustra a questão.

Outros procedimentos são esperados por parte dos professores, como o caso do professor perceber que a fração $\frac{3}{6}$ pode ser reduzida para $\frac{1}{2}$ permanecendo na linha de pensamento do significado Operador Multiplicativo. O professor ainda poder remeter-se ao significado Parte-todo, pensando da seguinte forma: do total de oito ferramentas, Rodrigo ira precisar apenas da metade, chegando, assim, ao mesmo resultado de quatro ferramentas.

Quadro 9: Recorte da situação-problema 3, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado quociente do conceito de fração.

Problema 3: Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.  Que fração de chocolate cada criança receberá? Um aluno deu a seguinte resposta: $\frac{4}{3}$ Na sua concepção a resposta do aluno está: ☐ Certa ☐ Errada	
Como você resolveria o problema?	
Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?	

Esta questão foi inspirada e adaptada da pesquisa realizada por Nunes et al. (2003) e encontra-se, também, nas dissertações de Merlini (2005), Moutinho (2005), Canova (2006) e de Teixeira (2008), apresenta o significado quociente em quantidade contínua, utilizando-se de ícone para representar a situação.

Quadro 11: Recorte da situação-problema 5, unidade 4 do Instrumento, referente ao significado número do conceito de fração.

Problema 5: Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{3}{5}$ do chocolate dela e Paulo comeu $\frac{3}{4}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Um aluno deu a seguinte resposta: Maria e Paulo comeram o mesmo tanto, porque os dois comeram três pedaços dos seus chocolates. Na sua concepção a resposta do aluno está: ☐ Certa ☐ Errada Como você resolveria o problema? <table border="1"> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> </table> Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema? <table border="1"> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> </table>								

Esta questão foi inspirada na pesquisa realizada por Campos (2004) e enfoca o significado número do conceito de fração.

Apresentamos como resposta de um aluno: **Maria e Paulo comeram o mesmo tanto, porque os dois comeram três pedaços dos seus chocolates**, que é uma resposta incorreta para a questão, pois $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$, ou seja, Paulo comeu mais chocolate do que Maria.

Apresentado os objetivos e descrição do nosso instrumento, na próxima seção apresentaremos os procedimentos para a coleta dos dados.

4.8 Procedimentos para a coleta de dados

Foram utilizadas duas sessões para aplicação do instrumento, em dias diferentes, na primeira sessão foi aplicada as unidades 1 e 2, na segunda, as unidades 3 e 4. Como nosso universo de estudo constou com 4 escolas, foram necessários 8 encontros, dois em cada escola, sempre no Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC), pois é o momento em que tínhamos um bom

número de professores de matemática reunidos, para que pudéssemos concluir nossa coleta de dados.

Na primeira sessão com os sujeitos, reservamos os primeiros 10 minutos para a entrega do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), apêndice II, para a concordância final, que depois de lido, foi assinado pelos mesmos, dando a liberdade para deixar o estudo em qualquer momento e a garantia do sigilo dos informantes. Ainda neste primeiro momento foram informados que a atividade consistia, nessa primeira sessão, em responder questões referentes ao Perfil dos Professores (unidade 1) e a elaboração de cinco situações-problema (unidade 2) que envolvessem frações que o professor costuma trabalhar com seus alunos. Foram informados, que a atividade deveria ser individual e sem apoio de nenhum tipo de instrumento, tais como: livros, apostilas e outros. Nessa primeira sessão o tempo médio gasto variou de 40 a 50 minutos.

Depois de concluída a primeira sessão de coleta dos dados, partimos para a próxima fase – a segunda sessão. O tempo médio entre a primeira e a segunda sessão foi de aproximadamente uma semana (7 dias).

Com relação à segunda sessão, esta consistiu em solicitar aos mesmos sujeitos participantes da primeira sessão, que resolvessem os problemas por eles elaborados (unidade 3). Cabe ressaltar que os sujeitos não foram informados sobre essa dinâmica da coleta de dados, ou seja, após a elaboração dos problemas na primeira sessão não foram informados que os resolveriam posteriormente. Ainda na segunda sessão foi solicitado aos sujeitos que respondessem cinco problemas, cada um referente a um significado de fração (unidade 4), como já descrito na seção descrição do Instrumento, desse capítulo. Na segunda sessão o tempo médio gasto variou de 50 a 60 minutos.

Concluída a segunda sessão, o próximo passo consistiu em planejar a análise de cada uma das partes do instrumento, como descreveremos na próxima seção.

4.9 Planejamento da Análise dos Dados

De posse dos dados coletados, na primeira sessão, partimos para a primeira análise dos resultados que consistiu em classificar os enunciados dos problemas elaborados pelos professores à luz dos cinco significados da fração: número, Parte-todo, medida, quociente e operador multiplicador.

Cabe destacar que, com o intuito de validar nossa classificação e consolidar a categoria de análise, contamos ainda com a classificação feita por 9 professores de matemática, que denominamos de juízes. Todos esses professores, graduados em matemática e alunos do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática (quatro alunos do programa de mestrado, três do programa de doutorado e dois pós-doutorados).

Para tanto, cada juiz recebeu um caderno com todos os problemas elaborados pelos sujeitos e uma síntese constando as idéias básicas de cada significado com um exemplo clássico de cada um. Cada juiz procedeu a sua classificação individualmente e sem nossa interferência. Com o resultado de todos os juízes em mãos, passamos, então, a confrontar a análise de todos os problemas um a um. Dessa forma, sendo considerada como classificação definitiva, aquela que, pelo menos, cinco pontos de vista foram coincidentes.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS DADOS

Com base nos dados recolhidos da nossa pesquisa detalhadamente descrita no capítulo anterior, o presente capítulo apresenta a análise dos resultados, que acontecerá, seguindo a própria estrutura contida no instrumento.

A análise procedeu sob quatro unidades, a saber: (a) perfil; (b) elaboração de situações-problema; (c) respostas da elaboração e (d) competências.

Na primeira unidade: perfil apresentaremos algumas características dos professores participantes da pesquisa, justificando os motivos que nos levaram a dividir nossos sujeitos em dois grupos e, ainda, apresentando de forma analítica as principais semelhanças e diferenças de cada grupo, principalmente no que diz respeito à importância do ensino de fração e o grau de satisfação com a profissão docente.

A segunda unidade de análise, a elaboração de situações-problema, levará em consideração cinco enfoques: a não elaboração das situações-problema (em branco); elaboração de situações-problema inconsistentes; o significado de fração explorado nas situações-problema; o uso de representação (uso ou não do ícone) na situação-problema; exploração dos invariantes do conceito de fração (ordem e equivalência).

A terceira unidade diz respeito às respostas que os professores deram as situações-problema que eles próprios elaboraram. Aqui serão consideradas

apenas as respostas das situações-problema que foram elaboradas com consistência e serão classificadas como: respostas consistentes e inconsistentes. Dentre as consistentes, analisaremos se a resposta foi construída a partir de algoritmo apenas, a partir do uso de ícone apenas ou a partir de ambos (composta).

A última unidade tratará de identificar em que tipo de significados do conceito de fração os professores têm mais competência e quais estratégias didáticas utilizam em suas respostas.

Antes de iniciar a análise propriamente dita, gostaríamos de relatar um pouco sobre o perfil dos professores da pesquisa, pois acreditamos que alguns fatores podem interferir, sobremaneira, na concepção de nossos sujeitos que, conseqüentemente, podem se constituir em objeto de análise.

5.1 Análise da Unidade 1: Perfil

Consideramos importante traçar o perfil dos professores envolvidos nesta pesquisa, porque acreditamos que alguns fatores podem influenciar nas concepções e competências que esses docentes têm sobre o conceito de fração em seus diferentes significados, tais como: o ano escolar no qual o professor dedica o maior número de aulas, sua formação, o tempo de serviço, a quantidade de horas/aulas que ministram por semana.

Antes do início da análise do perfil dos professores, é importante informar que todos os participantes da pesquisa trabalham em escolas públicas estaduais do Município de Mauá no Estado de São Paulo e ministram aulas de Matemática para o Ensino Fundamental. Também queremos lembrar que consideraremos para a análise dessa pesquisa dois grupos, a saber:

- Grupo denominado G1 – formado por professores especialistas em Matemática que trabalham no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental denominado 3º ciclo.

- Grupo denominado G2 – Formado por professores especialistas em Matemática que trabalham no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental denominado 4º ciclo.

Decidimos criar esses grupos porque pretendemos investigar se existem diferenças entre as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática que estavam, no momento da coleta de dados, trabalhando no 3º ciclo ou no 4º ciclo do Ensino Fundamental.

A nossa opção por escolher professores que estão atuando nesses anos de escolarização e, ainda, de dividi-los em dois grupos, segundo o ciclo, deve-se ao fato de que no 3º ciclo acontece a retomada do ensino do conceito de fração, o qual se iniciou no ciclo anterior. Esperando-se assim que seja nesse ciclo que aconteça a formalização do conceito do número racional. Em outras palavras, é no 3º ciclo do Ensino Fundamental que o currículo privilegia a sistematização das operações com números racionais em suas diferentes representações (fracionária e decimal finita)

Já o 4º ciclo fica responsável pela retomada da ideia dos números racionais do seguinte ponto de vista: transformação de decimais finitos em frações; dízimas periódicas e fração geratriz, em outras palavras, é neste ciclo que a fração é utilizada como ferramenta para o desenvolvimento de outros conceitos, como por exemplo, o conceito de equação.

Tendo esses momentos de ensino em mente, a nossa pesquisa contou com 21 professores, sendo que 11 atuavam no 3º ciclo (6º e 7º anos) e foram classificados no grupo G1 e os 10 restantes atuavam no 4º ciclo (8º e 9º anos) passando a fazer parte do grupo G2.

A Tabela 1 a seguir apresenta, de forma concisa, o perfil desses professores, mostrando suas distribuições por: ano em que atuam, faixa de idade em que se encontram, gênero, tipo de instituição em que se formaram, curso que se formou, tempo de formação, tempo de profissão, números de horas de aula semanais e números de horas dedicadas ao preparo das aulas.

Tabela 1: Referente ao perfil dos professores especialistas em Matemática do 3º (G1) e 4º (G2) ciclos do Ensino Fundamental.

QUESTÕES	G1						G2					
ano que ministra o maior número de aulas	6º			7º			8º			9º		
	7			4			4			6		
Idade (anos)	21 a 25	26 a 30	31 a 35	36 a 40	41 a 45	Mais de 45	21 a 25	26 a 30	31 a 35	36 a 40	41 a 45	Mais de 45
	0	2	3	2	4	0	1	0	2	5	1	1
Gênero	Masculino 03			Feminino 08			Masculino 06			Feminino 04		
Instituição de Ensino Superior onde cursou a graduação	Pública 01			Privada 10			Pública 03			Privada 07		
Formação Superior – Graduação	Licenciatura plena em matemática 08			Outro curso 03			Licenciatura plena em matemática 10			Outro curso 00		
Há quantos anos concluiu a graduação?	01 a 05	06 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	Mais de 25	01 a 05	06 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	Mais de 25
	03	02	04	02	00	00	02	02	03	01	02	00
Há quantos anos ministra aulas?	01 a 05	06 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	Mais de 25	01 a 05	06 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	Mais de 25
	02	02	05	02	00	00	03	00	03	04	00	00
Quantas horas/aulas ministram por semana?	01 a 08	09 a 16	17 a 24	25 a 32	32 a 40	Mais de 40	01 a 08	09 a 16	17 a 24	25 a 32	32 a 40	Mais de 40
	00	00	01	03	02	05	01	00	01	01	07	00
Quantas horas semanais dedicam para preparar suas aulas?	01 a 02	03 a 04	05 a 06	07 a 08	09 a 10	Mais de 10	01 a 02	03 a 04	05 a 06	07 a 08	09 a 10	Mais de 10
	02	06	02	00	01	00	02	03	04	01	00	00

A partir da leitura da tabela acima podemos afirmar, que:

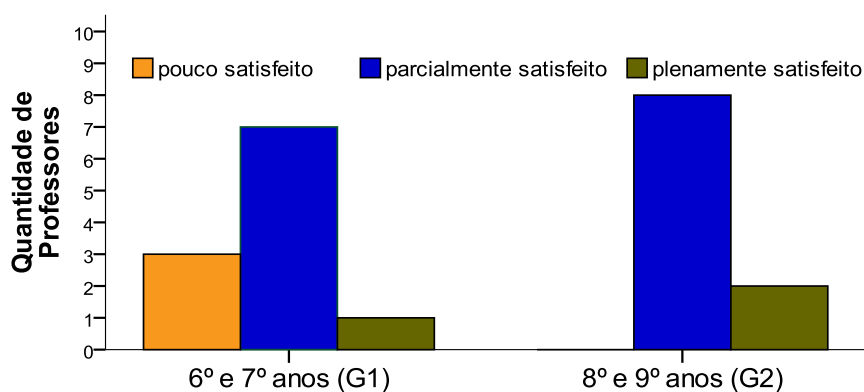
- A maioria dos professores do G1 atua no 6º ano (7 professores), tem idade entre 41 e 45 anos (4 professores), é do gênero feminino (8 professores), cursou licenciatura plena em Matemática (8 professores) em uma instituição de ensino privada (10 professores) e são licenciados há mais de 11 anos (6 professores), sendo que sete professores desse

grupo também lecionam há mais de 11 anos. Cinco dos dez professores do G1, no momento da pesquisa, afirmou que ministrava mais de 40 horas/aulas por semana e a maioria (6 professores) dedicava de 3 a 4 horas semanais para o preparo de suas aulas.

- A maioria dos professores do G2 atua no 9º ano (6 professores), tem idade entre 36 e 40 anos (5 professores), é do gênero masculino (6 professores), cursou licenciatura plena em Matemática (10 professores) em uma instituição de ensino privada (7 professores) e são licenciados há mais de 11 anos (3 professores), sendo que 4 professores desse grupo lecionam há mais de 16 anos. A maioria dos professores do G2, no momento da pesquisa, ministrava mais de 32 horas/aulas por semana (7 professores) e dedicava mais de 5 horas semanais para o preparo de suas aulas (4 professores).

Questionamos ainda qual é o grau de satisfação com a profissão dos professores e observamos que, embora a maioria dos professores dos dois grupos (7 do G1 e 8 do G2) sintam-se parcialmente satisfeitos, o G1 está menos satisfeito com a profissão do que o G2, já que apenas um professor do G1 se posicionou “plenamente satisfeito” (ver gráfico 1).

Gráfico 1: Referente à quantidade de professores por grupo em relação ao grau de satisfação com a profissão.

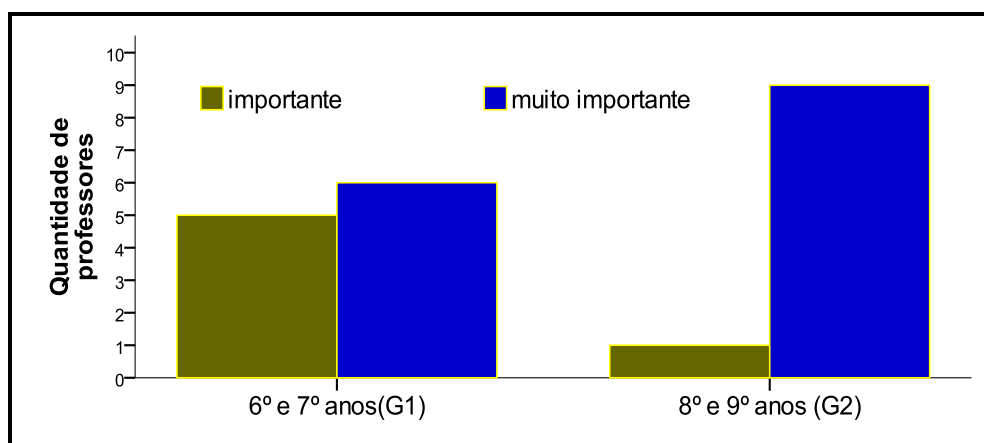


Podemos então interpretar que, embora a maioria dos professores de ambos os grupos esteja satisfeita, esta satisfação não atinge 100% dos professores do G2. Quando das análises da competência e da concepção de

fração desses professores, cruzaremos informações para investigar se há alguma relação entre o grau de satisfação e o desempenho desses professores.

Para finalizar a primeira parte da nossa pesquisa, relacionada ao perfil dos professores, questionamos qual é a importância do ensino de fração e o G2 apresentou-se mais preocupado com esse conceito do que o G1, conforme mostra o gráfico 2.

Gráfico 2: Referente à quantidade de professores por grupo em relação à importância do ensino de fração.



Podemos então interpretar que, embora a maioria dos professores de ambos os grupos considere muito importante o ensino do conceito de fração, esta importância atinge 90% dos professores do G2. Novamente quando das análises da competência e da concepção de fração desses professores, investigaremos se há alguma relação entre o grau de satisfação com a profissão, importância do ensino do conceito de fração e o desempenho desses professores.

Após a apresentação do perfil dos professores da nossa pesquisa é possível inferir alguns aspectos que julgamos ser importante em nossas análises.

Primeiro notamos que os grupos apresentam dados bem diversificados em relação à idade, gênero, tempo de conclusão do ensino superior, série que ministram suas aulas, tempo de magistério, entre outros dados que apresentaram valores bem diferentes como por exemplo, o tempo de conclusão do ensino superior e o tempo de magistério que indicam que temos professores no começo de carreira, no meio, e no fim de carreira.

Percebemos também que em alguns dados os valores se concentram e já apresentam certas características de um determinado grupo como por exemplo no caso da satisfação com a profissão e a importância do ensino de fração que indicam uma maior satisfação e provável preocupação com o ensino de fração.

Prosseguiremos em nossas análises, nesse capítulo, preocupados em diagnosticar as concepções e competências desses profissionais em relação ao conceito de frações, e posteriormente verificaremos se os fatores do perfil apresentados aqui influenciam de alguma maneira no nosso objeto de pesquisa.

5.2 Análise da Unidade 2: Elaboração de Situações-Problema

Nessa etapa da análise queremos observar e classificar a parte 2 do nosso instrumento, o que diz respeito à elaboração de cinco situações-problema, conforme já mencionado no capítulo IV (procedimentos metodológicos).

Para efeito desta análise serão considerados cinco enfoques de análise, Como já afirmado anteriormente, a saber:

- a. A não elaboração das situações-problema. Foram consideradas como situações-problema em branco a ausência de quaisquer manifestações de escrita no espaço destinado para a elaboração;
- b. A inconsistência das situações-problema elaboradas. Como situações-problema inconsistentes consideramos as que apresentam as seguintes características: inadequação na linguagem utilizada, imprecisão na elaboração da pergunta, insuficiência de dados e erro conceitual. Por outro lado, foram consideradas como consistentes aquelas que apresentam clareza na linguagem, oferecem dados suficientes, coerência entre os dados fornecidos e o contexto utilizado, evidenciando que são situações-problema bem elaboradas que envolvem o conceito de fração.
- c. O terceiro enfoque que analisaremos nas situações-problema elaboradas pelos professores só valerá para aquelas que foram consistentemente elaboradas. Nesse caso, observaremos a utilização

dos cinco diferentes significados de fração, para classificarmos as situações consideradas consistentes de acordo com os seguintes significados: Operador Multiplicativo (OP), Parte-Todo (PT), Quociente (QO), Número (Nº) e Medida (ME).

- d. A utilização da representação com, ou sem, ícone das situações-problema.
- e. A utilização dos invariantes do conceito de fração, ou seja, a utilização das noções de ordem e equivalência.

5.2.1 Enfoque 1: a não elaboração das situações-problema

Para essa análise consideramos que o conjunto de professores do G1 poderiam ter elaborado 55 situações-problema (o produto do número de professores (11) pelo número de situações-problema (5)). Já no que se refere ao G2 esse número cai para 50 situações-problema.

Os dados mostraram que todos professores do G1 elaboraram as cinco situações-problema solicitadas. Este fato é indício do comportamento participativo dos membros desse grupo. Também pode ser indicativo de competência para realizar a tarefa que lhes foi proposta.

Já o G2 teve sete situações-problema em branco, ou seja, o número de situações-problema elaborado pelos professores desse grupo resumiu-se a 43. Essa ausência de elaboração ficou restrita a três professores, a saber:

- O sujeito S12, deixou de elaborar três das cinco situações-problema solicitadas. Esse professor, que atuava majoritariamente no 8º ano e se dizia parcialmente satisfeito com a profissão docente, tem pouco tempo de docência (encontra-se no intervalo de 1 a 5 anos de magistério) e afirmou ser muito importante o ensino do conceito de fração.
- O sujeito S17, também deixou em branco a elaboração de três das cinco situações-problema. Tal qual o S12, ele tem a maioria de suas aulas no 8º ano, se disse parcialmente satisfeito com a profissão docente e

também acredita ser muito importante o ensino do conceito de fração. Este professor tem mais tempo de docência que o S12 (intervalo entre 11 e 15 anos).

- Por fim o sujeito S16 deixou de elaborar apenas uma situação-problema. No momento da coleta de dados ele atuava majoritariamente no 9º ano do Ensino Fundamental. Diferentemente dos dois anteriores, disse estar pouco satisfeito com a profissão docente. Assim como o S12 também está no início de sua carreira profissional com apenas de 1 a 5 anos de profissão e acredita ser muito importante o ensino do conceito de fração como os sujeitos S12 e S17.

O que mais nos chamou atenção nesse episódio é que das sete situações-problema em branco, seis pertencem a dois professores, que não elaboraram três delas cada um, ou seja, mais da metade das propostas. Diante disso podemos levantar duas hipóteses: esses professores não conseguiram elaborar todas as situações-problema, indicando uma falta de competência do professor em criá-las favoráveis à aprendizagem do aluno. Ou, esses professores não quiseram elaborá-las indicando uma falta de comprometimento com a pesquisa.

As duas hipóteses são preocupantes, pois se de um lado esses profissionais não são competentes em elaborar situações-problema favoráveis ao ensino do conceito de fração, fica a indagação de que tipo de ensino eles estão oferecendo aos seus alunos. E por outro lado, se eles não quiseram elaborar todas as situações-problema propostas, por que se comprometerem em participar de uma pesquisa? O que leva um profissional a aceitar participar de uma pesquisa voluntária e se recusar a realizar o que foi proposto?

Não temos como objetivo responder essas questões, mas é evidente que esse tipo de comportamento tem que ser investigado, pois aparentemente pode trazer prejuízos ao ensino.

Em relação ao S16, que deixou de elaborar apenas uma situação-problema, não queremos nesse momento fazer nenhuma suposição até analisarmos a consistência ou inconsistência das suas situações-problema elaboradas, o que realizaremos na próxima seção.

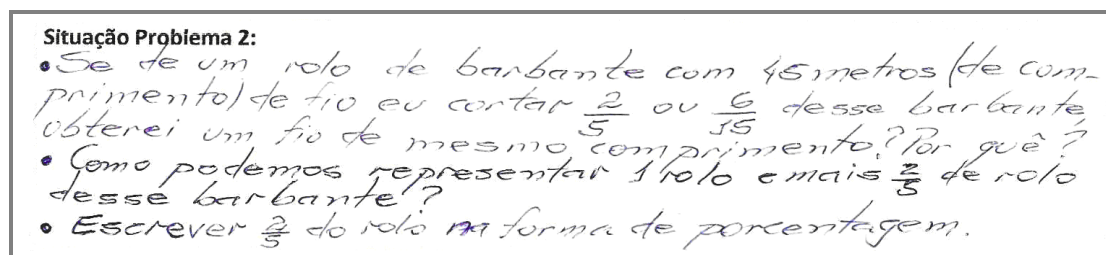
5.2.2 Enfoque 2: inconsistência das situações-problema elaboradas

Para essa análise consideramos as situações-problema elaboradas em cada um dos grupos e as classificamos em: consistente ou inconsistente.

Consideramos uma situação-problema como consistente quando ela apresentava clareza na linguagem do enunciado e coerência entre os dados fornecidos e o contexto utilizado, demonstrando que são situações bem elaboradas que envolvem o conceito de fração.

A título de ilustração apresentamos uma situação-problema que foi elaborada por um professor do G2.

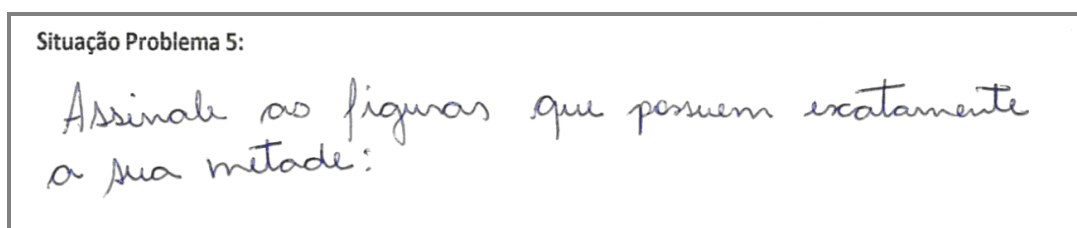
Figura 1: Situação-problema consistente (S13 – G2)



Consideramos esta situação-problema como consistente porque, além de apresentar clareza na linguagem do enunciado e coerência entre os dados fornecidos e o contexto utilizado, está bem elaborada e efetivamente envolve o conceito de fração. Esta situação-problema ainda pode permitir uma interessante discussão didática a respeito da necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos, visto que a resposta não pode ser representada por um número natural, e a situação ainda permite trabalhar a noção de equivalência e de porcentagem.

Como situação-problema inconsistente consideramos aquelas que apresentavam as seguintes características: inadequação na linguagem utilizada, imprecisão na elaboração da pergunta, insuficiência de dados e erro conceitual.

Para ilustrar uma situação-problema considerada como inconsistente apresentamos uma produção elaborada por um professor do G1.

Figura 2: Situação-problema inconsistente (S5 – G1)

Consideramos a situação-problema como inconsistente porque ela apresenta insuficiência de dados. Acreditamos que o professor esqueceu de apresentar as figuras relativas a situação-problema.

A tabela 3 apresenta o número total de situações-problema elaboradas por cada grupo (G1 e G2) e a quantidade de situações-problema classificadas como consistentes ou inconsistentes.

Tabela 2: Quantidade de situações-problema elaboradas consistentes e inconsistentes.

Grupos	Consistentes	Inconsistentes
G1	52 de 55	3 de 55
	94,45%	5,55%
G2	40 de 43	3 de 43
	93%	7%

A primeira informação obtida da tabela acima é o baixo número de situações-problema inconsistentes (apenas seis – 6,12% das 98 situações-problema elaboradas), sendo que o G1 teve índices de inconsistências ligeiramente menores que o G2 (5,55% e 7%, respectivamente).

Comparando os grupos, notamos que enquanto as três situações-problema inconsistentes do G1 estavam distribuídas por três diferentes sujeitos, as três inconsistentes do G2 foram elaboradas pelo mesmo sujeito. Esse professor estava no seu início de carreira (lecionava entre 1 e 5 anos), sentia-se plenamente satisfeito com a profissão e acreditava ser muito importante o ensino do conceito de fração.

O perfil dos três professores do G1 que elaboraram as situações-problema inconsistentes são bem distintos, seja com relação ao tempo de magistério, seja

quanto ao grau de satisfação com a profissão, seja, ainda, quanto à visão de considerar o conceito de fração como importante ou muito importante. A diferença entre os perfis não nos permite estabelecer qualquer relação dentre o perfil desses professores e a apresentação das situações-problema inconsistentes.

No entanto chamou a atenção o comportamento do professor S16 do G2, o qual apresentou três situações-problema elaboradas consideradas inconsistentes e ainda deixou de elaborar uma, ou seja, das cinco situações-problema que ele poderia elaborar: uma ficou em branco e três foram classificadas como inconsistentes.

Poderíamos interpretar que a ausência da elaboração poderia ser indício de pouco comprometimento com a realização das tarefas solicitadas na pesquisa, mas as três situações-problema inconsistentes indicam falta de competência desse professor para criar situações-problema favoráveis à aprendizagem do aluno.

Esse fato é preocupante porque o professor S16 estava em seu início de carreira (1 a 5 anos), dizia plenamente satisfeito com a profissão, afirmava ser muito importante o ensino do conceito de fração e, no entanto não apresentou competência em elaborar meras cinco situações-problema. Será que esse professor realmente julga importante o ensino do conceito de fração? Será que ele tem ciência da sua competência em elaborar situações-problema relacionadas ao conceito de fração?

Talvez encontremos respostas para essas questões nas próximas etapas de nossa análise.

A seguir analisaremos as situações-problema consistentes levando em consideração os cinco significados de fração.

5.2.3 Enfoque 3: utilização dos cinco significados de fração

Para essa análise consideramos a utilização dos cinco significados de fração propostos por Nunes (2003) em que as situações-problema consistentes

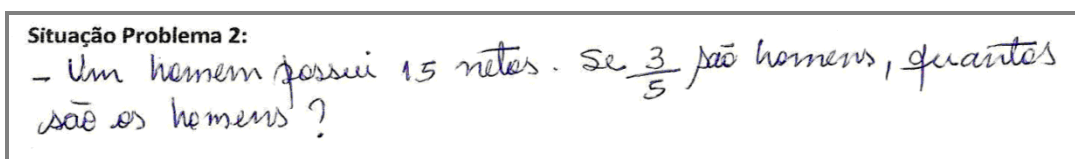
foram classificadas de acordo com os seguintes significados: Operador Multiplicativo (OP), Parte-Todo (PT), Quociente (QO), Número (Nº) e Medida (ME). Com o objetivo de trazer à mente do leitor tais significados, facilitando assim a leitura desta análise retomaremos resumidamente as ideias básicas de cada um desses significados, utilizando como exemplo as situações-problema elaboradas pelos próprios sujeitos de nossa pesquisa.

Operador Multiplicativo (OP)

Associamos a esse significado o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo.

Exemplo elaborado pelo sujeito denominado S1 do G1, referente ao significado Operador Multiplicativo:

Figura 3: Referente ao significado Operador Multiplicativo (S1 – G1)

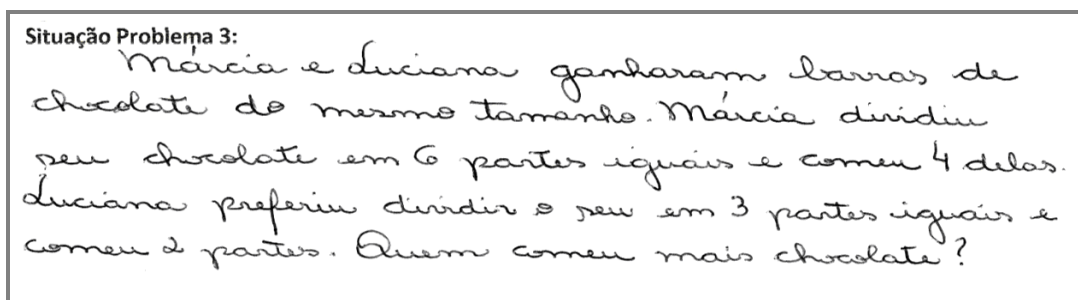


Parte-todo (PT)

Assumimos como o significado Parte-todo, um dado todo dividido em partes iguais em situações estáticas, na qual a utilização de um procedimento de dupla contagem é suficiente para se chegar a uma representação correta.

Exemplo elaborado pelo sujeito denominado S2 do G1, referente ao significado Parte-todo:

Figura 4: Referente ao significado Parte-Todo (S2 – G1)

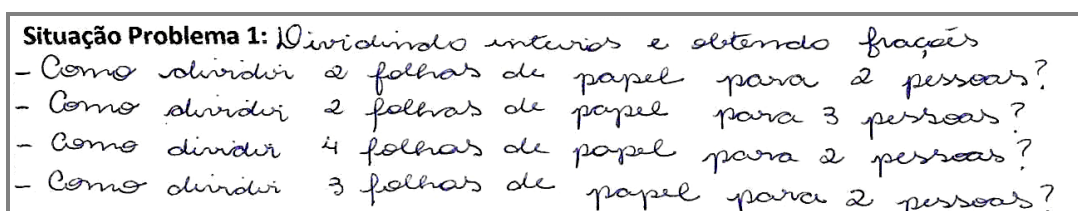


Quociente (QO)

Este significado está presente em situações em que está envolvida a idéia de divisão – por exemplo, uma pizza a ser repartida igualmente entre 3 pessoas.

Exemplo elaborado pelo sujeito denominado S7 do G1, referente ao significado Quociente.

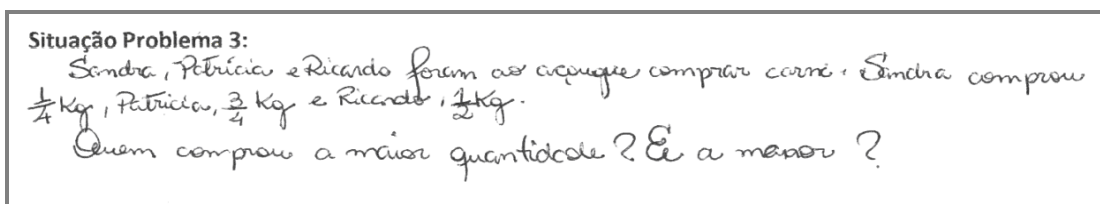
Figura 5: Referente ao significado Quociente (S7 – G1)



Número (Nº)

Assim como o número inteiro, a fração nesse significado é representada por pontos na reta numérica. Os números não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas (discretas).

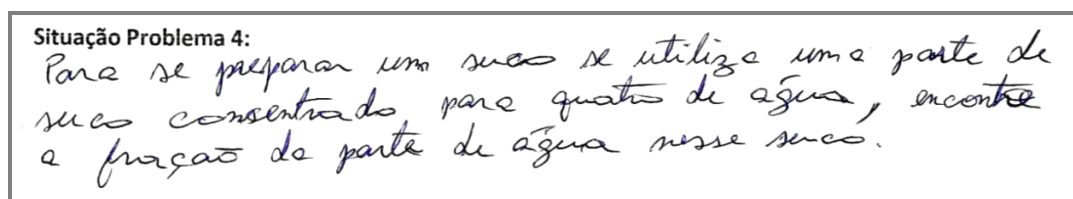
Exemplo elaborado pelo sujeito denominado S14 do G2, referente ao significado Número:

Figura 6: Referente ao significado Número (S14 – G2)

Medida (ME)

Algumas medidas envolvem fração por se referirem à quantidade extensiva, nas quais a quantidade refere-se à relação entre duas variáveis de valor discreto.

Exemplo elaborado pelo sujeito denominado S4 do G1, referente ao significado Medida:

Figura 7: Referente ao significado Medida (S4 – G12)

Após a retomada das categorias de análise desse enfoque, apresentamos a Tabela 3 com a distribuição das situações-problema em relação aos significados do conceito de fração.

Tabela 3: Referente à distribuição das situações-problema em relação aos cinco significados do conceito de fração.

	Operador multiplicativo	Parte-todo	Quociente	Número	Medida
G1	22 de 52 42,30%	16 de 52 30,76%	1 de 52 1,92%	12 de 52 23,07%	1 de 52 1,92%
G2	15 de 40 37,50%	17 de 40 42,50%	0 de 40 0,0%	8 de 40 20%	0 de 40 0,0%

Analisando os dados da Tabela 3 percebemos que não houve, em nenhum dos dois grupos, uma distribuição equitativa de situações-problema no que tange aos significados fração. De fato o foco dos dois grupos foram as situações-problema que exploravam os significados Operador multiplicativo e Parte-todo.

Ao comparar os grupos, notamos que o significado mais presente nas situações-problema elaboradas pelo G1 foi a “operador multiplicativo”, seguido por “Parte-todo” e “número” (42,30%, 30,76% e 23,07% respectivamente), havendo apenas uma situação-problema de cada um dos significados restantes. Já no G2, os significados das situações-problema se restringiram aos três mais elaborados pelo G1, sendo que a ordem percentual foi diferente – “Parte-todo” com 42,50%, “operador multiplicativo” com 37,50% e “número” com 20%.

O que nos chama a atenção é o fato de que dos cinco significados do conceito de fração, classificados em nossa pesquisa, encontramos a incidência predominante de apenas dois (Operador Multiplicativo e Parte-todo), esse fato pode significar um possível comprometimento na aprendizagem do conceito de fração. Nossa interpretação baseia-se em Nunes et al. (2003), que afirma que a aprendizagem do conceito de fração passa necessariamente pelo trabalho com base nos cinco significados (Parte-todo, Quociente, Medida, Operador multiplicativo e Número).

Esse fato também é preocupante do ponto de vista das ideias defendidas por Vergnaud (1998), o qual é categórico em afirmar que o conhecimento emerge dentro de uma variedade de situações. Nos nossos dados fica evidente que há uma tendência, tanto dos professores do G1, quanto (e principalmente) do G2 em não privilegiar situações-problema que contemplem os significados medida e quociente.

Neste sentido, colaborando com os dados analisados até esse momento apresentamos a Tabela 4, na qual são mostrados os números de significados que aparecem nas situações-problema elaboradas pelos professores, considerando cada um dos grupos.

Tabela 4: Referente à quantidade de significados de fração utilizado por cada professor.

	1 Significado	2 Significados	3 Significados
G1	4 de 11 Professores	5 de 11 Professores	2 de 11 Professores
G2	2 de 10 Professores	7 de 10 Professores	1 de 10 Professores

Como podemos constatar pela Tabela 4, nos dois grupos não houve professor que tenha explorado mais que três significados nas situações-problema elaboradas. A referida tabela ainda nos deixa perceber que seis professores se utilizaram de apenas um significado de fração nas cinco situações-problema elaboradas. Consultando os protocolos, identificamos que desses seis, quatro (4) utilizaram o significado operador multiplicativo e dois (2) Parte-todo.

Apenas três dos 21 professores elaboraram situações-problema envolvendo três diferentes significados do conceito de fração, sendo dois do G1 e um pertencente ao G2. Esses três professores tinham a mesma faixa etária (entre 41 e 45 anos) e pelo menos vinte anos de docência. Tal informação nos permite conjecturar que a experiência docente e a maturidade desses professores estão influenciando as suas competências didáticas de trabalhar um conjunto mais amplo de situações-problema envolvendo diferentes significados de fração, assim como suas próprias concepções de fração como apresentar, pelo menos, três significados distintos.

Por fim, a tabela 4 ainda mostra que quase metade dos professores do G1 (5 dos 11 professores) utilizaram dois diferentes significados do conceito de fração. Já no G2 esse número foi maior (7 dos 10 professores). Se compararmos este resultado com aquele apresentado pela tabela 3, encontramos uma justificativa para a predominância dos significados Operador Multiplicativo e Parte-todo, as quais juntas foram responsáveis por 70 das 92 situações-problema elaboradas pelos dois grupos. Em outras palavras, parece que para a maioria dos professores do nosso estudo a fração têm significado de Parte-todo e/ou Operador multiplicativo.

Após a análise da consistência, ou não, das situações-problema elaboradas, analisaremos na próxima seção a utilização da representação com, ou sem, ícone das situações-problema consistentes.

5.2.4 Enfoque 4: A utilização da representação com, ou sem, ícone das situações-problema

Neste enfoque classificamos o conceito de fração com relação a sua representação dentro das situações-problema elaboradas. Assim, investigamos a presença, ou não do ícone. Consideramos ícone como sendo a representação ou ilustração por meio de desenhos, figuras ou esquemas da situação-problema. A tabela 5 apresenta tal informação, considerando os grupos separadamente.

Tabela 5: Referente à utilização da representação com, ou sem, ícone das situações-problema elaboradas.

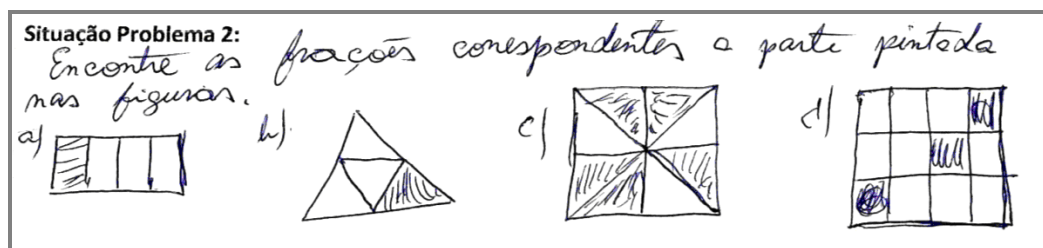
	Com ícone	Sem ícone
G1	4 de 52 7,7%	48 de 52 92,3%
G2	7 de 40 17,5%	33 de 40 82,5%

A informação importante retirada da tabela 5 é a constatação de que a representação com ícone foi pouco usada nos dois grupos. Porém, quando comparamos os grupos, observamos que tal recurso foi bem mais usado no G2 do que no G1 (17,5% de situações-problema usando ícones no G2 contra 7,7% no G1). Diante desses dados, observamos que o G2 parece ter maior preocupação com esta variável do que o G1. Esse fato nos chama a atenção, pois, segundo Teixeira (2008), a utilização do ícone na representação de situações-problema aparece com frequência nos livros didáticos para introduzir o conceito de fração, por isso acreditávamos que esta variável fosse empregada com maior frequência nas situações-problema elaboradas.

Uma informação importante que obtivemos para além da tabela, examinando os protocolos desses professores, foi que das 11 situações-problema elaboradas com representação icônica, 10 envolviam o significado Parte-todo e uma envolvia o significado operador multiplicativo.

Entre os ícones utilizados nas 10 situações-problema que envolveram o significado Parte-todo, havia a predominância de algumas figuras geométricas, tais como: retângulos, triângulos e círculos. Essas figuras foram divididas em partes, supostamente iguais, para que o aluno pintasse a fração desejada ou representasse a fração correspondente à parte pintada, como ilustra a Figura 8, retirada do protocolo do sujeito S14, o qual lecionava no 9º ano (G2).

Figura 8: referente à situação-problema com ícone (S14 – G2)



Note que o professor S14 utilizou ícones para representar figuras geométricas, preservando perceptivamente as equivalências das áreas divididas. E então pedia para que o aluno representasse a fração correspondente à parte pintada.

Concluindo a análise do quarto enfoque, qual seja, a presença, ou não, da representação com ícone nos enunciados das situações-problema elaboradas pelos professores, passaremos a seguir a proceder com a análise do quinto e último enfoque, tal análise terá lugar na próxima seção.

5.2.5 Enfoque 5: invariantes do conceito das situações-problema elaboradas

Nesta seção, investigaremos se os professores de nossa amostra elaboraram situações-problema para trabalhar os invariantes da fração. Relembrando que segundo Vergnaud (1993) um conceito deve ser visto como a

composição de uma terna (S, I, R) em que o segundo conjunto “I” indica os invariantes desse conceito presente nas varias situações-problema (“S”) apresentada. Nunes et al. (2003) lançam mão dessa mesma terna para discutir o conceito de fração, apontando como invariantes desse conceito a ordem $\left(\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \dots\right)$ e a equivalência $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \dots\right)$.

A Tabela 6 apresenta a incidência dos invariantes do conceito de fração presentes nas situações-problema elaboradas, por cada um dos grupos.

Tabela 6: Referente aos invariantes do conceito de fração- ordem e equivalência.

	Ordem	Equivalência
G1	1 de 52 1,9%	4 de 52 7,7%
G2	4 de 40 10%	3 de 40 7,5%

Observando os dados específicos de cada grupo, notamos que o G1 apresentou apenas uma situação-problema que continha o invariante de ordem e quatro contendo o invariante de equivalência. Já o G2 apresentou um leque maior de situações-problema com quatro explorando o invariante de ordem e três o invariante de equivalência. Tal fato é um indicador de que esse grupo está mais atento a necessidade de se trabalhar os invariantes do conceito de fração com os alunos do que o G1.

Considerando que cabe aos anos escolares em que atuam os professores do G1 a formalização do conceito de fração e considerando, ainda, a importância que vários estudos (Nunes (2003); Campos (2006), Merlini (2005); Canova (2006); Teixeira (2008)) dão à apropriação dos invariantes da fração no processo de aprendizagem de tal conceito ficamos apreensivos com o baixo número de situações-problema elaboradas pelo G1 para trabalhar tal tópico (menos de 10% de todas as situações-problema elaboradas por esse grupo).

Esse fato é preocupante, pois pode indicar que, para esses professores, os invariantes da fração têm pouca relevância no ensino do conceito, assim como o

que foi verificado no estudo realizado por Campos (2006), quando observaram que esses invariantes foram pouco acionados pelos professores para promover a compreensão da fração.

Concluindo a análise do quinto e último enfoque, qual seja, a utilização dos invariantes de ordem e equivalência, passaremos a seguir a proceder com a síntese dos principais resultados da unidade de elaboração de situações-problema, na próxima seção.

5.2.6 Síntese dos resultados da elaboração de situações-problema

Com base na análise dos dados em relação à elaboração das situações-problema, podemos observar à luz dos cinco enfoques de análise adotados, que os professores dos dois grupos participaram a contento do estudo realizando as situações-problema propostas. A exceção ficou para os três professores do G2, que deixaram de elaborar sete situação-problema, sendo que dois desses três professores deixou de elaborar três situações-problema cada.

Em relação as situações-problema elaboradas, constatamos que os professores dos dois grupos demonstraram competência para elaborá-las, visto que no G1 apenas um professor elaborou situações-problema inconsistentes (três das cinco situações-problema) e no G2 foram três professores a elaborarem uma situação-problema classificada como inconsistente cada.

No que tange à utilização dos cinco significados de fração, observamos que houve uma tendência dos dois grupos em privilegiar os significados Operador Multiplicativo e Parte-todo, sendo que no G1 o significado mais explorado nas situações-problema elaboradas foi o Operador Multiplicativo (42,30%), no G2 o significado mais explorado foi o Parte-todo (42,50%). Notamos ainda que o grupo que apresentou uma diversificação maior dos problemas foi o G1, já que o G2 só elaborou situações-problema envolvendo três significados. Contudo enfatizamos que, apesar do G1 ter apresentado maior diversificação de significados do que o G2, este ainda deixou a desejar, já que houve apenas uma situação-problema explorando o significado Medida e outra explorando o significado Número.

Em relação à presença da representação com a utilização, ou não, do ícone nos enunciados das situações-problema elaboradas, observamos que o comportamento dos dois grupos foi a de privilegiar a ausência do ícone em seus enunciados. Contudo, se comparamos o G1 com o G2, constatamos que este último apresentou maior preocupação com esta variável, vez que sete das 40 situações-problema elaboradas por professores deste grupo, traziam a presença de um ícone em seu enunciado.

Com relação aos invariantes do conceito de fração – ordem e equivalência – houve uma tendência do G1 em não privilegiar esses invariantes (apenas uma situação-problema que continha o invariante de ordem e quatro contendo o invariante de equivalência). Já o G2 apresentou quatro situações-problema com o invariante de ordem e apenas três com o invariante de equivalência. Isto significou que 17,5% das situações-problema elaboradas pelo G2 focaram em trabalhar os invariantes do conceito de fração. Considerando que os professores teriam cinco significados para serem trabalhados e mais os invariantes, entendemos que o percentual apresentado é compatível.

Assim, em que pese o fato do G2 ter explorado menos os diferentes significados, constatamos uma maior variedade no que tange ao uso de ícones a exploração dos invariantes nas situações-problema elaboradas por esses professores, na próxima seção analisaremos as respostas dadas pelos professores às situações-problema elaboradas por eles próprios.

5.3 Análise da Unidade 3: Respostas das Situações-Problema elaboradas

Nesta seção, temos como objetivo analisar a consistência das respostas dadas e a qualidade dos tipos de respostas consistentes utilizadas por nossos sujeitos frente às situações-problema por eles elaboradas. Assim sendo, a análise será dividida em duas partes: consistência e tipos de resolução.

5.3.1 Análise da consistência das respostas dadas em relação às situações-problema elaboradas

Para essa análise consideramos as respostas das situações-problema elaboradas de forma consistente em cada um dos grupos e as classificamos em respostas: consistente ou inconsistente.

Consideramos que uma resposta de situação-problema estava consistente quando ela mostrava um procedimento de resolução claro e coerente e, ainda, apresentava a resposta correta para o problema.

A Figura 9 apresenta um bom exemplo de uma situação-problema e sua respectiva resposta, elaborada por um professor do G2.

Figura 9: Exemplo de uma situação-problema consistente com sua resposta, igualmente consistente (S13 – G2)

Situação Problema 2:

- Se de um rolo de barbante com 45 metros (de comprimento) de fio eu cortar $\frac{2}{5}$ ou $\frac{6}{15}$ desse barbante, obterei um fio de mesmo comprimento? Por quê?
- Como podemos representar 1 rolo e mais $\frac{2}{5}$ de rolo desse barbante?
- Escrever $\frac{2}{5}$ do rolo na forma de porcentagem.

Resolução da Situação Problema 2:

- Sim, pois $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$ são frações equivalentes
- 1 rolo mais $\frac{2}{5}$ (de rolo) = $1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ ou na forma mista $1\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5} \xrightarrow{\times 20} \frac{40}{100} = 40\%$

Consideramos a resposta da situação-problema como consistente, pois apresenta clareza e coerência entre os dados fornecidos e a resposta apresentada. Demonstra ser uma resposta bem elaborada que envolve o conceito de fração, assim a representação do conceito de fração surge como uma ferramenta bem adaptada para resolver tal situação-problema, além da utilização do invariante de equivalência e a representação por meio de porcentagem.

Como respostas de situações-problema inconsistentes consideramos aquelas que apresentavam equívocos, imprecisão na elaboração da resposta, insuficiência de dados e erro conceitual.

Para ilustrar tal situação apresentamos uma situação-problema e sua respectiva resposta, elaborada por um professor do G1 que atuava no 6º ano.

Figura 10: Referente a uma situação-problema consistente e sua resposta inconsistente (S5 – G1)

Situação Problema 1: Represente cada quantidade por meio de um desenho e de uma fração:
a) Aninha gasta um terço de sua mesada com livros;

Resolução da Situação Problema 1:



$$\frac{1}{4}$$

Consideramos a resposta da situação-problema como inconsistente, do ponto de vista do nosso estudo, pois há incoerência entre o ícone e a fração correspondente.

Os dados da Tabela 7 apresentam o número total de respostas das situações-problema elaboradas por cada grupo (G1 e G2) classificadas como consistentes ou inconsistentes.

Tabela 7: Referente às respostas consistentes e inconsistentes das situações-problema elaboradas.

	Respostas Consistentes	Respostas Inconsistentes
G1	50 de 52 96,15%	2 de 52 3,85%
G2	34 de 40 85%	6 de 40 15%

Como podemos constatar na tabela acima, de modo geral, os professores dos dois grupos se mostraram competentes em resolver as situações-problema

por eles elaboradas, pois apresentaram um baixo número de respostas inconsistentes (apenas oito – 8,7%, das 92 respostas). Sendo que o G1 apresentou um índice de inconsistência de apenas 3,85%, bem menor do que o índice do G2 de 15%.

Esses dados quando foram comparados com aqueles apresentados na Tabela 2, nos fez observar que os índices de inconsistências do G1, na elaboração (5,55%) e nas respostas (3,85%) das situações-problema ficaram muito baixos e próximos. Já o G2 apresentou esses índices relativamente próximos e baixos (7% e 15% respectivamente). Fato esse que nos leva a inferir que aparentemente há uma relação entre a competência de criá-las consistentes e a competência de resolvê-las. A comparação desses dados nos leva a confirmar que o G1, até esse momento da análise, apresenta-se mais competente do que o G2.

Observando os dados específicos de cada grupo, notamos que as respostas inconsistentes do G1 foram dadas por dois professores distintos. Já no G2, identificamos que cinco das seis respostas inconsistentes veio de um único professor. Este ao invés de responder as cinco situações-problema, criou cinco novas no espaço destinado às respostas. Como um dos critérios para considerar uma resposta como consistente era apresentar resposta correta e como esse professor não apresentou as respostas corretas as situações-problema por ele elaboradas, então foram consideradas como inconsistentes.

Revisitando o perfil dos professores que apresentaram respostas consideradas inconsistentes, notamos que são bem distintos, seja em relação ao tempo de magistério, seja quanto ao grau de satisfação com a profissão, apresentando semelhança somente em relação à visão de considerar muito importante o ensino do conceito de fração. Verificamos ainda que, esses professores elaboraram as cinco situações-problema propostas, assim como não apresentaram inconsistência em suas elaborações.

Concluindo a análise da consistência das respostas das situações-problema elaboradas, prosseguimos nossa análise preocupada com a qualidade dessas, que terá lugar na próxima seção.

5.3.2 Tipos de respostas consistentes utilizadas por nossos sujeitos, frente às situações-problema por eles elaboradas

A partir das leituras das respostas consistentes apresentadas pelos professores em relação às situações-problema elaboradas, conseguimos classificar essas respostas, a saber: algoritmo, com ícone e composta, as quais estão explicadas a seguir:

Categoria algoritmo: refere-se à aplicação de um conjunto de técnicas operatórias, com a utilização de uma ou mais operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), para responder uma determinada situação-problema. Apresentamos a seguir a resposta de um professor do grupo G1 que ilustra essa categoria.

Figura 11: Referente à resposta classificada na categoria Algoritmo (S1 –G1)

Resolução da Situação Problema 3:

$$\frac{3}{4} \times 120 = \frac{360}{4} = 90$$

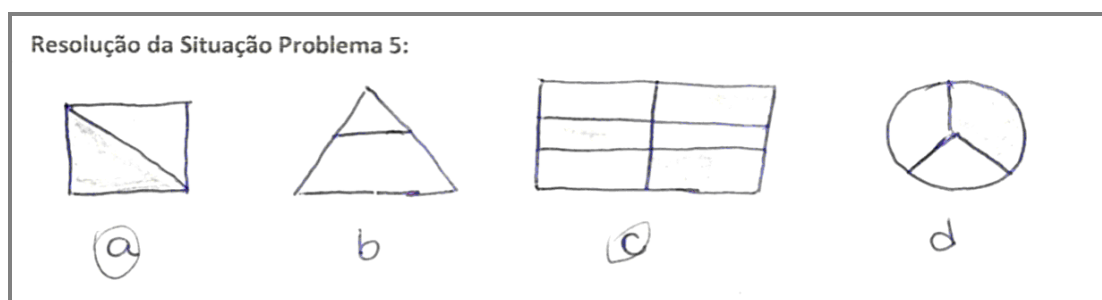
$$\frac{2}{3} \times 120 = \frac{240}{3} = 80$$

Resp.: 90 m e 80 m.

Note que a resposta foi construída exclusivamente pela aplicação de um conjunto de técnicas operatórias, com a utilização das operações de multiplicação e divisão para responder à situação-problema elaborada.

Categoria com ícone: diz respeito ao emprego de uma representação ou ilustração, seja desenhos, figuras ou esquemas, para responder uma determinada situação-problema. Neste caso a resposta apóia-se, exclusivamente, na observação da representação com o ícone. Como exemplo dessa categoria, apresentaremos a resolução de um professor do grupo G1

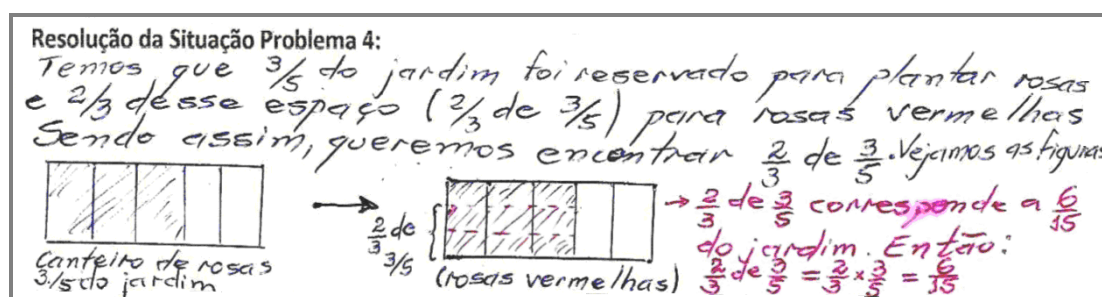
Figura 12: Exemplo de uma resposta classificada na categoria com ícone (S5 – G1)



Nota-se que a resposta apresentada pelo professor empregou exclusivamente o ícone para responder a situação-problema elaborada.

Categoria composta: refere-se ao emprego coordenado das categorias algoritmo e com ícone, para responder a situação-problema. Em outras palavras, o sujeito frente a uma determinada situação utiliza, para sua resolução tanto o algoritmo, quanto a representação com ícone simultaneamente. Um exemplo desta categoria é oferecida pela resposta apresentada pelo S1 do grupo G1.

Figura 13: Exemplo de uma resposta classificada na categoria composta (S1 – G1)



Note que a resposta apresentada coordena a utilização dos ícones com a aplicação de um conjunto de técnicas operatórias para responder a situação-problema elaborada.

Definidas as categorias de análise, apresentamos a tabela abaixo referente à incidência dessas categorias nas respostas das situações-problema.

Tabela 8: Referente às respostas das situações-problema em relação à incidência das categorias: algoritmo, com ícone e composta, por grupos.

	Algoritmo	Com ícone	Composta
G1	35 de 50 70%	3 de 50 6%	12 de 50 24%
G2	28 de 34 82,35%	5 de 34 14,7%	1 de 34 2,95%

Como podemos constatar, com base nos dados da tabela acima, há uma tendência, nos dois grupos, em utilizar a categoria algoritmo como estratégia para responder as situações-problema por eles elaboradas, já que das 84 respostas analisadas, 75% (63) apresentaram suas estratégias focadas exclusivamente nessa categoria.

Em relação às respostas que utilizaram exclusivamente o ícone como estratégia para responder as situações-problema, podemos observar que essas apresentaram um índice muito baixo de incidência, sendo que apenas 8 das 84 respostas das situações-problema elaboradas utilizaram esse recurso.

Já as respostas que utilizaram a estratégias composta foi utilizada em 13 das 84 respostas das situações-problema elaboradas.

A análise desses dados nos leva a supor, dentro dos limites da nossa amostra, que há fortes indícios que o ensino do conceito de fração é muito mais focado nos aspectos procedimentais com a utilização de regras e algoritmos do que nos procedimentos conceituais com a utilização de ícones.

Analisando individualmente cada grupo constatamos, inicialmente, que o G1 apresentava um índice menor que o G2 (70% e 82,35% respectivamente) da utilização do Algoritmo como estratégia para responder as situações-problema por eles elaboradas quando admitimos a exclusividade da utilização dessa categoria. Mas quando consideramos que na categoria composta também há a utilização do algoritmo constatamos que o G1 utilizou o Algoritmo em 47 das 50 respostas (94%), enquanto que o G2 utilizou em 29 das 34 (85,3%) respostas.

Esse fato nos leva a supor que o G1 utiliza menos a categoria Algoritmo individualmente, como exclusiva estratégia para suas respostas do que o G2, sendo que o G1 prioriza mais a estratégia composta em suas respostas, esse fato é confirmado quando analisamos os índices da categoria composta, que apresenta somente uma resposta nessa categoria no G2 contra doze do G1.

O mesmo acontece quando analisamos a categoria “com ícone”, pois se observamos somente a utilização exclusiva dessa estratégia o G1 apresenta 3 de 50 (6%) respostas contra 5 de 34 do G2 (14,7%) dando a falsa impressão que o G1 utiliza menos essa estratégia do que o G2. Mas quando evidenciamos que a categoria composta apresenta ícone, constatamos que o G1 apresentou 15 das 50 (30%) contra 6 das 34 (17,64%) respostas das situações-problema elaboradas pelo G2.

Então concluímos que o G1 utiliza com menor incidência do que o G2 as categorias “algoritmo” e “com ícone” de forma exclusiva, pois utiliza com maior incidência a categoria composta como estratégia para responder as situações-problema elaboradas. Assim constatamos que o G1 privilegia com maior incidência do que o G2 a estratégia que coordena a utilização de ícones com algoritmos em suas respostas.

Já o G2 utiliza com maior incidência do que o G1 as categorias “algoritmo” e “com ícone”, confirmando que o ensino do conceito de fração realizado por esse grupo é muito mais focado nos aspectos procedimentais com a utilização de regras e algoritmos do que nos procedimentos conceituais com a utilização de ícones. Tal fato é aceitável se considerarmos que cabem aos anos escolares em atuam os professores do G2 a utilização do conceito de fração como ferramenta para o desenvolvimento de outros conceitos.

Concluída a análise dos tipos de respostas consistentes utilizadas por nossos sujeitos, frente às situações-problema por eles elaboradas, apresentaremos, na próxima seção, uma síntese da unidade de análise 3.

5.3.3 Síntese da análise das respostas utilizadas por nossos sujeitos, frente às situações-problema por eles elaboradas

Com base na análise dos dados em relação às respostas das situações-problema elaboradas, podemos observar à luz dos enfoques de análise adotados, que:

Em relação à consistência das respostas constatamos que os professores dos dois grupos se mostraram competentes em resolver as situações-problema por eles elaboradas, pois apresentaram um baixo número de respostas inconsistentes, sendo que o G1 teve o índice de inconsistência menor que o G2 (3,85% e 15% respectivamente).

Em relação às estratégias utilizadas para responder as situações-problema, a análise dos dados nos levou a supor há fortes indícios que a competência dos professores é muito mais focado nos aspectos procedimentais com a utilização de regras e algoritmos do que nos procedimentos conceituais com a utilização de ícones. Analisando especificamente cada grupo constatamos que o G1 utiliza com maior frequência do que o G2 a estratégia que coordena a utilização de ícones com algoritmos, esse fato é confirmado quando analisamos os índices da categoria composta, que apresenta somente uma resposta nessa categoria no G2 contra doze do G1.

Apresentamos nesta seção a análise das respostas das situações-problema elaboradas e passaremos na próxima seção a analisar a competências dos sujeitos de nossa pesquisa em relação aos cinco diferentes significados de fração.

5.4 Análise da Unidade 4: Competências em relação aos cinco significados de Fração

Nesta seção analisaremos a competência dos professores para resolver situações-problema relacionadas ao conceito de fração, no que tange aos seus

cinco significados. Analisaremos: (a) se o professor resolve corretamente as situações-problema propostas; (b) as estratégias que ele utiliza nessa resolução e (c) as estratégias que ele propõe para o seu ensino.

Antes de procedermos com esta análise gostaríamos de relembrar ao leitor que a mesma refere-se ao instrumento 4, qual seja, aquele composto por cinco situações-problema, cada uma envolvendo um significado de fração (ver apêndice 1). Salientamos que a situação-problema 1 apresentava dois itens a serem respondidos, o que nos levou a considerar seis respostas possíveis para cada professor. Sendo assim, como o G1 era composto por 11 professores, isso significa que havia 66 possíveis respostas (o produto do número de professores (11) pelo número de situações-problema (6)), sendo que uma estava em branco, então consideramos 65 respostas para o G1 e 60 para o G2 (o produto do número de professores (10) pelo número de situações-problema (6)).

5.4.1 Análise das respostas dadas em relação às situações-problema propostas

Nesta etapa da análise classificamos as respostas dadas pelos professores, no que tange às situações-problema propostas, em certas ou erradas. Relembramos que as cinco situações-problema (uma delas com dois itens) deste instrumento continham a resposta de um aluno fictício e era pedido que o professor avaliasse se essa resposta estava certa ou errada. Depois, pedia-se para que ele apresentasse uma resolução para tal situação-problema sob a ótica daquele significado. São essas duas solicitações que, juntas, consideraremos se o professor acertou, ou não, o item.

Para efeito dessa análise consideramos como resolução certa, o fato do professor apresentar uma avaliação correta a respeito da resposta do aluno fictício e apresentar uma resolução igualmente correta da situação-problema proposta. E como errada quando apresentava erro na avaliação da resposta do aluno fictício ou erro na resolução da respectiva situação-problema proposta. Em relação aos erros cometidos pelos professores, a Tabela 9 expressa esses erros relacionando-as aos significados.

Tabela 9: Referente à quantidade de erros, por significados, das respostas das situações-problema propostas.

	Situação-problema 1 Item A	Situação-problema 1 Item B	Situação-problema 2	Situação-problema 3	Situação-problema 4	Situação-problema 5
	Medida		Operador Multiplicativo	Quociente	Parte-todo	Número
G1	0	2	1	1	1	1
G2	1	0	0	1	0	0

Assim, o primeiro resultado que podemos extrair da tabela acima é que o desempenho dos professores dos dois grupos foi muito além do esperado, pois apresentaram baixos índices de erros (9,23% de erro no G1 e 3,33% no G2). Os dois grupos se mostraram competentes em resolver as situações-problema propostas.

Este resultado nos chamou bastante atenção, porque eles vem ao encontro aos obtidos por Teixeira (2008) cuja média de erros dos professores especialistas baianos de seu estudo foi na ordem de 41,8%.

Portanto, inicialmente já podemos inferir que os professores de nosso estudo se apresentaram mais competentes do que os de Teixeira (2008). Não querendo extrapolar nem os resultados de nosso estudo, nem os de Teixeira, para além dos universos nos quais eles foram realizados, mas procedendo a uma comparação entre ambos, notamos que os professores de São Paulo parecem estar mais bem preparados no que tange ao conteúdo fração do que estão os baianos.

Ao comparar os grupos, constatamos que o G1 apresentou um índice de erro maior do que o G2 (G1 seis erros em 65 respostas e G2 dois erros em 60 respostas) tal resultado é um indicador de que o G2 apresentou maior competência em lidar com as situações-problema propostas do que o G1. Apesar de poucos erros o G2 se mostrou mais competente.

Notamos que os erros apresentados pelo G1 estavam distribuídos pelos cinco significados do conceito de fração, já o G2 apresentou respostas erradas

somente nos significados Medida e Quociente, sendo um erro de cada significado. E mais, juntando os erros dos dois grupos, notamos que cinco dos oito erros concentraram-se nos significados medida (3) e quociente (2). Esse fato chama a atenção, pois na elaboração das situações-problema, analisadas na unidade 2, desse capítulo constatamos que esses significados foram pouco (para o G1) ou nada (para o G2) utilizados nas situações-problema elaboradas pelos dois grupos.

Com relação aos professores que apresentaram erros em suas respostas, no G1 isto aconteceu com quatro professores, sendo que dois deles cometeram dois erros cada. Ao olhar com mais detalhe o comportamento desses dois professores (S2 e S5) notamos que ambos elaboraram uma situação-problema inconsistente, na unidade 2, sendo que um deles (S5) ainda apresentou uma resposta inconsistente. Tal resultado parece apontar para uma estreita relação entre a concepção e a competência desses dois professores do G1 que apresentaram menor competência para lidar com as situações-problema de fração, pois foram também os que apresentaram problemas (ruídos) em suas concepções de fração. Em relação ao perfil desses dois professores não encontramos sinais de similaridade, a não ser pelo fato de acreditar que seja muito importante o ensino do conceito de fração.

No que tange aos professores do G2, apenas dois deles apresentaram uma resposta com um erro. Ao revisitar os protocolos desses professores (S12 e S16) observamos que ambos não elaboram todas as situações-problema solicitadas (S12 não elaborou três das cinco e o S16 uma das cinco), sendo que um deles (o S12) ainda apresentou uma resposta inconsistente, e o outro (S16) apresentou três respostas inconsistentes. Tal resultado apresentado pelos dois professores (S12 e S16) do G2, assim como o apresentado pelos dois professores do G1 (S2 e S5) parece apontar para uma estreita relação entre a concepção e a competência desses professores que apresentaram menor competência para lidar com as situações-problema de fração nos dois grupos.

Analisados os índices de acertos e erros apresentados nas resoluções dos professores dos dois grupos, prosseguimos nossas análises preocupados agora com as estratégias de resolução apresentadas por esses professores no que

tange as resoluções das situações-problema propostas, que terá lugar na próxima seção.

5.4.2 Análise das estratégias utilizadas para resolver as situações-problema propostas

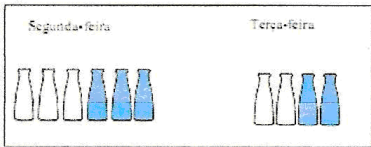
A partir das leituras das resoluções apresentadas pelos professores em relação às situações-problema propostas, classificamos essas resoluções em seis categorias, a saber: razão, frações equivalentes, representação decimal, percepção, algoritmo e resposta sem cálculo, as quais estão explicadas a seguir:

Categoria razão: refere-se às estratégias de resolução que estão relacionadas à razão, na qual os professores resolveram enfocando o conceito Parte-parte. Apresentamos, a seguir, a resolução de um professor do G1 que ilustra tal categoria.

Figura 5.13: Exemplo de uma resolução classificada na categoria razão (S4 – G1)

Problema 1: Um pintor fez mistura de tintas para poder pintar uma casa na segunda-feira e na terça-feira, na segunda-feira misturou 3 litros de tinta branca e 3 de tinta azul. Na terça-feira misturou 2 litros de branca e 2 de azul, como mostra o quadro abaixo.

a) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira?
b) Represente a fração da tinta azul com relação ao total de tinta na segunda-feira.



Um aluno deu as seguintes respostas:

a) vai, a tinta vai ter a mesma cor na segunda-feira e na terça-feira.

b) a fração é $\frac{3}{3}$.

item a): Na sua concepção a resposta do aluno, para esse item, está: ☒ Certa ☐ Errada

item b): Na sua concepção a resposta do aluno, para esse item, está: ☐ Certa ☒ Errada

Como você resolveria os dois itens?

a) a cor será a mesma pois se mantém a proporção

$\frac{3}{3} = \frac{2}{2}$

Nota-se que o professor apresentou uma resolução baseada nas ideias do conceito de razão (Parte-parte), pois são três partes de tinta azul para três partes de tinta branca na segunda-feira, assim como duas partes de azul para duas de branca na terça-feira.

Categoria frações equivalentes: refere-se às estratégias de resolução por meio da utilização do invariante de equivalência, na qual os professores apresentaram suas resoluções baseadas em frações que são equivalentes. Apresentamos, a seguir, a resolução de um professor do G2 que ilustra tal categoria.

Figura 14: Exemplo de uma resolução classificada na categoria frações equivalentes.

Problema 2: Rodrigo gostaria de abrir uma oficina mecânica. Para isso, precisa de $\frac{3}{6}$ das ferramentas representadas abaixo. Quantas ferramentas ele precisa?



Um aluno deu a seguinte resposta:
Rodrigo precisa de 3 ferramentas.

Na sua concepção a resposta do aluno está: ☐ Certa ☒ Errada

Como você resolveria o problema?

$\frac{3}{6}$ de certo valor significa metade: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (frações equivalentes, sendo assim: $\frac{3}{6}$ de 8 = $\frac{1}{2}$ de 8 = 4 ferramentas)

Observa-se que o professor apresentou a sua resolução baseada na fato de $\frac{3}{6}$ equivaler a $\frac{1}{2}$ (metade) e metade de 8 é igual a 4.

Categoria representação decimal: refere-se à resolução baseada na representação decimal, na qual os professores transformam a representação fracionária em decimal para responder a situação-problema proposta. Apresentamos, a seguir, a resolução de um professor do G2 que ilustra tal categoria.

Figura 15: Exemplo de uma resolução classificada na categoria representação decimal (S7 – G1)

Problema 5: Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{3}{5}$ do chocolate dela e Paulo comeu $\frac{3}{4}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo?

Um aluno deu a seguinte resposta:
Maria e Paulo comeram o mesmo tanto, porque os dois comeram três pedaços dos seus chocolates.

Na sua concepção a resposta do aluno está: ☐ Certa ☒ Errada

Como você resolveria o problema?

Maria $\frac{3}{5} = 0,6$ e Paulo $\frac{3}{4} = 0,75$

Paulo comeu mais chocolate do que Maria

Nota-se que o professor utilizou a representação decimal para a resolução da situação-problema proposta.

Categoria percepção: refere-se à utilização da percepção, na qual os professores basearam-se na estrutura da situação-problema ou na percepção realizada através de ícones e/ou ilustrações. Um exemplo de tal categoria é apresentada na Figura 16.

Figura 16: Exemplo de uma resolução classificada na categoria percepção (S17 – G1)

Problema 5: Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{3}{5}$ do chocolate dela e Paulo comeu $\frac{3}{4}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Um aluno deu a seguinte resposta:

Maria e Paulo comeram o mesmo tanto, porque os dois comeram três pedaços dos seus chocolates.

Na sua concepção a resposta do aluno está: ☐ Certa ☒ Errada

Como você resolveria o problema?

Através da representação e comparação entre as frações, fica claro para os alunos a diferença entre os tamanhos dos pedaços de chocolate.

Nota-se que o professor não utilizou nenhum outro recurso na sua resolução a não ser o fato de observar o enunciado e responder que fica claro para ele qual é a resposta correta, por meio da percepção.

Categoria algoritmo: refere-se à resolução baseada em algoritmos, na qual os professores utilizaram um conjunto de técnicas operatórias, que podem envolver uma ou mais operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) na resolução de uma determinada situação-problema proposta. Para ilustrar tal categoria, apresentamos a resolução do professor S15, pertencente ao G2.

Figura 17: Exemplo de uma resolução classificada na categoria algoritmo (S15-G2)

Problema 2: Rodrigo gostaria de abrir uma oficina mecânica. Para isso, precisa de $\frac{3}{6}$ das ferramentas representadas abaixo. Quantas ferramentas ele precisa?



Um aluno deu a seguinte resposta: Rodrigo precisa de 3 ferramentas.

Na sua concepção a resposta do aluno está: ☐ Certa ☒ Errada

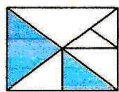
Como você resolveria o problema?

$\frac{3}{6} \cdot 8 = \frac{24}{6} = 4$ ferramentas.

Nota-se que o professor multiplicou três vezes oito e dividiu o resultado por seis obtendo como resposta quatro ferramentas.

Categoria resposta sem cálculo: refere-se à apresentação da resposta da situação-problema sem a utilização de qualquer técnica ou observação que permita antever a estratégia utilizada. Apresentamos, a seguir, a resolução de um professor do G2 que ilustra tal categoria.

Figura 18: Exemplo de uma resolução classificada na categoria sem cálculo (S14 – G2)

Problema 4: Que fração representa as partes pintadas da figura?	
	Um aluno deu a seguinte resposta: $\frac{3}{8}$
Na sua concepção a resposta do aluno está:	☒ Certa ☐ Errada
Como você resolveria o problema?	
$\frac{3}{8}$	

Nota-se que o professor não apresenta qualquer resolução ou comentário a respeito da sua resposta e simplesmente apresenta a fração $\frac{3}{8}$.

Definidas as categorias de análise, apresentamos a tabela abaixo referente à incidência dessas categorias nas resoluções apresentadas nas situações-problema proposta em cada grupo.

Lembramos mais uma vez que consideramos somente as resoluções que se apresentaram corretas para essa análise, por isso temos no G1, das 66 possíveis menos uma em branco, e seis erradas, um total de 59 resoluções analisadas, já no G2, tínhamos 60 resoluções possíveis menos duas erradas, então contamos com total de 58.

Tabela 10: Referente às resoluções das situações-problema propostas por grupos em relação às categorias de análise.

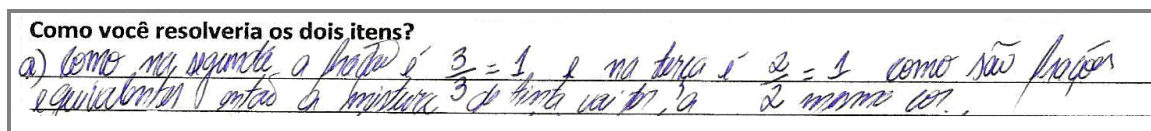
	Razão	Frações equivalentes	Representação decimal	Percepção	Algoritmo	Resposta direta
G1	6 de 59	11 de 59	5 de 59	17 de 59	16 de 59	4 de 59
G2	2 de 58	18 de 58	4 de 58	17 de 58	16 de 58	1 de 58

Observamos que o G1 utiliza como principal estratégia de resolução a categoria percepção (17 das 59 resoluções), seguidas pelas categorias algoritmo (16 das 59 resoluções) e frações equivalentes (11 das 59 resoluções). O G2 utiliza a categoria frações equivalentes (18 das 58 resoluções), seguidas pelas categorias percepção (17 das 58 resoluções) e algoritmo (16 das 58 resoluções).

Chama a nossa atenção o fato de que os dois grupos, principalmente o G1, utiliza como uma das principais estratégias de resolução a categoria percepção, pois que esses tipos de estratégia levam os alunos a desenvolverem seus raciocínios baseados na percepção em detrimento as relações lógicas-matemáticas envolvidas no conceito (NUNES E BRYANT, 1997; NUNES et al., 2005).

Outro fator que nos chama a atenção é a utilização da categoria razão, principalmente no G1, já que seis resoluções desse grupo utilizaram essa estratégia contra dois do G2, pois constatamos que alguns professores apresentam certa confusão em representar numericamente a fração e a razão (Campos (2006). Para ilustrar tal fato apresentamos o protocolo do professor S16.

Figura 19: referente a confusão entre fração e razão



Esse professor chama de fração o que é uma razão, confunde Parte- todo com parte-parte, diz claramente que a fração é $\frac{3}{3}$ e $\frac{2}{2}$, enquanto que a fração é $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{4}$.

Analisando especificamente cada grupo observamos que o G2 apresentou um melhor desempenho no que tange aos tipos de resoluções, pois apresentou como principal estratégia de resolução das situações-problema propostas a categoria frações equivalentes e ainda, apresentou um baixo índice de resoluções classificadas na categoria razão, evidenciando assim uma maior preocupação com as relações lógicas-matemáticas envolvidas no conceito de fração.

Apresentamos a análise das resoluções realizadas pelos professores nas situações-problema propostas, seguiremos nossa última análise preocupados com as estratégias de ensino propostas por nossos sujeitos no que tange cada uma das situações-problema proposta, que terá lugar na próxima seção.

5.4.3 Análise das estratégias de ensino propostas pelos professores

Nesta etapa da análise identificamos as estratégias de ensino propostas pelos professores no que tange as situações-problema proposta. Sendo assim, utilizamos as mesmas categorias da seção anterior (5.4.2.), pois as estratégias de ensino propostas eram similares, em grande parte, às estratégias de resolução, ou seja, não houve a necessidade de se criar novas categorias para as estratégias de ensino propostas pelos professores.

Apresentamos a distribuição das estratégias de ensino propostas pelos professores em relação as situações-problema propostas na Tabela 11:

Tabela 11: *Referente às estratégias de ensino propostas pelos professores nas situações-problema proposta*

	Razão	Frações equivalentes	Representação decimal	Percepção	Algoritmo	Outras
G1	4 de 59	19 de 59	1 de 59	24 de 59	7 de 59	4 de 59
G2	5 de 58	21 de 58	3 de 58	19 de 58	4 de 58	6 de 58

Nota-se que os professores do G1 propõem como principal estratégia de ensino a percepção, que foi a principal estratégia de resolução apresentada por esse grupo na seção anterior e que aqui cabem os mesmos comentários a respeito dessa estratégia de ensino.

Observamos que os professores do G2 propõem como principal estratégia de ensino a utilização de frações equivalentes, e novamente o G2 se preocupa mais do que o G1 com esse invariante do conceito de fração.

E, assim como na seção anterior, a razão apareceu, agora, como estratégia de ensino e foi mais utilizada pelo G2, demonstrando assim, quando

comparado com a seção anterior, que os professores dos dois grupos, aparentemente, dentro dos limites da nossa pesquisa, parecem confundir a razão com a fração, tanto como estratégia de resolução, quando estratégia de ensino.

Analisadas as estratégias de ensino propostas pelos professores dos dois grupos, finalizamos mais uma etapa de análise e passaremos a apresentar na próxima seção uma síntese desta análise.

5.4.4 Síntese da análise da unidade 4 – situações-problema propostas

Apresentaremos nesta seção uma da análise das situações-problema propostas.

O desempenho dos professores dos dois grupos foi muito além do esperado, pois os dois grupos se mostraram bastantes competentes em resolver as situações-problema propostas. Esse fato não era esperado e chamou bastante a nossa atenção, pois esperávamos obter índices de acertos menores como os apresentados na pesquisa realizada por Teixeira (2008). Observamos que o G1 utiliza como principal estratégia de resolução a categoria percepção (17 das 59 resoluções), seguidas pelas categorias algoritmo (16 das 59 resoluções) e frações equivalentes (11 das 59 resoluções). O G2 utiliza a categoria frações equivalentes (18 das 58 resoluções), seguidas pelas categorias percepção (17 das 58 resoluções) e algoritmo (16 das 58 resoluções).

Notamos que os professores do G1 propõem como principal estratégia de ensino a percepção, que foi a principal estratégia de resolução apresentada por esse grupo na seção anterior e o G2 propõem como principal estratégia de ensino a utilização de frações equivalentes, e novamente o G2 se preocupa mais do que o G1 com esse invariante do conceito de fração.

Analisados os dados da nossa pesquisa apresentaremos no próximo capítulo as nossas conclusões referentes às concepções e competências dos professores do G1 e do G2 no que tange o conceito de fração em seus diferentes significados.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

O presente capítulo tem como objetivo realizar o fechamento dessa pesquisa, apresentando nossas conclusões baseadas nas análises dos dados. Com o intuito de fazer uma apresentação objetiva e sintética de nossas ideias conclusivas, esse capítulo foi dividido em quatro partes:

- Na primeira, há um resumo da trajetória do estudo;
- Na segunda, uma síntese dos principais resultados levantados na aplicação do instrumento;
- Na terceira apresentamos a resposta a nossa questão de pesquisa;

Por fim, na ultima seção fazemos algumas sugestões para futuras pesquisas sobre o tema.

6.1 A trajetória da pesquisa

Nossa pesquisa teve por objetivo identificar e analisar as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclo do Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração em seus diferentes significados.

Para atingirmos os nossos objetivos, percorremos um longo caminho, o qual teve início com a apresentação da problematização e relevância do estudo seguido da explicitação da seguinte questão de pesquisa, qual seja:

Quais as concepções e competências apresentadas por professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclos do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração em seus diferentes significados?

Buscamos apoio teórico para subsidiar o desenvolvimento do estudo. Esse apoio veio das ideias de Vergnaud contidas na Teoria dos Campos Conceituais. Essa teoria enfatiza que tal formação do conceito se dá na inter-relação entre três componentes de uma terna de conjuntos: das situações com as quais o sujeito precisa interagir, dos invariantes que se referem os procedimentos do sujeito ao lidar com as situações e das propriedades matemáticas dessas situações, e o conjunto das representações simbólicas, as quais explicitam as relações entre os invariantes e as situações.

Utilizamos ainda as ideias teóricas de Kieren e Nunes no que se refere aos diferentes significados da fração. Iniciamos apresentando a classificação (constructos) proposta por Kieren, mas nos detemos na classificação (significados) utilizada por Nunes, na qual a fração pode ser entendida por meio de cinco diferentes significados: número, Parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Esse capítulo teórico ainda procedeu uma discussão sobre os termos “concepção” e “competência”. Para tanto buscamos apoio nas ideias de Ponte e Vergnaud, os quais dedicam parte de suas obras para tratar desses conceitos.

Na sequência discutimos fração sob três enfoques: a fração na Matemática, no qual descrevemos a sua trajetória histórica e construção formal; a fração na Educação Matemática, no qual revisitamos vários estudos relevantes correlatos com o cerne de nossa pesquisa; e a fração na escola, no qual descrevemos as recomendações feitas pelos PCN no que tange o ensino do conceito de fração. No que tange ao enfoque “a fração na Educação Matemática”, a nossa revisão da literatura abrangeu mais de 14 trabalhos publicados na área, sendo que 12 deles foram dissertações ou teses defendidas na PUC/SP na última

década. Essa grande quantidade de trabalhos acadêmicos sobre o tema permitiu uma ampla visão, seja do ponto de vista do estudante dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, seja do estudante do Ensino Médio ou do curso de Licenciatura em Matemática, seja, ainda, do ponto de vista do professor especialista ou polivalente

Apoiados nos referenciais teóricos e inspirados nas pesquisas e estudos correlatos, que definimos e construímos o plano de ação de nossa pesquisa, isto é, os procedimentos metodológicos. Nela descrevemos a população alvo do estudo (21 professores especialistas em Matemática) e o instrumento de coleta de dados. Este foi composto de quatro unidades: (a) perfil; (b) elaboração de situações-problema; (c) respostas das situações-problema e (d) competências. Salientamos para efeito da análise que os professores foram divididos em dois grupos, sendo o grupo 1 (G1) formado por professores que estavam atuando no 3º ciclo do Ensino Fundamental (6º e 7º anos) e o grupo 2 (G2) formado por professores que estavam atuando no 4º ciclo do Ensino Fundamental (8º e 9º anos).

De posse dos protocolos, realizamos a análise, a qual ocorreu por duas vertentes: quantitativa e qualitativa. Estamos convictos que ela nos forneceu informações suficientes para responder a nossa questão de pesquisa.

A próxima seção será dedicada à apresentação de uma síntese da análise dos resultados encontrados no presente estudo.

6.2 Síntese dos principais resultados

Para facilitar a apresentação dos principais resultados obtidos na pesquisa que realizamos, dividiremos esta seção em quatro partes: Perfil dos professores pesquisados, Elaboração de situações-problema, Respostas às situações-problema elaboradas e Competências.

Perfil dos professores pesquisados

A análise do perfil dos professores nos possibilitou, inicialmente, dividi-los em dois grupos: G1 (professores especialistas em Matemática do 3º ciclo) e G2 (professores especialistas em Matemática do 4º ciclo).

Após a criação dos grupos constatamos que a maioria dos professores do G1 atuava no 6º ano, tinha idade entre 41 e 45 anos, era do gênero feminino, cursou licenciatura plena em Matemática em uma instituição de ensino privada e era licenciado há mais de 11 anos, sendo que sete professores desse grupo também lecionava há mais de 11 anos. Cinco dos dez professores do G1 afirmou que ministrava mais de 40 horas/aulas por semana e a maioria dedicava de 3 a 4 horas semanais para o preparo de suas aulas.

Já a maioria dos professores do G2 atuava no 9º ano, tinha idade entre 36 e 40 anos (5 professores), era do gênero masculino, cursou licenciatura plena em Matemática em uma instituição de ensino privada e era licenciado há mais de 11 anos (3 professores), sendo que 4 professores desse grupo lecionava há mais de 16 anos. A maioria dos professores do G2 ministrava mais de 32 horas/aulas por semana e dedicava mais de 5 horas semanais para o preparo de suas aulas.

Analisamos ainda qual era o grau de satisfação com a profissão docente e observamos que, embora a maioria dos professores dos dois grupos mostrasse parcialmente satisfeitos, o G1 estava menos satisfeito com a profissão do que o G2.

Para finalizar a primeira parte da nossa análise, relacionada ao perfil dos professores, questionamos qual é a importância do ensino de fração e o G2 foi o grupo que valorizou mais esse conceito.

Elaboração de situações-problema

Com base na análise dos dados em relação à elaboração das situações-problema, observamos os professores do G1 atenderam de maneira mais contundente nossa solicitação, já que todos os professores desse grupo

elaboraram as cinco situações-problema envolvendo o conceito de fração. Já alguns professores do G2 não elaboraram todas as situações-problema.

Em relação às situações-problema elaboradas, constatamos que os professores dos dois grupos apresentaram competência para elaborá-las, visto que tivemos apenas três situações-problema classificadas como inconsistente em cada um dos grupos.

No cerne da utilização dos cinco significados de fração, observamos que houve uma tendência dos dois grupos em privilegiar os significados Operador Multiplicativo e Parte-todo, sendo que no G1 o significado mais explorado nas situações-problema elaboradas foi o Operador Multiplicativo (42,30%) e no G2 o Parte-todo (42,50%). Notamos ainda que o grupo que apresentou uma diversificação maior dos problemas foi o G1.

No que tange à presença de representação icônica nos enunciados das situações-problema elaboradas, observamos que o comportamento dos dois grupos foi a de privilegiar a ausência do ícone em seus enunciados, embora o G2 tenha se utilizado mais desse recurso do que o G1.

No âmbito dos invariantes do conceito de fração – ordem e equivalência – notou-se que apenas o G2 esteve atento a isso, já que 17,5% das situações-problema elaboradas focaram o trabalho com tais invariantes.

Respostas das situações-problema elaboradas

Em relação à consistência das respostas constatamos que os professores dos dois grupos se mostraram competentes em resolver as situações-problema que eles próprios elaboraram, pois apresentaram um baixo número de respostas inconsistentes, sendo que o G1 teve o índice de inconsistência menor que o G2 (3,85% e 15% respectivamente).

Em relação às estratégias utilizadas para responder as situações-problema, a análise dos dados nos levou a supor há fortes indícios que o ensino do conceito de fração é muito mais focado nos aspectos procedimentais, com a utilização de regras e algoritmos, do que nos procedimentos conceituais, que

privilegiem, por exemplo, a utilização de ícones como recurso didático. Constatamos que o G1 utiliza com maior frequência do que o G2 a estratégia que coordena a utilização de ícones com algoritmos.

Competências didáticas

Observamos que o desempenho dos professores dos dois grupos foi muito além do esperado, pois ambos os grupos se mostraram bastante competentes em resolver as situações-problema propostas. De um modo geral, constatamos que o índice de acertos para os dois grupos ficou acima de 93% na resolução das situações-problema propostas.

Em relação às estratégias de resolução das situações-problema e às estratégias de ensino propostas pelos professores, chamou a atenção o alto índice de resoluções e estratégias baseadas na categoria percepção apresentado pelos dois grupos e, ainda a confusão em representar a razão como fração, apresentada principalmente pelo G1.

6.3 Respondendo à questão de pesquisa

Nosso estudo teve por objetivo identificar e analisar as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática, que atuam no 3º ou 4º ciclo do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração em seus diferentes significados..

Com esse objetivo em mente, elaboramos a nossa questão de pesquisa, já apresentada no início deste capítulo, mas que consideramos prudente voltar a apresentar para relacioná-la com a resposta encontrada no estudo para ela:

Quais as concepções e competências apresentadas por professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclos do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração em seus diferentes significados?

Antes de responder a nossa questão de pesquisa, é preciso lembrar que nosso estudo foi realizado com uma amostra não aleatória, envolvendo uma quantidade pequena de professores (21, divididos em dois grupos, ficando G1 com 11 e o G2 com 10 professores). Portanto, sabemos que não possuímos uma amostra suficientemente grande e tampouco coletada de forma aleatória que nos permita extrapolar para além de nossa população. Mas, mesmo assim, sentimo-nos confortáveis para considerar que nossos resultados, coletados e analisados no rigor científico, podem trazer valiosas contribuições no sentido de oferecer pistas sobre as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática que atuam no 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental, sobre o ensino de fração em seus diferentes significados.

Para facilitar dividiremos a resposta em duas, na qual a primeira focaremos na concepção que os professores apresentaram sobre fração, e na segunda, suas competências em lidar com ela.

Concepção: Os professores dos dois grupos apresentaram uma concepção restrita de fração, voltada apenas para dois significados: Parte-todo e operador multiplicativo. Além disso, houve uma ênfase em tratar fração apenas do ponto de vista do algoritmo. Em outras palavras, o comportamento desses professores nos permite concluir que a fração é vista apenas como um procedimento matemático. Tal concepção pode ser entendida entre o grupo de professores que atua no 4º ciclo do Ensino Fundamental (professores do G2), já que nesses anos a fração é bastante utilizada como ferramenta procedimental para a resolução de problemas algébricos e este uso constante pode ter feito os professores desse grupo se afastar das outras possíveis concepções de fração. Mas essa concepção predominantemente presente entre os professores do G1 não poderia ser justificado pelo seu dia-a-dia docente, já que o ensino de fração no ciclo em que eles atuam não tem a conotação de ferramenta para resolução de problemas algébricos. Assim, uma explicação para o comportamento do G1 no que tange ao uso exacerbado de algoritmo, pode ser a sua própria formação inicial, quando a concepção de fração se restringia ao uso de um algoritmo.

Competência: de um modo geral, do ponto de vista da elaboração e resolução das situações-problema, os professores mostraram-se competentes. Porém, de forma particular, alguns professores, principalmente os pertencentes ao G1, apresentaram alguma confusão entre tratar uma situação do ponto de vista Parte-parte (razão) e do ponto de vista Parte-todo (fração). Tal comportamento, quando levado a cabo no ambiente de ensino, pode gerar confusões e concepções errôneas nos estudantes.

Ao compararmos as competências dos grupos para lidar com o conceito de fração, concluímos que, apesar dos baixos índices de erros e/ou inconsistências apresentadas por ambos, o G2 apresentou-se mais competente do que o G1. Concluímos isso baseado no fato de que o G1 apresentou um maior índice de confusão em utilizar a razão como fração, assim como apresentou um maior índice da utilização da percepção como principal estratégia de ensino para fração, distanciando-se assim dos invariantes lógicos presentes nesse conteúdo e que, quando apropriados, permitem sua sólida compreensão.

Frente às reflexões feitas sobre o fechamento desse estudo, temos a convicção de que se faz necessário um trabalho de formação continuada, consistente, que promova o desenvolvimento dos professores em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados.

6.4 Sugestões para futuras pesquisas

Nesse estudo, o nosso objetivo foi identificar e analisar as concepções e competências dos professores especialistas em Matemática que atuam no 3º ou 4º ciclo do Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração em seus diferentes significados. Para alcançarmos tal objetivo, muitas outras questões ficaram latentes no decorrer do trabalho, as quais propomos para futuras pesquisas:

- Os (novos) materiais didáticos adotado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo têm a preocupação de trabalhar com os resultados apresentados nas recentes pesquisas diagnósticas relacionas a fração?

Com essa questão poderíamos diagnosticar se os materiais didáticos propiciam aos alunos e professores uma visão mais ampla do ensino e da aprendizagem do conceito de fração em seus diferentes significados.

Outra questão seria:

- Um curso de formação continuada é capaz de promover melhoras no ensino e na aprendizagem do conceito de fração em seus diferentes significados?

Essa outra questão nos permitiria comparar a influencia que um curso de formação continuada possa ter no entendimento dos professores, e consequentemente de seus alunos, no que diz respeito o conceito de fração. Esta questão poderia acompanhar um trabalho comparativo entre professores e seus alunos que não participaram da formação continuada com os que participaram.

Gostaríamos ainda de propomos a futuros trabalhos, que de posse dos dados adquiridos nessa pesquisa diagnóstica realize um trabalho de intervenção com professores, a fim de minimizar ou até mesmo superar alguns entendimentos errôneos e/ou confusos diagnosticados aqui.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, 1999.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023**: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

ÁVILA, G. **Introdução à análise Matemática**. 2ª ed. rev. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BEHR, M. J. et al. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1983. p. 296-333.

BEZERRA, F. J. **Introdução do Conceito de Número Fracionário e de suas Representações**: Uma abordagem Criativa para a Sala de Aula. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2001.

BISHOP, A. J. **Mathematical Enculturation**: A Cultural perspective on Mathematics Education. Third printing. Cambridge, UK, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Brasília, DF, 1996.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF, 1997.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação de Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF, 1998.

CAMPOS, T. et al. **Uma análise da construção do conceito de fração**: relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, não publicada, 1995.

CAMPOS, T. Magina; S. Nunes, T. O. **Professor polivalente e a fração**: conceitos e estratégias de ensino. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 125-136, 2006.

CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1988.

_____. **Conceitos fundamentais da Matemática – Tipografia Matemática**, Lisboa: [s.n.], 1952.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A. **Metodologia científica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1983.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CURY, H. N. **Concepções e crenças dos professores de matemática**: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. São Paulo, ano 12, n. 13, p. 29-44, 1999.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. Tese de Doutorado em Educação Matemática, PUC/SP, 2007.

ESTRADA, M. Fernanda. A Matemática no Antigo Egito. In: ESTRADA, M. Fernanda et al. **História da matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. pp. 19-60.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FIORENTINI, D. et.al. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. **Revista Educação em Revista**, Belo Horizonte, p. 102, 2003. Dossiê Educação Matemática.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, p. 155-196, 1999.

IEZZI, G; DOLCE, O; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Editora Atual, 1991.

_____. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Editora Atual, 2000.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 8 ed. São Paulo: Globo, 1996.

JAKUBO, J; LELLIS, M. **Matemática na Medida Certa**. São Paulo: Editora Scipione, 1994.

_____. **Matemática na Medida Certa**. São Paulo: Editora Scipione, 2002.

KERSLAKE, D. **Fractions: children's strategies and errors**: a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

KIEREN, T. E. **Number and measurement**: mathematical, cognitive and instructional foundations of rational number. Columbus: OHERIC/SMEA, 1976. p. 101-144.

_____. Multiple views of multiplicative structures. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics**. New York: State University of New York Press, 1994. p. 389-400.

_____. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: J. HIEBERT J.; BEHR, M. (eds.). **Number concepts and operations in the Middle Grades**. New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-80.

_____. Rational and Fractional Numbers: From quotient Fields to Recursive Understanding, in **Rational Numbers: An Integration of Research**, Londres, 1993.

MAGINA, S. M. P. O Computador e o Ensino da Matemática. **Tecnologia Educacional**, v. 26, nº 140, 1998. pp. 41- 45.

MAGINA, S. M. P; CAMPOS, T. M. M; NUNES, et al. **Repensando Adição e Subtração**. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S. M. P; CAMPOS, T. M. M. **A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental**. Rio Claro, v. 31, p. 23-40, 2004.

MAGINA, S. M. P. **REPARE em EdMat**: Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática, 2008. Disponível em:
< http://www.pucsp.br/pos/edmat/grupo_sandra.html > , acesso em setembro de 2010.

MAGINA, S. M. P; CAMPOS, T. **Teacher's conceptions of fractions and their teaching strategies**, 2004. Copenhagen. ICME- International Congress of Mathematical Education. Disponível em: < <http://www.icme-organisers.dk/tsg22/> .> Acesso em: 10 de janeiro de 2011.

MALASPINA, M. C. O. **O início do ensino de Fração: uma intervenção com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração e seus diferentes significados**: um estudo junto a alunos de 5 e 6ª série do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

MOUTINHO, L. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo junto a alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

NUNES, T; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. et al. **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

_____. **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, June, 2003.

_____. **Educação Matemática**: números e operações numéricas. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Numbers concepts and operations in the middle grades**. Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1989. p. 53-92.

PERRENOUD, P. **Enseigner: agir dans l'urgence décider dans l'incertitude**. Paris: ESF éditeur, 1996.

_____. **Novas Competências para Ensinar**. Tradução de Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

_____. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação**. Educação Matemática: temas de investigação. Lisboa: IIE, 1992.
Disponível em: < <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/index.html> > . Acesso em: 12 outubro de 2010.

PONTE, J. P. **A formação ao Desenvolvimento Profissional**. Actas do ProMat, Lisboa: APM, 1998. pp. 27-44. Disponível em:
 < <http://educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/index.html>.> Acesso em 12 de outubro de 2010.

RICO, L. Pensamento numérico. In H., Guimarães (Org.). **Dez anos de ProfMat – Intervenções**. Lisboa: APM, 1996. pp. 145-181.

RICO, L. et al. **Concepciones y creencias Del profesorado de secundaria andaluz sobre enseñanza-aprendizaje y evaluación em matemáticas**. Lisboa: APM, 2002.

RODRIGUES, R. R. **Números racionais**: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa**. Petrópolis: Editora Vozes, 1992.

SANT'ANA, D. C; BITTENCOURT, J.; OLSSON, S. **Transposição e Mediação Didática no Ensino de Frações Transposition and Didactic Mediation at Fractions Teaching**. UNESP, 2006. Disponível em:
 < www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/.../1086> acesso em 12 de outubro de 2010.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática: 1º. Grau**. 3. ed. São Paulo, 1998.

SÃO PAULO (Estado). Governo do Estado de São Paulo. **Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo**. Relatório SARESP, 2008.

SÃO PAULO (Governo). **Índice Paulista de Responsabilidade Social de 2004**. Disponível em: < [www.al.sp.gov.br/web/forum/iprs06/- Emcache](http://www.al.sp.gov.br/web/forum/iprs06/-Emcache) > acesso em 02 de fevereiro de 2010.

SHULMAN, L.S. **Those who understand knowledge growth in teaching**. Educational Researcher, v. 15, n. 2, São Paulo, p. 4-14, 1992.

SILVA, A. F. G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente**: Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, A. F. G; Campos T. M. M; Canova, R. F. **Currículo de matemática**: propostas para o ensino de fração, XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

SILVA, M. C. A Matemática na Índia Medieval. In: ESTRADA, M. Fernanda et al. **História da matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1997. pp. 369-401.

SILVA, M. J. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

_____. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de fração e o livro didático**: um estudo investigativo. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC/SP, 2008.

VERGNAUD, G. **Problem solving and concept development in learning of mathematic.** E. A. R. L. I. Second Meeting. Tübingen, 1987.

_____. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 23, 133-170, 1990.

_____. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). **1º Seminário Internacional de Educação Matemática.** Anais... Rio de Janeiro: Seminário Internacional de Educação Matemática, 1993. p. 1-26.

APÊNDICE I

INSTRUMENTO – PARTE 1

1. Nome: _____
2. Idade: ☐ de 21 a 25 anos, ☐ de 26 a 30 anos, ☐ de 31 a 35 anos,
☐ de 36 a 40 anos, ☐ de 41 a 45 anos, ☐ mais de 45 anos
3. Gênero: ☐ Masculino ☐ Feminino
4. Formação Acadêmica: ☐ Instituição Pública ☐ Instituição Privada
5. Ensino Superior: ☐ Licenciatura em Matemática ☐ Pedagogia
☐ Outra licenciatura, Qual? _____ ☐ Outro curso, Qual? _____
6. Há quanto tempo concluiu o Ensino Superior?
☐ 1 a 5 anos, ☐ 6 a 10 anos, ☐ 11 a 15 anos
☐ 16 a 20 anos, ☐ 21 a 25 anos ☐ Mais de 25 anos
7. Há quanto tempo você leciona:
☐ 1 a 5 anos, ☐ 6 a 10 anos, ☐ 11 a 15 anos
☐ 16 a 20 anos, ☐ 21 a 25 anos ☐ Mais de 25 anos
8. Qual o número de horas/aulas semanais que você ministra?
☐ entre 1 e 8 horas, ☐ entre 9 e 16 horas, ☐ entre 17 a 24 horas
☐ entre 25 e 32 horas, ☐ entre 33 e 40 horas ☐ Mais de 40 horas
9. Normalmente quantas horas semanais você disponibiliza para preparar suas aulas de matemática?
☐ entre 1 e 2 horas, ☐ entre 3 e 4 horas, ☐ 5 a 6 horas
☐ entre 7 e 8 horas, ☐ entre 9 e 10 horas ☐ Mais de 10 horas
10. Neste ano letivo, em que série ministra o maior número de aulas?
☐ 5ª série/6º ano ☐ 6ª série/7º ano
☐ 7ª série/8º ano ☐ 8ª série/9º ano
☐ 1º ano do Ensino Médio ☐ 2º ano do Ensino Médio
☐ 3º ano do Ensino Médio
11. Qual o seu grau de satisfação com a Profissão de Professor?
☐ Plenamente satisfeito ☐ Parcialmente satisfeito
☐ Pouco satisfeito ☐ Nada satisfeito

12. O que precisa melhorar na profissão de professor (pode listar até 3 coisas)

13. Qual a importância do ensino de fração?

☐
☐

Muito importante
Pouco importante

☐
☐

Importante
sem importância

14. Enumere 3 razões que justifiquem sua escolha no item 13.

INSTRUMENTO – PARTE 2

Nome: _____

Elabore 5 situações-problema envolvendo frações que você costuma trabalhar em sala de aula:

Situação-problema 1:

Situação-problema 2:

Situação-problema 3:

Situação-problema 4:

Situação-problema 5:

INSTRUMENTO – PARTE 3

Resolva as 5 situações-problema envolvendo frações que você elaborou:

Resolução da Situação-problema 1:

Resolução da Situação-problema 2:

Resolução da Situação-problema 3:

Resolução da Situação-problema 4:

Resolução da Situação-problema 5:

INSTRUMENTO – PARTE 4

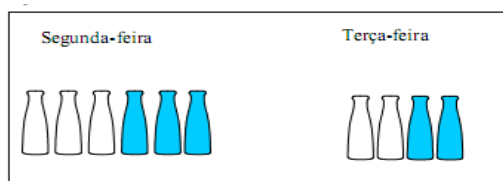
NOME: _____

As situações-problema apresentadas abaixo foram aplicadas a alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, destacamos algumas respostas e pedimos a sua colaboração na análise dessas respostas.

Problema 1: Um pintor fez mistura de tintas para poder pintar uma casa na segunda-feira e na terça-feira, na segunda-feira misturou 3 litros de tinta branca e 3 de tinta azul. Na terça-feira misturou 2 litros de branca e 2 de azul, como mostra o quadro abaixo.

a) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira?

b) Represente a fração da tinta azul com relação ao total de tinta na segunda-feira.



Um aluno deu as seguintes respostas:

a) vai, a tinta vai ter a mesma cor na segunda-feira e na terça-feira.

b) a fração é $\frac{3}{3}$.

item a): Na sua concepção a resposta do aluno, para esse item, está: Certa ☐ Errada ☐

item b): Na sua concepção a resposta do aluno, para esse item, está: Certa ☐ Errada ☐

Como você resolveria os dois itens?

Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

Problema 2: Rodrigo gostaria de abrir uma oficina mecânica. Para isso, precisa de $\frac{3}{6}$ das ferramentas representadas abaixo. Quantas ferramentas ele precisa?



Um aluno deu a seguinte resposta:

Rodrigo precisa de 3 ferramentas.

Na sua concepção a resposta do aluno está: Certa ☐ Errada ☐

Como você resolveria o problema?

Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

Problema 3: Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.



Que fração de chocolate cada criança receberá?

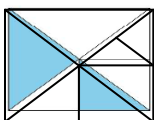
Um aluno deu a seguinte resposta: $\frac{4}{3}$

Na sua concepção a resposta do aluno está: Certa ☐ Errada ☐

Como você resolveria o problema?

Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

Problema 4: Que fração representa as partes pintadas da figura?



Um aluno deu a seguinte resposta: $\frac{3}{8}$

Na sua concepção a resposta do aluno está: Certa ☐ Errada ☐

Como você resolveria o problema?

Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

Problema 5: Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{3}{5}$ do chocolate dela e Paulo comeu $\frac{3}{4}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo?

Um aluno deu a seguinte resposta:

Maria e Paulo comeram o mesmo tanto, porque os dois comeram três pedaços dos seus chocolates.

Na sua concepção a resposta do aluno está: Certa ☐ Errada ☐

Como você resolveria o problema?

Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

APÊNDICE II

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: **Concepções e Competências de Professores Especialistas em Matemática em relação aos diferentes significados de fração**, desenvolvida por **Fabio Meneses Costa**.

Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela **Prof^a Dra Sandra Maria Pinto Magina**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário através do e-mail **sandra@pucsp.br**.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é identificar as concepções e competências de professores especialistas em matemática em relação aos diferentes significados de fração.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações por mim oferecidas estão submetidos às normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos.

Minha colaboração se fará de forma anônima, por meio das respostas descritas no instrumento de pesquisa elaborada pelo pesquisador, a ser respondido a partir da assinatura desta autorização. O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e pela sua orientadora.

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem qualquer prejuízo, sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Mauá, ____ de _____ de ____

Assinatura do(a) participante: _____

Assinatura do(a) pesquisador: _____

Assinatura do(a) testemunha(a): _____