

EDNALDO JOSÉ LEANDRO

**UM PANORAMA DE ARGUMENTAÇÃO DE ALUNOS DA
EDUCAÇÃO BÁSICA: O CASO DO FATORIAL.**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2006**

EDNALDO JOSÉ LEANDRO

**UM PANORAMA DE ARGUMENTAÇÃO DE ALUNOS DA
EDUCAÇÃO BÁSICA: O CASO DO FATORIAL.**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre Profissional em Ensino de Matemática**, sob a orientação da **Profa. Dra. Siobhan Victoria (Lulu) Healy**.

PUC/SP
São Paulo
2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Edgar(em memória) e Edite

À minha esposa, Márcia Elisa

Aos meus filhos, Marco, Eduarda e Eduardo

AGRADECIMENTOS

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela bolsa de estudo.

À minha orientadora Lulu Healy por sua orientação e apoio em todo este trabalho.

Às professoras Sônia Pitta e Celi Lopes, *pelas sugestões dadas na qualificação*.

Aos colegas de Mestrado pela amizade e companheirismo.

À minha esposa Márcia pela paciência e apoio durante esta trajetória.

À minha amiga Rose Marinelli, por sua colaboração e amizade.

A toda a minha família.

Meu muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho trata do objeto matemático fatorial. Ele visa contribuir com o projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME), que tem como uma das metas elaborar um levantamento das concepções sobre argumentação e provas de estudantes brasileiros. Para este levantamento, foram elaborados dois questionários, um de Álgebra e outro de Geometria, aplicados a uma amostra composta por 2012 alunos na faixa etária entre 14 e 16 anos, matriculados na 8ª série do Ensino Fundamental ou 1ª série do Ensino Médio em escolas no Estado de São Paulo. As questões que analisamos estão inseridas no questionário de álgebra.

Depois de uma análise descritiva dos dados coletados, que indicou consideráveis dificuldades dos alunos em construir argumentos válidos, uma análise multidimensional foi efetuada, utilizando o software CHIC. Com os resultados dessa análise foi possível identificar principalmente três grupos distintos de alunos os que não conseguiram resolver as questões com a noção do fatorial; os alunos que privilegiaram o uso de cálculos numéricos nas suas respostas e os alunos que enfocaram propriedades do fatorial na construção de suas justificativas. Também foi possível identificar aqueles alunos cujos perfis de respostas mais contribuíram para a formação de tais grupos. Numa segunda fase, alguns desses alunos foram entrevistados para a obtenção de mais informação em relação às motivações de suas respostas. Nessa fase, o questionário também foi aplicado aos professores de escolas participantes da amostra.

Em geral, nossas análises, tanto quantitativas quanto qualitativas, sugerem que a questão de argumentação e provas, pelo menos em relação à multiplicação e divisão, não estão sendo contempladas com esses alunos. Os que conseguiram responder às questões privilegiaram o cálculo como a principal ferramenta e poucos foram os que justificaram suas respostas com o uso de propriedades, por exemplo, citando a inversa relação entre multiplicar e dividir.

Palavras Chaves: Prova e Argumentação, Divisibilidade, Fatorial, Análise Multidimensional, Educação Matemática.

ABSTRACT

This work focuses on the mathematical object factorial. It is part of the project Argumentation and Proof in School Mathematics (AprovaME), which involves a survey of the conceptions of Brazilian students. For this survey, two questionnaires were developed, one related to the domain of algebra and the other geometry and administered to a sample composed of 2012 students aged between 14 and 16 years, studying in the 8th grade or the 1st year of High School of schools located in the state of São Paulo. The questions analyzed for this study were included in the algebra questionnaire.

Following a descriptive analysis of the data collected, which indicated that the students had considerable difficulties in constructing valid mathematical arguments, the data set was subjected to a multidimensional analysis using the software CHIC. The results obtained from this analysis evidenced three distinct groups of students within the sample: those who were unable to respond to questions involving the notion of factorial; students who privileged the use of numeric calculations in their responses; and students who focused on the properties of the factorial in constructing their justifications. It was also possible to identify those students whose response profiles most contributed to the formation of these groups. In a second phase of analysis, some of these students were interviewed in order to obtain additional data related to factors motivating their responses. In this phase the questionnaire was also administered to mathematics teachers in schools that made up the sample.

In general, the results, both quantitative and qualitative, suggest that the question of argumentation and proof, at least in relation to multiplication and division, is not being contemplated with these students. Calculations were the principle tools used by those who managed to respond to the questions and few students were able to justify their responses using mathematical properties, such as, for example, referring to the inverse relationship between multiplication and division.

Keywords: Proof and Argumentation, Divisibility, Factorial, Multidimensional Analysis, Mathematics Education.

SUMÁRIO

Apresentação.....	01
Capítulo I – Estudos preliminares.....	02
1.1 Histórico.....	03
1.1.1 Certeza e Incerteza	05
1.2 Provas no contexto da Educação Matemática	16
Capítulo II – Procedimentos Metodológicos	22
2.1 O Projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar	22
2.2 Descrição do Questionário	24
2.2.1 Primeiro bloco – Avaliação de vários argumentos.....	25
2.2.2 Segundo bloco Construção de provas e argumentos.....	29
2.3 A Questão A5 - Fatorial	30
2.4 Coleta dos dados.....	33
2.4.1 Descrição da amostra.....	33
2.4.2 Aplicação do questionário.....	33
2.4.3 Codificações utilizadas na Questão A5	34
2.5 Análises qualitativa e quantitativa.....	35
2.6 Divisibilidade.....	36
2.6.1 Fatorial.....	36
2.6.2 Divisibilidade em livros didáticos	38
Capítulo III – Análise de Dados	41
3.1 Análise descritiva.....	41
3.1.1 Análise descritiva geral.....	41
3.1.2 Análise por rede de ensino	48
3.1.3 Análise por séries que frequentam	51
3.2 Análise Multidimensional	53
3.2.1 Árvore coesitiva	54
3.3 As entrevistas	67
3.4 Dados adicionais – Os professores	82
Conclusão.....	87
Bibliografia.....	90
ANEXOS.....	94
Anexo 1 Questionário de Álgebra.....	95
Anexo 2 Questionário de Geometria	100

Anexo 3 Piloto.....	105
Anexo 4 Alguns exemplos das codificações utilizadas.....	112
Anexo 5 Apêndice, em português, da ajuda do software CHIC, versão 3.5.....	114
Anexo 6 Indicações do “GRUPO ÓTIMA”	124

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circunferência	07
Figura 2 – Comparação de segmentos múltiplos	07
Figura 3 – Comparação de segmentos não-múltiplos	08
Figura 4 – Segmentos EF	08
Figura 5 – Nosso Modelo.....	11
Figura 6 – Círculos máximos	12
Figura 7 – Questão A1 do questionário de Álgebra(1ª Parte)	27
Figura 8 – Questão A1 do questionário de Álgebra(2ª Parte)	28
Figura 9 – Questão A2 do questionário de Álgebra.....	29
Figura 10 – Questões A3 e A4 do questionário de Álgebra	30
Figura 11 – Questão A5 do questionário de Álgebra.....	32
Figura 12 – Número de acertos e erros nas questões	43
Figura 13 – Percentual de acertos e erros nas questões	43
Figura 14 – Acertos à questão A5(a) por rede de ensino	49
Figura 15 – Acertos à questão A5(b) por rede de ensino	49
Figura 16 – Acertos à questão A5(c) por rede de ensino	50
Figura 17 – Acertos à questão A5(d) por rede de ensino	50
Figura 18 – Acertos à questão A5(e) por rede de ensino	50
Figura 19 – Acerto à questão A5(a) por séries que frequentam.....	52
Figura 20 – Acerto à questão A5(b) por séries que frequentam.....	52
Figura 21 – Acerto à questão A5(c) por séries que frequentam.....	52
Figura 22 – Acerto à questão A5(d) por séries que frequentam.....	52
Figura 23 – Acerto à questão A5(e) por séries que frequentam.....	52
Figura 24 – Árvore coesitiva – acertos e erros	56
Figura 25 – Árvore coesitiva geral	59
Figura 26 – Árvore coesitiva do Grupo 3	60
Figura 27 – Árvore coesitiva do Grupo 4	62
Figura 28 – Árvore coesitiva do Grupo 5	65
Figura 29 – Respostas dadas às questões A5(a) e A5(b) pela aluna 3	71
Figura 30 – Respostas dadas às questões A5(c), A5(d) e A5(e) pela aluna 3.....	72
Figura 31 – Respostas dadas às questões A5(a) e A5(b) pelo aluno 4	73
Figura 32 – Resposta dada à questão A5(c) pelo aluno 4	73
Figura 33 – Resposta dada à questão A5(d) pelo aluno 4	74
Figura 34 – Resposta dada à questão A5(e) pelo aluno 4	74
Figura 35 – Respostas dadas às questões A5(a), A5(b), A5(c) e A5(d) pelo aluno 5....	75

Figura 36 – Respostas dadas às questões A5(d) e A5(e) pelo aluno 5	76
Figura 37 – Resposta dada à questão A5(b) pelo aluno 6	77
Figura 38 – Respostas dadas às questões A5(a) e A5(c) pelo aluno 6.....	77
Figura 39 – Resposta dada à questão A5(d) pelo aluno 6	78
Figura 40 – Resposta dada à questão A5(e) pelo aluno 6	78
Figura 41 – Resposta dada à questão A5(a) pelo aluno 7	80
Figura 42 – Resposta dada à questão A5(b) pelo aluno 7	80
Figura 43 – Respostas dadas às questões A5(c) e A5(d) pelo aluno 7	81
Figura 44 – Resposta dada à questão A5(d) pelo aluno 7	81
Figura 45 – Resposta dada à questão A5(e) pelo aluno 7	82
Figura 46 – Resposta dada à questão A5(a) por professor.....	83
Figura 47 – Resposta dada à questão A5(c) por professor	84
Figura 48 – Respostas dadas à questão A5(d) por professores	84
Figura 49 – Resposta dada à questão A5(e) por professor.....	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Respostas Apresentadas pela Amostra	42
Tabela 2 – Justificativas Apresentadas pelos estudantes que acertaram a questão A5(a)	44
Tabela 3 – Justificativas Apresentadas pelos estudantes que acertaram a questão A5(c).....	46
Tabela 4 – Justificativas Apresentadas pelos estudantes que acertaram a questão A5(d)	47
Tabela 5 – Justificativas Apresentadas pelos estudantes que acertaram a questão A5(e)	48
Tabela 6 – Número de alunos da amostra pertencentes a cada uma das redes de ensino	49
Tabela 7 – Número de alunos matriculados na 8ª Série do EF e 1ª Série do EM.....	51
Tabela 8 – Índice de coesão das classes dos Grupos 1 e 2	56
Tabela 9 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 1	58
Tabela 10 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 2	58
Tabela 11 – Índice de coesão do Grupo 3.....	61
Tabela 12 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 3	62
Tabela 13 – Índice de coesão do Grupo 4.....	63
Tabela 14 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 4	64
Tabela 15 – Índice de coesão do Grupo 5.....	65
Tabela 16 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 4	66

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Demonstração clássica da irracionalidade da $\sqrt{2}$	09
Quadro 2 – Codificações usadas nas questões A5(a) e A5(c).....	34
Quadro 3 – Codificações usadas na questão A5(b)	35
Quadro 4 – Codificações usadas nas questões A5(d) e A5(e).....	35

APRESENTAÇÃO

Foi proposto pela coordenadora do projeto AProvaME (Argumentação e Provas na Matemática Escolar), orientadora deste trabalho, que um grupo de cinco mestrandos participantes do projeto fizessem uma análise estatística descritiva dos questionários aplicados na primeira fase do projeto. O objetivo desta fase é realizar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de estudantes brasileiros. Com este fim, foram elaborados dois questionários, um de álgebra e outro de geometria, aplicados a uma amostra de alunos da 8ª série do ensino fundamental e 1ª série do ensino médio no total de 2012 estudantes, cuja faixa etária está entre 14 e 16 anos.

Esta dissertação faz parte e visa contribuir com o projeto AProvaME. Elaboramos uma análise quantitativa e outra qualitativa dos dados obtidos em questões que abordam o fatorial, inserido no questionário de álgebra do referido projeto.

No Capítulo 1, elaboramos uma breve visão histórica da prova, focalizando as contribuições e os problemas causados pela intuição humana na área da matemática. Citamos ainda pesquisas sobre provas matemáticas na área da Educação Matemática. Finalizamos o capítulo abordando tópicos de divisibilidade, por estarem diretamente envolvidas nas questões que analisamos.

No Capítulo 2, apresentamos o projeto AProvaME, e a elaboração, descrição, aplicação e codificação dos questionários.

No Capítulo 3, com os dados obtidos, elaboramos uma análise quantitativa, primeiramente usando a estatística descritiva e em seguida fazendo uma análise multidimensional com o uso do software C.H.I.C.(Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesiva), usando o método de análise chamado árvore coesitiva, que evidenciou grupos de comportamentos dos alunos na resolução e justificativas das questões que envolvem o fatorial. Também apontou os alunos que mais colaboraram para a formação destes grupos e escolhemos alguns deles para entrevistar.

CAPÍTULO I

ESTUDOS PRELIMINARES

"Uma disciplina [a matemática] na qual não sabemos do que falamos, nem se o que dizemos é verdade".

Bertrand Russell (1872-1970)

"Todo homem, por natureza, quer saber".

Aristóteles(384-322a.C.)

Nas frases acima, o inglês Russell e o grego Aristóteles citam opiniões que podem servir de resumo para o desenvolvimento das provas matemáticas. A exigente mente humana sempre causou dúvidas e incertezas, estimulando a busca de novos argumentos e métodos para voltar à harmonia. Desenvolvendo-se assim devido à incansável natureza humana de querer saber, de sempre estar disposto a enfrentar os desafios e superá-los.

Os matemáticos sempre estão em busca da certeza, sendo incansável e vasta a produção matemática, mas como em uma linha de produção, nunca descuidam dos padrões de qualidade, detectando falhas, reparando-as e buscando aperfeiçoá-las.

Neste capítulo, abordamos três tópicos para situar o leitor no universo desta dissertação. Daremos uma idéia das provas e seus avanços, sempre atrelada aos problemas causados pela nossa intuição, que também se mostrou essencial para novas descobertas na matemática. Abordamos também pesquisas, na área da Educação Matemática, cujo foco sejam as provas matemáticas e para finalizar abordamos ainda a divisibilidade, já que o tema está diretamente envolvido nas questões que analisamos neste trabalho.

1.1 HISTÓRICO

A Matemática tem suas bases na intuição, idéias, argumentos, exploração de hipóteses, conjecturas, generalizações e demonstrações. Sem elas a Matemática jamais seria a ciência que conhecemos. Neste trabalho mesmo reconhecendo diferenças, como as definidas por Balacheff(1987) e Duval(1993), utilizamos as palavras provas e demonstrações como sinônimos e ambas estão ligadas às validações das idéias matemáticas, mesmo sabendo que essas noções evoluíram muito com o tempo e hoje encontramos vários significados para elas.

Os Matemáticos sempre procuraram dar à Matemática um fundamento sólido, no qual a influência da intuição ficasse de fora - Mesmo causando problemas, polêmicas e mal-estar à comunidade matemática ao longo dos séculos - A intuição se mostrou importante como desafio à mente humana na busca de soluções para os problemas apresentados, sendo assim responsável direta por grandes avanços, desenvolvendo, ampliando e criando novas áreas em toda a matemática e nas ciências em geral.

Boyer(1974, p.35) e Eves(1995, p.25), apontam como o primeiro matemático preocupado com as demonstrações, Tales de Mileto (c. 600 a.C.). Para ele: *“A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos”*. Boyer(1974, p.33). A preocupação de como podemos ter certeza se um raciocínio é correto ou não, levou muitos outros matemáticos a trabalhar no tema na antiguidade, como: Parmênides(c. 450 a. C.), cuja teoria gerou muitas polêmicas, seu discípulo Zenão de Eléia(c. 450-a. C.) e Platão(427-347 a.C.). Para este último as coisas que observamos com nossos sentidos não são verdadeiras, o que vemos são apenas imagens distorcidas da verdade pelas imperfeições dos nossos sentidos e as únicas verdades são aquelas concebidas pela razão. Platão discutiu também, os fundamentos da Matemática, esclarecendo algumas definições e reorganizando hipóteses. Seu discípulo mais famoso foi Aristóteles(384-322 a.C.), uma das grandes personalidades na Lógica Matemática.

Aristóteles construiu uma sofisticada teoria dos argumentos, cujo núcleo é a caracterização e análise do chamado silogismo. Ele foi autor de vários livros

(Categorias, Analíticos I, Analíticos II, o Peri Hermeneias (interpretação), Tópicos e Refutação de argumentos sofistas), que seriam editados por Andrônico de Rodes no século I d.C. e que receberam posteriormente o nome de Organon.

Um exemplo clássico de raciocínio baseado em premissas e conclusões da Lógica Aristotélica conhecido como silogismos, é:

Premissa 1: Todo homem é mortal

Premissa 2: Sócrates é homem

Conclusão: Logo Sócrates é mortal.

É atribuída a Aristóteles a criação da Lógica Matemática, sendo dado por ele um grande passo para orientar o pensamento. No entanto, o considerável avanço para sistematizar e estruturar os conhecimentos matemáticos à luz de noções abstratas, deixando de fora o apoio intuitivo, foi dado por Euclides (c. 300 a.C.), com sua obra “Os Elementos”. Euclides foi um educador e talvez tenha criado sua obra como um livro texto, o que mostra sua preocupação com a educação. O seu inovador método axiomático ou dedutivo, consistia em admitir como verdadeiras certas proposições (mais ou menos evidentes - axiomas ou postulados) e a partir delas, por meio de um encadeamento lógico, chegar às proposições mais gerais (chamadas teoremas). Euclides pedia para que o leitor aceitasse os cinco postulados a seguir, e cada teorema que surgia em seu sistema lógico era consequência direta dos postulados ou dos teoremas já deduzidos a partir destes.

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto para outro qualquer;
2. Qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para constituir uma reta;
3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à dada distância;
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si;

5. Por um ponto não contido em uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela à reta dada.

Este último postulado é conhecido como o postulado das paralelas, que abordaremos mais adiante.

Em sua obra, Euclides não apenas contemplou trabalhos de sistematização da geometria, como também muitos trabalhos de outras partes da matemática. Sua obra possui ao todo 13 livros que abordam:

Livros I-IV, geometria plana elementar;

Livro V, teoria das proporções de Eudoxo (408 a. C. - 355 a. C.);

Livro VI, semelhança de figuras planas;

Livros VII-IX, teoria dos números (já encontramos aqui a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$);

Livro X, classificação geométrica de irracionais quadráticos e as suas raízes quadráticas;

Livros XI-XIII, geometria sólida.

1.1.1 CERTEZA E INCERTEZA

Os axiomas utilizados por Euclides foram considerados durante séculos como fruto de uma intuição clara e distinta. Hoje sabe-se que os seus postulados eram insuficientes e suas definições imprecisas, porém toda obra de Euclides serviu de inspiração e avanços em toda a Matemática. Mas, por que sistematizar e estruturar os conhecimentos matemáticos à luz de noções abstratas, deixando de fora o apoio intuitivo?

Os Matemáticos sempre criaram argumentos e contra-argumentos, especulando as falhas do uso da intuição, mostrando assim como nossa intuição poderia nos levar a enganos. Bons exemplos foram especulados por Zenão. Com

seu método dialético desafiou os conceitos de movimento e de tempo através de quatro paradoxos, que criaram uma certa agitação tanto na concepção atomista, preconizadora da existência dos indivisíveis, como na concepção continuista que apresentava o espaço, tempo e a matéria como divisíveis infinitamente. Encontramos em Boyer (1974), esses famosos paradoxos, sendo o que envolve dois corpos, descrito a seguir:

“Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga”.Boyer(1974; p.55)

No entanto, sabemos que em um determinado instante o corredor Aquiles alcança e após ultrapassa a tartaruga.

O apelo ao infinitamente pequeno, subdivisão infinita do espaço ou tempo, sempre foi polêmico e por esse motivo os matemáticos preferiam não recorrer a essas noções, evitando embaraços como os apresentados por Zenão. No entanto, nossa intuição não vê problemas no uso do infinito, não parecendo algo que devemos recusar. No problema apresentado na Figura 1, verificamos que o uso do infinitamente pequeno não vai chegar a nenhuma incoerência.

Podemos obter a área da circunferência de raio r , subdividindo a circunferência, Figura 1, em vários triângulos. Sabemos que a área do triângulo é a metade do produto da base pela altura. Imaginemos o segmento AB (base do triângulo) cada vez menor, chegaremos à área da circunferência somando os infinitos triângulos que surgiram, todos com bases infinitamente pequenas e altura r .

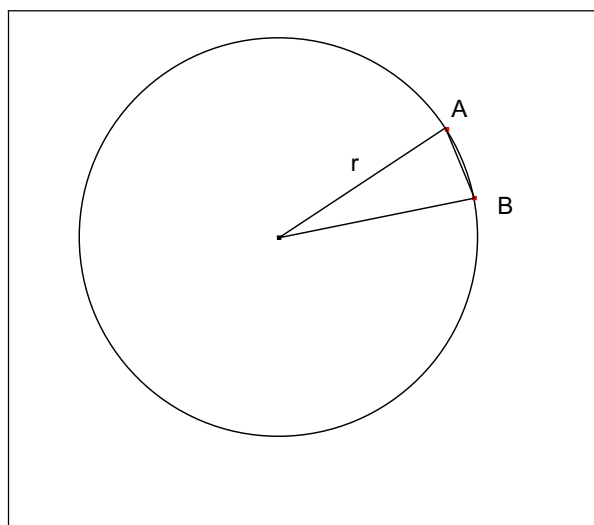


Figura 1 – Circunferência

Contudo, como o problema da comparação de dois segmentos utilizados pelos Gregos ilustra, nossa intuição pode nos enganar.

Nos tempos do Grego Pitágoras de Samos (c.585-c. 500 a.C.), pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta. Isto se mostrou incorreto, abalando muito a filosofia pitagórica.

Os Gregos utilizaram o seguinte método:

Queremos comparar os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. No caso, Figura 2, percebemos que isto é possível e nos basta usar o segmento $\overline{CD}$ como a unidade, pois o segmento $\overline{AB}$ é um múltiplo do segmento $\overline{CD}$, ou que o segmento $\overline{AB}$ pode ser subdividido em 3 segmentos $\overline{CD}$.

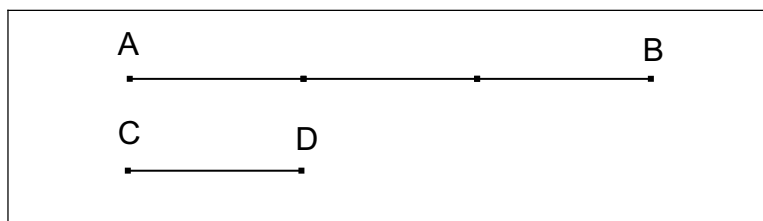


Figura 2: Comparação de segmentos múltiplos

Quando a subdivisão dos segmentos não é possível em um primeiro momento, ou seja, um não é múltiplo do outro, obtemos um segmento menor(submúltiplo) que sirva de unidade para ambos. Vejamos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, Figura 3.

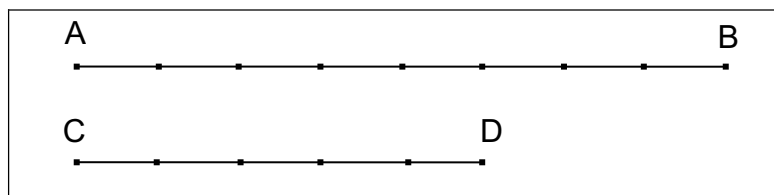


Figura 3 – Comparação de segmentos não-múltiplos

Como o segmento CD não pode ser a unidade, pois AB não é múltiplo de CD, obtemos um outro segmento menor $\overline{EF}$ como unidade, Figura 4.

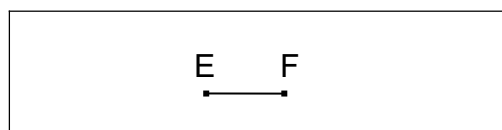


Figura 4 – Segmento EF

O segmento $\overline{EF}$ será a nova unidade, e caberá cinco vezes em $\overline{CD}$ e 8 em $\overline{AB}$.

Fazendo uma reflexão podemos chegar, precipitadamente, à conclusão que sempre é possível obter uma unidade menor (infinitamente menor) que possa ser uma unidade comum a dois segmentos quaisquer. Desta forma, os dois segmentos seriam sempre comensuráveis. Entretanto nem sempre isto é possível e os próprios Pitagóricos, seguidores da filosofia de Pitágoras, descobriram que no caso de dois segmentos (lado de um quadrado e sua diagonal) não é possível achar um “tal segmento” que sirva de unidade para ambos os segmentos, por menor que se imagine este terceiro – mesmo que nossa intuição diga que é possível e por menor que possamos imaginá-lo: pequeno, muito pequeno, pequeníssimo, *não é*. Dizemos então serem segmentos incomensuráveis, surgindo assim o conceito de irracional.

Vamos, como exemplo, construir a demonstração clássica do número $\sqrt{2}$, medida da diagonal de um quadrado de lado 1, não é um número racional, a qual se pode acompanhar sem muitos problemas, já que, sua abordagem é bem conhecida e até mesmo sugerida no ensino fundamental. A seguir demonstraremos que $\sqrt{2}$ não é um número racional, através da demonstração por absurdo dada por Aristóteles. Segundo Bongiovanni (2005, p.92), a idéia do raciocínio por absurdo foi provavelmente concebida no meio da escola pitagórica.

Quadro 1: Demonstração clássica da irracionalidade da $\sqrt{2}$

A $\sqrt{2}$ não pode ser representada por um número racional, ou seja, não pode ser um número escrito na forma $\frac{p}{q}$ com p e $q \in \mathbb{Z}$, inteiros, com $q \neq 0$. No entanto, vamos supor: $x = \sqrt{2}$, e que por absurdo, existem dois números inteiros p e $q \in \mathbb{Z}$, primos entre si, tais que $x = \frac{p}{q}$ (isto é, suponhamos a fração $\frac{p}{q}$ escrita na forma irredutível), então $x^2 = 2$. Logo, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, e p^2 é um número par (pois $p^2 = 2q^2$) e, conseqüentemente, p também é par (porque se fosse ímpar seria do tipo $p = 2k + 1$, para algum número inteiro k e então $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ seria ímpar). Se p é um número par, existe um inteiro k' tal que $p = 2k'$ e assim $4k'^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k'^2$. Então q seria par (porque q^2 é par, pelo mesmo raciocínio anterior para p^2), o que é absurdo visto que p e q são primos entre si. Em outras palavras: Como supomos que $\sqrt{2}$ era um número racional irredutível e chegamos à conclusão que tanto p como q são pares, logo são divisíveis, no mínimo por 2, concluímos que tal número não existe, então $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Mesmo na obra de Euclides, que foi aceita por séculos e por mais de dois milênios foi utilizada na aprendizagem da matemática, encontramos contradições. A mais famosa é a do quinto postulado (o postulado das paralelas), alvo de muitas controvérsias e várias tentativas de provas, por muito tempo. O próprio Euclides e

muitos dos seus sucessores tentaram demonstrar esta proposição a partir de outros postulados da geometria, pois acreditavam que este postulado fosse independente dos outros quatro e ninguém obteve sucesso.

A seguir relembremos o enunciado do famoso quinto postulado de Euclides:

" Por um ponto não contido em uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela à reta dada."

As tentativas de prová-lo somente terminaram no século XIX, quando o Matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) convenceu-se da não demonstrabilidade desse postulado e a possibilidade da construção de sistemas geométricos não euclidianos. Assim nascem as Geometrias Não-Euclidianas, com esforços simultâneos de Gauss, Janos Bolyai (1802-1860), Nikolai Ivanovitch Lobatchewski (1792-1856) e Bernhard Riemann (1826-1866), que com trabalhos independentes constroem uma nova geometria (A Geometria Não-Euclidiana), na qual o postulado das paralelas não vale mais. Confirmando-se assim que o Postulado das Paralelas era realmente independente dos demais.

Modelos de Geometrias Não Euclidianas:

Geometria de Lobatchevsky ou Geometria Hiperbólica – Este modelo é creditado independentemente a Nicolai Lobachevski e János Bolyai. É possível criar o plano hiperbólico que é interpretado no espaço tridimensional euclidiano por uma superfície denominada parabolóide hiperbólico estabelecendo que:

"Por um ponto exterior a uma reta podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta".

Geometria Riemanniana ou Geometria Elíptica ou Esférica – Creditada a Bernhard Riemann. O plano elíptico é interpretado no espaço quadridimensional por uma superfície semelhante à esfera estabelecendo que:

" Por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta."

A seguir elaboramos um modelo baseado na geometria Riemanniana para termos uma melhor compreensão dessa nova geometria, em que o quinto postulado de Euclides não é válido.

Imaginemos que nosso plano é a superfície de uma esfera (Figura 5), percebemos que nesse plano nossas retas são circunferências, representado pelas circunferências r , s e t , na mesma figura. Um segmento de reta no nosso plano é representado por um arco, observe que o menor caminho entre dois pontos continua sendo um "segmento de reta". Na figura podemos verificar esse fato no arco PQ . Podemos ainda verificar que no nosso modelo o quinto postulado de Euclides, não é válido, perceba que pelo ponto P podemos traçar s , t e infinitas outras "retas-circunferências" paralelas (não tendo pontos em comum) a "reta-circunferência" r .

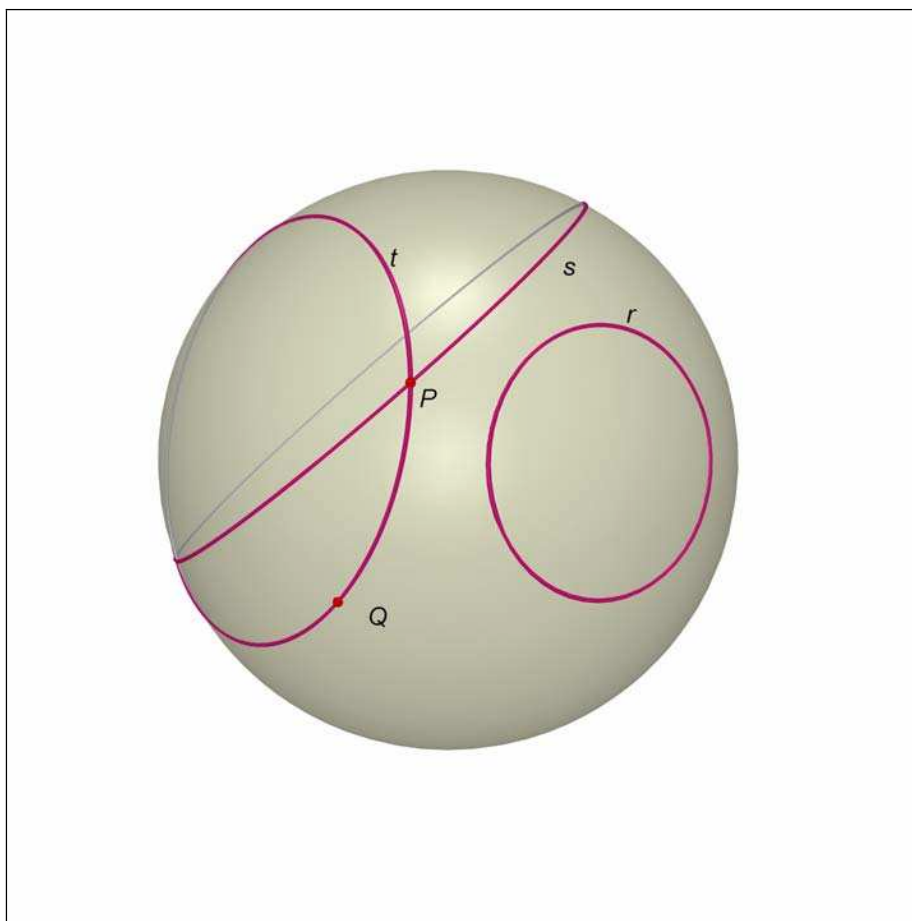


Figura 5: Nosso Modelo

Podemos ainda especulando o modelo, Figura 6, considerarmos como retas apenas os círculos máximos. Percebemos assim, que não será possível traçar por nenhum ponto fora da reta r , uma reta paralela a esta. Percebemos ainda que a soma dos ângulos internos de um triângulo será maior que 180° (a prova de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180° é consequência direta da unicidade das paralelas), observe o nosso triângulo APB e outros.

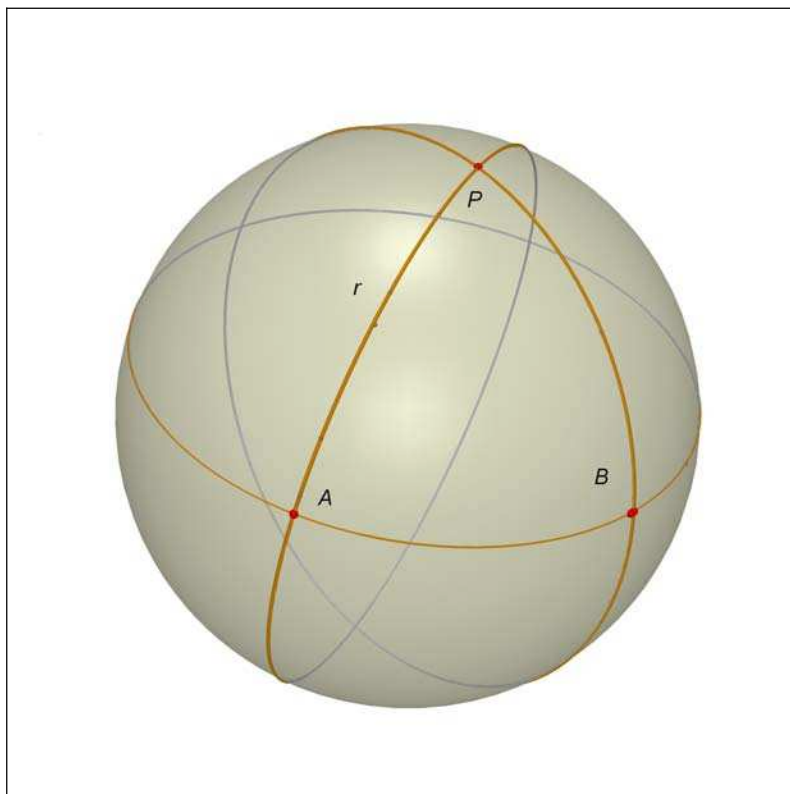


Figura 6. Círculos máximos

Uma das preocupações constantes dos Matemáticos foi o de banir da matemática toda existência de contradição nela presente, uma vez que não poderia ser construída sobre alicerces que gerassem contradições, pois, poder-se-ia ruir todo o edifício matemático construído sobre eles. Este período de incerteza é muito bem retratado na frase de Russell, no início deste capítulo.

Vários trabalhos surgiram objetivando tornar a matemática consistente, ou seja, nos quais as verdades evidentes e qualquer intuição ficassem do lado de fora, como os liderados por Dedekind e Weierstrass, passaram da geometria à aritmética como fundamento para a matemática.

No final do próprio século XIX os estudos da Lógica Matemática deram passos gigantescos no sentido da formalização dos conceitos e processos demonstrativos. Entre os matemáticos e filósofos que mais contribuíram para os avanços destacaram-se: Gottlob Frege (1848-1925), cujas obras principais datam de 1879 e 1893, o primeiro a apresentar o cálculo proposicional na sua forma moderna; Giuseppe Peano (1858-1932) um dos pioneiros na lógica matemática e na axiomatização da matemática; Bertrand Russel e Alfred Whitehead (1861-1970) na obra “Principia Mathematica” procuraram desenvolver o projeto do logicismo, isto é, a redução das matemáticas à lógica; David Hilbert (1862 – 1943) com seu enfoque formalista, entre outros, como: Sophus Lie(1842-1899); Felix Klein(1849-1925); Henry Poincaré(1854-1912); Dery Lebesgue (1875-1941); L.E.J. Brouwer (1881-1961) e Geoge F Cantor(1845-1918) e sua obra, Teoria dos Conjuntos, que parecia simples e poderia assim servir de alicerce para a construção de toda a matemática partindo-se de princípios lógicos aplicados a eles. No entanto apresentou também paradoxos, como o de Russell. Para entendê-lo vamos citar a seguir o paradoxo do Barbeiro que é semelhante na formulação ao de Russell:

“...como o barbeiro da cidade que barbeia todos aqueles, e somente aqueles, que não barbeiam a si mesmo. O barbeiro está ou não incluído no conjunto daqueles que barbeiam a si mesmo?” Boyer,(p. 449)

Se o barbeiro não se barbeia, ele está no conjunto das pessoas que não barbeiam a si mesmo, logo ele poderia fazer a barba. No entanto, no momento em que começa a fazer a barba, estará quebrando a regra, pois estará fazendo a barba de alguém que se barbeia.

Em meio dessas controvérsias do sistema lógico, Hanna (1995) descreve que três escolas famosas surgiram nessa época, com suas particularidades, e mantiveram visões diferentes sobre o papel da demonstração em matemática e ainda sobre os critérios de validade de uma demonstração matemática (p. 42). Estas escolas são:

LOGICISTA Os logiscistas como Frege, Russel & Whitehead defendiam que a lógica era um ramo da Matemática. Pretendiam reduzir todos os conceitos matemáticos a conceitos lógicos e demonstrar todas as verdades matemáticas a partir dos axiomas utilizando as regras de inferência lógica, afastando-se de concepções empíricas e intuitivas. Para isso teriam de mostrar que todas as proposições matemáticas podem ser expressas na terminologia da lógica.

INTUCIONISTA Nascida por volta de 1908, o topólogo holandês L.E.J. Brouwer defendia que a Matemática teria de ser desenvolvida apenas por métodos construtivos finitos sobre a seqüência dos números naturais, dada intuitivamente, ou seja, que existe uma intuição primitiva dos números naturais.

FORMALISTA Pretendia organizar toda a matemática numa estrutura lógica, em um sistema de axiomas, seu defensor mais radical foi David Hilbert (1862–1943) que em 1900 provou a consistência interna da geometria elementar. Hilbert propôs construir um formalismo matemático do qual seria extinto qualquer tipo de significado, e na demonstração teríamos sua consistência de forma absoluta e para toda e qualquer proposição da matemática haveria uma maneira formal de se declará-la falsa ou verdadeira.

“O objetivo de minha teoria é estabelecer de uma vez por todas a certeza dos métodos matemáticos... O estado atual das coisas, em que nos chocamos com os paradoxos, é intolerável. Imaginem as definições e os métodos dedutivos que todos aprendem, ensinam e usam em matemática, os paradigmas de verdade e de certeza, conduzindo a absurdos! Se o pensamento matemático é defeituoso, onde acharemos verdade e certeza?”

(David Hilbert, apud DAVIS & HERSH, 1996, p. 315-316)

O grupo Nicolas Bourbaki, pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos franceses a partir de meados da década de 1930, é um bom exemplo da influência do formalismo. Este grupo teve grande influência no ensino da matemática nos níveis mais elementares no advento do movimento da matemática moderna.

Estas novas filosofias, no entanto, não ficam imunes às controvérsias e argumentos paradoxais. Por exemplo, o paradoxo de Russell atacou a definição de número de Frege, causando abalos no programa logicista. Já no programa formalista o artigo “Sobre proposições formalmente indecidíveis dos Principia Mathematica e outros sistemas semelhantes”, de Kurt Gödel (1906-1978) em 1931, ficou demonstrado a incompletude de todo sistema axiomático expressivo o suficiente para conter a teoria dos números. Provou-se que não há e nem poderia haver um sistema formal no qual se possa expressar toda a aritmética, como sonhava Hilbert e que satisfaça todas as exigências de consistência do programa formalista.

Por último gostaríamos de abordar a grande dificuldade na compreensão das demonstrações matemáticas para um homem que não seja um exímio matemático profissional. A respeito, quando perguntado a Hilbert: se os 23 problemas, por ele anunciados, no 2º Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Paris em 1900 estavam todos solucionados, ele respondeu:

“Uma teoria matemática não pode ser considerada completa enquanto não for possível torná-la tão clara a ponto de poder ser explicada ao primeiro homem que se encontre na rua”.

(Yandell, 2002)

Como exemplo da complexidade de um trabalho demonstrativo aceito nos dias de hoje pela comunidade matemática, citamos a demonstração do famoso “Último Teorema de Fermat”, nela provou-se que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos x , y , z e n com n maior que 2 que satisfaça $x^n + y^n = z^n$, realizada em 1986 pelo Inglês Andrew Wiles – “Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem”, Wiles(1995). Se procurarmos pelo mundo, encontraremos pouquíssimas pessoas que a entendam completamente.

Mesmo com os problemas, certezas e incertezas em tudo que foi exposto sucintamente até agora a Matemática evoluiu muito. Não conhecemos nenhum Matemático da atualidade que não concorde que de Tales aos dias atuais, as demonstrações matemáticas evoluíram extraordinariamente. Podemos dizer que

atualmente o rigor matemático é estruturado, possuindo uma linguagem universal e confiável, embora ainda existindo várias polêmicas, como as entre formalistas, logicistas e intucionistas, ou da utilização de computadores em uma demonstração, como na conjectura das quatro cores, que foi verificada para todos os casos com computador, por W. Haken e K. Appel, em 1976.

A matemática está em uma constante evolução e todas as pedras surgidas no caminho colaboraram para o fortalecimento de suas estruturas e para dar-lhe uma precisão que não encontramos em nenhuma outra área do conhecimento humano. Entretanto, a complexidade associada à demonstração e ao processo de prova parece consenso. Dado esta complexidade vários pesquisadores tem explorado o ensino e aprendizagem da prova matemática.

1.2 PROVAS NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Ao longo do desenvolvimento da Educação Matemática diversas pesquisas associadas à demonstração matemática têm sido realizadas. Essas pesquisas têm explorado os mais diversos aspectos da demonstração, inclusive as realizadas na sala de aula da escola básica, mesmo essas demonstrações estando longe das demonstrações formais.

Hoje, vemos as produções dos alunos em sala de aula não apenas como erros e deficiências em relação às demonstrações, mas como etapas de um processo na apropriação e domínio das demonstrações matemáticas. Muitas pesquisas estão sendo realizadas para termos uma melhor visão desse delicado processo de transição e evolução das conexões “informais” para as “formais”, pois é possível colaborarmos para que os alunos avancem nos raciocínios utilizados.

Dentre as várias pesquisas em Educação Matemática, nos possibilitando compreender melhor o assunto, podemos citar os trabalhos de: Hiele (1976), que estabelece níveis hierárquicos de raciocínio ao longo da aprendizagem do pensamento geométrico; Arsac (1987), que estudou a gênese histórica da demonstração; Barbin (1988), que focou o estudo nas significações epistemológicas e as questões didáticas da demonstração matemática; Bkouche

(1989), que estudou a demonstração em Geometria e ressalta a necessidade de se fazer o estudo epistemológico antes de introduzi-la no ensino da Matemática; Garnica (1995), que concentrou na formação de professores; e Hanna (2001), que discute o papel da prova do ponto de vista histórico-epistemológico. Destacamos o grande número de autores nos trabalhos pesquisados que reconhecem a geometria como campo privilegiado para a abordagem das demonstrações.

Outros autores propõem classificar os tipos de provas elaboradas pelos alunos. Por exemplo, Coe & Ruthven (1994), apresentam três níveis de provas: demonstração-empírica, demonstração-dedutiva fraca e demonstração-dedutiva forte e Balacheff(1987) distingue entre provas pragmáticas e provas intelectuais.

Os trabalhos de Balacheff(1988) são particularmente importantes pois encontramos uma relevante investigação sobre os processos de provas com alunos de 12 a 15 anos, que privilegiamos na elaboração dos questionários do projeto AProvaME e utilizamos nesta dissertação. Nesse trabalho (Balacheff (1988)) encontramos definições de alguns termos importantes como “explicação”, “provas” e “demonstração”. Para ele o termo “explicação” é uma idéia primitiva da qual deriva os termos prova e demonstração. A seguir descrevemos os termos definidos e hierarquizados por Balacheff, denominado, tipos de sofisticações de provas¹. Acrescentamos o termo argumentação.

A *argumentação*, definida como qualquer discurso destinado a obter o convencimento do interlocutor sobre uma determinada afirmação;

A *explicação*, em que busca-se o convencimento a partir da explicitação do caráter verdadeiro da afirmação;

A *prova*, são explicações aceitas por certa comunidade em um certo momento, e finalmente;

A *demonstração*, são provas que seguem regras determinadas e são aceitas pela “comunidade matemática”.

Na sua pesquisa com alunos adolescente Balacheff estuda os argumentos utilizados por eles para seu próprio convencimento e categoriza estes como:

¹ Apesar das diferenças entre “prova” e demonstração delineadas nas definições de Ballacheff, usamos os termos como sinônimos, utilizando uma definição no qual o termo prova e demonstração são tratadas como explicação que são válidas matematicamente, mesmo não apresentada necessariamente na forma axiomática.

Provas Pragmáticas e Provas Intelectuais. Para ele, os alunos usam provas pragmáticas quando utilizam a ação (baseados em manipulações ou exemplos concretos) e as Provas Intelectuais quando utilizam ações interiorizadas (baseadas em formulações abstratas de propriedades matemáticas e de relações entre elas).

Esses tipos de provas, categorizadas por Balacheff, ainda são subdivididas em quatro outras, a saber:

1. empirismo ingênuo;
2. experiência crucial;
3. exemplo genérico e
4. experiência mental.

Nesta ordem e hierarquia. Em seu trabalho encontramos uma descrição de cada um desses tipos de provas, obtidas após análise das repostas apontadas pelos alunos a um problema que envolve o número de diagonais de um polígono. A seguir, acompanharemos a tradução desses tipos que obtemos em Gravina (2001, p.66):

“...**No empirismo ingênuo**, os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de um certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem peremptoriamente que um hexágono tem 6 diagonais. **Na experiência crucial** os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (uma imensa figura), buscando depreender generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares. **No exemplo genérico** os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: “num polígono com 6 vértices, em cada vértices temos 3 diagonais. Assim são 18 diagonais: mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices 8,9.....” E finalmente, na **experiência mental** os alunos se desprendem do caso particular o que transparece na argumentação: “em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois vértices vizinhos; é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais . Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividido por 2 e obtemos uma vez cada diagonal”

Para Balacheff, o empirismo ingênuo e a experiência crucial, estão categorizados como provas pragmáticas, já a experiência mental está categorizada como prova intelectual (Gravina, 2001). O exemplo genérico ele classifica, conforme o caso, ora em provas pragmáticas, ora como provas intelectuais. Esses tipos de raciocínios descritos por Balacheff são importantes, pois podemos identificar os níveis de conhecimentos dos alunos e assim contribuir com atividades para que avancem entre os tipos apresentados. Aqui reside uma noção fundamental: é possível ensinarmos a demonstração matemática?

As dificuldades dos alunos em construir provas são também assuntos que ocupam a atenção dos pesquisadores, por exemplo, Marrades & Gutierrez (2000). Vários trabalhos apontam que os alunos não têm o hábito de apresentar justificativas nem demonstrações formais, Fonseca (2000); Rocha (2002); Healy e Hoyles (1998), entre outros.

Healy e Hoyles realizaram um estudo das concepções de provas matemáticas com alunos ingleses com idades entre 14 e 15 anos. Constataram que o argumento empírico é muito forte e que os alunos possuem muitas dificuldades na elaboração de provas mais formais, concluiu-se que tais dificuldades não se devem somente a competências dos alunos como também a fatores curriculares. Os questionários elaborados por Healy e Hoyles já foram adaptados e utilizados em diversos países, entre estes, destacamos a pesquisa realizada em Taiwan (Lin et al., 2003).

Os apontamentos dessas pesquisas estão de acordo com estudos internacionais. Tais como TIMSS (Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências) e o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), realizados em diversos países para uma avaliação curricular, procurando avaliar as competências dos alunos. Estas pesquisas apontam muitas dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem das provas matemáticas. São muitas as diferenças encontradas nos diversos países estudados, os alunos de países da Ásia como: Coréia, Singapura e Taiwan apresentam desempenhos muito altos nas avaliações, enquanto países como: Alemanha (Europa) e Estados Unidos (América) ficam na média dos estudos, mesmo tendo estes um poder financeiro maior e um número menor de alunos por sala, comparados com Coréia e Taiwan.

Nas salas de aulas de Taiwan, o ensino é dirigido pelo professor de forma tradicional, tendo o aluno pouca participação, a ele cabe apenas praticar e memorizar os conceitos e procedimentos matemáticos ensinados. Enquanto os alunos alemães têm participação ativa em todo o processo, cabendo ao professor o papel de facilitador na apropriação dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte dos alunos, respeitando sempre os níveis cognitivos.

Cabe ressaltar que o Brasil não participou do TIMSS. Na verdade poucos países latinos participaram. No entanto, mesmo estes poucos quando participaram, tiveram um desempenho muito ruim. O Brasil participa do PISA desde 2000, ficando sempre nas últimas posições em Matemática.

Temos ainda pesquisas que acompanham a trajetória da evolução do raciocínio matemático. Destacamos o projeto – The Longitudinal Proof Project, desenvolvido pelas pesquisadoras Celia Hoyles e Dietmar Küchemann realizado entre 1999 e 2003 com alunos ingleses. Entre os resultados verificamos que com o tempo o raciocínio dedutivo dos alunos não avançou, o que melhorou foi o cálculo. Nos itens que necessitavam de cálculos e que se solicitava apresentação de justificativa ou razão, os alunos não entendiam o significado de dar justificativa ou razão. Alguns alunos interpretavam apenas como detalhar o que estavam pensando ou explicar o que haviam feito.

Como a associação, desempenho dos alunos e currículos é fundamental, destacamos a tese brasileira (Pietropaolo, 2005), no qual um dos objetivos foi também procurar compreensões sobre a necessidade e a acessibilidade da implementação de provas e demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica brasileira.

De maneira geral, os Parâmetros curriculares Nacionais (PCN) de matemática da educação básica brasileira indicam as demonstrações matemáticas.

“Embora nestes Parâmetros a Lógica não se constitua como um assunto a ser tratado explicitamente, alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, desde os ciclos iniciais, uma vez que ela é inerente à Matemática. No contexto da construção do conhecimento matemático é ela que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal.” (PCN, 1998, p. 49)

“O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.

Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é “verdade” em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente...” (PCN+, 2002, p.124-125).

Neste Capítulo, elaboramos uma visão histórica das provas matemáticas, e várias pesquisas na Educação Matemática, que abordando as provas matemáticas em várias perspectivas.

CAPÍTULO II

PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS

Neste capítulo apresentaremos o projeto AProvaME, do qual este trabalho faz parte. As questões que analisamos se encontram inseridas no questionário de Álgebra, utilizado juntamente com outro que aborda Geometria. Estes questionários, adaptados daqueles elaborados por Healy e Hoyles (1998), visam obter um levantamento das concepções de argumentação e provas elaboradas pelos alunos de escola do Estado de São Paulo. Abordamos ainda as diversas etapas envolvidas em todo o processo desta contribuição ao projeto.

2.1 O PROJETO APROVAME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar

No Brasil o número de pesquisas sobre provas matemáticas ainda é modesto, mas tem aumentado o interesse dos pesquisadores brasileiros sobre o tema, por exemplo: Vianna (1988); Cury.(1988), Gouvea (1988); Gravina (2001); Vaz(2004), entre outros. O que é pouco, no entanto, mostra-se um começo para uma bibliografia brasileira sobre o assunto.

Uma pesquisa brasileira sobre provas atualmente em andamento é a realizada pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, com Coordenação da professora Doutora Siobhan Victoria Healy , com o título: Argumentação e Prova na Matemática Escolar(AProvaME), denominado de agora em diante por projeto.

O projeto terá a duração de dois anos e conta com uma equipe formada por seis pesquisadores e vinte e sete *professores-colaboradores*(Mestrandos do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP). Esta equipe participará das duas fases previstas no projeto.

Quinzenalmente, durante toda a primeira fase do projeto, foram realizados encontros dos pesquisadores e professores-colaboradores. Além desses encontros foi disponibilizado um espaço virtual – TELEDUC (ambiente para realização de cursos à distância através da Internet) – para facilitar a comunicação entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto.

O projeto leva em consideração diversos fatores, como:

- A importância da prova na formação dos alunos;
- A falta de levantamentos mostrando as concepções de provas de alunos brasileiros;
- Pesquisas em outros países apontarem que os alunos não têm o hábito de apresentarem justificativas nem demonstrações formais;
- Apontamentos para as dificuldades e confusões no estudo das provas matemáticas, (Healy e Hoyles, 2000).

O projeto está realizando em uma primeira fase, um levantamento das concepções e dificuldades de alunos brasileiros. Para isso, foram elaborados pela equipe, dois questionários, um abordando questões de Álgebra e outro de Geometria. Esse levantamento subsidiará a segunda fase que focará:

1. *Aprendizagem*, das áreas de dificuldades levantadas pelos questionários.
2. O *Ensino*, tendo o professor como a figura central.

OBJETIVOS DO PROJETO

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado de São Paulo. (grifo nosso);
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver

alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados;

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática;

4. Avaliar situações de aprendizagem em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática;

5. Investigar a implementação de determinadas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova;

6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar;

7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

O objetivo de efetuar um levantamento das concepções sobre argumentações e provas de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo tem para nós uma importância central, tendo em vista, nesta dissertação, efetuarmos exatamente uma parte desse levantamento, com a análise descritiva dos dados obtidos nas questões que abordam o fatorial inserido no questionário de álgebra, elaborado pela equipe.

A seguir, detalharemos a elaboração do questionário de álgebra, no qual analisaremos os dados de uma das questões.

2.2 DESCRIÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Para obter um levantamento das concepções sobre argumentação e prova dos alunos, foram elaborados dois questionários, sendo que o primeiro abordava questões de Álgebra (anexo 1), e o segundo questões de Geometria (anexo 2).

Foram elaborados com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países como França, Taiwan, Israel e Austrália.

Mesmo tendo como ponto de partida os questionários concebidos por Healy e Hoyles, a equipe se reuniu diversas vezes para discutir e elaborar os questionários que seriam aplicados. Nessa etapa, a participação dos professores-colaboradores foi primordial, pois formava-se um privilegiado grupo de professores atuantes nas áreas de ensino, tanto da educação básica como superior, em todas as redes de ensino - estadual, municipal e particular com a maior parte concentrada na educação básica. Antes de chegarmos aos questionários finais, aplicamos um questionário piloto (anexo 3), para obtermos mais informações quanto: o tipo de questão a utilizar, o número, o tempo de aplicação, o formato das questões, entre outros.

Os questionários compreenderam questões que visaram avaliar em que medida os estudantes aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e, se são capazes de construir argumentos válidos, sendo estruturados e organizados, em dois blocos, a saber:

- Avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação, e

- Construção de provas e argumentos.

Prosseguiremos descrevendo estas estruturas e organizações no questionário de Álgebra, tendo em vista nossa dissertação analisar questões inseridas neste segundo bloco. Apesar de não descrever o questionário de geometria, ele segue o mesmo padrão.

2.2.1 - PRIMEIRO BLOCO - AVALIAÇÃO DE VÁRIOS ARGUMENTOS APRESENTADOS COMO PROVAS DE UMA DADA AFIRMAÇÃO.

No questionário de Álgebra, encontramos cinco questões indicadas por A1, A2, A3, A4 e A5. As questões A1 e A2 encontram-se caracterizadas neste primeiro bloco.

Questão A1

Na questão A1, buscamos obter a visão que os alunos possuem sobre prova, sua função e generalização. Foi apresentada na questão, demonstrações elaboradas por supostos alunos (Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna), e eles deveriam fazer duas escolhas: na primeira, escolher entre as provas apresentadas a que seria mais parecida com a resposta que daria se tivesse que resolver a questão e na segunda aquela que a seu ver o professor atribuiria a melhor nota, Figura 7.

Nas provas apresentadas pelos supostos alunos dessa questão foram privilegiados os tipos de prova definidos por Balacheff. A seguir descreveremos sucintamente cada uma das provas apresentadas na questão:

- *Na resposta de Artur*, temos um estilo formal, apresentando um argumento lógico feito entre premissas e conclusões. Tipo de prova intelectual (experiência mental) caracterizado pela apresentação de deduções lógicas baseadas em propriedades.

- *Na resposta de Beth*, temos o tipo de prova classificado como empirismo ingênuo, caracterizado pela constatação de apenas alguns casos.

- *Na resposta de Duda*, temos argumentos classificados como experiência crucial, caracterizada pela verificação exaustiva da proposição num caso particular tido como típico.

- *Na resposta de Franklin e Hanna* temos o tipo caso genérico, caracterizado pela apresentação de propriedades aplicadas sobre um caso comum.

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:
Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
 b é um número inteiro qualquer
 $2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
 $2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$$\begin{array}{ll} 2 + 2 = 4 & 4 + 2 = 6 \\ 2 + 4 = 6 & 4 + 4 = 8 \\ 2 + 6 = 8 & 4 + 6 = 10 \end{array}$$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
 Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin

The diagram illustrates the addition of two groups of 4 dots each. The first group is represented by two rows of four dots. A plus sign is placed to the right. The second group is also two rows of four dots. Below these, an equals sign is placed, followed by a single group of eight dots arranged in two rows of four.

Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$$\begin{array}{l} 8 + 6 = 14 \\ 8 = 2 \times 4 \\ 6 = 2 \times 3 \\ 14 = 2 \times (4 + 3) \\ 8 + 6 = 2 \times 7 \end{array}$$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Figura 7. Questão A1 do questionário de álgebra(1ª Parte)

Em seguida, para obtermos mais informações sobre a visão dos alunos, em suas escolhas na questão anterior, pedimos para que avaliassem cada uma das supostas demonstrações elaboradas por eles, quanto a sua generalização e respondessem se cada uma delas era: sempre verdadeira ou se apenas era

válida em alguns casos, e que para cada tipo apresentado teriam que assinalar uma das opções: sim, não ou não sei. Figura 8.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira apenas para alguns números pares.		
	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Artur						
<i>Resposta de Beth:</i>						
<i>Resposta de Duda:</i>						
<i>Resposta de Franklin:</i>						
<i>Resposta de Hanna:</i>						

Figura 8. Questão A1 do questionário de álgebra(2ª Parte)

Questão A2

Na questão A2 (Figura 9) buscamos obter dos alunos sua compreensão de um resultado já provado e a percepção da generalidade de uma prova ou se para eles a prova não é abrangente.

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

Zé precisa construir uma nova prova. ☐

Figura 9. Questão A2 do questionário de álgebra

2.2.2 - SEGUNDO BLOCO - CONSTRUÇÃO DE PROVAS E ARGUMENTOS.

Este segundo bloco conta no questionário de Álgebra, com três questões A3, A4 e A5. Nessas três questões, esperamos conhecimentos como a manipulação e uso de expressões algébricas, visões de propriedades e generalizações.

Questões A3 e A4

Nas questões A3 e A4 (Figura 10), pedimos para que os alunos respondessem cada questão e justificassem suas respostas para que pudéssemos avaliar o tipo de conhecimento que adotavam na elaboração de suas respostas, se eram argumentos empíricos, propriedades, ou provas completas, etc.

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

Figura 10. Questões A3 e A4 do questionário de álgebra

Nesta dissertação trabalhamos com os dados específicos obtidos na última questão do segundo bloco. Descrevemos esta, questão A5, em detalhes na secção seguinte.

2.3 A QUESTÃO A5 - FATORIAL

A questão A5 aborda problemas envolvendo o fatorial e nela encontramos cinco subitens, que denominaremos como questões: A5(a), A5(b), A5(c), A5(d) e A5(e) em todo o restante deste trabalho.

Como já indicamos anteriormente, nosso objeto de pesquisa está inserido em um projeto maior, denominado AProvaME, que visa em sua primeira fase elaborar um levantamento das concepções sobre argumentações e provas de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo, com as quais este trabalho busca colaborar com seus resultados.

Nossas análises estão divididas em duas fases: A primeira fase envolve análises quantitativas: que incluiu uma análise estatística descritiva das repostas obtidas nas questões que aborda o fatorial e a elaboração de uma análise multidimensional preparada com o software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva), que nos apontou grupos de comportamentos da amostra.

Na segunda fase escolhemos alunos dos grupos que surgiram na análise multidimensional para entrevistar.

Na questão A5, primeiramente introduzimos a noção de fatorial, e após solicitamos respostas para as cinco questões: A5(a), A5(b), A5(c), A5(d) e A5(e), das quais, em quatro: A5(a), A5(c), A5(d) e A5(e), pedimos aos alunos que justificassem as respostas apresentadas.

Após encontrar a descrição de fatorial, $n!$ como o produto dos naturais de 1 a n , esperávamos que os alunos usassem as noções de divisibilidade, que são temas abordados no ensino fundamental e verificassem, por exemplo, que se um fator faz parte da decomposição de um número, ele divide este número. Para mais detalhes, abordamos no capítulo a seguir alguns temas de divisibilidade envolvidos nessas questões.

Abaixo citamos o que foi solicitado em cada questão e algumas das respostas que os alunos poderiam apresentar, com base nas repostas verificadas anteriormente no questionário piloto.

Na Questão A5(a) perguntamos: $5!$ é par? O que significa $5!$ foi dado logo acima da questão (Figura 11). Esperávamos que os alunos observassem o fator 2 e concluíssem que o produto seria um número par ou que fizessem os cálculos e chegassem ao produto 120.

Na Questão A5(b) perguntamos do significado de $8!$. Esperávamos que os alunos respondessem algo do tipo: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ou o produto 40.320. Caso os alunos não tivessem ainda compreendido o significado de fatorial, esperávamos que nessa questão refletissem um pouco mais, revendo o significado que apresentamos para $4!$ e $5!$ na parte superior da folha.

Na Questão A5(c) perguntamos se $8!$ era múltiplo de 21. Esperávamos que os alunos observassem que os fatores três e sete pertencem ao produto, logo 21 também é um fator do produto ou que dividessem 40.320 por 21.

Na Questão A5(d) perguntamos se $62!$ era um múltiplo de 37. Esperávamos que os alunos notassem que o fator 37 pertence ao desenvolvimento de $62!$. Escolhemos o número 62! Por acreditar que o uso de cálculos seria inviável na questão.

Na questão A5(e) perguntamos qual seria o último algarismo do resultado de $23!$. Esperávamos que os alunos, por exemplo, observassem o fator 10 no desenvolvimento de $23!$.

A5: Sabendo que:

4! significa $4 \times 3 \times 2 \times 1$

5! significa $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Responda:

A5(a) - **5!** é um número par?

Justifique

A5(b) - O que significa **8!** ?

A5(c) - **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

A5(d) - **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

A5(e) - Pedro calculou **23!**

Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Figura 11. Questão A5 do questionário de álgebra

2.4 COLETA DOS DADOS

2.4.1 DESCRIÇÃO DA AMOSTRA

No começo da primeira fase do projeto, os professores-colaboradores participantes indicaram de 6 a 10 turmas de alunos adolescentes, de escolas do Estado de São Paulo na faixa etária de 14 a 16 anos, cursando a 8ª série do Ensino Fundamental ou a 1ª série Ensino Médio. Deste grupo foi retirada uma amostra de seleção aleatória para aplicarmos os questionários de Álgebra e Geometria.

O tamanho da nossa amostra é de 2012 alunos de 31 escolas distribuídos em 81 turmas, sendo que 34 turmas de 8ª séries do ensino fundamental e 47 turmas de 1ª séries do ensino médio.

Das escolas da amostra, 22 são escolas públicas da rede estadual, 3 são escolas públicas da rede municipal e 6 da rede particular de ensino, situadas na Grande São Paulo, Interior e Litoral.

2.4.2 APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Toda a amostra respondeu aos dois questionários que foram aplicados com o acompanhamento dos professores-colaboradores, ficando a ordem de aplicação dos questionários (primeiro Álgebra ou Geometria) a critério do professor-colaborador. Algumas turmas responderam aos questionários no mesmo dia e sem intervalos e outras em dias diferentes. As turmas tiveram um tempo de 50 minutos para responder a cada um dos questionários, sendo solicitado que todas as anotações realizadas fossem elaboradas nas folhas dos questionários e não foram permitidas consultas de qualquer material nem o uso de materiais eletrônicos.

2.4.3 CODIFICAÇÕES UTILIZADAS NA QUESTÃO A5.

Após a aplicação dos questionários todas as repostas e justificativas foram codificadas. Nesta fase cabe salientar as reuniões que foram realizadas com toda a equipe do projeto, já que as codificações das turmas foram elaboradas pelos professores-colaboradores que as indicaram. Desta forma, determinamos um padrão de codificação que seria seguido por todos. Aqui abordaremos apenas as codificações utilizadas nas questões objetos da nossa dissertação, ou seja, as que abordam o fatorial, no entanto, todas as questões dos questionários usados para o levantamento da concepção dos alunos, seguem um padrão semelhante de codificação.

Abaixo exporemos as codificações e parâmetros utilizados nas questões que abordam o fatorial, além de alguns exemplos de respostas com a respectiva codificação utilizada. Observe-se que além do aluno ter acertado a questão (código 1) ou errado (código 0), foram também codificadas as justificativas apresentadas por eles. O código -2 foi utilizado para indicar as respostas ou justificativas em branco e -1 respostas ou justificativas do tipo: não sei responder, não entendi.

Quadro 2. Codificações usadas nas questões A5(a) e A5(c)

Descrição	Código
- Respostas erradas. - Justificativas totalmente erradas, ou que simplesmente repetem o enunciado, caracterizando um ciclo vicioso.	0
- Respostas corretas. - Justificativas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, justificativas que são completamente empíricas.	1
Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo, trazer todos os passos necessários para uma prova: - Justificativa: Falta muito para chegar à prova (mais próximo de 1) - Justificativa: Falta pouco para chegar à prova (mais próximo de 3)	2a 2b
- Justificadas totalmente por meio de cálculos.	3C
- Justificadas totalmente com referência a propriedades pertinentes.	3P

Quadro 3. Codificações usadas na questão A5(b).

Descrição	Código
- Respostas totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado, caracterizando um ciclo vicioso.	0
- Para resposta do tipo: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ou cálculo 40.320.	1

Quadro 4. Codificações usadas nas questões A5(d) e A5(e).

Descrição	Código
- Respostas erradas. - Justificativas totalmente erradas, ou que simplesmente repetem o enunciado, caracterizando um ciclo vicioso.	0
- Respostas corretas. - Justificativas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, justificativas que são completamente empíricas.	1
Justificativas com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo, trazer todos os passos necessários para uma prova. - Justificativas : Falta muito para chegar à prova (mais próximo de 1) - Justificativas : Falta pouco para chegar à prova (mais próximo de 3)	2a 2b
- Totalmente justificadas.	3

Para acompanhar alguns exemplos de repostas e justificativas elaboradas pelos alunos e suas respectivas codificações, consultar o Anexo 4.

2.5 ANÁLISES QUALITATIVA E QUANTITATIVA

As análises quantitativas dos dados obtidos com a questão que aborda o fatorial foram obtidas com o uso do software CHIC e são apresentadas no Capítulo 3, juntamente com uma análise qualitativa: entrevistas com sete alunos da amostra indicados pelo CHIC para entendermos melhor a diferença surgida entre grupos na análise multidimensional. Finalizando o Capítulo 3 descrevemos respostas dadas às questões que abordam o fatorial, realizadas pelos professores das escolas, nas quais elaboramos as entrevistas. Obtendo assim, mais uma fonte de dados para interpretar as respostas dos alunos.

2.6 DIVISIBILIDADE

“Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como” ser múltiplo de “,” ser divisor de “.”(PCN, 1998, p.71)

Como o objetivo desta dissertação é analisar quantitativamente e qualitativamente as questões que abordam o fatorial inseridas no questionário de Álgebra, resolvemos complementar as informações dos conhecimentos de divisibilidade que os alunos poderiam utilizar para resolver e justificar as referidas questões, que foram abordados por meio do fatorial. Com isto em mente achamos interessante verificar o tema divisibilidade nos livros didáticos, para tanto utilizamos a dissertação de Rama (2005) e outros materiais oficiais.

2.6.1 FATORIAL

Entendemos por fatorial o produto de todos os números naturais de 1 a n , representado por $n!$, envolvendo, assim, a multiplicação de números naturais. O assunto fatorial é indicado pelo PCN+ Ensino Médio (2002) e apresentado pelos livros didáticos apenas na segunda série do Ensino Médio.

Os problemas relacionados ao fatorial envolvem questões de divisibilidade e poderiam ser resolvidos com as noções de divisibilidade abordados no ensino fundamental. Noções estas como: critérios de divisibilidade, fator, divisor, múltiplos, números primos e compostos, decomposição em fatores primos, mmc (mínimo múltiplo comum) e mdc (máximo divisor comum).

As questões envolvendo o fatorial poderiam ser resolvidas e justificadas pelos alunos que já tivessem se apropriado do princípio básico de que: **“se um número qualquer for multiplicado por um número k , $k \in \mathbb{N}^*$, este produto é divisível por k ”**, já que este produto seria um múltiplo desse número. Logo as definições principais que os alunos deveriam articular são: múltiplos, divisores e fatores. Vamos a uma breve definição desses três conceitos dentro do conjunto

numérico dos naturais, visto nossas questões abordarem apenas este conjunto numérico, seguido de exemplos:

Definição 1:

- Dados $a, b \in \mathbb{N}$, dizemos que a é **fator** de b se existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $ka = b$.

De maneira geral abordamos como fator de um número b , ao par de números k e a que tem como produto o número b .

Por exemplo, os fatores do número 20:

$k.a =$	20
1.20	20
2.10	20
4.5	20

Dizemos neste caso que os números 1, 2, 4, 5, 10 e 20 são fatores do número 20.

Definição 2.

- Dados $a, b \in \mathbb{N}$, dizemos que a divide b se existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $b = ka$.

Neste caso, a é **divisor** de b e b é um **múltiplo** de a ou ainda, a **divide** b . De maneira geral dizemos que os múltiplos de um número b , são todos os produtos do número b por qualquer número natural e os divisores do número b são seus próprios fatores.

Exemplos:

a. Os divisores de 20 são 1, 2, 4, 5, 10 e 20.

b. Alguns múltiplos de 20.

$k.20$	Múltiplos de 20
1.20	20
2.20	40
5.20	100
10.20	200
100.20	2000

Podemos estabelecer relações entre estas três definições:

Se (a) é um fator do número (b), então:

(a) é um divisor do número (b) ou também dizemos que (a) divide (b) e temos ainda que (b) é um múltiplo do número (a).

Exemplificando com números:

Se (4) é um fator do número (20), então:

(4) é um divisor do número (20) ou também dizemos que (4) divide (20) e temos ainda que (20) é um múltiplo do número (4).

As pesquisas, tais como Zazkis (2000) mostraram que as dificuldades em construir as relações acima são muitas. Zazkis (2000), descreve um estudo no qual se buscou as concepções, significados e conexões que futuros professores constroem sobre os temas: múltiplos, divisores e fatores, e as relações destes com os outros conceitos da teoria elementar dos números. Verifica-se uma grande confusão nos usos desses termos e o que parece simples e claro é algo muito complexo para os estudantes.

Rama (2005) analisou o tratamento de números inteiros em livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, e encontrou em apenas um dos livros didáticos pesquisados, o reforço do uso de várias formas equivalentes de enunciar uma mesma propriedade:

“A é múltiplo de B; B divide A; a divisão de A por B é exata; a divisão de A por B tem resto zero; exibir o produto $A = B.Q$.”

2.6.2 DIVISIBILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS

Em uma breve análise na relação dos livros didáticos constantes no Guia Nacional de Livros Didáticos de 5ª a 8ª série (Matemática) que é editado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD-2005), verificamos que o tema divisibilidade é abordado em oito, das vinte e três coleções aprovadas, sendo que

em sete coleções o assunto é abordado nos livros de 5ª série e em apenas uma, no livro de 6ª série.

Seguindo a maioria dos autores que abordam o tema, a série escolhida como mais adequada para introduzir as noções de divisibilidade seria a 5ª série. No entanto, encontramos no Guia do livro didático 2007(séries iniciais - matemática), abordagem de alguns conceitos envolvendo as noções de divisibilidade em três coleções, nos livros da 4ª série.

Rama (2005) em sua dissertação analisa três coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental e onze coleções do Ensino Médio, cujo foco foi o conceito de divisibilidade e a verificação da abordagem feita pelos autores, quanto às estratégias adotadas para demonstrações referentes ao assunto, e o uso de situações-problema desafiadoras. Constatou que no Ensino Fundamental o assunto divisibilidade é focado, mesmo que quase exclusivamente na 5ª e na 6ª série, *no âmbito dos números naturais*, e que no Ensino Médio o tema é retomado de forma superficial.

Nas coleções analisadas, Rama acha adequada e interessante as abordagens dadas aos múltiplos e divisores nos livros do Ensino Fundamental, mas quanto aos critérios de divisibilidade ele comenta que em das coleções: *“Faz explicações simples”(p. 49)*, a outra, *“limita-se a enunciar o critério”(p. 50)*, na última, *“são descritos os critérios de divisibilidade...no entanto nenhuma justificativa é apresentada”.(p.50)*

Em suas palavras quanto as abordagem dos critérios de divisibilidade, comenta:

“Julgamos discutível a apresentação de uma quantidade elevada de critérios de divisibilidade. Para decidir se um número é divisível por 8, por exemplo, o processo sugerido, em muitos casos, tem pouca serventia. Exige-se tão somente a memorização de um método, sem dar atenção a sua justificativa. Pensamos que um critério deve ser apresentado se for de simples aplicação, e principalmente, se for passível de uma demonstração

compreensível para o aluno. A relevância do assunto está menos relacionada com sua aplicação do que com a possibilidade de exercitar a prática da argumentação matemática.”(Rama, 2005, p. 50 -51).

CAPÍTULO III

ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo procedemos a análise de dados das questões que abordam o fatorial. Em uma primeira fase elaboramos uma análise quantitativa com uma análise descritiva geral das respostas e justificativas. Apresentamos também uma análise dos dados por série que os alunos freqüentam e outra pela rede de ensino a que pertencem.

Posteriormente, elaboramos uma análise multidimensional com a utilização do software CHIC, o que nos indicou cinco grupos significativos de comportamentos dos alunos na resolução das questões. Em seguida buscamos maiores detalhes elaborando uma entrevista com alunos representante de alguns grupos. Finalizamos comentando sobre dados obtidos com as respostas dadas às questões que abordam o fatorial por professores das escolas onde efetuamos as entrevistas.

3.1 ANÁLISE DESCRITIVA

Nesta secção, apresentamos uma análise descritiva dos dados coletados. Esboçamos tabelas e gráficos das respostas e justificativas apresentadas nas questões. Analisamos o desempenho da amostra de forma geral no primeiro momento e após o desempenho por fatores como: rede de ensino a que os alunos pertencem (estadual, municipal ou particular) e série freqüentada (8ª ou 1ª).

3.1.1 ANÁLISE DESCRITIVA GERAL

Na Tabela 1 temos as respostas apresentadas por toda a amostra (2012 alunos). Observando-na podemos constatar que apenas 28,75% das questões

foram respondidas corretamente, 46,94% apresentaram respostas erradas, 13,09% responderam não sei ou não entendi (codificação -1) e 11,22% das questões foram deixadas em branco (codificação -2). Se considerarmos as repostas em branco e as que os alunos responderam não sei ou não entendi, como erradas, teremos um percentual de erro de 71,25%, o que é um índice muito alto.

Respostas Apresentadas pela Amostra

<u>Respostas</u>	<u>Corretas(1)</u>		<u>Erradas(0)</u>		<u>Não Sei(-1)</u>		<u>Branco(-2)</u>		
Questões	Quant.	%	Quant.	%	Quant.	%	Quant.	%	Total
A5(a)	1069	53,13%	782	38,87%	74	3,68%	87	4,32%	2012
A5(b)	967	48,06%	772	38,37%	139	6,91%	134	6,66%	2012
A5(c)	330	16,40%	1254	62,33%	252	12,52%	176	8,75%	2012
A5(d)	216	10,74%	1132	56,26%	377	18,74%	287	14,26%	2012
A5(e)	310	15,41%	782	38,87%	475	23,61%	445	22,12%	2012
Total	2892	28,75%	4722	46,94%	1317	13,09%	1129	11,22%	10060

Tabela 1

Na Figura 12, apresentamos um gráfico com a visão geral dos acertos e erros das cinco questões que envolvem o fatorial. Consideraremos as repostas em branco e as que apresentaram respostas do tipo não sei ou não entendi como repostas erradas, nesse gráfico bem como em todas as nossas análises e tabelas a partir deste ponto do trabalho.

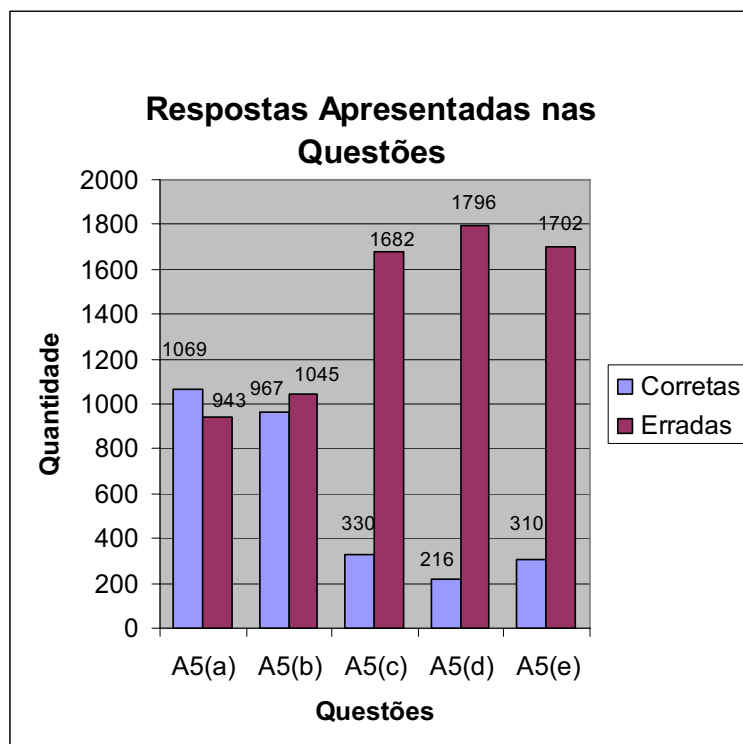


Figura 12: Número de acertos e erros nas questões que abordam o fatorial

Na Figura 13 apresentamos o percentual de acertos de cada uma das questões.

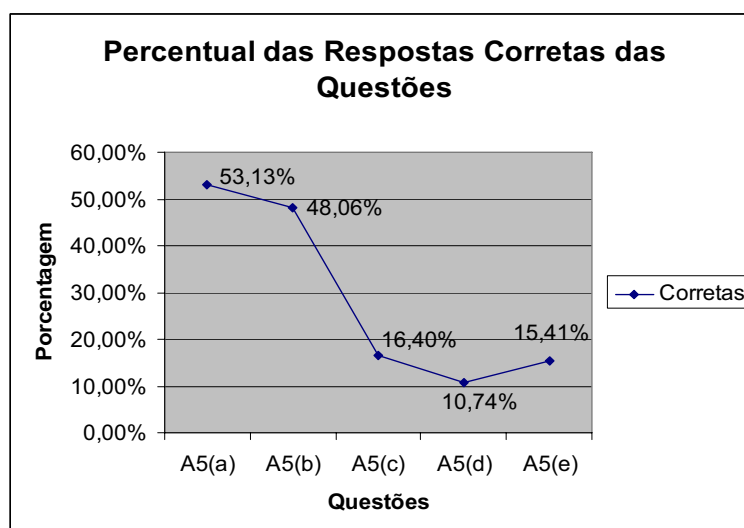


Figura 13. Percentual de acertos e erros nas questões que abordam o fatorial

QUESTÃO A5(a)

Verificamos, nas Figuras 12 e 13, o maior número de acertos na questão A5(a) – 1069 alunos acertaram-na, o equivalente a 53,13% da amostra. O único percentual maior que 50% de acertos obtidos nas respostas das cinco questões. Com a ajuda da Tabela 2, que apresenta as justificativas dadas à questão pelos alunos que a acertaram. Verificamos que o bom desempenho na questão foi possível devido à possibilidade de ser respondida pela via do cálculo, já que 70,72% dos alunos que acertaram utilizaram-no para justificar sua resposta. Observe que são poucas as justificativas destacando propriedades.

Justificativas Apresentadas pelos estudantes que acertaram a questão A5(a)

Justificativas da Questão A5(a)	Quantidade	%
0 - (Justificativas totalmente erradas, ou que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso).	154	14,41%
1 - (Justificativas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, justificativas que são completamente empíricas).	101	9,45%
2a - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem, contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta muito para chegar à prova).	19	1,78%
2b - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem, contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta pouco para chegar à prova).	9	0,84%
3C - (Justificada por meio de cálculos).	756	70,72%
3P - (Justificada com referência a propriedades pertinentes).	30	2,81%
Total	1069	100,00%

Tabela 2

QUESTÃO A5(b)

Em A5(b), 967 alunos (48,06%) acertaram, Figura 12. Nesta questão percebemos mais nitidamente se o significado dado ao fatorial foi compreendido. Se considerarmos que da nossa amostra apenas 48,06% entendeu com clareza a definição que apresentamos para o fatorial, teríamos que ter um outro olhar para

o percentual dos acertos das demais questões, já que podemos imaginar que alguns dos 1045-(51,94%) alunos não acertaram as demais questões exatamente pela falta desse entendimento, ou 46,87%, visto os 53,13% terem acertado a primeira questão.

Em uma análise preliminar dos questionários verificamos que apenas dois alunos que não acertaram a questão A5(b), acertaram as três questões que se seguiram no questionário, enquanto dos que acertaram a questão, apenas dezenove conseguiram acertar as três questões que se seguiram, e foram os únicos de toda a amostra a darem respostas corretas para todas as cinco questões apresentadas na amostra de 2012 alunos.

Dentre os alunos que não acertaram a questão A5(b), é interessante citar que 358, mais de um terço (34,26%), destes, responderam corretamente a questão A5(a), sendo que 210 deles justificaram suas respostas por meio de cálculos. Parece que esses alunos não conseguiram generalizar o cálculo efetuado na questão A(a) para a questão A5(b).

Como na questão A5(b) não se pediu justificativa, passemos a análise da questão A5(c).

QUESTÃO A5(c)

Apenas 330 alunos (16,40%) acertaram a questão. Tivemos aqui uma grande diminuição no número de acertos, no entanto notamos que a via do cálculo ainda foi possível nesta questão e essa foi a principal justificativa utilizada por 38,48% dos alunos que a acertaram, conforme podemos constatar na Tabela 3. O índice de justificativas com o uso de propriedades foi um pouco maior que na questão A5(a). A tabela também mostra que 46,97% dos alunos que acertaram não justificaram sua resposta, talvez seja uma indicação da falta de familiaridade com argumentação matemática.

**Justificativas Apresentadas pelos estudantes
que acertaram a questão A5(c)**

Justificativas da Questão A5(c)	Quantidade	%
0 - (Justificativas totalmente erradas, ou que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso).	155	46,97%
1 - (Justificativas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, justificativas que são completamente empíricas).	28	8,48%
2a - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta muito para chegar à prova).	3	0,91%
2b - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta pouco para chegar à prova).	1	0,30%
3C - (Justificada por meio de cálculos).	127	38,48%
3P- (Justificada com referência a propriedades pertinentes).	16	4,85%
Total	330	100,00%

Tabela 3

QUESTÃO A5(d)

Apenas 216 alunos (10,74%) acertaram a questão. O mais baixo índice de acerto nas questões. Nesta questão a abordagem ao problema pela via do cálculo foi inviável e pelo baixo índice de acertos percebemos a dificuldade que os alunos encontraram nela. Observando a Tabela 4, percebemos que mesmo os poucos que acertaram a questão, não apresentaram ou não souberam justificar suas respostas (72,22%).

O índice de justificativas utilizando propriedades aumenta um pouco em relação à questão A5(c), o que era esperado, visto a impossibilidade do cálculo na questão.

Levando em conta o percentual dos alunos que apresentaram acertos nas questões anteriores e que acertaram a questão seguinte, em ordem crescente de questões, a questão A5(d) foi a que apresentou o menor percentual de acerto 27,36%, dado obtido pela filtragem na planilha de dados.

**Justificativas Apresentadas pelos estudantes
que acertaram a questão A5(d)**

Justificativas da Questão A5(d)	Quantidade	%
0 - (Justificativas totalmente erradas, ou que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso).	156	72,22%
1 - (Justificativas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, justificativas que são completamente empíricas).	18	8,33%
2a - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta muito para chegar à prova).	17	7,87%
2b - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta pouco para chegar à prova).	3	1,39%
3- (Totalmente justificada).	22	10,19%
Total	216	100,00%

Tabela 4

QUESTÃO A5(e)

Apenas 310 alunos (15,41%) acertaram a questão, Tabela 5. Assim como na questão A5(d) achávamos que a abordagem pela via do cálculo seria inviável. Esta questão foi a que apresentou o maior índice em falta de justificativa para as respostas apresentadas de todas as cinco questões (74,52%). Dos 55 alunos que vinham acertando as quatro questões anteriores, apenas 19, ou seja, 34,55% acertaram-na. Observamos que o número de justificativas com o uso de propriedades é menor que na questão anterior.

**Justificativas Apresentadas pelos estudantes
que acertaram a questão A5(e)**

Justificativas da Questão A5(e)	Quantidade	%
0 - (Justificativas totalmente erradas, ou que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso).	231	74,52%
1 - (Justificativas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, justificativas que são completamente empíricas).	30	9,68%
2a - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta muito para chegar à prova).	18	5,81%
2b - (Justificativa com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova - Falta pouco para chegar à prova).	6	1,94%
3 - (Totalmente justificada).	25	8,06%
Total	310	100,00%

Tabela 5

Podemos verificar, até aqui, o fraco desempenho da amostra na resolução das questões que envolvem o fatorial. Poucos alunos usaram propriedades como justificativas e a tendência de justificativas por meios de cálculos foi predominante. A única questão, A5(d), na qual o uso do cálculo seria completamente inviável, e os alunos teriam que apresentar uma outra abordagem para resolvê-la foi a que apresentou o menor número de acertos. Provavelmente por falta de uma outra abordagem ao problema que não seja o uso do cálculo.

3.1.2 ANÁLISE POR REDE DE ENSINO

A seguir elaboraremos uma análise dos dados, levando em conta a rede de ensino a que os alunos pertencem.

Na Tabela 6, fornecemos a quantidade e percentual de alunos pertencentes às suas respectivas redes de ensino. Nela verificamos que 80,42% da nossa amostra é composta por alunos da rede estadual de ensino.

**Número de alunos da amostra
pertencentes a cada uma das redes de
ensino**

Rede de Ensino	Alunos	%
Estadual	1618	80,42%
Municipal	117	5,82%
Particular	277	13,77%
<i>Total</i>	2012	100,00%

Tabela 6

Na Figura 14, observamos que os alunos das escolas particulares e das escolas municipais tiveram desempenho acima de 65% na questão A5(a) e os alunos das escolas estaduais tiveram um desempenho menor, fazendo o percentual da amostra geral ficar nos 53,13%.

Na Figura 15 observamos a mesma tendência, as escolas municipais apresentando um desempenho melhor, na questão A5(b), que as escolas particulares,.

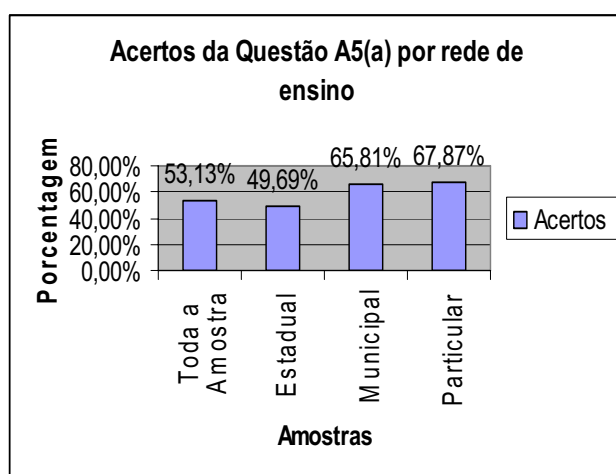


Figura 14, acertos à questão A5(a) por rede de ensino

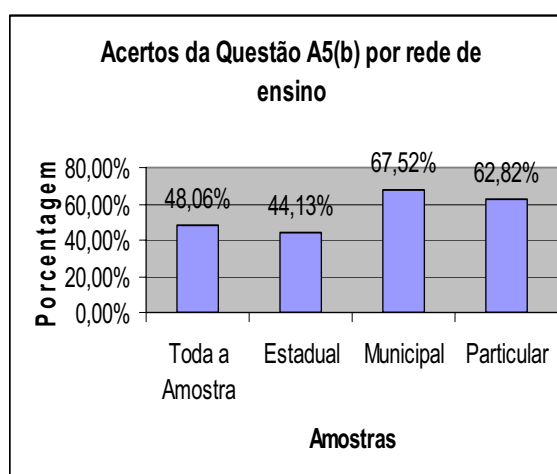


Figura 15 acertos à questão A5(b) por rede de ensino

Nas Figuras 16 e 17, a seguir, percebemos a mesma tendência anterior, sendo que os resultados das escolas estaduais caem um pouco mais em relação às outras duas redes de ensino.

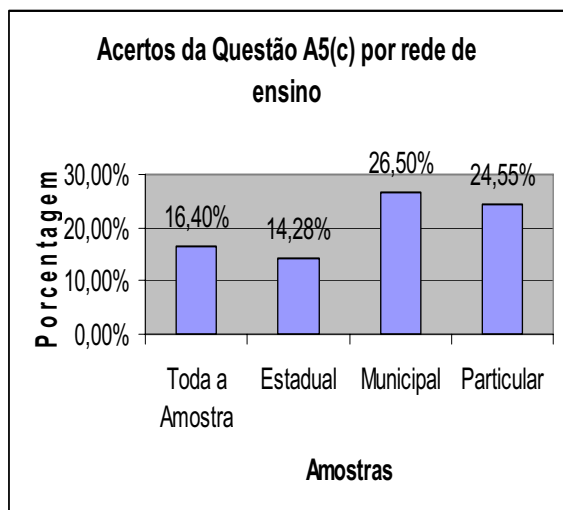


Figura 16 acertos à questão A5(c) por rede de ensino

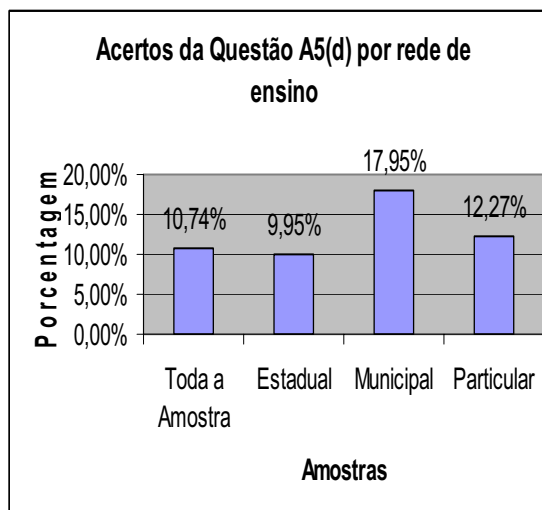


Figura 17 acertos à questão A5(d) por rede de ensino

Finalmente na Figura 18, percebemos a maior diferença no desempenho dos alunos da rede municipal em relação às outras duas redes de ensino. 42,74% deles acertaram a questão A5(e). Percebe-se ainda que a rede estadual pela primeira vez tem um resultado melhor que outra rede de ensino.

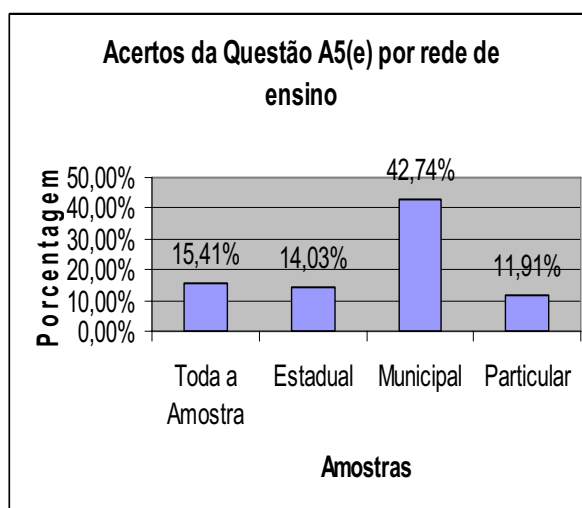


Figura 18 acertos a questão A5(e) por rede de ensino

Destacamos, de maneira ampla, o bom desempenho das escolas municipais e o baixo desempenho das estaduais. Lembramos que o percentual de escolas municipais é muito baixo para a determinação de alguma tendência geral.

3.1.3 ANÁLISE POR SÉRIE QUE FREQUÊNTAM

A seguir, elaboramos uma análise dos dados levando em conta a série que os alunos da amostra frequentam.

Na Tabela 7 temos a quantidade de alunos que frequentam a 8ª série e os que frequentam a 1ª série. Observamos que o percentual de cada série não apresenta uma grande diferença, assim podemos dizer que as séries estão representadas de uma forma equilibrada e significativa.

Número de alunos matriculados na 8ª Série do EF e 1ª Série do EM		
Série	alunos	%
8ª	897	44,58%
1ª	1115	55,42%
<i>Total</i>	2012	100,00%

Tabela 7

Nas Figuras, 19, 20, 21,22 e 23, comparamos o percentual de acertos de toda a amostra com os acertos dos alunos da 8ª série e dos acertos dos alunos da 1ª série.

Observamos nessas Figuras, que os alunos da 8ª série tiveram um melhor desempenho em todas as questões em relação aos alunos da 1ª série, e a maior diferença encontrada foi na questão A5(e), em que o percentual de acertos dos alunos da 8ª série foi de 21,96%, enquanto o da 1ª série(10,13%), mais que o dobro. As turmas das escolas municipais são todas de 8ª séries.

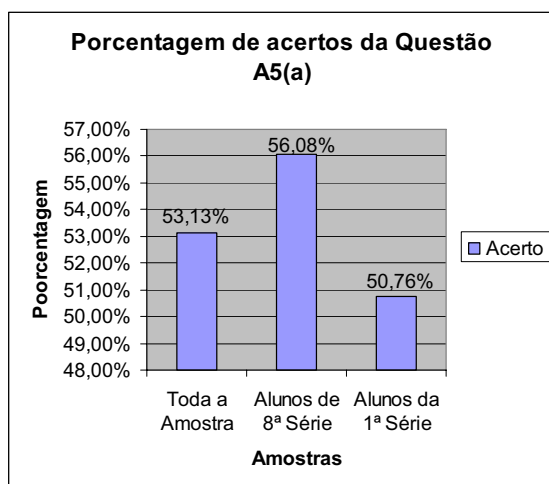


Figura 19 - acertos à questão A5(a) por séries que freqüentam

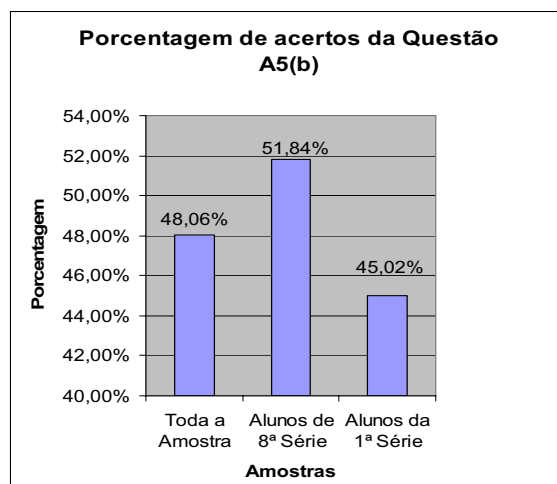


Figura 20 - acertos à questão A5(b) por séries que freqüentam

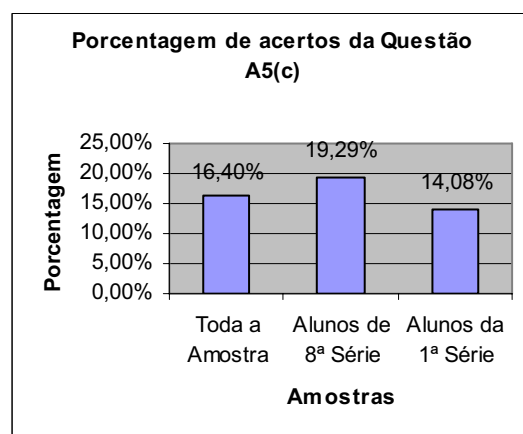


Figura 21 acertos à questão A5(c) por séries que freqüentam

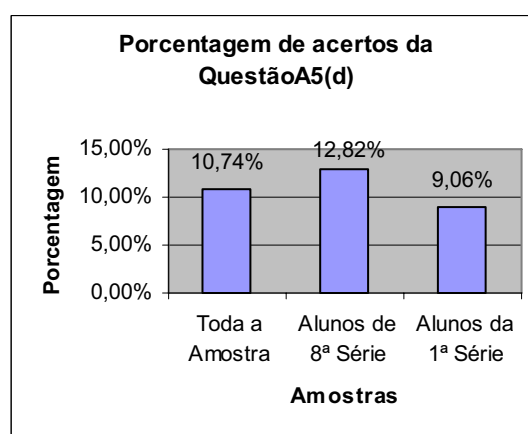


Figura 22 acertos à questão A5(d) por séries que freqüentam

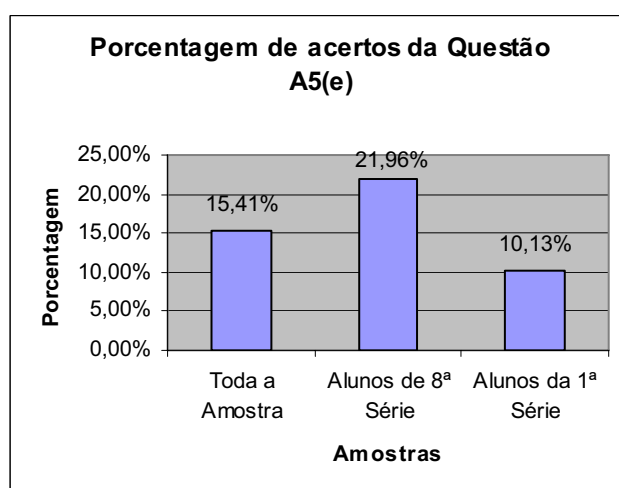


Figura 23 acertos à questão A5(e) por séries que freqüentam

Na Figura 23, encontramos a maior diferença entre a 8ª e a 1ª série.

Cabe destacar, como já se verificou, o apontamento de um melhor desempenho dos alunos da escola municipal quando o assunto tratado é a rede de ensino, e das oitavas séries quando abordamos a série que o aluno frequenta. Talvez o melhor desempenho das escolas municipais seja devido às turmas serem apenas de 8ª séries, e como apontamos anteriormente os múltiplos e divisores são abordados no ensino fundamental.

Como as amostras por série estão bem representadas, podemos destacar uma diferença significativa de desempenho das oitava séries em relação à dos primeiros. Chamamos novamente a atenção para o fato de todas as turmas das escolas municipais serem de oitava séries.

3.2 ANÁLISE MULTIDIMENSIONAL

Para elaborarmos uma análise multidimensional das respostas e justificativas das questões que abordam o fatorial, utilizamos o software estatístico CHIC, desenvolvido pelo pesquisador francês Régis Gras e seus colaboradores (1985), no Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR) na França.

O CHIC tem como funções extrair de um conjunto de informações, cruzando sujeitos e variáveis, regras de associação entre variáveis, fornecendo um índice de qualidade de associação e representando uma estruturação das variáveis a partir de cálculos matemáticos.

Para o uso do referido software, tivemos que criar uma planilha e nela codificar as respostas e justificativas, como variáveis binárias(0,1), em que 1 indica a presença do fato e 0(zero) a ausência. Foi acrescentada nesta planilha uma ordem numérica para os sujeitos e criadas variáveis suplementares (a série que frequentam: 8ª série do ensino fundamental ou 1ª série do ensino médio e a rede de ensino a que pertencem: estadual, municipal ou particular), já que o CHIC nos fornece o cálculo da contribuição de cada um dos sujeitos na formação das classes apresentadas, e indica qual variável suplementar foi a que mais contribuiu

para a formação de uma determinada classe. Classe é cada uma das implicações.

Os métodos de análises fornecidos pelo CHIC são: A árvore de similaridade, o grafo implicativo e a árvore coesitiva.

A seguir temos uma definição de cada uma das análises. Para uma noção mais detalhada dessas análises e de outros termos utilizados pelo CHIC, como: nó significativo, variáveis suplementares, contribuição, coesão e Grupo Ótima, sugerimos a leitura do anexo 5.

- Similaridade: efetua a análise das proximidades segundo I. C. LERMAN, e produz uma janela de resultados numéricos (índices, ...) e uma janela apresentando a árvore hierárquica de similaridades.
- Grafo implicativo: efetua os cálculos dos índices de implicação no sentido da análise implicativa, clássica ou entrópica, segundo a opção escolhida, em seguida apresenta uma janela de resultados numéricos (ocorrências, desvio-padrão, coeficientes de correlação) e, em cima, uma janela apresentando um grafo. Os resultados numéricos aparecerão igualmente com os outros tratamentos.
- Árvore coesiva: efetua os cálculos dos índices de coesão implicativa no sentido da análise implicativa, depois apresenta uma janela de resultados numéricos e uma janela apresentando uma árvore ascendente segundo o índice decrescente das coesões.

(Ajuda do software Chic, Versão 3.5)

Para nossas análises utilizamos apenas o terceiro método.

3.2.1 ÁRVORE COESITIVA

A *Árvore coesiva* efetua os cálculos dos índices de coesão implicativa, depois apresenta uma janela de resultados numéricos e uma janela apresentando uma árvore ascendente segundo o índice decrescente das coesões. A seguir na análise dos gráficos iremos retomando estes significados.

Na Figura 24, temos o resultado da análise coesitiva, dos acertos e erros, das respostas dadas às cinco questões que abordam o fatorial. Esta análise não envolveu ainda as justificativas, sendo baseada apenas nos acertos e erros em cada questão. Conseguimos observar na figura a formação de dois grupos, sendo

no Grupo 1 agrupadas as variáveis que representam os erros e no Grupo 2 as variáveis que representam os acertos.

Na Tabela 8, podemos verificar os índices de coesão que têm seu valor entre zero e um. Quanto maior é o índice de coesão melhor a agregação entre as variáveis. Verifique-se que de todos estes índices, o menor índice é o oitavo que tem índice 0,984, valor ainda muito significativo do ponto de vista estatístico.

Na Figura 24, verificamos oito níveis. O Nível 1 é no qual encontramos a mais forte implicação, seguidas dos Níveis 2,3,... , e 8, que é a mais fraca implicação dos níveis apresentados, mas ainda muito significativo do ponto de vista estatístico. Por último, temos as flechas sublinhadas na cor vermelha, que é denominada pelo programa como “nós significativos”, utilizado para chamar nossa atenção para as classes, pois ali encontramos as classes que estão em melhor conformidade com os indícios de implicações iniciais.

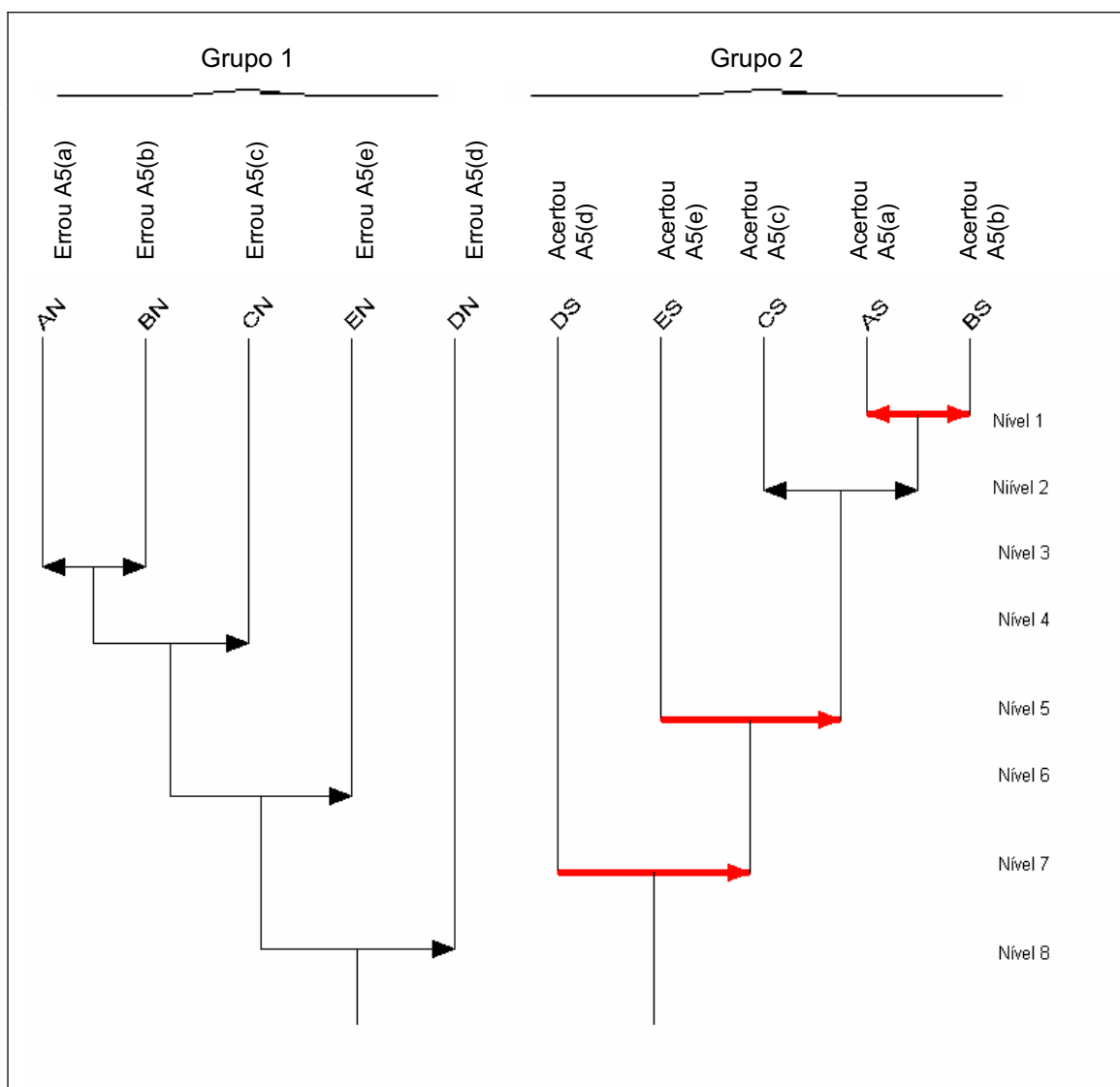


Figura 24 – Árvore coesitiva – acertos e erros

Classificação ao nível: 1 : (AS BS) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 2 : (CS (AS BS)) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 3 : (AN BN) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 4 : ((AN BN) CN) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 5 : (ES (CS (AS BS))) Coesão : 0.999
 Classificação ao nível: 6 : (((AN BN) CN) EN) Coesão : 0.999
 Classificação ao nível: 7 : (DS (ES (CS (AS BS)))) Coesão : 0.984
 Classificação ao nível: 8 : (((((AN BN) CN) EN) DN) Coesão : 0.984

Tabela 8 – Índice de coesão das classes dos Grupos 1 e 2

Nesta primeira análise, verificaremos passo a passo as classes formadas, seguindo a ordem dos níveis apresentados para o leitor se familiarizar com as informações e sentidos das coesões implicativas apresentadas na árvore.

No Nível 1, relacionam-se as variáveis (AS $\leftrightarrow$ BS), com um índice de coesão máximo, veja Tabela 8. Isso significa que há implicação de AS sobre BS

e vice-versa, já que temos uma dupla implicação. Lembramos ser esse nível o mais forte de todas as implicações, além de um nó significativo. Podemos interpretá-la como: os alunos que acertaram a questão (a) muito provavelmente acertaram a questão (b) e vice-versa.

No Nível 2, segunda implicação mais forte entre as variáveis, encontramos também o nível de coesão máxima. Nela temos a dupla implicação $((CS, \Leftrightarrow (AS, BS)))$, significando: quem acertou a questão (c) provavelmente acertou as questões (a) e (b) e vice-versa.

No Nível 3, temos ainda o nível de coesão máxima e o relacionamento das variáveis $(AN \Leftrightarrow BN)$ em uma dupla implicação, significando que provavelmente quem errou a questão (a) também errou a questão (b) e vice-versa.

No Nível 4, encontramos também um índice de coesão máximo, e a implicação $((AN, BN) \Rightarrow CN)$, mostrando que quem errou as questões (a) e (b) provavelmente errou a questão (c).

No Nível 5, temos um índice de coesão 0,999 que ainda é muito significativo, um nó significativo mostrando que nessa classe encontramos uma melhor conformidade com os indícios de implicação iniciais, significando na implicação $(ES \Rightarrow (CS (AS BS)))$: quem acertou a questão (e) muito provavelmente tenha acertado as questões (c), (a) e (b).

No Nível 6, temos o índice de coesão 0,999, e a implicação $((AN BN) CN) \Rightarrow EN)$, significa que provavelmente quem errou as questões (a), (b) e (c) também errou a questão (e).

No Nível 7, temos o índice de coesão 0,984 o que ainda é muito significativo e também um nó significativo. A implicação $(DS \Rightarrow (ES (CS (AS BS))))$, significa que muito provavelmente quem acertou a questão (d) acertou também as questões (e), (c), (a) e (b). Achávamos que responder corretamente a questão (e) implicaria em ter resolvido, provavelmente, as demais questões, no entanto não foi esse o sentido, como podemos observar.

Finalmente no Nível 8, encontramos o mesmo índice de coesão anterior e a implicação $((((AN BN) CN) EN) \Rightarrow DN)$, significando que provavelmente quem errou as questões (a), (b), (c) e (e) errou também a questão (d).

Podemos observar que o sentido das implicações do Grupo 1, indicam uma tendência que aquele que não acertou as primeiras questões também não o fez nas últimas. Enquanto no Grupo 2, temos indicada a tendência que aquele que acertou as últimas questões também o fez nas primeiras.

A análise também indicou, Tabela 9, que os alunos da rede estadual foram os que mais contribuíram em todas as implicações do Grupo 1. Tendo como referência apenas a série dos alunos, ficam os alunos da 1ª série do ensino médio como os maiores contribuintes em todas as classes (implicações) desse grupo. Observe na tabela que quanto menor o risco maior a contribuição à classe.

Contribuição à classe : AN,BN,CN,EN,DN (3,4,6,8)
A variável P contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável M contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável E contribui a esta classe com um risco de : 0.00321
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.00124
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.00124

Tabela 9 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 1

Os alunos da rede municipal foram os que mais contribuíram, Tabela 10, em todas as implicações do Grupo 2. Tendo como referência apenas a série dos alunos, ficam os alunos da 8ª série como maiores contribuintes, para todas as implicações desse grupo, o que corrobora com as análises quantitativas que elaboramos. Recordamos que o índice de alunos das escolas particulares é de 13,77% e das escolas municipais 5,82%, já os índices percentuais das séries que os alunos freqüentam é bem equilibrado.

Contribuição à classe : DS,ES,CS,AS,BS (1,2,5,7)
A variável P contribui a esta classe com um risco de : 1.18e-005
A variável M contribui a esta classe com um risco de : 7.09e-006
A variável E contribui a esta classe com um risco de : 0.998
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.934
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.0465
A variável que contribui mais a esta classe é M com um risco de : 7.09e-006

Tabela 10 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 2

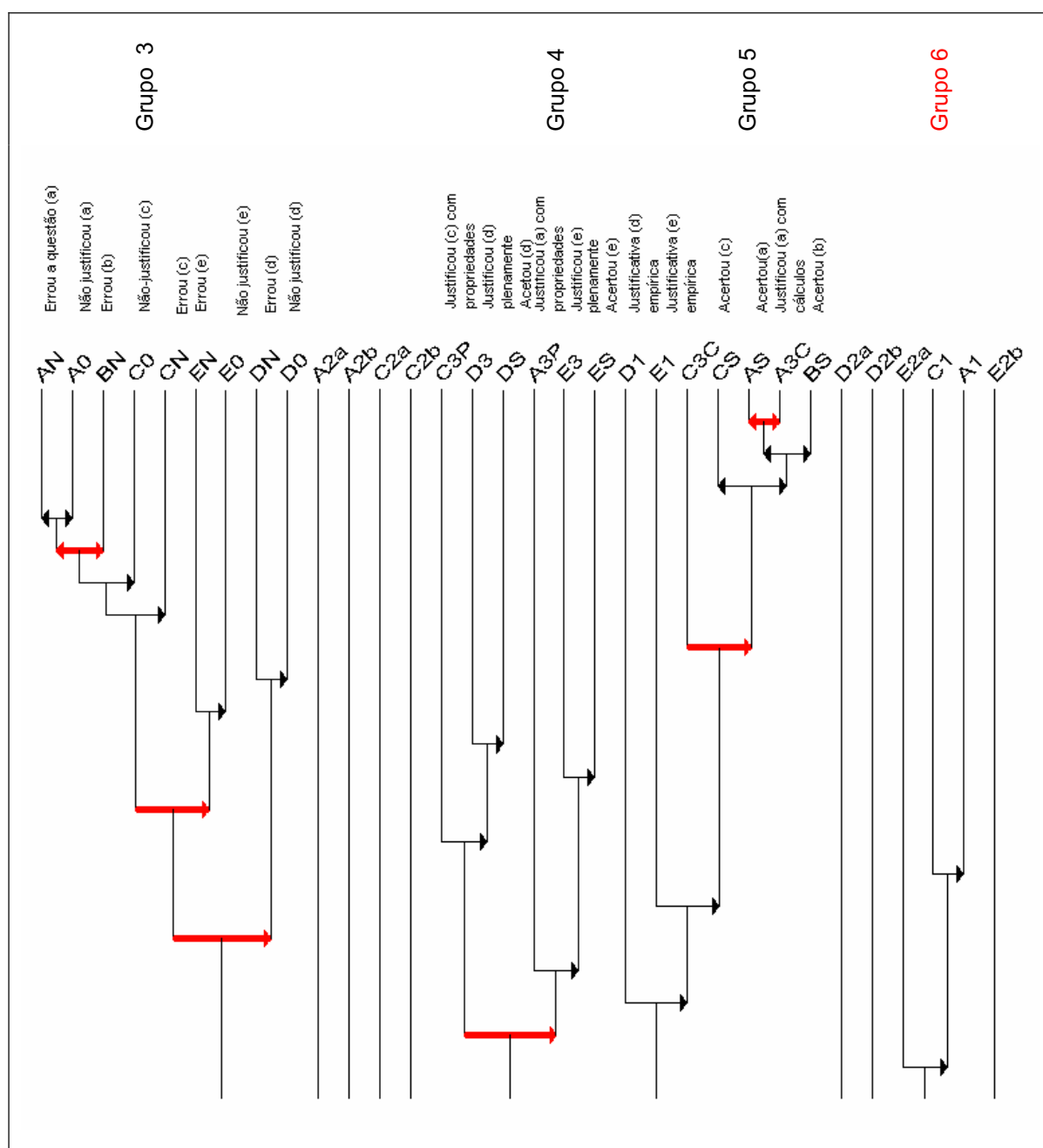


Figura 25 - Árvore coesitiva geral

A Figura 25 apresenta os resultados da análise coesitiva geral, com todas as variáveis (respostas e justificativas apresentadas). Verifique que as variáveis A2a, A2b, C2a, C2b, D2a, D2b e E2b não implicam e nem são implicadas por nenhuma outra variável.

Essa análise identificou mais quatro grupos, a seguir analisaremos os Grupos 3, 4 e 5. Não analisaremos o Grupo 6 por possuir apenas duas

implicações, nenhuma com um nó significativo, tendo a última classe um índice de coesão 0.43, valor muito baixo, do ponto de vista estatístico. Recordamos que o maior índice de coesão é 1 e quanto menor o valor do nível, maior a força de implicação e que os nós significativos estão onde existe uma melhor conformidade com os indícios iniciais.

ANÁLISE DO GRUPO 3 – Dificuldades – os alunos que apresentaram dificuldades

A análise deste grupo é de certa forma semelhante à análise do Grupo 1. No entanto, aqui temos algumas justificativas, Figura 26, apontando um dado previsível: os alunos que não acertaram as questões não apresentaram justificativas para elas.

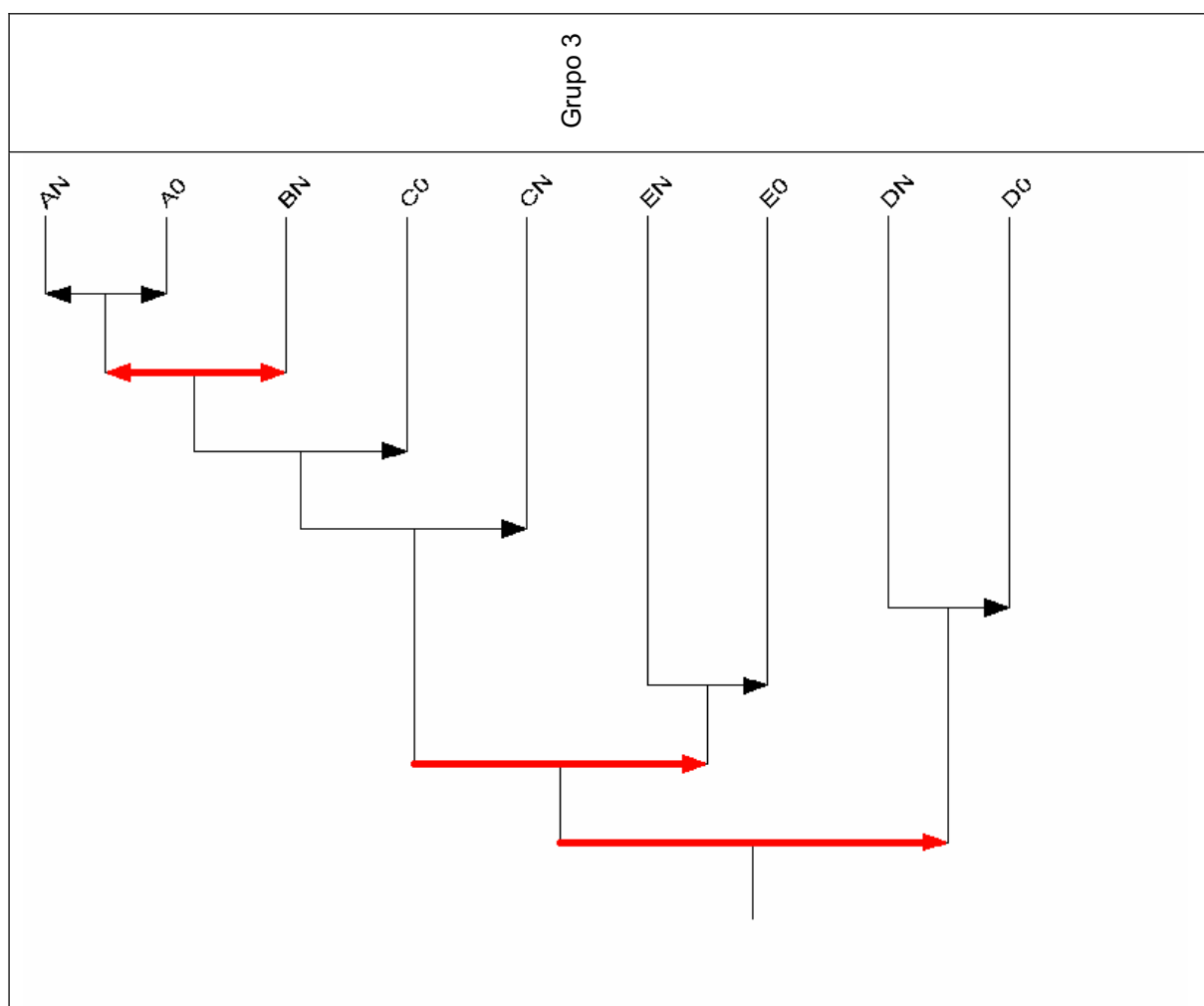


Figura 26 - Árvore coesiva do Grupo 3

Classificação ao nível: 4 : (AN A0) Coesão : 1
Classificação ao nível: 5 : ((AN A0) BN) Coesão : 1
Classificação ao nível: 6 : (((AN A0) BN) C0) Coesão : 1
Classificação ao nível: 7 : (((((AN A0) BN) C0) CN) Coesão : 1
Classificação ao nível: 9 : (DN D0) Coesão : 1
Classificação ao nível: 10 : (EN E0) Coesão : 1
Classificação ao nível: 13 : ((((((AN A0) BN) C0) CN) (EN E0)) Coesão : 0.999
Classificação ao nível: 17 : (((((((AN A0) BN) C0) CN) (EN E0)) (DN D0)) Coesão : 0.965

Tabela 11 – Índice de coesão do Grupo 3

Na Tabela 11, verificamos que nos Níveis 4, 5, 6, 7, 9, e 10 houve o maior índice de coesão possível que é 1, sendo portanto, muito significativos, assim como os outros dois índices 0,999 e 0,965.

No Nível 4, temos uma dupla implicação: quem errou a questão (a) provavelmente não apresentou justificativa para ela e vice-versa.

No Nível 5, ainda uma dupla implicação, que podemos interpretar como: quem não acertou a questão (a) e não apresentou justificativa para ela, e vice-versa, provavelmente não acertou a questão (b), e vice-versa.

No Nível 6, verificamos: quem teve o comportamento anterior, implica em provavelmente não ter apresentado justificativa para a questão (c).

No Nível 7, verificamos: quem teve o comportamento anterior, implica em provavelmente não ter acertado a questão (c).

Nos Níveis 9 e 10 temos que provavelmente: quem não acertou respectivamente as questões (e) e (d), possivelmente não apresentou justificativas para elas, o que era previsível.

No Nível 13, podemos interpretar, sem perda do sentido apresentado até agora, que quem respondeu (AN e A0 e BN e C0 e CN) possivelmente respondeu (EN e E0) e finalmente no Nível 17 temos, quem respondeu (AN e A0 e BN e C0 e CN e EN e E0) possivelmente respondeu (DN e D0).

Aqui, também temos os alunos da rede estadual como maiores colaboradores em todas as implicações do Grupo 3, Tabela 12 . E usando como referência apenas a série dos alunos, ficam os alunos da 1ª série do ensino médio como maiores contribuintes para todas as implicações do grupo.

Contribuição à classe : AN,A0,BN,C0,CN,EN,E0,DN,D0 (4,5,6,7,9,10,13,17)

A variável P contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável M contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável E contribui a esta classe com um risco de : 0.000401

A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.00352

A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.999

A variável que contribui mais a esta classe é E com um risco de : 0.000401

Tabela 12 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 3

Verificamos que é muito provável que os alunos que começaram errando ou não sabendo responder as primeiras questões, não conseguiram responder às demais que se seguiram.

ANÁLISE DO GRUPO 4 - Propriedades

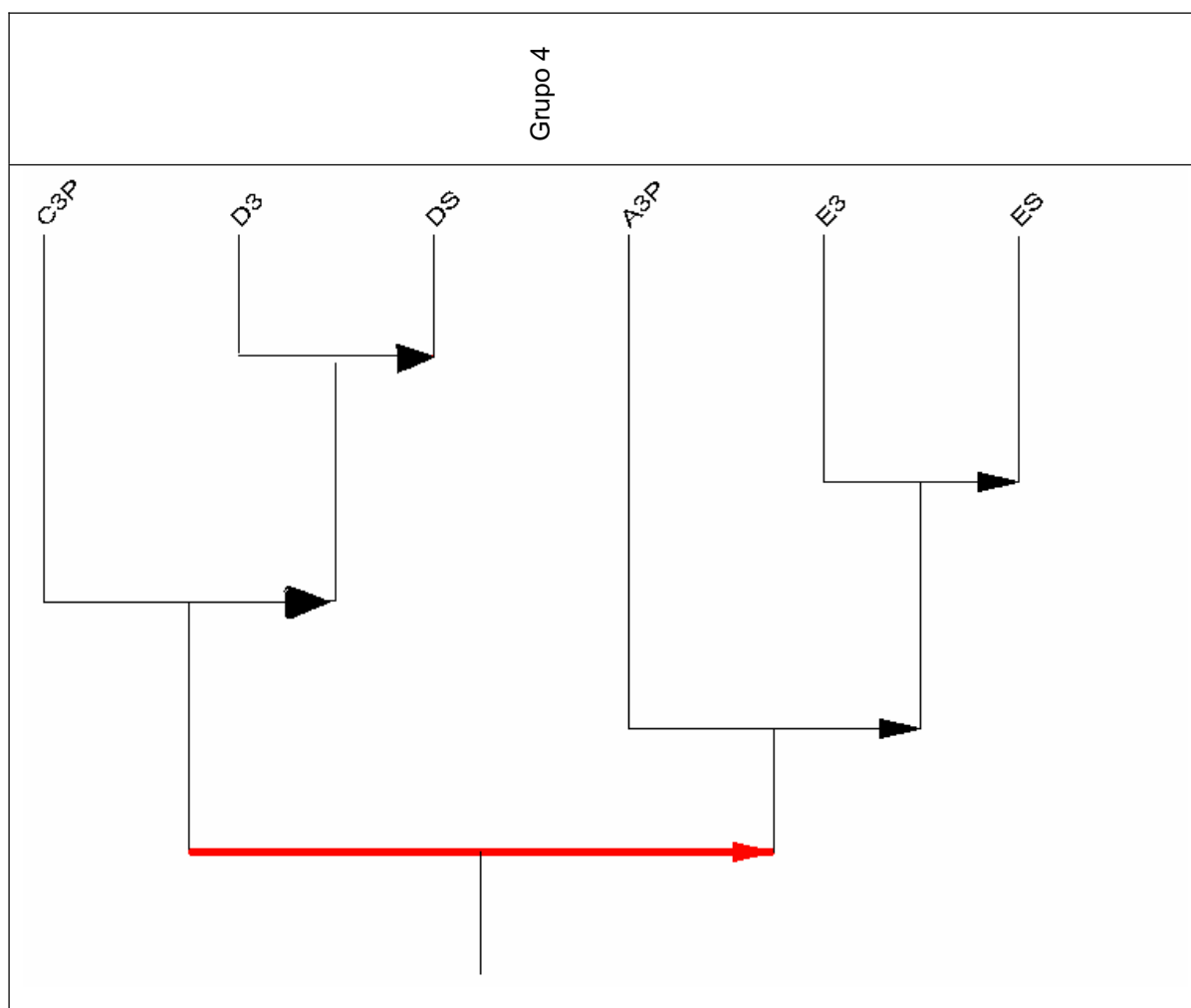


Figura 27 - Árvore coesitiva do Grupo 4

Classificação ao nível: 11 : (D3 DS) Coesão : 1
Classificação ao nível: 12 : (E3 ES) Coesão : 1
Classificação ao nível: 14 : (C3P (D3 DS)) Coesão : 0.995
Classificação ao nível: 18 : (A3P (E3 ES)) Coesão : 0.852
Classificação ao nível: 20 : ((C3P (D3 DS)) (A3P (E3 ES))) Coesão : 0.653

Tabela 13 – Índice de coesão do Grupo 4

No Grupo 4, Figura 27, temos nos Níveis 11 e 12 o índice máximo de coesão, no Nível 14 com um índice semelhante ao anterior e nos índices 18 e 20, índices menores mas ainda significativos.

Nos Níveis 11 e 12, encontramos uma informação também previsível, os alunos que justificaram totalmente (propriedades) suas respostas provavelmente acertaram-na.

No Nível 14, aqueles que justificaram a questão (c) com propriedades, provavelmente acertaram e justificaram totalmente a questão (d).

No Nível 18, temos os alunos que justificaram a questão (a) com propriedades, provavelmente acertaram e justificaram totalmente a questão (e).

Finalmente temos no Nível 20, que apresenta um índice de coesão menor, no entanto é um nó significativo, nos indicando: quem respondeu (C3P e D3 e DS) muito provavelmente respondeu (A3P e E3 e ES).

Podemos aqui supor: Aqueles alunos que justificaram sua resposta para a questão A5(c) tenderam também a construir justificativas baseadas em justificativas nas outras questões.

Os alunos da 8ª série do ensino fundamental foram os que mais contribuíram em todas as implicações do Grupo 4, Tabela 14. Tendo como referência apenas a rede de ensino a que os alunos pertencem, ficam os alunos da rede municipal como maiores contribuintes, também para todas as implicações deste grupo.

Contribuição à classe : C3P,D3,DS,A3P,E3,ES (11,12,14,18,20)
 A variável P contribui a esta classe com um risco de : 0.678
 A variável M contribui a esta classe com um risco de : 0.105
 A variável E contribui a esta classe com um risco de : 0.558
 A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.972
 A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.0169

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.0169

Tabela 14 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 4

Na análise descritiva já havíamos mostrado que poucos alunos apresentaram propriedades para as suas justificativas. O melhor desempenho, por rede de ensino, foi da rede municipal; e por série, dos alunos das oitavas séries. Também destacamos que todas as turmas da nossa amostra, da rede municipal são de 8ª série. Verificamos na indicação da análise multidimensional serem eles também os que mais contribuíram para as justificativas utilizando propriedades, informação que ainda não tínhamos.

ANÁLISE DO GRUPO 5 – Calculistas

Na análise quantitativa, já havíamos verificado uma tendência muito forte pelas justificativas com o uso de cálculo. Devemos aqui informar que nas codificações das justificativas das questões (d) e (e) que usamos para as justificativas usuárias desse meio foram às codificações D1 e E1.

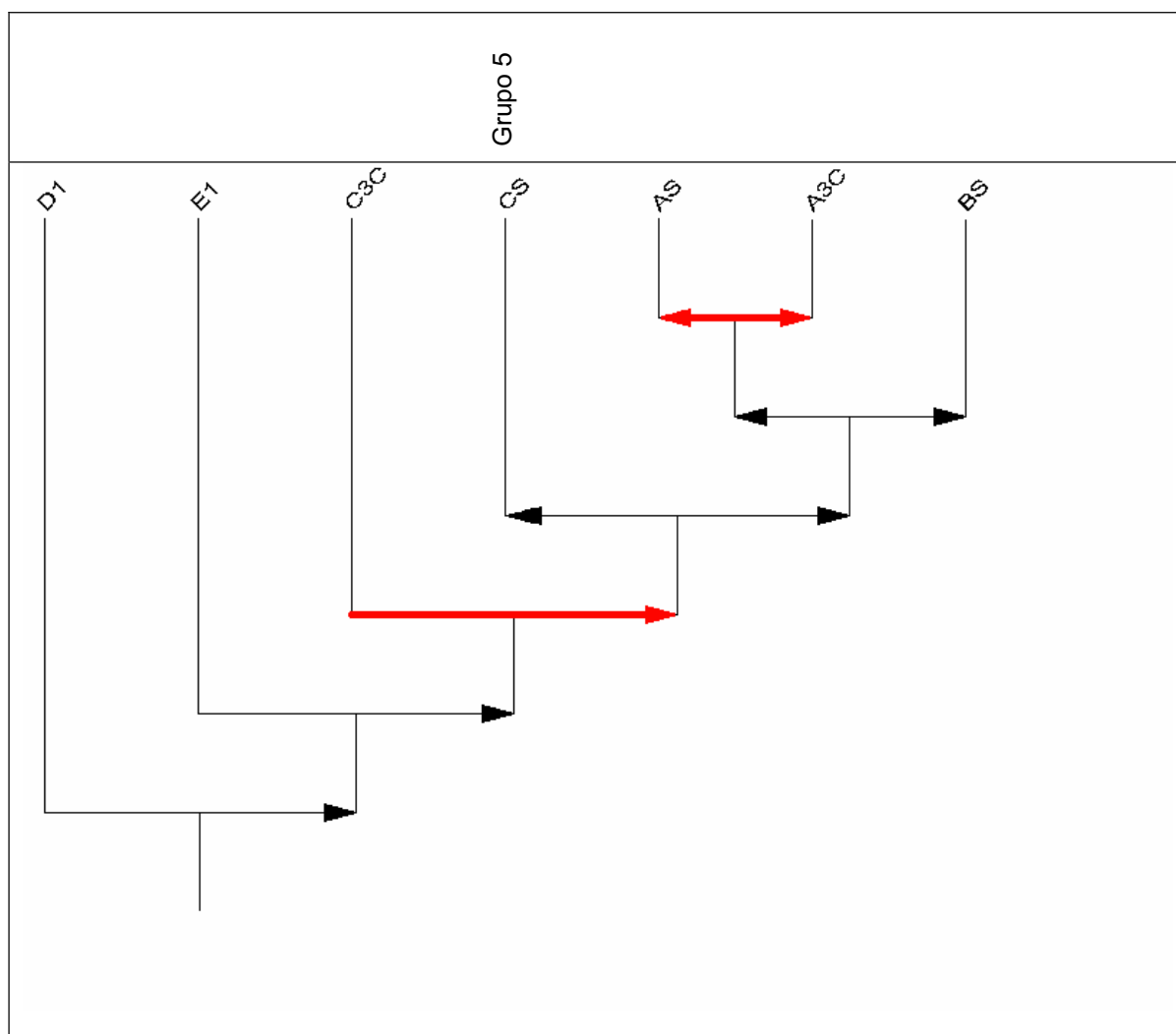


Figura 28 - Árvore coesitiva do Grupo 5

Classificação ao nível: 1 : (AS A3C) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 2 : ((AS A3C) BS) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 3 : (CS ((AS A3C) BS)) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 8 : (C3C (CS ((AS A3C) BS))) Coesão : 1
 Classificação ao nível: 16 : (E1 (C3C (CS ((AS A3C) BS)))) Coesão : 0.988
 Classificação ao nível: 19 : (D1 (E1 (C3C (CS ((AS A3C) BS))))) Coesão : 0.784

Tabela 15 – Índice de coesão do Grupo 5

Chamamos a atenção também para os três primeiros níveis estarem nesse grupo, além de dois nós significativos.

No Grupo 5, Figura 28 temos os Níveis 1, 2, 3 e 8 com o índice máximo de coesão. No Nível 16 com um índice ainda muito alto e no Nível 19 um índice ainda significativo.

No Nível 1, o mais implicativo de todos, e ainda, com um nó significativo chamando nossa atenção. Há dupla implicação apontando para: os que

acertaram a questão (a) muito provavelmente acertaram a questão com o uso de cálculos, o que é confirmado pela Tabela 2, e vice-versa, bem claro para o leitor, neste ponto do trabalho.

No Nível 2 temos a dupla implicação: quem acertou a questão (b), provavelmente acertou e justificou a questão (a) com cálculos e vice-versa.

No Nível 3 temos: quem acertou a questão (c) provavelmente respondeu (AS e A3C e BS) e vice-versa.

No Nível 8 temos: quem justificou a questão (c) com cálculos muito provavelmente respondeu (CS e AS e A3C e BS).

No Nível 16 temos: quem justificou a questão (e) com “completamente empíricas/cálculos” provavelmente respondeu (C3C e CS e AS e A3C e BS).

No Nível 19 temos: quem justificou a questão (d) com “completamente empíricas/cálculos” provavelmente respondeu (E1 e C3C e CS e AS e A3C e BS).

Os alunos da rede municipal foram os que mais contribuíram em todas as implicações do Grupo 5, Tabela 16. Tendo como referência apenas a série, ficam os alunos da 8ª série do ensino fundamental como maiores contribuintes para todas as implicações do grupo.

Contribuição à classe : D1,E1,C3C,CS,AS,A3C,BS (1,2,3,8,16,19) A variável P contribui a esta classe com um risco de : 7.48e-005 A variável M contribui a esta classe com um risco de : 4.63e-005 A variável E contribui a esta classe com um risco de : 0.996 A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.902 A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.0743
--

A variável que contribui mais a esta classe é M com um risco de : 4.63e-005
--

Tabela 16 – Cálculo das contribuições das variáveis suplementares Grupo 4

Realizando uma análise verificamos que o software CHIC cumpriu o papel que esperávamos, indicando, por meio de cálculos estatísticos, as condições que os dados de nossos alunos poderiam determinar que um comportamento X, em uma questão, implicava um comportamento Y em uma outra, ou em outra interpretação, indicando uma tendência de uma resposta Y já que respondeu ou sabia X.

Essa análise indicou-nos cinco grupos significativos, aqueles que erraram as questões; os que acertaram; os que erraram e não apresentaram justificativas; os que utilizaram justificativas com cálculos e os que apresentaram justificativas utilizando propriedades, demonstrando-nos suas tendências.

A seguir, buscando mais informações sobre os grupos formados, fomos a campo para elaborarmos algumas entrevistas. Mais uma vez o software CHIC nos foi muito útil, indicando os sujeitos que mais colaboraram para a formação de cada grupo.

3.3 AS ENTREVISTAS

Na análise multidimensional, três grupos em particular chamaram a atenção: aqueles que tiveram dificuldades para responder e justificar as questões apresentadas, os que responderam justificando com cálculos e os que usaram propriedades em suas justificativas. Resolvemos elaborar entrevistas com alunos que representassem cada um dos três grupos, utilizando aqueles indicados pelo CHIC (“Grupo Ótima”) como os que mais contribuíram para a formação de cada um dos grupos. Para o Grupo 3, realizamos quatro entrevistas, devido aos alunos indicados pelo CHIC terem deixado as questões em branco e buscamos melhor entender este grupo. Em todas elas buscamos compreender melhor as tendências, conhecimentos utilizados, dificuldades e diferenças apresentadas nas análises descritiva e multidimensional.

Começaremos nosso trabalho descrevendo uma entrevista que realizamos logo após ter sido definido o tema de nossa dissertação, realizada com um aluno, não participante da nossa amostra, que iniciava o ensino médio em uma escola da rede particular de ensino. Nossas perguntas foram no intuito de saber o que ele conhecia ou lembrava das noções de divisibilidade abordadas no ensino fundamental. Essa entrevista nos forneceu os primeiros indícios dos caminhos que deveríamos traçar, por isso achamos relevante sua descrição.

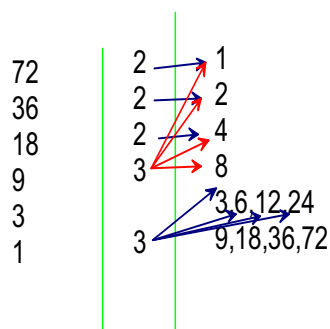
ALUNO 1 – Conceção de divisibilidade

Logo após conhecermos o tema da nossa dissertação, as questões que abordam o fatorial, resolvemos entrevistar um aluno que acabara de terminar o ensino fundamental em uma escola da rede particular de ensino, uma vez que estas questões envolvem noções de divisibilidade para a sua resolução e estes assuntos são abordados no ensino fundamental como: múltiplos, divisores, fatores, etc. Nossas perguntas foram no intuito de explorar as informações de que ele havia se apropriado, lembrava-se ou que poderia dar exemplos em relação a noções de divisibilidade. Abaixo comentamos, de forma geral, o que o aluno transmitiu.

Fator – não sabia o significado.

Divisor – Para ele divisores são números que podem dividir outro número “maior”. Quando questionado, diz que todo número é divisor dele mesmo – “sem deixar resto”, citou a divisão para verificar se um número é realmente divisor de um outro e a obtenção do resto zero como a confirmação que o divisor é um “divisor exato” – expressão utilizada para o divisor do dividendo.

A construção indicada por ele para obter todos os divisores de um número natural – para números inteiros não é possível em sua concepção, mesmo quando questionado, o aluno não conseguia ou não achava sentido em fazer a divisão com dividendo negativo. É a forma padrão a seguir:



Após o aluno ter mostrado o método pelo qual obtinha os divisores do número 72 perguntamos se o número 72 era divisível por 12, não soube responder. Após refletir um pouco sobre o que havia feito, respondeu meio tímido

que seria afirmativamente. Mas, quando perguntado novamente se por 8 seria divisível, respondeu que teria que fazer os cálculos, mesmo com o dispositivo acima à sua frente. O aluno soube obter os divisores de números naturais, operando muito bem o algoritmo anterior, no entanto, não compreendia o significado do que fazia e as propriedades envolvidas.

Números Primos ele descreve como números naturais divisíveis apenas por 1 e eles mesmos. Dois é o primeiro e único número primo. Questionado sobre o número de divisores (após um momento de pausa), respondeu que os números primos possuem apenas dois divisores.

Números Compostos para este aluno são os que não são primos, por exemplo: seis e dez.

Fatoração foi descrita como uma ferramenta importante, associada ao mmc e à obtenção de divisores e simplificação de raízes quadradas. Ele ofereceu o seguinte exemplo:

	divisores primos
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	—
	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5, 6 e 10 são conhecidos. No entanto, chamou nossa atenção o conhecimento do critério de divisibilidade por 6 – ser divisível por 2 e 3 – quando perguntado se um número que é divisível simultaneamente por 2 e 5 seria também por 10, não soube responder, percebemos que nunca havia pensado nisso, para ele só era válido para o 6, não que $6=2 \cdot 3$, mas como uma regra isolada.

MMC era associado, pelo aluno 1, apenas com dois números e relacionado apenas à soma ou subtração de frações com denominadores diferentes, não usado para somar ou subtrair frações, justificando não precisar usá-lo, pois

multiplicando todos os denominadores teremos um múltiplo também. Disse que a única desvantagem de não usar o mmc é ter que simplificar as frações, no entanto, brinca: “na prova nunca aparece frações com denominadores grandes”.

Do **MDC** não lembrava, nem sabia citar um exemplo da utilização em alguma operação que tenha efetuado.

As próximas entrevistas foram realizadas com seis alunos da amostra. Os alunos foram escolhidos entre os indicados pelo software CHIC, que lista o grupo de alunos que mais contribuíram para cada implicação apresentada na árvore coesitiva, denominado: “grupo ótima de sujeitos”, Anexo 6. Dos alunos indicados pelo CHIC, selecionamos alunos de duas escolas, de redes diferentes, por conhecê-las e tendo em vista estarem localizadas na região onde moramos e trabalhamos.

CARACTERIZANDO O GRUPO 3

No “grupo ótima” associado a esse grupo de alunos, com perfil “ótima” para o Grupo 3, encontramos a indicação de dois alunos (Anexo 6) pertencentes às escolas que escolhemos para elaboramos as entrevistas, tendo ambos deixado todas as questões que abordam o fatorial em branco.

O primeiro dos alunos, aluno 2, começa a entrevista relatando sua grande dificuldade em Matemática.

ALUNO: - *Matemática, matemática não cai na minha cabeça...é difícil não entra na minha cabeça. Eu fico ali prestando a atenção, eu fico fixado, largo o lápis e caneta e fico lá prestando atenção, mas não entra na minha cabeça.*

Nos relatou ainda, ter sido reprovado no ano anterior por faltas e notas. Contou-nos ter entendido o significado dado ao fatorial e que até pensou em multiplicar, mas deixou em branco, pois teria que justificar. Não soube responder o significado dos termos: múltiplo e divisor, mostrando uma falta de compreensão

destes. Perguntamos a ele da possibilidade de tentar refazer o questionário e respondeu-nos negativamente.

O outro aluno, na verdade aluna, aluna 3, diz ter deixado as questões em branco pela falta de tempo e por terem sido apresentadas por último. Assinalamos com a possibilidade de refazer o questionário e ela aceitou. Os comentários que realizamos a seguir são respostas referentes a esse segundo questionário respondido.

A aluna está cursando a segunda série do ensino médio e ainda não estudou o tema fatorial, mas mostrou ter compreendido o significado dado no questionário.

ALUNA: - *multiplicaria sempre pelos números anteriores*

Respondeu corretamente à primeira questão utilizando cálculos, Figura 29, e não teve problemas de compreensão na segunda, apesar do cálculo errado.

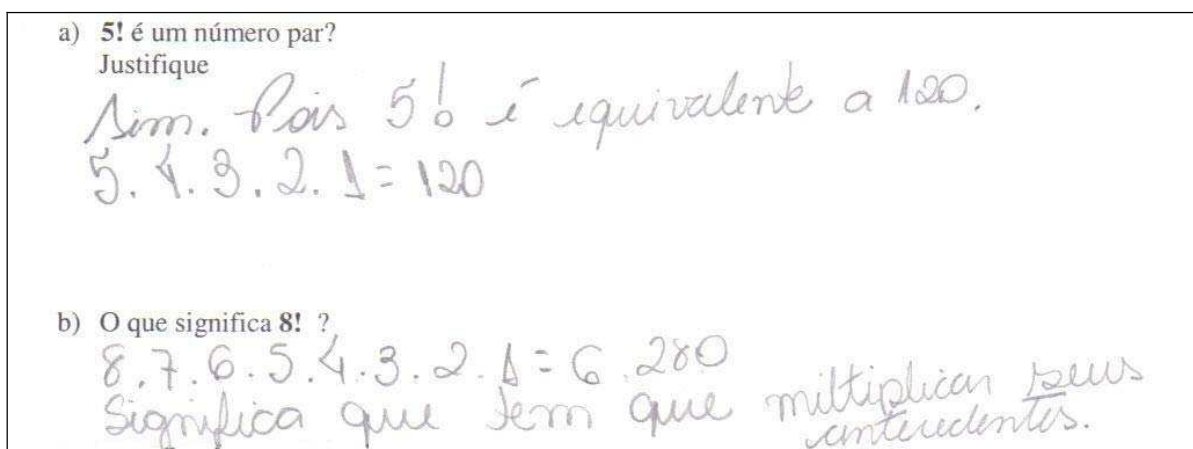


Figura 29 – Respostas dadas às questões A5(a) e A5(b) pela aluna 3

Nas questões (c) e (d) não respondeu corretamente, Figura 30, por entender que um número (a) tem apenas um múltiplo que é a^2 . Logo, para ela, o múltiplo de 21 seria apenas o $21^2 = 441$ e o múltiplo de 37 é $37^2 = 1369$.

c) $8!$ é um múltiplo de 21 ?
Justifique

Não. Porque o resultado de $8!$ é maior que o múltiplo de 21.

d) $62!$ é um múltiplo de 37 ?
Justifique

Não. Porque o resultado de $62!$ é maior que o múltiplo de 37.

e) Pedro calculou $23!$
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique

Figura 30 – Respostas dadas às questões A5(c), A5(d) e A5(e) pela aluna 3

Continuou a deixar em branco a última questão, alegando novamente falta de tempo, pois tentaria multiplicar todos os valores para descobrir o último algarismo.

Nossas análises indicaram que neste grupo, Grupo 3, o erro das últimas questões foi consequência do erro das primeiras. Assim resolvemos realizar duas entrevistas complementares: uma com um aluno que acertou as primeiras questões e não conseguiu responder às últimas e outra com um aluno que resolveu as últimas e não conseguiu resolver as primeiras.

O primeiro aluno, aluno 4, é um aluno da escola municipal que foi reprovado no final do ano de 2005. Ele acertou as primeiras (Figura 31) e errou as últimas. Mostrou ter entendido o significado apresentado para o fatorial. Acertou a primeira questão alegando ter realizado os cálculos para respondê-la. A questão

(b), foi codificada como correta e na entrevista o aluno mostrou ter pensado em um produto, mesmo tendo substituído o ponto entre os números por vírgulas.

Responda:

a) $5!$ é um número par?
Justifique

um pois vejo o exemplo:

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

120

b) O que significa $8!$?

$8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$

Figura 31 – Respostas dadas às questões A5(a) e A5(b) pelo aluno 4

Na questão (c), Figura 32, entendeu a pergunta como: 21 é um múltiplo de 8 e respondeu negativamente. Demonstrou não ter ainda bem definido o significado de múltiplo, apesar de lembrar ter estudado o assunto. Para ele divisor é apenas um dos números que faz parte do algoritmo utilizado para a divisão (dividendo, divisor, quociente e resto).

c) $8!$ é um múltiplo de 21 ?
Justifique

não pois me do pro somar e do o resultado igual

$888 = 24$

Figura 32 – Resposta dada à questão A5(c) pelo aluno 4

Na questão (d), Figura 33 respondeu ter tentado multiplicar os números: $63.62.61...1$, desistindo, pois o resultado estava muito grande.

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

no sei pois não consigo resolver

Figura 33 – Resposta dada à questão A5(d) pelo aluno 4

Na última questão, Figura 34, respondeu ter entendido por algarismo o resultado da subtração do número menos um, ou seja, o antecessor do referido número.

e) Pedro calculou **23!**

Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

22 e qual ele somou menos 1 exemplo

$$\begin{array}{r} 23 \\ - 1 \\ \hline 22 \end{array}$$

Figura 34 – Resposta dada à questão A5(e) pelo aluno 4

O aluno 4 mostrou muitas dificuldades com os termos, múltiplos e algarismo, abordados nas questões. Para ele justificar seria não apenas responder sim ou não, mas também mostrar “as contas”.

O aluno que apresentou resposta para as últimas questões e errou as primeiras, aluno 5, também não mostrou conhecer as propriedades envolvidas nas questões, nem o significado da palavra múltiplo ou algarismo. Mostrou dificuldades no entendimento do significado que apresentamos para o fatorial, o “x” presente no significado de 5! e 4!. Entendeu x como uma variável, e não

indicando uma multiplicação, no entanto na última questão escreveu ter realizado multiplicações.

A5: Sabendo que:

$4!$ significa $4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5!$ significa $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Responda:

a) $5!$ é um número par?
Justifique
NAO
É o numero impar

b) O que significa $8!$?
É um numero par

c) $8!$ é um múltiplo de 21 ?
Justifique
nao é multiplo de 21

Figura 35– Respostas dadas às questões A5(a), A5(b), A5(c) e A5(d) pelo aluno 5

Nas últimas, Figura 36, o mesmo apresenta respostas corretas, contudo não as justifica, nem sabe, na entrevista, explicar os motivos que o levaram a responder o que respondeu, dizendo apenas que “chutou”.

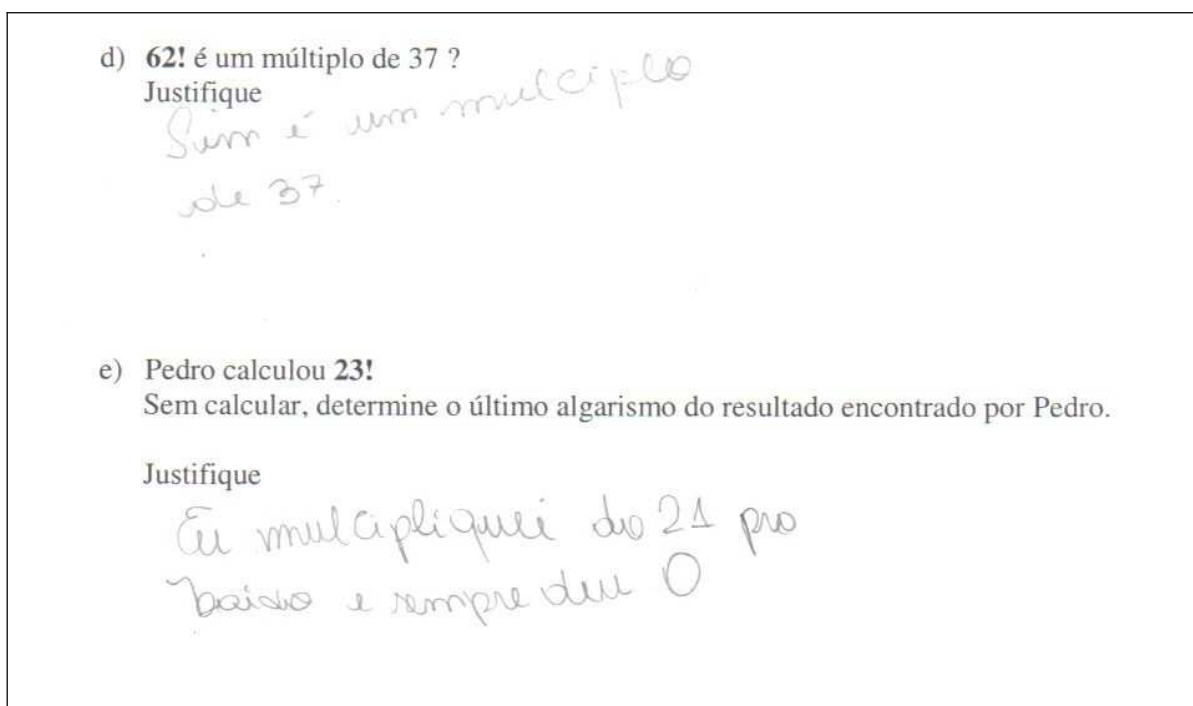


Figura 36– Respostas dadas às questões A5(d) e A5(e) pelo aluno 5

De forma geral, os alunos entrevistados desse grupo não possuem claramente o significado do termo múltiplo presentes em algumas questões, sendo esta uma grande dificuldade até para o entendimento do que solicitávamos na questão. Admite-se realmente que seja um termo de difícil compreensão, como já apontado por Zarkis (2000). Dificuldades também foram apresentadas no significado dado ao fatorial. A necessidade de justificar a resposta dada a algumas questões fez com que os alunos, como o alegado na entrevista 2, nem sequer considerá-las, deixando-as em branco.

CARACTERIZANDO O GRUPO 5: Calculistas

O aluno indicado é um aluno de uma escola municipal.

Aluno 6 mostra ter entendido o significado apresentado para o fatorial, não sendo este um fator complicador para a resolução das questões. Na Figura 37, verificamos a resposta apresentada para a questão (b).

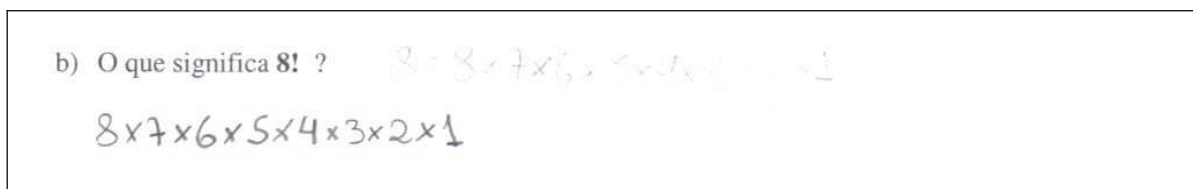


Figura 37– Resposta dada à questão A5(b) pelo aluno 6

Percebemos a preferência e confiança que o aluno referido tem pelo cálculo quando diz não conhecer outra abordagem para resolver a questão. Na Figura 38, visualizamos as questões (a) e (c). Nesta última o aluno indicou ter realizado o cálculo. Possivelmente tenha errado buscando assim outras relações para sua justificativa como a apresentada. O termo múltiplo não teve um papel complicador, pois quando perguntado o que ele entendeu por múltiplo de vinte e um, respondeu:

ALUNO – *Pode ser dividido por vinte e um.*

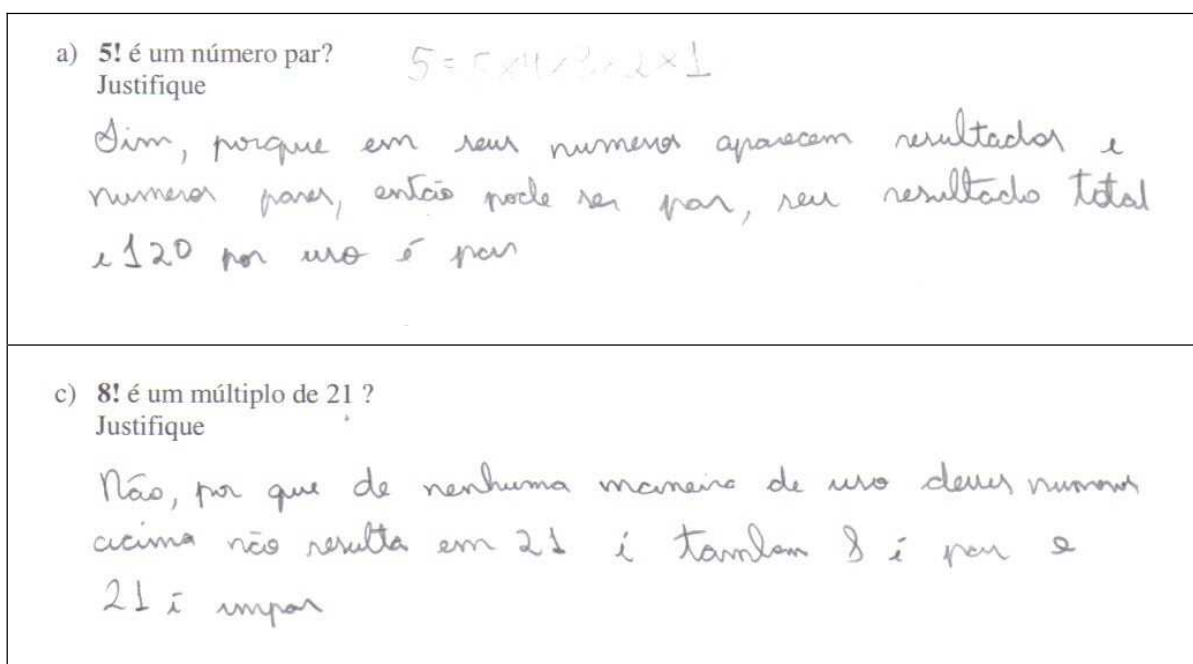


Figura 38– Respostas dadas às questões A5(a) e A5(c) pelo aluno 6

Na questão (d), Figura 39, o uso do cálculo foi inviável, então o aluno por desconhecer a propriedade envolvida, busca uma justificativa parecida com a anteriormente apresentada. Para ele se 62 é par, 62! também será um número

par e sendo par não pode ser um múltiplo de 37, ou ainda, como 37 é ímpar não pode dividir um número par.

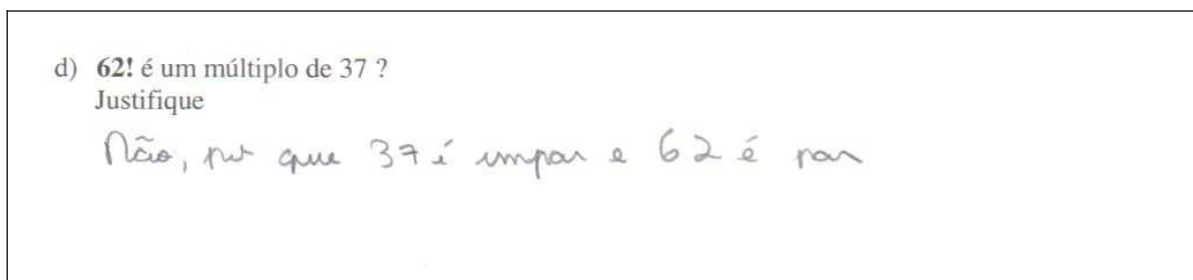


Figura 39– Resposta dada à questão A5(d) pelo aluno 6

Na questão (e), Figura 40, volta a usar o cálculo, efetuando vários produtos e observando que de um determinado valor em diante só resultava número cujo último algarismo era zero, então achou que daquele momento em diante os resultados seriam sempre zero.

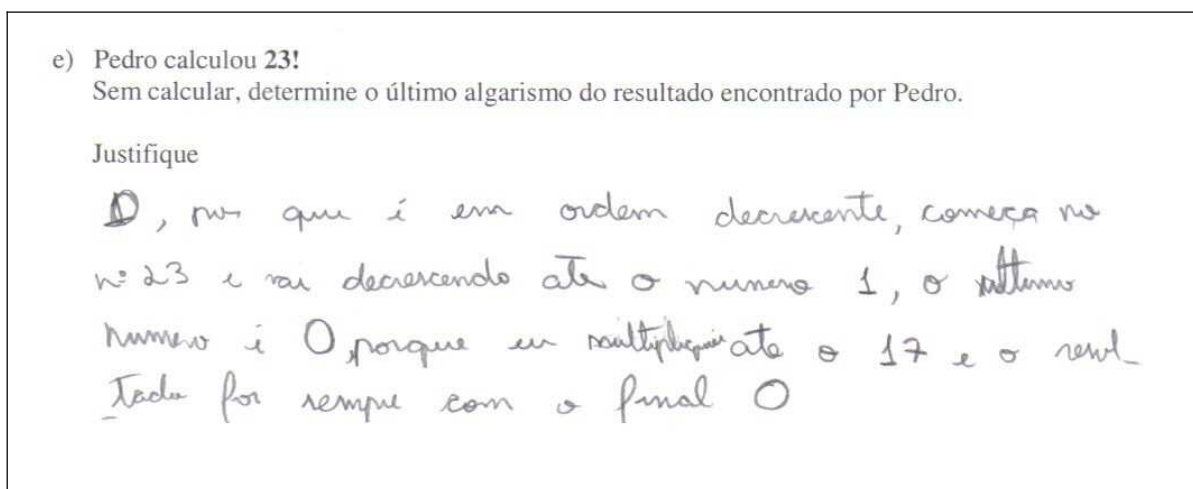


Figura 40– Resposta dada à questão A5(e) pelo aluno 6

O aluno tem uma idéia do que seja múltiplo de um número, não recordando o significado de termos como fator e divisor. Quando questionado porque a preferência pelo cálculo respondeu:

ALUNO - Além de me dar segurança, o cálculo eu acho que é mais fácil para eu controlar cada resultado, e também, na minha opinião, ele é o que é mais seguro, porque eu sei que o resultado que deu no final é o resultado certo. Eu tenho segurança de usar por cálculo. Tipo, este ano eu tive uma prova de Física tinha a fórmula, mas eu acabei fazendo pela mão mesmo, porque eu não confiava

naquela fórmula.

ENTREVISTADOR - *Você não confia em fórmula, mesmo o professor mostrando sua eficiência. Ele aplicou-a em um caso deu certo, em outro também, mesmo assim você não tinha...*

ALUNO: - *Prefiro o cálculo. (DECISIVO).
- Mas assim, quando eu estou com bastante tempo, eu faço uma conta por cálculo e uma pela fórmula, mas quando eu faço assim, eu sempre vejo que o cálculo dá sempre mais certo. Você sempre acaba errando alguma coisa na fórmula, eu prefiro o cálculo.*

O aluno mostra usar o cálculo como uma fonte de certeza, meio de convicção, garantia de que o resultado está correto de fato, não tendo ainda confiança nos procedimentos algébricos, mas está receptivo a novas propriedades, uma vez que, após o encerramento da entrevista, demonstrou curiosidade em saber se era possível um outro tipo de abordagem, algo mais fácil para responder às questões (d) e (e), e qual eram as definições de fator e divisor, pois havia esquecido apesar de já ter ouvido falar durante as aulas.

CARACTERIZANDO O GRUPO 4: Aluno que enfocou propriedades

O aluno indicado é um aluno da 8ª série de uma escola municipal.

O aluno entrevistado, aluno 7, conhece e define fator, divisor e múltiplo de um número. Para os múltiplos ele respondeu:

ALUNO: - *Múltiplo é, a gente pega um número inicial, multiplica por qualquer número, é o múltiplo dele. Por exemplo. Múltiplos de 5 : 10, 15, 20, 25...vai multiplicando por algum número isso é o múltiplo de um número. Você multiplica um número, por qualquer número, e vai dar um múltiplo dele, ele algumas vezes.*

ENTREVISTADOR: - *Esse qualquer número. É positivo, negativo?*

ALUNO: - *Ah, Positivo. Qualquer número natural.*

ENTREVISTADOR: - *Tem que ser natural?*

ALUNO: - *Tem que ser natural.*

O termo fator está sempre presente em suas justificativas. Quando perguntado da resposta que apresentou na questão (a), Figura 41, respondeu:

ALUNO: - *Sim. Seria (PAR) se a gente pegasse todos os outros números da multiplicação 5.4.3.2.1 multiplicar por 2, tira o 2 deles e colocar, vai dar um número par, porque todo número multiplicado por 2 é par.*

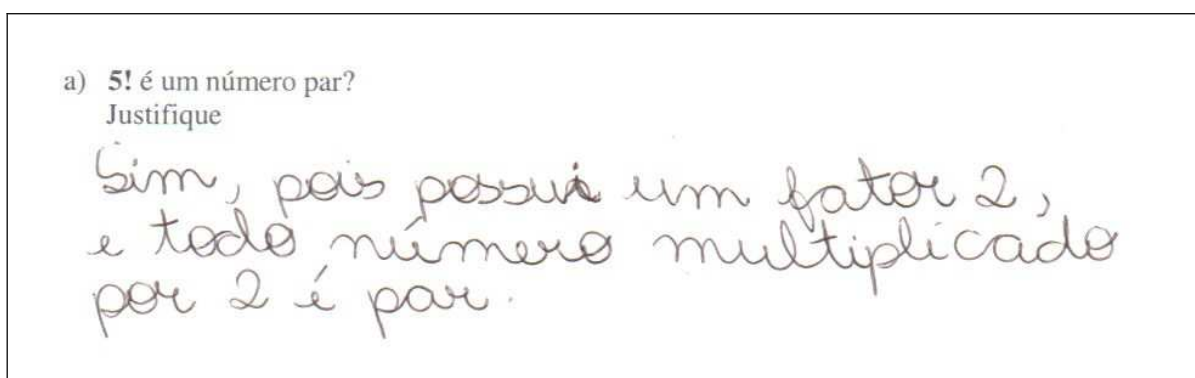


Figura 41– Resposta dada à questão A5(a) pelo aluno 7

Respondeu ter entendido a definição dada ao fatorial e isso não foi um fator complicador.

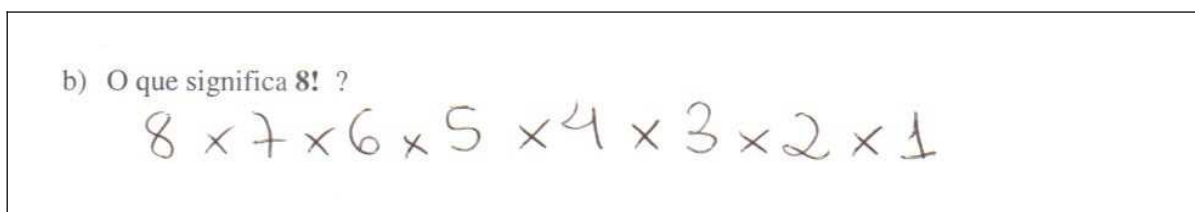


Figura 42– Resposta dada à questão A5(b) pelo aluno 7

ALUNO: - Na multiplicação do 8 por todos... 8! tem o número 3 e o número 7. Se eu pegar o 3 e o 7 e multiplicar vai dar 21, e multiplicar por 3 e por 7 é a mesma coisa que multiplicar por 21, então vai ser um múltiplo de 21 o resultado.

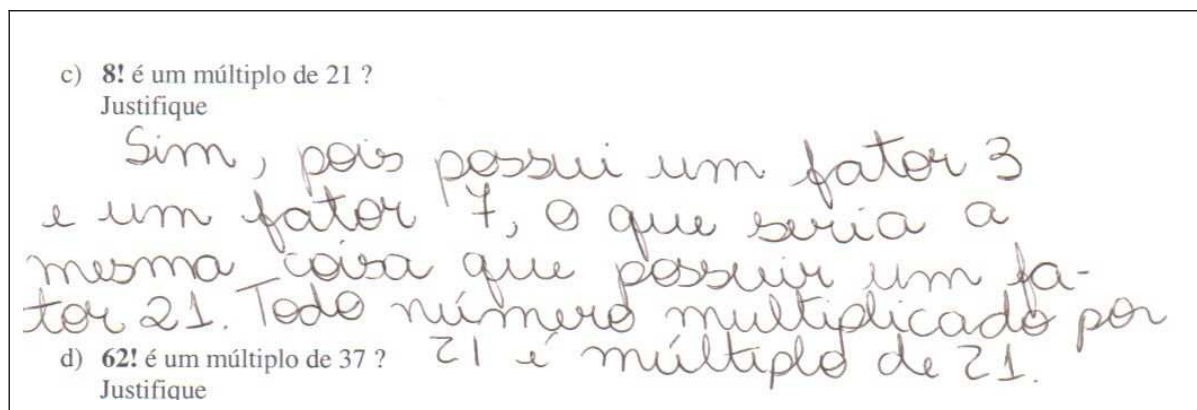


Figura 43– Respostas dadas às questões A5(c) e A5(d) pelo aluno 7

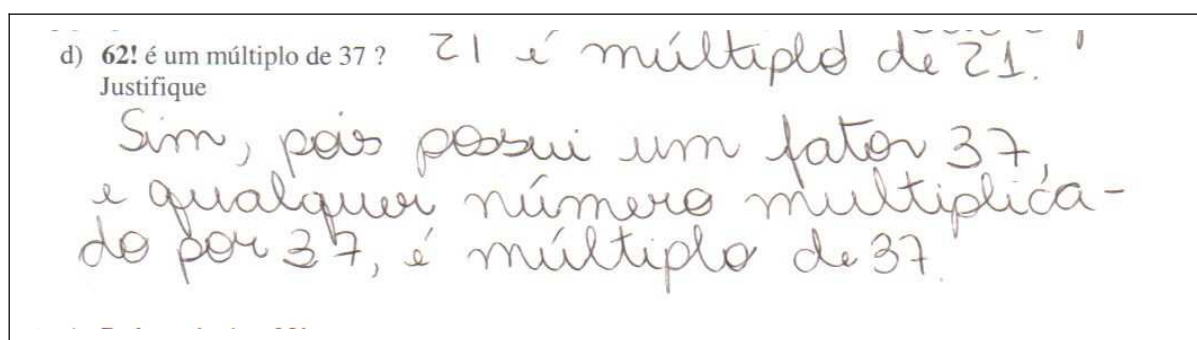


Figura 44– Resposta dada à questão A5(d) pelo aluno 7

ALUNO: - É sim. Se eu colocar em cima da barra da fração todos os números, de 62! multiplicação, e embaixo colocar 37, vai ter uma hora que vai aparecer o 37 que eu posso cortar em cima e embaixo de modo que vai descobrir o valor que é múltiplo de 37 sim.

Nesta última questão, Figura 45, apresentou o fator 10 em sua resposta, no entanto, disse primeiro ter pensado que o número seria par e depois que o número só poderia terminar em 5 ou zero, devido a ser um múltiplo de cinco, logo

pela intersecção obteve o zero, e somente em um segundo momento é que percebeu e justificou como um múltiplo de dez.

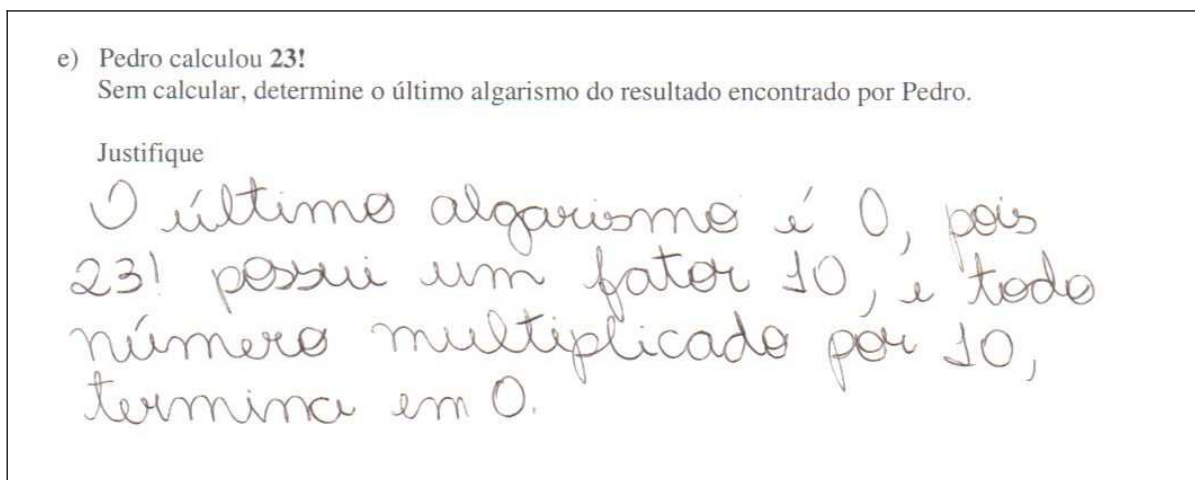


Figura 45– Resposta dada à questão A5(e) pelo aluno 7

O aluno mostra uma clara opção pelas propriedades e nos indica o motivo no trecho da entrevista que descrevemos abaixo.

- ALUNO: - Assim, até a quinta série, eu acho que não gostava muito de matemática, mas na metade do ano, da 6ª série, quando a professora começou a ensinar equações, eu comecei a gostar mais, e aí na 7ª também comecei a gostar mais de álgebra é assim, é muito mais fácil, até pelas brincadeiras da álgebra, muito mais interessante que só aritmética, eu prefiro usar álgebra.
- ENTREVISTADOR: - Tem algum motivo especial pela álgebra?
- ALUNO: - Não. Acho que é mais pelo aspecto generalizador dela, mas não é nada de mais não.

3.4 DADOS ADICIONAIS – Os professores

“Os professores ensinam como eles foram ensinados”

Senso Comum

Em um dos encontros do projeto AProvaME, convidamos o professor Ruy Cesar Pietropaolo, professor da PUCSP, para realizar uma palestra sobre a sua tese de doutorado – (Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática – PUCSP-2005 – voltado à questão curricular. O professor Pietropaolo fez uso de questionários baseados naqueles desenvolvido por Healy e Hoyles (1998), aplicados a professores da educação básica. Como seu trabalho envolveu também a participação de professores pesquisadores, disse ter sido cobrado pela banca por não ter aplicado o questionário para estes também, pois seria algo muito interessante.

Com base nesses fatos, resolvemos aplicar aos professores das duas escolas onde realizamos as entrevistas o questionário de álgebra utilizado com os alunos.

Sete professores responderam ao questionário, sendo que todos são licenciados em matemática, o que tem menor tempo no magistério já leciona há quatro anos e o que tem maior tempo, dezoito anos. Abaixo, descrevemos os resultados, mostrando ainda exemplos das respostas apresentadas pelos professores.

QUESTÃO A e B – os sete professores acertaram as questões e todos justificaram a primeira por meio de cálculos.

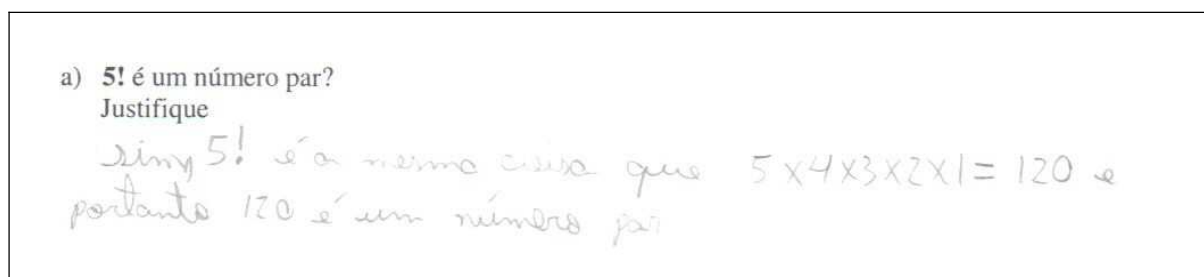


Figura 46 – Resposta dada à questão A5(a) por professor

QUESTÃO C – Seis professores acertaram a questão, apenas um usou propriedades para justificar, os outros cinco utilizaram cálculos. Na Figura 47, verificamos a resposta dada por um professor que não acertou a questão.

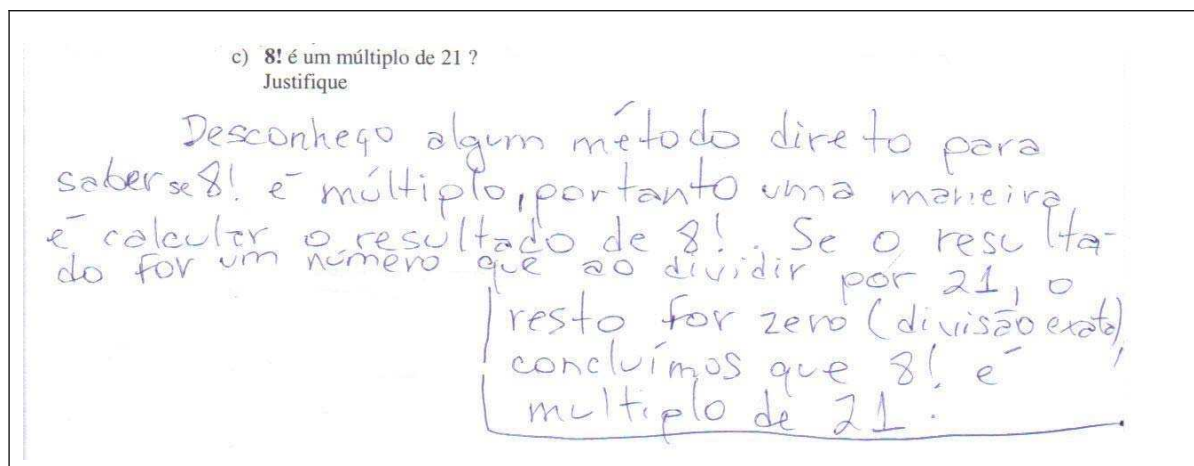


Figura 47 – Resposta dada à questão A5(c) por professor

QUESTÃO D – Apenas dois professores acertaram a questão, e somente um deles justificou com propriedades, o outro não justificou apenas disse ser múltiplo. Dois professores deixaram em branco e três erraram a questão, abaixo selecionamos dois exemplos (Figura 48) que são bem parecidos com muitas das justificativas dadas pelos alunos.

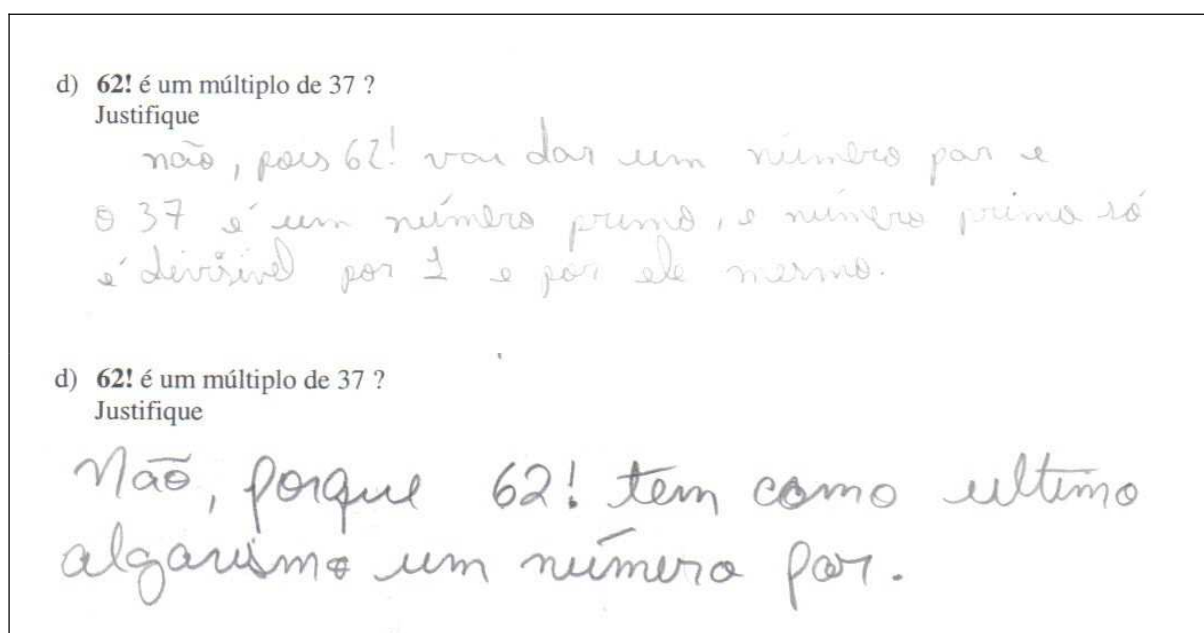


Figura 48 – Respostas dadas à questão A5(d) por professores

QUESTÃO E – Nesta questão, quatro professores acertaram, dois deixaram em branco e um apresentou resposta errada. Dos que acertaram

apenas um usou propriedades, outro não apresentou e outros dois apresentaram justificativas empíricas.

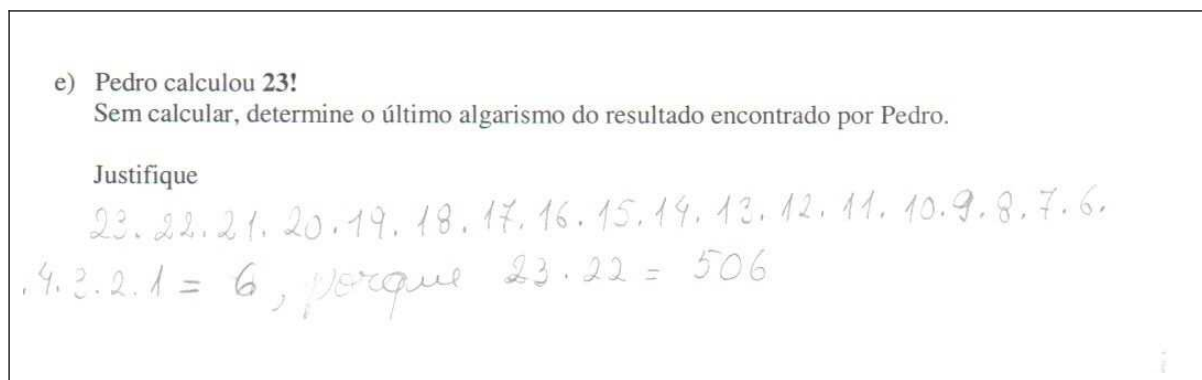


Figura 49 – Resposta dada à questão A5(e) por professor

Os resultados e tendências apresentados pelos professores não são muito diferentes daqueles apresentados pelos alunos.

Neste Capítulo apresentamos as análises quantitativa e qualitativa dos dados. A análise descritiva nos possibilitou uma visão geral do desempenho dos alunos e ainda uma visão do desempenho por série e rede de ensino e que pertencem. A análise multidimensional permitiu classificar os alunos em grupos distintos, primeiramente, sem levar em conta as justificativas dos alunos:

Grupo 1 – Os que erraram as questões e

Grupo 2 – Os que acertaram as questões.

Em seguida levando em consideração as justificativas dos alunos:

Grupo 3 – Dificuldades,

Grupo 4 – Propriedades e,

Grupo 5 – Calculistas.

Tendo em relação às séries que os alunos freqüentam os alunos das 8^{as} séries tiveram um melhor desempenho, talvez pela maior ênfase nesta etapa, ensino fundamental, na divisão e multiplicação. Levando em consideração as redes de ensino a que pertencem destacamos o melhor desempenho das escolas municipais e uma dificuldade maior dos alunos da rede estadual de ensino.

Trouxemos ainda dados sobre os protocolos de alunos dos Grupos 3 , 4 e 5, para aprofundar as características destes. Finalmente trazemos, apesar de não ter sido o foco do nosso trabalho, resultados e protocolos das respostas as questões que envolvem o fatorial, elaboradas por professores das escolas onde realizamos as entrevistas.

CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho, conforme citamos no capítulo 2, foi o de colaborar com o levantamento das concepções sobre argumentações e provas de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo. Realizamos análises, quantitativa e qualitativa dos dados obtidos nas questões que abordam o fatorial, inseridas no questionário de álgebra, elaborado pela equipe do projeto AProvaME.

Começamos nossos trabalhos elaborando um panorama das provas matemáticas, tanto do ponto de vista histórico quanto da educação matemática, realizando uma abordagem histórica das provas matemáticas e a prova na Educação Matemática, na qual chamamos a atenção para diversos estudos, inclusive os de Balacheff. No Capítulo 2, começamos descrevendo o projeto AprovaME, descrição da amostra, elaboração dos questionários, sua aplicação e a codificação dos dados obtidos. E, finalizamos abordando noções de divisibilidade.

No tratamento dos dados, Capítulo 3, elaboramos uma análise descritiva e uma multidimensional, com os resultados obtidos nas questões. Realizamos ainda sete entrevistas, sendo seis com alunos da amostra, para obter mais dados sobre os diferentes grupos indicados na análise multidimensional e um aluno não pertencente à amostra para obter as concepções de divisibilidade. Finalizamos o capítulo comentando os dados obtidos com as respostas das questões que abordam o fatorial, realizadas pelos professores das escolas onde fizemos as entrevistas.

PRINCIPAIS RESULTADOS

Em geral o desempenho apresentado pela amostra foi muito abaixo do esperado.

No desempenho dos resultados da análise descritiva por rede de ensino a que pertence o aluno, percebemos um maior desempenho das escolas municipais e um menor desempenho das escolas estaduais. No entanto, não podemos fazer generalizações, devido ao percentual das escolas municipais não ser significativo dentro da amostra.

Analisando o desempenho dos alunos por série, os alunos da 8ª série do Ensino Fundamental tiveram um desempenho superior, comparado aos da 1ª série do Ensino Médio, talvez porque os temas envolvendo divisibilidade sejam tratados quase que exclusivamente no Ensino Fundamental, no entanto é um fator de preocupação o desempenho do Ensino Médio.

Nossas análises multidimensionais apontaram principalmente para três grupos: Os que tiveram maior dificuldades (Grupo 3), os que responderam as questões por meios de cálculos (Grupo 5) e os que responderam as questões utilizando propriedades para justificar suas respostas (Grupo 4).

De maneira geral, os alunos apresentaram muitas dificuldades para resolver as questões que abordavam o fatorial, na primeira questão apenas (53,13%) acertaram a questão e na medida em que o cálculo foi ficando inviável os acertos diminuiram drasticamente.

Dentre os alunos que compuseram o grupo com dificuldades os dados coletados nas entrevistas sugerem que a questão de argumentação e prova, pelo menos em relação à multiplicação e divisão, não está sendo contemplada e que os alunos não estão familiarizados com a inversa relação entre multiplicar e dividir. As entrevistas mostram também, como aponta Zazkis (2000), que existe uma grande confusão no uso e significado dos termos como: múltiplos, divisores e nas propriedades envolvidas nesses termos. Constatamos ainda a falta do hábito dos alunos de apresentarem justificativas para suas respostas, sendo a solicitação das justificativas o motivo alegado por um aluno para ter deixado às questões em branco.

Os alunos da amostra que responderam corretamente às questões por meio de cálculos, ou seja, o Grupo 5 isolado na análise com o software CHIC, construíam o que Balacheff denomina provas pragmáticas, apresentando

apenas cálculos numéricos como justificativa para suas respostas. Poucos alunos (Grupo 4) construíram provas conceituais, ou seja, apresentaram propriedades nas suas justificativas.

REFLEXÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Tendo em vista o projeto AProvaME focar, em sua segunda fase, a aprendizagem nas áreas de dificuldades levantadas pelos questionários e o ensino tendo como a figura central o professor, sugerimos abordagens de atividades que privilegiem a argumentação e provas envolvendo noções de divisibilidade, tanto para os alunos como para os professores, já que as respostas elaboradas por estes terem sido muito pragmáticas, alguns inclusive desconhecendo as propriedades envolvidas nas questões.

Percebemos a necessidade de dar mais ênfase às atividades que foquem justificativas e manipulações algébricas, com pluralidades de abordagens.

Uma pesquisa voltada para a concepção das argumentações e provas dos professores, poderia fornecer um quadro mais significativo do tema, até para começar uma discussão. Pois os dados que obtemos deles não é o desejável, tendo em vista que os alunos retratam os professores, que retratam sua formação acadêmica que retratam os sistemas de ensino.

BIBLIOGRAFIA

ARSAC, G. L'origine de la démonstration: essai d'Épistémologie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, V. 8, n. 3, p. 267-312, 1987.

BALACHEFF, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège (tesis doctoral), 2 vols. Grenoble, Francia: Univ. J. Fourier – Grenoble.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, en Pimm, D. (ed.) Mathematics, teachers and children. 216-235. Londres: Hodder & Stoughton

BALACHEFF, N.. Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, vol.18, n.2, Mai 1977, p.147-176, 1987.

BALACHEFF, N. (1999). Es la argumentación un obstáculo? [On-line] Disponível:(<http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/result2.html>)

BALACHEFF, N. Une étude des processus de preuves en mathématiques chez des élèves de collège. Université Grenoble, 1988.

BARBIN, E.. La demonstration mathématique: significations epistemologiques et questions didactiques. Bulletin de l'APMEP, n.366, 1988.

BKOUICHE, R. (1989). De la démonstration. IREM de Lille.

BONGIOVANNI, V. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método de exaustão. Revista Iberoamericana de educacion matematica, p. 91-110, 2005.

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo:Edgard Blucher, USP, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação / Plano Nacional do Livro Didático. Guia do Plano Nacional do Livro Didático. Brasília: MEC / PNLD, 2005.

-----Secretaria de Educação Básica. Guia do livro didático 2007 : Matemática : séries/anos iniciais do ensino fundamental/Secretaria de Educação Básica. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

-----Ministério da Educação.Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (5.^a a 8.^a séries). Brasília: MEC, 1998.

-----Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN + Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

-----Secretaria da Educação Básica. Plano Nacional do Livro Didático – PNLD – disponível no site <http://portal.mec.gov.br>

C.H.I.C. A Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva. Versão 3.5 para Windows, 2005. (software)

COE, R. & RUTHVEN, K.. Proof practices and constructs of advanced mathematics students. British educational research journal, 20 (1), 41-53. 1994.

COELHO, Sônia Pitta; POLCINO MILIES, César. Números: uma introdução à matemática. São Paulo: EDUSP, 2003 A.

CURY, H. N. Análise de erros em demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos do 3º grau. Dissertação de Mestrado. FE-UFRGS, PORTO ALEGRE, 1988

DAVIS, P. J. e HENSH, R. A Experiência Matemática; Ciência Aberta-Gradiva, Lisboa, 1996.

DUVAL, R. Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. IREM de Strasbourg, França, n. 31, p. 37-61, 1993.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 1995.

FONSECA, H. Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, 2000.

FONSECA, L. A demonstração e os futuros professores de matemática da Educação Básica, 2005. [On-line] Disponível:(
http://www.mytwl.net/cibem5/MyFiles/outros/Lina_Fonseca.pdf)

GARNICA, A.V.M., “Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática”. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE-UNESP, 1995.

GOUVÊA, F. Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1998.

GRAVINA, M. A.. Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo . Porto Alegre, RS: UFRGS, 2001. Tese de doutorado.

HANNA, G.. Challenges to the importance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), pp. 42-49, 1995.

HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: an overview. Educational Studies in Mathematics (ESM) 44, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Holanda, 2001.

HEALY, L. and Hoyles, C. ‘A study of proof conceptions in algebra’, Journal for Research in Mathematics Education, 31 (4), 396-428. 2000.

----- Justifying and proving in school Mathematics. University of London, Institute of Education: Technical Report, Feb. 1998.

HEINZE, A., CHENG, Y. H., & YANG, K. L. (2004). Students’ performance in reasoning and proof in Taiwan and Germany: Results, paradoxes and open questions. Z. D.M., 36 (5), 162-171

HOYLES, C. & KÜCHEMANN, D. (1999-2003) Longitudinal Proof Project (<http://www.ioe.ac.uk/proof/>).

LIN, F. L. et al. (2003): Development of Adolescents’ Competence on Mathematical Argumentation. Technical Report of the NSC support project. Dep. of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan

MARRADES, R., & GUTIÉRREZ, A. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics. (2000).

PESCE, C. C. Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculos diferencial e integral, Bellaterra, Barcelona Mayo de 2001, Tesis Doctoral

PIETROPAOLO, R. C. (Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática. Tese de Doutorado, PUC/SP, 2005.

RAMA, A. J.. Números Inteiros nos Ensinos Fundamental e Médio. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2005.

REISS, K.; HELLMICH, F.; REISS, M. (2002): Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. In A. D. Cockburn; E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume IV. Norwich (Great Britain). University, pp. 113-120

ROCHA, A. Uma experiência com actividades de investigação na Aula de Matemática: Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade (Tese de mestrado, Universidade do Porto), 2003.

VAZ, R. L. O uso das isometrias do software Cabri-Gèomètre como recurso no processo de prova e demonstração Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2004.

VIANNA, C. C. de S. O papel do raciocínio dedutivo no ensino da Matemática. Dissertação de Mestrado. UNESP – Rio Claro-SP, 1988.

WILES, A. "Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem", Annals of Mathematics 42(1995), 443-551.

YANDELL, B. H. The Honors Class - Hilbert's Problems and Their Solvers, A. K. Peters, (2002)

ZAZKIS, R. Factors, divisors and multiples: Exploring the web of the Students connections, (2000). Vol. 8, 210-238. Simon Fraser University, Canadá.

ANEXOS

ANEXO 1 – Questionário de Álgebra



Questionário sobre Prova

Nome:

Masculino ou Feminino:

Escola:

Turma:.....

Data de nascimento:
hoje:.....

Data de

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).
Não use calculadora.



Projeto AprovaME

Uso exclusivo do projeto

escola

turma

aluno

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
 b é um número inteiro qualquer
 $2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
 $2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$$\begin{array}{ll} 2 + 2 = 4 & 4 + 2 = 6 \\ 2 + 4 = 6 & 4 + 4 = 8 \\ 2 + 6 = 8 & 4 + 6 = 10 \end{array}$$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

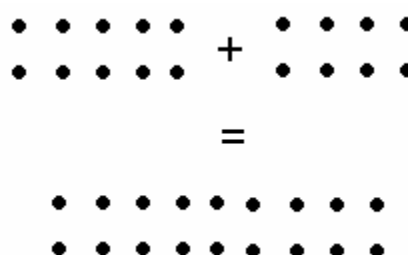
Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
 Quando você soma dois destes, a resposta

vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Hanna

$$8 + 6 = 14$$

$$8 = 2 \times 4$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$14 = 2 \times (4 + 3)$$

$$8 + 6 = 2 \times 7$$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira apenas para alguns números pares.		
<i>Resposta de Artur</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Beth:</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Duda:</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Franklin:</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Hanna:</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada.

☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova.

☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa $4 \times 3 \times 2 \times 1$

5! significa $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Responda:

- a) **5!** é um número par?

Justifique

- b) O que significa **8!** ?

- c) **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

- d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

- e) Pedro calculou **23!**

Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

ANEXO 2 – Questionário de Geometria



Questionário sobre Prova

Nome:

Masculino ou Feminino:

Escola:

Turma:.....

Data de nascimento:

Data de hoje:.....

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.



Uso exclusivo do projeto

escola

turma

aluno

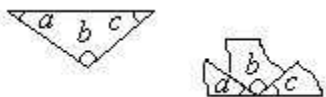
Projeto AprovaMe

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180° .

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180° .

Eu tentei para um triângulo equilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.

Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

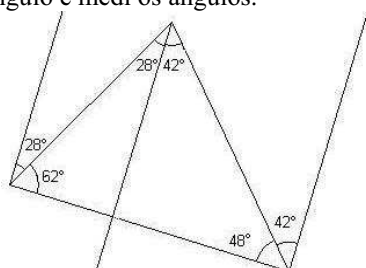
a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180° .

Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$$(90^\circ - 28^\circ) + 28^\circ + 42^\circ + (90^\circ - 42^\circ) = 180^\circ$$

Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações

Justificativa

$p = s$ Ângulos alternos internos entre as paralelas são iguais.

$q = t$ Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.

$p + q + r = 180^\circ$ Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180^\circ$

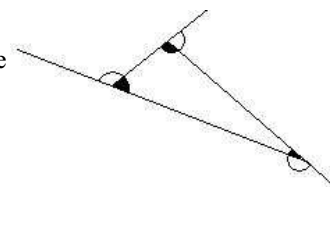
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360° . Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta.

Isso faz um total de 540° . $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.



Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180° .

Eu tentei para um triângulo equilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.

Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180° .

Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira apenas para alguns triângulos.		
<i>Resposta de Amanda</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Dário</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Hélio</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Cintia</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
<i>Resposta de Edu</i>	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180° .

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180° .

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada.

☐

(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração.

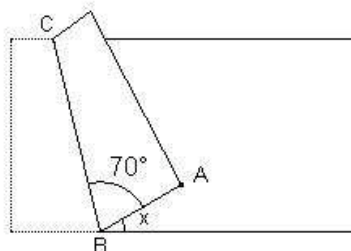
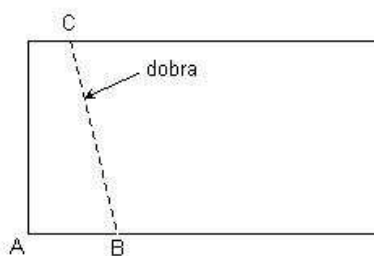
☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360° .

Justifique sua resposta:

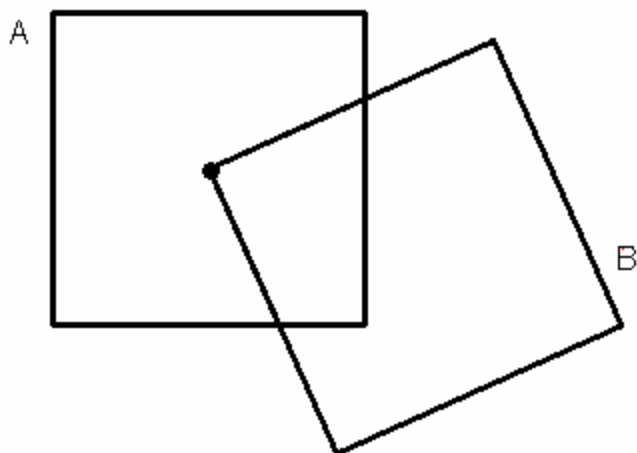
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x .



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?

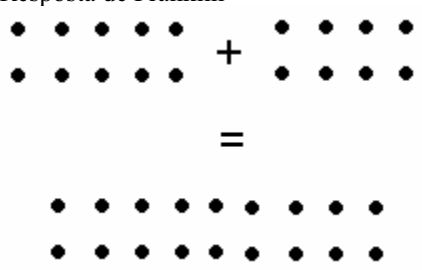


Justifique sua resposta

ANEXO 3 PILOTO

A1: Artur, Beth, Célia, Duda, Érica, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

<i>Resposta de Artur</i> a é um número inteiro qualquer b é um número inteiro qualquer $2a$ e $2b$ são números pares quaisquer $2a + 2b = 2(a + b)$ <i>Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.</i>	<i>Resposta de Beth</i> $2 + 2 = 4$ $4 + 2 = 6$ $2 + 4 = 6$ $4 + 4 = 8$ $2 + 6 = 8$ $4 + 6 = 10$ <i>Então Beth diz que a afirmação é verdadeira</i>
<i>Resposta de Célia</i> Números pares são múltiplos de 2. Quando você soma números com um fator comum, 2 neste caso, a resposta terá o mesmo fator comum. <i>Então Célia diz que a afirmação é verdadeira.</i>	<i>Resposta de Duda</i> Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8. <i>Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.</i>
<i>Resposta de Érica</i> Seja $x =$ número inteiro qualquer $y =$ número inteiro qualquer $x + y = z$ $z - y = x$ $z - x = y$ $z + z - (x + y) = x + y = 2z$ <i>Então Érica diz que a afirmação é verdadeira.</i>	
<i>Resposta de Franklin</i>  <i>Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira</i>	<i>Resposta de Hanna</i> $8 + 6 = 14$ $8 = 2 \times 4$ $6 = 2 \times 3$ $14 = 2 \times (4 + 3)$ $8 + 6 = 2 \times 7$ <i>Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira</i>

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada item abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

Resposta de Artur:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Beth:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Célia:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Duda:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Érica:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Franklin:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Hanna:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.

SIM NÃO NÃO SEI

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(C) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada.

☐

(D) Zé precisa construir uma nova prova.

☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando se soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4 A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa $4 \times 3 \times 2 \times 1$

5! significa $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Responda:

f) **5!** é um número par?

Justifique

g) O que significa **8!** ?

h) **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

i) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

j) Qual é o último algarismo de **23!** ?

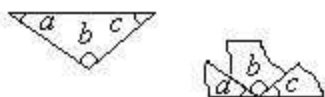
Justifique

G1: Amanda, Bia, Cíntia, Dario, Edu, Fernando e Hélia estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180° .

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180° .
Eu tentei para um triângulo equilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.

Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Bia

Eu desenhei um triângulo isósceles, com c igual a 65° .

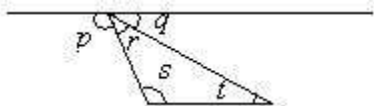


Afirmações **Justificativa**
 $a = 180^\circ - 2c$Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
 $a = 50^\circ$ $180^\circ - 130^\circ$.
 $b = 65^\circ$ $180^\circ - (a + c)$
 $c = d$ Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
 $\therefore a + b + c = 180^\circ$.

Então Bia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações **Justificativa**
 $p = s$ Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
 $q = t$ Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
 $p + q + r = 180^\circ$ Ângulos numa linha reta.
 $\therefore s + t + r = 180^\circ$

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de todos os tipos de triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180° .

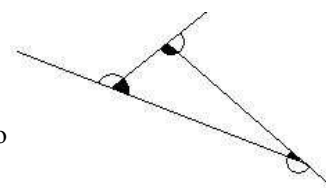
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e termina olhando o caminho por onde começou. Você deve ter girado um total de 360° .

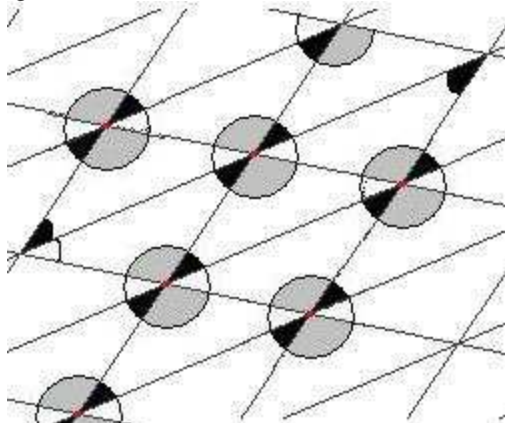
Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540° .
 $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.



Resposta de Fernando

Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei ângulos iguais.

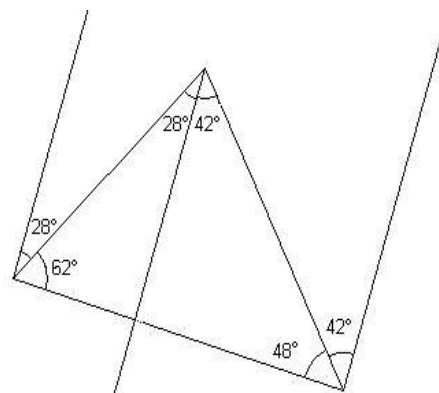


Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360° .

Então Fernando diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$$(90^\circ - 28^\circ) + 28^\circ + 42^\circ + (90^\circ - 42^\circ) = 180^\circ$$

Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°

Para cada item, circule SIM (1), NÃO (2) ou NÃO SEI (3)

Resposta de Amanda:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.

SIM NÃO NÃO SEI

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Bia:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.

SIM NÃO NÃO SEI

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Cíntia:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.

SIM NÃO NÃO SEI

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Dario:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.

SIM NÃO NÃO SEI

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Edu:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Fernando:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.

SIM NÃO NÃO SEI

Resposta de Hélia:

Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.

SIM NÃO NÃO SEI

Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.

SIM NÃO NÃO SEI

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180° .

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180° .

Escolha A ou B:

(C) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada.

☐

(D) Zeca precisa construir uma nova demonstração.

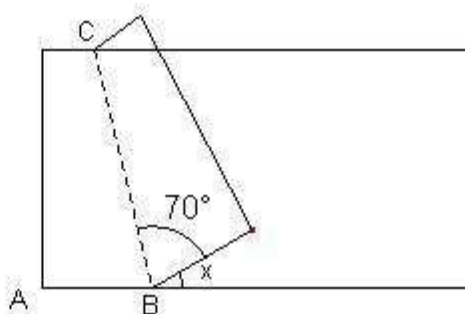
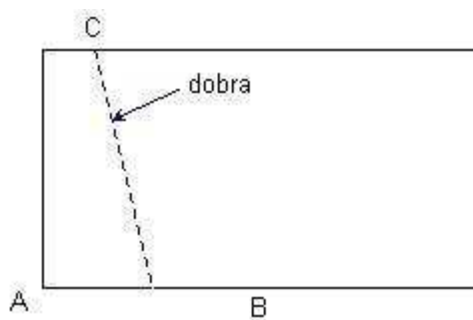
☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Quando se soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360° .

Minha resposta:

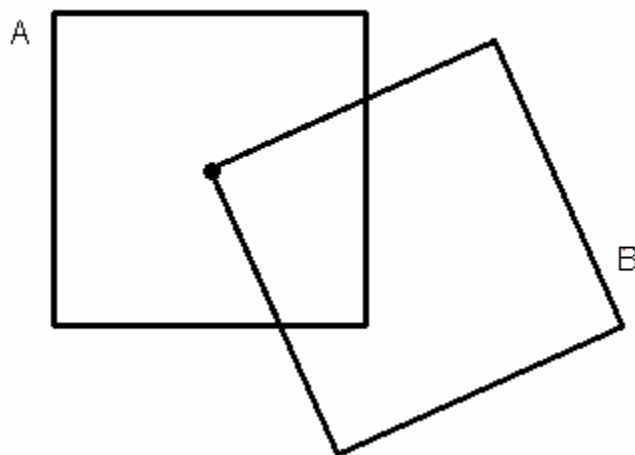
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x .



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

ANEXO 4 ALGUNS EXEMPLOS DAS CODIFICAÇÕES UTILIZADAS

Para a questão A5(a). Resposta correta (1) e justificativa com uso de cálculos: (3C).

A5: Sabendo que:

4! significa $4 \times 3 \times 2 \times 1$

5! significa $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Responda:

a) 5! é um número par?

Justifique

SIM PORQUE 120 É TERMINADO EM 0, E O (ZERO) É UM NÚMERO PAR
 $1 \times 2 = 2 \times 3 = 6 \times 4 = 24 \times 5 = \underline{120}$

Para a questão A5 (b). Resposta correta(1).

b) O que significa 8! ?

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ QUE É IGUAL A, 40320

Para a questão A5 (c). Resposta errada(0) e justificativa errada(0).

c) 8! é um múltiplo de 21 ?

Justifique

NÃO PORQUE 21 NÃO CONSTA NOS MÚLTIPLOS DE 8

$$8 \times 1 = 8$$

$$8 \times 2 = 16$$

$$8 \times 3 = 24$$

Para a questão A5 (d). Resposta errada (0) e justificativa errada(0).

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

NÃO PORQUE 37 NÃO CONSTA (105) E 62!

Para a questão A5(e). Resposta correta(1), com justificativa correta(3).

e) Pedro calculou **23!**

Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

O último algarismo é 0, pois 23! possui um fator 10, e todo número multiplicado por 10, termina em 0.

ANEXO 5- Apêndice (em português) da ajuda do software CHIC, versão

3.5.

Referencias

Ag Almouloud , S., (1992) : L'ordinateur: outil d'aide à l'apprentissage de la démonstration et de traitement d'analyse de données didactiques. Thèse de l'Université de Rennes 1.

Bailleul M. (1994) : Analyse statistique implicative : application à la modélisation de l'enseignant dans le système didactique. Thèse, Université de Rennes 1.

Bodin, A (1996) : Modèles sous-jacents à l'analyse implicative et outils complémentaires, cahiers du séminaire de didactique de l'IRMAR de Rennes.

Bodin, A., Couturier, R. et Gras, R (1996) : 'Analyse d'une épreuve de concours par la méthode implicative'. Communication aux journées de la Société Française de Classification, Vannes

Bodin, A. (1996), 'Improving the Diagnostic and Didactic Meaningfulness of Mathematics Assessment in France' Annual Meeting of the American Educational Research Association AERA - New-York

Bodin, A., Gras, R. et Lagrange, J.B. (1997) : Implication statistique, Prépublication IRMAR n° 97-32, Rennes

Couturier, R. et Gras R. (1999) : Introduction de variables supplémentaires dans une hiérarchie de classes et application à CHIC, Actes des 7èmes Rencontres de la Société Francophone de Classification, 87-92, Nancy, 15-17 septembre 1999

Gras, R et al (1996) : L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données. La Pensée Sauvage. Grenoble

Gras, R et Pécal, M. (1995) : L'évaluation en mathématiques : perspectives institutionnelles, pédagogiques et statistiques. Actes de l'université d'été de l'APMEP - Sophia Antipolis 10-14 juillet 1995 - Brochure N° 102 de l'APMEP.

Gras, R. (1986) : Recherches sur l'apprentissage : Analyse des correspondances et méthodes statistiques apparentées - Cahier du Cirade - Université du Québec à Montréal.

Gras, R. (1992) : Data analysis : a method for the processing of didactic questions. In Research in Didactique of mathematics - selected papers - Douady, R. & Mercier, A. Ed - La Pensée Sauvage – Grenoble

Gras, R. (1995), Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques. Actes du colloque ARDM de Caen (27 - 29 janvier 1995) - publié par l'ARDM

Gras, R. , Larher, A. (1992) : 'L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données', Mathématique, Informatique et Sciences Humaines, n° 120.

Gras, R.(1992) : L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12-1.

Gras, R et Ratsimba-Rajohn (1996) : Analyse non symétrique de données par l'implication statistique, RAIRO, Recherche Opérationnelle, n°3-96, AFCET Paris.

Gras R., Briand H., Peter P., Philippe J. (1997) : Implicative statistical analysis, Proceedings of International Congress I.F.C.S., 96, Kobe, Springer-Verlag, Tokyo.

Gras R., Richeton J.P. (2000) : Eléments d'analyse de l'expérimentation d'épreuves de mathématiques en classe de première, Bulletin n° 427 de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 187-201, Paris, ISSN 0240-5709

Gras R. (2000) : Quelques principes majeurs pour l'élaboration d'un programme de mathématiques pour le second cycle, Bulletin n° 429 de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 522-527, Paris, ISSN 0240-5709

Gras R., Kuntz P., Couturier R. et Guillet F. (2001) : Une version entropique de l'intensité d'implication pour les corpus volumineux, Proceedings des Journées E.C.D. de Nantes (2001), Hermès

Gras Robin, Gras Régis, et al : Classification automatique de protéines par un algorithme génétique pour l'optimisation d'un outil d'identification de protéines par empreinte de masses peptidiques, soumis à Mathématiques et Sciences Humaines

Gras R., Kuntz P. et Briand H. (2001) : Les fondements de l'analyse statistique implicative, Mathématiques et Sciences Humaines, n° 154-155

Gras R., Diday E., Kuntz P. et Couturier R. (2001) : Variables sur intervalles et variables-intervalles en analyse implicative, Actes du 8ème Congrès de la SFC de Pointe à Pitre, 17-21 décembre 2001, pp 166-173

Gras Régis, Guillet F., Gras Robin et Philippé J. (2002) : Réduction des colonnes d'un tableau de données par quasi-équivalence entre variables, Extraction des connaissances et apprentissage, Hermès, Volume 1, n°4/2001, p 197-202, ISBN 2-7462-0406-1

Larher A. (1991) : Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique, Thèse de l'Université de Rennes 1.

Lerman I.C., Gras R. et Rostam H., (1981) : Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II, Mathématiques et sciences Humaines, n°75, Paris

Peter P., Gras R., Philippé J. et Baquédano S. (2001): L'analyse implicative pour l'étude d'un questionnaire de personnalité, Proceedings des Journées E.C.D. de Nantes 2001, Hermès

Polo, M. (1996) : Le repère cartésien dans les systèmes scolaires français et italien : étude didactique et application de méthodes d'analyse statistique multidimensionnelle, Thèse de l'Université de Rennes 1

Ratsimba-Rajohn, H. (1992) : Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative, application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradiction, Thèse de l'Université de Rennes 1

Totohasina, A. (1992) : Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle, Thèse de l'Université de Rennes 1

Apêndice

Métodos de análise de dados praticados no software CHIC

Estas notas, intuitivas e poucas técnicas, têm por finalidade guiar o usuário em suas primeiras interpretações. Os argumentos teóricos são apresentados nas obras e artigos citados nas referências acima.

Análise das similaridades segundo I.C. Lerman

Indícios de similaridade

Como em todos os métodos de classificação, procuramos constituir, em um conjunto V das variáveis, partições de V cada vez menos finas, construídas de maneira ascendente. Essas partições encaixadas são representadas por uma árvore construída usando um critério de similaridade ou de semelhança estatística entre variáveis. A similaridade se define a partir do cruzamento do conjunto V das variáveis com um conjunto E de sujeitos (ou de objetos). Este tipo de análise permite ao usuário estudar e depois interpretar, em termos de tipologia e de semelhança (e não semelhança) decrescente, classes de variáveis, constituídas significativamente a certos níveis da árvore e se opondo a outros nestes mesmos níveis.

O **critério de similaridade** se exprime da maneira seguinte nos casos das variáveis binárias (presença – ausência, verdadeiro – falso, sim – não, etc...):

2 variáveis a e b , satisfeitas respectivamente por sub-conjuntos (suportes) A e B de E , são muito semelhantes quando o número k dos sujeitos que os verificam simultaneamente (ou seja os elementos de $a \wedge b$ é importante de um lado, pelo que teria sido no caso da ausência de ligação entre a e b , e por outro lado, com relação aos cardinais de E , A e B . Medimos esta semelhança pela probabilidade que k seja superior ao número aleatório esperado nesta situação na qual somente o acaso interviria. O índice correspondente entre as variáveis não é então modificado, desviado pelo tamanho de $a \wedge b$ e não coincide então com o coeficiente de correlação linear.

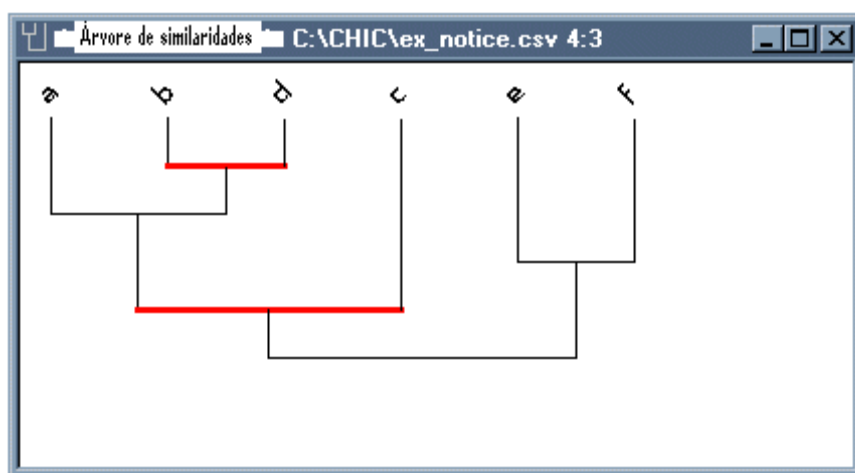
A modelagem probabilista da variável aleatória, cujo k é a realização presente, pode ser **binomial** ou de Poisson à escolha do usuário. A segunda supõe que E seja uma amostra de uma

população mãe mais ampla, o que a primeira não supõe. Se E não tem nenhuma razão estatística a priori de ser representativo, é preferível usar o modelo binomial que analisa a estrutura de E enquanto tal. Quando os parâmetros o permitem, uma aproximação gaussiana destas duas leis é efetuada.

O índice de similaridade entre variáveis serve em seguida para definir um índice de similaridade entre duas classes de variáveis segundo este mesmo princípio de comparação entre a observação e o que seria dado pelo acaso. Um índice, dito de coesão, permite não mais reagrupar as classes quando esse reagrupamento é feito “contra – natureza”, isto é, quando o índice de similaridade entre as classes, em processo de reagrupamento, apresenta um índice de coesão muito fraco.

Árvore de similaridade

Assim, para construir uma árvore de similaridade, reunimos em uma classe de primeiro nível, primeiramente, as 2 variáveis que são mais similares no sentido do índice de similaridade, depois 2 outras variáveis ou uma variável e a classe já formada no sentido do índice da classe, e depois outras variáveis ou classes de variáveis.



Na situação acima b e d são mais semelhantes que todos os outros pares de variáveis. Elas são reunidas no nível 1 da árvore hierárquica. Depois a classe (a, b, d) apresenta uma melhor agregação que todos os outros pares. Ela é formada no nível 2. Em seguida, o par (e, f), reunido no nível 3, é tem mais semelhança que toda a extensão de (a, b, d). Depois a extensão (a, b, d, c), formada no nível 4, é melhor que toda a extensão de (e, f). As duas classes (a, b, d, c)

e (e,f) se opõem neste nível e, sua reunião tendo uma coesão nula, não se reagrupam.

Níveis e nós significativos

Um critério estatístico permite saber quais são os níveis significativos da árvore de similaridade entre todos os níveis constituídos. São os níveis em que se formam uma partição e classes que estão mais em acordo com os indícios de similaridade iniciais. Cada nó significativo está associado à classe obtida nesse nível. A partição pode corresponder à tipologia mais consistente para o número de classes que se formaram. Por exemplo, acima, os níveis 1 e 4 são significativos.

Duas outras informações são susceptíveis de ajudar na interpretação da árvore: a tipicidade e a contribuição. Falaremos do assunto um pouco mais adiante com a teoria implicativa.

Tipicidade

Certos sujeitos são típicos do comportamento do conjunto da população no sentido seguinte: no estudo da similaridade, eles atribuem ao conjunto das variáveis valores compatíveis com as similaridades constituídas sobre essas variáveis pela população. Se as variáveis suplementares foram definidas pelo usuário, obteremos assim a tipicidade dessas variáveis a partir das tipicidades dos indivíduos que as satisfazem. Por exemplo, no decorrer de uma pesquisa sócio-profissional, serão os auxiliares administrativos que serão típicos do comportamento de uma população de pessoas ativas.

Contribuição

É possível conhecer a contribuição a cada uma das classes de cada um dos sujeitos e então das variáveis suplementares. Cada uma dessas últimas contribui mais ou menos na formação da classe: isto significa que os valores que eles dão às variáveis vão no sentido de suas similaridades. R. Gras e H. Ratsimba-Rajohn elaboraram um critério que permite avaliar essa contribuição relativamente a cada uma das classes. Cada uma delas contribui. Por exemplo, em um questionário de atitude, podemos evidenciar, a “responsabilidade” das mulheres de idade entre 30 e 40 anos na existência de uma certa classe de variáveis principais (ou ativas), o que quer dizer que elas participaram na construção da hierarquia.

Análise das implicações entre variáveis e classe de variáveis

Índices de implicação

O estudo continua sendo feito sobre o cruzamento de um conjunto de variáveis V e de um conjunto de sujeitos E . No caso prototípico das variáveis binárias, queremos dar um sentido estatístico a expressões como: “quando se observa sobre um sujeito de E a variável $\underline{a}$, em geral observa-se a variável $\underline{b}$ ”. Trata-se então de procurar um modelo estatístico de uma quase implicação do tipo: “ Se $\underline{a}$ então quase $\underline{b}$ ”, a implicação lógica estrita sendo raramente satisfeita. A esta quase implicação é associada semanticamente uma **regra**, um tipo de teorema que liga uma premissa e uma conclusão. Vemos assim a diferença entre o método de análise de similaridades que é simétrico e o método implicativo que é, por essência, não simétrico.

Partindo dos sub-conjuntos A e B , suportes respectivos de $\underline{a}$ e $\underline{b}$, nós interessamos na medida do sub-conjunto dos contra-exemplos da implicação, a saber as ocorrências da propriedade $(b \wedge \neg a)$ do suporte $A \wedge \neg B$ ($\neg B$ sendo o complementar de B em E). O número k de contra-exemplos é considerado como a realização de uma variável aleatória de um modelo de **Poisson** ou de um modelo **binomial**, um e outro aproximados pela lei de Gauss quando é legitimado pelos parâmetros. O modelo de Poisson é mais severo que o modelo binomial.

Intuitivamente, diremos que a implicação é admissível no índice de confiança α se a probabilidade que essa variável aleatória seja superior a k é ela mesma superior a $1-\alpha$. Isto é, quanto mais k for pequeno, em relação as ocorrências de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e o tamanho de E , mais a implicação é surpreendentemente grande, então admissível e, sem dúvidas, portadora de um sentido. O número $1-\alpha$ é o **índice de implicação** dito **da teoria clássica**. O valor 0.95 representa um bom valor de admissibilidade quando n , $\underline{a}$ e $\underline{b}$ ultrapassam muitas dezenas de unidades.

Portanto, quando o tamanho das amostras alcança várias centenas, ver milhares ou mesmo centenas de milhares, dispomos de uma modelagem mais complexa, mas mais adequada, pois ela permite estimar não somente a qualidade da implicação direta de $a \Rightarrow b$, mas igualmente sua recíproca $\neg b \Rightarrow \neg a$. Esta modelagem é chamada entrópica, pois ela faz apelo a qualidade da informação recolhida pelos desequilíbrios respectivos dos casos $((a \wedge b)$ e $(a \wedge \neg b)$, e depois $(\neg a \wedge \neg b)$ e $(\neg a \wedge b)$, desequilíbrio que mede a **entropia** no sentido de Shannon. O índice que o corresponde é chamado de **índice de implicação - inclusão** pois ele mede mais fielmente a quase inclusão de A em B .

Grafo implicativo

Um grafo implicativo traduz graficamente a rede de relações quase implicativas entre as variáveis de V . O intervalo de confiança da aparição de arcos ou flechas do grafo é controlável pelo usuário que pode, a sua vontade, aumentar ou diminuir seu número. A transitividade, que pilota a interpretação em termos de caminhos, é aceita a um intervalo de confiança de 0,50.

Durante a análise, podemos nos concentrar unicamente na procura de arcos em “**Amon**” (“pais” ou fontes) de um pico de um grafo e em “**aval**” (“filhos” ou “crianças”) deste mesmo pico. Para isto, basta pedir um cone de origem o pico escolhido. A partir da opção de menu, mas igualmente durante este trabalho, é possível mudar o tamanho da janela de trabalho, o que permite se concentrar na organização dos arcos sobre uma parte do grafo. Além disso, o software sendo bem conhecido “APRIORI”, CHIC permite estudar as conjunções das variáveis. Para isto, procuraremos entre as conjunções de 2 variáveis (então 3 variáveis em jogo: conjunção de 2 variáveis implicando uma variável), 3,4, etc. (respectivamente 4, 5, etc. variáveis em jogo), as que apresentam uma originalidade dada. Esse índice leva em consideração a implicação, implicação entrópica, o suporte das variáveis e uma certa “confidência”. Por exemplo, se pedimos, a um intervalo de confiança de originalidade de 0.80, considerar todas as conjunções pondo 5 variáveis em jogo, seja a conjunção de 4 para a qual procuramos a implicação com a 5ª, CHIC calculará todas as implicações possíveis das conjunções de 2, 3 e 4 variáveis retendo as que aparecem no intervalo de confiança de 0.80. Se este intervalo é mudado, o grafo logicamente também o será.

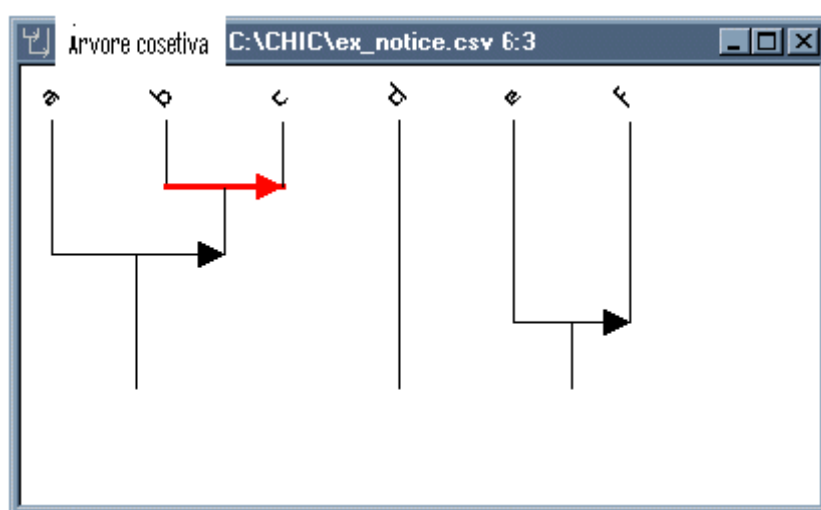
Árvore

O índice de implicação entre duas variáveis é estendido ao cálculo da coesão da classe. Esta última dá conta da qualidade da implicação orientada dentro de uma classe de variáveis e traduz a noção de meta-regra ou regra sobre regra. Uma hierarquia ascendente ou árvore coesiva traduz graficamente o encaixamento sucessivo das classes constituídas segundo o critério de coesão que é decrescente segundo os níveis (no sentido contrário da formação das classes de variáveis) da hierarquia. Um intervalo de confiança de parada sobre a coesão permite evitar a constituição das classes que não têm sentido implicativo, o que não se produz nas hierarquias clássicas, mas fica mais conforme a semântica.

Níveis e nós significativos

As noções de nível e de nós significativos, como precedentemente, sublinhados por uma flecha vermelha assinala ao usuário as classes sobre os quais ele deve ter mais atenção no fato de sua melhor conformidade com os indícios de implicação iniciais.

Na representação abaixo, observamos que no primeiro nível, se forma uma classe ordenada (b,c) do fato que a implicação de b sobre c é a mais forte entre todas as implicações possíveis entre variáveis. A ele, corresponde necessariamente um nó significativo. Em seguida, no nível 2 uma meta-regra aparece de a sobre (b,c). Ela se interpreta, por exemplo, da maneira seguinte: se a é verdadeiro então (se b é verdadeiro então c) é geralmente; $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ é equivalente a $a \wedge b \Rightarrow c$. No nível 4 se forma a regra (e,f). A variável d não implica e não é implicada por nenhuma outra.



Tipicalidade e contribuição

Que se trate dos caminhos do grafo implicativo ou das classes coesivas, é interessante conhecer qual é a responsabilidade dos sujeitos e das variáveis suplementares em suas formações, como foi feito para a similaridade. Esta opção é possível, de duas maneiras:

- primeiramente, pelo cálculo do valor da tipicidade de um sujeito x caracterizando sua conformidade ou sua quase conformidade à tendência geral dada pela intensidade da implicação

- inclusão de uma variável $\underline{a}$ sobre uma variável b . Por exemplo, se x toma o valor $a(x)=0,2$ segundo $\underline{a}$ e o valor $b(x)=0,9$ segundo $\underline{b}$, sua responsabilidade com relação à implicação $a \Rightarrow b$ é 0,73. Além de mais, se a intensidade da implicação de $\underline{a}$ sobre $\underline{b}$ é 0,75, x é mais típico que o sujeito y que teria a responsabilidade de 0,95. Definimos alias a distância de x à regra $a \Rightarrow b$ a partir desta responsabilidade. Essa distância varia entre 0 e 1. O valor da tipicidade é o complemento a 1 desta distância. Ela pode ser estendida ao conjunto de relações de um caminho do grafo implicativo ou ao de uma classe da hierarquia coesiva. Os sujeitos que teriam um valor muito bom de tipicidade poderiam ser considerados como prototípicos da população. Podemos saber qual é o grupo ótimo dos sujeitos que são os mais típicos de um caminho ou de uma classe e tirar a variável suplementar a mais típica deste caminho ou desta classe. a

- Em seguida, pelo cálculo da conformidade lógica de um sujeito x à existência de um arco do grafo levando em consideração o intervalo de confiança escolhido, ou da hierarquia. Por exemplo, se o arco (a, b) aparece sobre o grafo ou na árvore, qual que seja a intensidade da implicação de $\underline{a}$ sobre $\underline{b}$, diremos que esta conformidade é igual a 1 e que ela é igual a 0 no caso contrário. Daí deduz-se a distância de x e a contribuição de x à regra $a \Rightarrow b$ é igual ao complemento desta distância. Estendida a um caminho e a uma classe, ela permite estabelecer o grupo ótimo contributivo, e depois a variável suplementar a mais contributiva ao caminho ou à classe. Essas informações são úteis para orientar o usuário para analisar a ligação de tal ou tal grupo de sujeitos relativamente às regras ou meta-regras particulares.

ANEXO 6 – INDICAÇÕES DO “GRUPO ÓTIMA”

GRUPO 3

Contribuição à classe : AN,A0,BN,C0,CN,EN,E0,DN,D0 (4,5,6,7,9,10,13,17)

Grupo ótima : card 625

351 1893 511 1897 1487 1001 1914 109 1921 147 1735 1621 1919 987 988 1907 151 1904 1905
 995 99 102 993 994 250 1485 758 752 747 1714 1941 1746 1741 1945 362 1944 1513 368 1343
 1842 1930 1216 1926 1927 269 739 113 1515 118 132 402 764 984 901 1953 1400 653 1700
 1874 1401 1880 1272 931 1879 1403 1405 166 161 1811 685 158 159 696 162 898 1869 1512
 1697 1509 1699 1882 964 1681 974 497 953 959 1816 475 978 979 1898 977 157 952 335 938
 943 933 935 1884 946 1888 950 718 526 947 1955 1594 1605 1632 1633 1604 1617 1607 1606
 1628 1603 1600 1599 1597 1595 1635 1636 1602 1601 1809 1810 1812 1813 1815 1776 1778
 1779 1783 1806 1690 1823 1824 1825 1826 1819 1693 1820 1691 1822 1716 1715 1712 1751
 1710 1730 1724 1722 1738 1740 1705 1768 1704 1771 1775 1754 1756 1707 1706 1767 1657
 1656 1654 1653 1651 1886 1661 1895 1659 1658 1937 1938 1939 1948 1954 1908 1917 1928
 1933 1935 1845 1847 1682 1851 1859 1827 1828 1831 1837 1838 1868 1872 1873 1667 1885
 1860 1861 1862 1863 1865 659 652 646 672 667 666 642 583 575 569 611 602 593 700 699 697
 705 703 701 692 680 675 673 688 686 684 481 479 478 495 490 488 477 469 468 461 476 474
 470 **540** 530 525 567 564 **546** 524 507 503 496 522 521 509 812 805 803 850 849 848 802 762
 761 759 777 776 775 884 882 881 897 896 892 873 855 854 851 872 871 860 729 728 726 732
 731 730 725 715 714 711 724 722 717 746 744 742 755 754 749 741 736 734 733 740 738 737
 458 183 180 171 204 187 186 163 96 95 78 149 146 139 225 223 222 292 275 272 219 215 214
 208 218 217 216 21 16 15 25 24 22 12 5 4 1 10 9 6 45 44 42 72 69 49 41 28 27 26 36 34 29 423
 421 420 427 425 424 419 415 410 408 418 417 416 447 446 445 452 450 449 441 434 431 429
 439 437 435 341 338 334 352 349 343 332 321 300 299 331 329 326 390 388 383 407 405 393
 382 365 360 358 381 372 371 900 1421 1420 1419 1429 1428 1426 1415 1396 1395 1392 1404
 1399 1397 1463 1452 1450 1470 1467 1466 1445 1436 1434 1431 1440 1439 1438 1334 1333
 1322 1356 1352 1345 1320 1297 1296 1294 1310 1309 1301 1385 1379 1378 1390 1389 1386
 1377 1368 1362 1358 1376 1375 1372 1562 1561 1557 1565 1564 1563 1556 1551 1550 1549
 1555 1553 1552 1586 1585 1584 1591 1590 1587 1583 1570 1568 1567 1582 1580 1573 1527
 1526 1525 1534 1530 1528 1519 1488 1474 1473 1517 1494 1489 1545 1544 1543 1548 1547
 1546 1542 1537 1536 1535 1541 1540 1538 1286 991 990 989 997 996 992 986 976 973 969
 985 983 980 1018 1016 1007 1039 1030 1028 1006 1000 999 998 1005 1003 1002 916 915 913
 923 922 918 912 907 903 902 911 909 908 961 960 958 967 966 962 951 934 932 925 948 944
 940 1191 1189 1188 1206 1205 1192 1184 1176 1175 1172 1183 1181 1179 1269 1245 1239
 1283 1279 1276 1237 1227 1215 1209 1235 1233 1231 1154 1152 1143 1157 1156 1155 1138
 1108 1097 1096 1131 1120 1111 1168 1166 1165 1171 1170 1169 1164 1160 1159 1158 1163
 1162 1161

GRUPO 4

Contribuição à classe : C3P,D3,DS,A3P,E3,ES (11,12,14,18,20)

Grupo ótima : card 76

585 1498 639 1014 566 674 624 1499 594 1901 1136 167 1743 303 295 291 296 1145 58 164
 156 165 1223 107 1135 189 237 236 644 511 598 600 601 589 591 592 122 121 203 134 615
 124 1516 1511 1670 1916 1514 1027 351 1508 1506 956 1922 1925 248 258 1893 1978 241
 1875 1897 1487 1913 963 929 1090 587 144 1100 617 596 1246 1112 682 1117 **534**

GRUPO 5

Contribuição à classe : D1,E1,C3C,CS,AS,A3C,BS (1,2,3,8,16,19)

Grupo ótima : card 538

1670 1694 1796 120 1695 11 83 1795 235 243 837 246 970 116 117 831 239 1798 1803 1962
 1083 1709 1708 1792 1840 103 84 129 220 221 957 1794 229 105 231 122 1021 1961 1793 228
 1086 1101 757 268 1801 270 867 1891 1099 1664 1973 68 1107 276 1650 277 1802 1012 271
 1855 815 809 1105 1799 251 253 115 254 1092 249 1685 1684 1780 1683 1672 1671 258 1854
 1098 843 760 1094 107 257 1800 1758 1056 1057 143 188 185 1054 184 1055 955 1821 828
 141 140 1876 781 820 190 1058 1059 191 1750 1044 796 173 174 175 172 1046 1781 1048 888
 154 178 791 1052 181 1053 98 176 168 101 177 786 206 1073 773 212 213 1789 868 1830 1727
 1959 774 1790 794 1042 1836 1080 766 772 133 770 1077 1834 1742 91 1787 789 197 138
 1062 1043 1786 779 1067 1733 89 1071 87 1729 1734 1069 1070 135 1788 200 981 1302 596
 1306 1304 595 601 1291 2000 1300 2002 598 1311 592 1447 493 491 589 1451 1453 1455 1918
 856 2003 467 621 1993 444 616 617 1265 1256 1255 436 1260 440 624 462 1484 609 607 1282
 463 456 1998 1997 1999 613 457 1437 560 1351 1393 539 1354 1388 1398 572 1402 563 1347
 1346 1370 548 1373 919 1365 1363 926 1382 1383 1374 545 553 573 39 859 2005 510 38 508
 500 586 587 584 1321 502 1408 520 1336 37 574 1925 580 1330 2007 578 861 515 1248 60
 1985 311 320 318 1129 1983 1899 1126 305 309 1613 1982 709 1588 1589 707 337 336 1148
 1136 1134 1987 735 327 1141 1978 286 1113 748 1114 289 1977 1645 972 63 282 1643 31
 1980 61 1122 1124 1123 1620 1121 1118 296 295 1119 1979 1627 645 647 1221 1229 1228 643
 400 386 662 32 391 658 56 48 630 1521 47 1244 1910 50 638 54 1230 53 634 635 58 1566 363
 342 1193 361 356 1180 1578 690 698 375 1559 677 668 670 380 366 625 600 499 612 591 2006
512 651 59 822 818 821 106 824 35 90 355 315 1981 682 640 660 663 263 1673 1674 278 302
 1646 1647 581 582 506 1332 1406 1407 1410 1243 1518 1238 1246 1448 483 1284 782 1760
 784 13 780 192 1950 1032 1947 142 885 785 131 1088 238 121 1856 1713 130 202 1728 2008
 2001 2009 874 870 2004 1972 895 1975 1969 1968 1967 1958 1949 1992 1994 1957 1990 1991
 1127 303 1626 287 308 1132 316 314 313 284 1095 1676 248 1091 260 283 1644 262 1100 637
 1324 1323 487 486 1329 550 541 557 1338 1298 618 620 1253 636 615 473 1287 610 614 241
 152 1896 66 1029 1804 793 155 153 1022 825 1020 806 840 1027 85 134 1797 227 1085 203
 1912 237 1090 847 201 167 195 787 62 199 1903 196 2010 1936 310 1956 232 1963 1964 633
 124 144 1995 622 629