

SOLANGE HASSAN AHMAD ALI FERNANDES

**UMA ANÁLISE VYGOTSKIANA DA APROPRIAÇÃO DO
CONCEITO DE SIMETRIA POR APRENDIZES SEM
ACUIDADE VISUAL**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2004**

SOLANGE HASSAN AHMAD ALI FERNANDES

**UMA ANÁLISE VYGOTSKIANA DA APROPRIAÇÃO DO
CONCEITO DE SIMETRIA POR APRENDIZES SEM
ACUIDADE VISUAL**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a
orientação da **Prof^a. Dr^a. Siobhan Victoria (Lulu)
Healy***

**PUC/SP
São Paulo
2004**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

Cada pessoa é como uma caixinha de fósforos. Lá dentro existe mais do que quarenta palitos. Existem quarenta potenciais de luz, que dependem de um só ato: o de riscar um fósforo e ascender um potencial de luz.

Viviane Senna

Dedico este trabalho a todos aqueles
que me ensinaram sonhar.

A todos aqueles que me presenteiam ou
presentearam com sua presença.

A todos aqueles que me mostraram
haver muito que os olhos não podem
ver.

AGRADECIMENTOS

À Lulu Healy que aceitou o desafio deste trabalho, dando-me a oportunidade de trabalharmos juntas. Por sua amizade, sua orientação competente, suas críticas, sua dedicação, seu incentivo e seu apoio sem os quais este trabalho não seria possível. Pelo seu envolvimento com esta pesquisa que fez dela um trabalho realizado a quatro mãos.

Aos Professores Doutores Ubiratan D'Ambrosio e Mirian Godoy Penteado pelas sugestões pertinentes dadas na qualificação.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Em particular ao Professor Doutor Wagner Rodrigues Valente, pelo incentivo e sugestões dadas na redação do anteprojeto desta pesquisa.

A coordenação do Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, nas pessoas da Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Iglioni e do funcionário Francisco Olimpio da Silva.

Aos pesquisadores Abraham Arcavi, Stephen Lerman e Luciano Meira pelas valiosas sugestões.

Aos colegas do Grupo de Pesquisas TecMeM, que muito contribuíram nas várias vezes que ouviram a apresentação deste projeto.

Aos todos os colegas do Mestrado, especialmente a Cristina Penteado e Eliane Cabariti pela amizade, companheirismo e apoio em todos os momentos.

Aos meus pais, Hassan e Zaira, por me ensinarem a transformar as adversidades que a vida oferece em força para superá-las.

Aos parceiros de caminhada Carlos, Hanna e Khallil, pelo apoio, carinho e por compreenderem minhas ausências. A vocês, devo ainda agradecer o privilégio de compartilhar esta existência e a possibilidade de partilhar alegrias, tristezas e conquistas.

A Irmã Conceição Jacintho que se faz ouvida mesmo no meu silêncio.

A amiga Ângela Moreira que em momento algum faltou com seu alento, entusiasmo, conselhos, alegria e acima de tudo com seu carinho fraternal.

A amiga Silvia Álvares pela amizade dedicada e pela disposição para ajudar-me em todos os momentos.

Ao casal Cícero Rodrigues da Silva Filho e Claudia Machado e Silva pelo carinho com que me acolheram num período importante para o desenvolvimento deste trabalho.

As coordenadoras, Maria Inês Rinaldi Vit, Marinez Saad Riemma e Elisa Martinez Gil pela compreensão e apoio em todas as horas.

Aos amigos e colegas do Colégio Nossa Senhora do Rosário com os quais partilho dúvidas e esperanças.

A Markiano Charan Filho, diretor-presidente da ADEVA – Associação de Deficientes Visuais e Amigos, pela atenção com que se prontificou a ajudar-me, enquanto tantas outras instituições fecharam suas portas.

Aos sujeitos que participaram desta pesquisa, pela colaboração incansável e por me permitir ser aprendiz.

A CAPES, pela bolsa concedida, sem a qual seria difícil a realização desta pesquisa.

Aos meus alunos e ex-alunos que dividem ou dividiram comigo suas experiências, semeando desafios e que me incentivam a continuar esta caminhada.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que este projeto se tornasse realidade.

Este estudo tem como objetivo investigar os processos pelos quais aprendizes cegos apropriam conceitos matemáticos. Do campo da Geometria, foram escolhidos os conceitos de simetria e reflexão por suas fortes associações com experiências visuais. Dentro de uma perspectiva vygotskiana, partiu-se da hipótese que esses aprendizes têm o mesmo potencial que os videntes para apropriar-se de noções ligadas a esses conceitos, desde que seu acesso seja viabilizado por instrumentos que substituam o olho. Optou-se pelo *método da dupla estimulação* de Vygotsky e o desenvolvimento de entrevistas baseadas em tarefas, realizadas com dois sujeitos, um portador de cegueira congênita e um de cegueira adquirida. O primeiro estímulo foi dado pelas ferramentas materiais e o segundo estímulo oferecido pela pesquisadora através de intervenções. Foram eleitas três dimensões para análises: etapas *intra*, *inter* e *transfigural* do pensamento geométrico (Piaget e Garcia, 1987), a apropriação das *vozes matemáticas* (Renshaw, 1996) e a emergência e manutenção da *zona de desenvolvimento proximal* (Meira, 2002).

Análises das transições entre os níveis *intra* e *interfigural* indicaram que a evolução dos significados associados à simetria e reflexão para aprendizes cegos dá-se de modo similar a dos aprendizes videntes. Aspectos *intrafigurais* foram apropriados com mais facilidade que os *interfigurais*, embora, as características das ferramentas e tarefas possam ter motivado a predominância inicial da perspectiva *intrafigural*. Em relação à apropriação da voz matemática, evidenciou-se como os estímulos possibilitaram a articulação de *pseudoconceitos*, nas divergências dos significados atribuídos aos objetos matemáticos pelos participantes. Estas divergências assumiram um papel importante na promoção de discursos argumentativos que – associadas às conexões entre os conhecimentos adquiridos no passado pelo aprendiz, a situação presente e novos conhecimentos (para futuras situações) – favoreceram a produção de mudanças conceituais.

Palavras chave: Educação especial, aprendizes cegos, transformações geométricas, diálogos, mediação.

ABSTRACT

The aim of this study was to investigate the processes by which blind learners appropriate mathematical concepts. In the domain of geometry, symmetry and reflection were chosen because of their strong associations with visual experiences. Within a vygotskian perspective, the research was guided by the hypothesis that, given instruments that can act as substitutes for the eye, blind learners have the same potential as their sighted counterparts to appropriate notions related to these concepts. Adopting Vygotsky's method of *double stimulation*, task-based interviews were realised with two subjects, one blind since birth and one who lost his sight between the ages of 4 and 15 years. The first stimulus was represented by material tools and the second offered in the form of researcher interventions. Three dimensions were chosen for analysis: the stages of geometrical thinking, *intra*, *inter* and *transfigural* (Piaget and Garcia, 1987); the appropriation of *mathematical voices* (Renshaw, 1996) and the emergence and maintenance of the *zone of proximal development* (Meira, 2002).

Analysis of the transition between the intra and interfigural levels indicated that the evolution of meanings for symmetry and reflection in blind and sighted learners follow similar trajectories. Intrafigural aspects were appropriated more easily than the interfigural, although characteristics of the tasks and tools may well have motivated the initial preference for the intrafigural. In relation to the appropriation of the mathematical voice, the stimuli enabled the articulation of *pseudoconcepts*, divergences in the meanings attributed by the participants to the mathematical objects. These had an important role in promoting argumentative discourses which – together with connections between knowledge learners had acquired in the past, the present situation and new knowledge (for future situations) – favoured conceptual change.

Keywords: Special Education, blind learners, geometric transformations, dialogues, mediation.

SUMÁRIO

<u>ÍNDICE DE FIGURAS</u>	XI
<u>ÍNDICE DE TRECHOS TRANSCRITOS</u>	XIV
<u>INTRODUÇÃO</u>	16
<u>CAPÍTULO 1</u>	
<u>O APRENDIZ CEGO NA PERSPECTIVA VYGOTSKIANA</u>	23
<u>1.1. BREVE HISTÓRICO</u>	23
<u>1.2. A VISÃO DE VYGOTSKY</u>	29
<u>1.2.1. DEFECTOLOGIA</u>	30
<u>1.2.2. MEDIAÇÃO</u>	34
<u>1.2.2.1. SISTEMA HÁPTICO</u>	37
<u>1.2.2.2. SISTEMA FONADOR</u>	39
<u>1.2.3. FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS</u>	42
<u>1.2.4. ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL</u>	44
<u>1.3. ESTUDOS MAIS RECENTES SOBRE A ZDP</u>	46
<u>1.3.1. A ZDP: UM ESPAÇO SIMBÓLICO - TEMPORAL</u>	47
<u>1.3.2. A APROPRIAÇÃO DE VOZES</u>	48
<u>1.4. SÍNTESE</u>	50
<u>CAPÍTULO 2</u>	
<u>TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E OS PROCESSOS ENVOLVIDOS EM SUA APRENDIZAGEM</u>	52
<u>2.1. INTRODUÇÃO</u>	52
<u>2.2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS</u>	54
<u>2.3. ISOMETRIAS</u>	55
<u>2.3.2. SIMETRIA</u>	58

<u>2.4. SIMETRIA, REFLEXÃO E OS CONCEITOS COTIDIANOS</u>	62
<u>2.5. FORMAS GEOMÉTRICAS E OS APRENDIZES NÃO VIDENTES</u>	64
<u>2.6. INTRA, INTER E TRANSGIFURAL</u>	66
<u>2.7. OS PARÂMETROS DA REFLEXÃO NO CONTEXTO INTRA, INTER E TRANSGIFURAL</u>	68
<u>2.8. SÍNTESE</u>	72

CAPÍTULO 3

<u>CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS</u>	74
<u>3.1. INTRODUÇÃO</u>	74
<u>3.2. O MÉTODO DA DUPLA ESTIMULAÇÃO</u>	75
<u>3.3. ENTREVISTAS BASEADAS EM TAREFAS</u>	77
<u>3.4. DESENVOLVIMENTO DAS ENTREVISTAS BASEADAS EM TAREFAS</u>	79
<u>3.4.1. O DESENHO DAS FERRAMENTAS MATERIAIS</u>	80
3.4.1.1. FERRAMENTA MATERIAL 1	81
3.4.1.2. FERRAMENTA MATERIAL 2	82
<u>3.4.2. TAREFAS</u>	86
3.4.2.1. O PRIMEIRO GRUPO DE TAREFAS	87
3.4.2.2. O SEGUNDO GRUPO DE TAREFAS	89
<u>3.5. PERFIL DOS SUJEITOS</u>	90
<u>3.6. A INSTITUIÇÃO</u>	94
<u>3.7. ESTRUTURA DAS ENTREVISTAS</u>	94
<u>3.7.1. FASE EXPLORATÓRIA</u>	95
<u>3.7.2. REALIZAÇÃO DAS TAREFAS</u>	96
<u>3.7.3. RETROSPECTIVA</u>	96
<u>3.8. ANÁLISE DAS ENTREVISTAS</u>	97

CAPÍTULO 4

<u>INTERAÇÕES SOBRE FIGURAS SIMÉTRICAS</u>	99
<u>4.1. INTRODUÇÃO</u>	99
<u>4.2. ANÁLISES DA FASE EXPLORATÓRIA</u>	100
<u>4.2.1. O TERMO FIGURA</u>	101
<u>4.2.2. O TERMO PLANO</u>	102

<u>4.2.3. O TERMO SIMETRIA</u>	103
<u>4.2.4. O TERMO REFLEXÃO</u>	104
<u>4.2.5. EXPLORAÇÃO DA FERRAMENTA DE DESENHO</u>	105
<u>4.2.6. CONSIDERAÇÕES SOBRE A FASE EXPLORATÓRIA</u>	105
<u>4.3. ANÁLISES DO GRUPO 1 DE TAREFAS</u>	106
<u>4.3.1. O TRABALHO DE LUCAS NO CONJUNTO 1 DE TAREFAS</u>	107
<u>4.3.2. O TRABALHO DE EDSON NO CONJUNTO 1 DE TAREFAS</u>	122
<u>4.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE O GRUPO 1 DE TAREFAS</u>	137

CAPÍTULO 5

<u>NEGOCIANDO SIGNIFICADOS PARA REFLEXÃO</u>	139
<u>5.1. INTRODUÇÃO</u>	139
<u>5.2. ANÁLISES DO GRUPO 2 DE TAREFAS</u>	140
<u>5.2.1. O TRABALHO DE LUCAS</u>	141
<u>5.2.1.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE O TRABALHO DE LUCAS COM O GRUPO 2 DE TAREFAS</u>	166
<u>5.2.2. O TRABALHO DE EDSON</u>	167
<u>5.2.2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O TRABALHO DE EDSON COM O GRUPO 2 DE TAREFAS</u>	187
<u>5.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE O GRUPO 2</u>	188

CAPÍTULO 6

<u>FASE RETROSPECTIVA</u>	191
<u>6.1. INTRODUÇÃO</u>	191
<u>6.2. A FASE RETROSPECTIVA DE LUCAS</u>	192
<u>6.3. A FASE RETROSPECTIVA DE EDSON</u>	197
<u>6.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE A FASE RETROSPECTIVA</u>	200

CAPÍTULO 7

<u>REFLEXÕES FINAIS</u>	201
<u>7.1. INTRODUÇÃO</u>	201
<u>7.2. O ESTUDO</u>	202

<u>7.3. AS DIMENSÕES DE ANÁLISES</u>	204
<u>7.3.1. A TRÍADE INTRA, INTER E TRANSGURAL</u>	205
<u>7.3.2. A APROPRIAÇÃO DA “VOZ MATEMÁTICA”</u>	209
<u>7.3.3. ZDP: UM ESPAÇO SIMBÓLICO</u>	212
<u>7.4. APROPRIAÇÃO DA REFLEXÃO POR APRENDIZES CEGOS</u>	213
<u>7.5. A INCLUSÃO: UM DESAFIO</u>	216
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	220
<u>ANEXOS</u>	229
Anexo 1 – Tabela de Snellen	
Anexo 2 – Partes do olho	
Anexo 3 – Tarefas	
Anexo 4 – Transcrição das entrevistas	
Anexo 4.A – Sujeito Edson	
Anexo 4.B – Sujeito Lucas	

ÍNDICE DE FIGURAS

<u>FIGURA 2.1: PROPAGAÇÃO RETILÍNEA DA LUZ</u>	53
<u>FIGURA 2.2: IMAGEM NOS ESPELHOS PLANOS</u>	54
<u>FIGURA 2.3: TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS</u>	55
<u>FIGURA 2.4: PROPRIEDADES ASSOCIADAS À REFLEXÃO</u>	56
<u>FIGURA 2.5: REFLEXÃO DO PLANO COM RELAÇÃO À RETA R</u>	58
<u>FIGURA 2.6: FIGURA SIMÉTRICA</u>	59
<u>FIGURA 2.7: UMA TRANSFORMAÇÃO ISOMÉTRICA</u>	60
<u>FIGURA 2.8: DUAS FIGURAS SIMÉTRICAS</u>	60
<u>FIGURA 2.9: SIMETRIA NO QUADRADO E NO RETÂNGULO</u>	61
<u>FIGURA 2.10: UMA FIGURA COMPLEXA</u>	69
<u>FIGURA 2.11: ESQUEMAS DE VERGNAUD</u>	70
<u>FIGURA 3.1: PRIMEIRO PROTÓTIPO</u>	81
<u>FIGURA 3.2: POLÍGONOS EM PAPEL CANSON</u>	82
<u>FIGURA 3.3: PRIMEIRA FORMA DA FERRAMENTA DE DESENHO</u>	83
<u>FIGURA 3.4: UMA TAREFA DOS ESTUDOS PILOTO</u>	84
<u>FIGURA 3.5: SEGUNDA FORMA DA FERRAMENTA DE DESENHO</u>	85
<u>FIGURA 3.6: FORMA FINAL DA FERRAMENTA DE DESENHO</u>	85
<u>FIGURA 3.7: POLÍGONOS</u>	88
<u>FIGURA 4.1: TRABALHO INICIAL NA FERRAMENTA DE DESENHO</u>	107
<u>FIGURA 4.2: A RESPOSTA DE LUCAS</u>	111
<u>FIGURA 4.3: A TAREFA E A SOLUÇÃO DE LUCAS</u>	112
<u>FIGURA 4.4: POSIÇÃO DO TRIÂNGULO ISÓSCELES</u>	113
<u>FIGURA 4.5: PRIMEIRA TENTATIVA</u>	114
<u>FIGURA 4.6: SEGUNDA TENTATIVA</u>	114
<u>FIGURA 4.7: PRIMEIRA IMAGEM MENTAL</u>	116
<u>FIGURA 4.8: HEXÁGONO</u>	119
<u>FIGURA 4.9: A SEQÜÊNCIA REALIZADA POR LUCAS</u>	119
<u>FIGURA 4.10: A PRIMEIRA TAREFA DE EDSON</u>	122

<u>FIGURA 4.11: A RESPOSTA DE EDSON</u>	126
<u>FIGURA 4.12: ADICIONANDO UMA TAREFA</u>	127
<u>FIGURA 4.13: AS PROPOSTAS DE EDSON</u>	129
<u>FIGURA 4.14: O EIXO DE SIMETRIA DO TRAPÉZIO</u>	130
<u>FIGURA 4.15: UMA TAREFA ADICIONAL</u>	133
<u>FIGURA 4.16: AS RESPOSTAS DE EDSON</u>	133
<u>FIGURA 4.17: O TRABALHO DE EDSON COM O HEXÁGONO</u>	135
<u>FIGURA 5.1: UM TRIÂNGULO E SUA IMAGEM</u>	142
<u>FIGURA 5.2: TRABALHANDO COM REFLEXÃO</u>	143
<u>FIGURA 5.3: IMAGINANDO OUTRO EIXO</u>	144
<u>FIGURA 5.4: FAZENDO REPRODUÇÕES SUCESSIVAS</u>	145
<u>FIGURA 5.5: EIXO DE SIMETRIA OBLÍQUO</u>	147
<u>FIGURA 5.6: TRABALHANDO COM SEGMENTOS</u>	147
<u>FIGURA 5.7: ADICIONANDO OUTRA FORMA</u>	148
<u>FIGURA 5.8: VIRANDO A FERRAMENTA DE DESENHO</u>	149
<u>FIGURA 5.9: UMA FORMA MAIS COMPLEXA</u>	149
<u>FIGURA 5.10: RESPOSTA FINAL</u>	151
<u>FIGURA 5.11: USO IMPLÍCITO DE PERPENDICULARISMO</u>	153
<u>FIGURA 5.12: DISCUTINDO A PERPENDICULARIDADE</u>	155
<u>FIGURA 5.13: ESTUDANDO A PERPENDICULAR</u>	156
<u>FIGURA 5.14: DETERMINANDO O EIXO DE SIMETRIA</u>	158
<u>FIGURA 5.15: CARACTERIZAÇÃO DO EIXO DE SIMETRIA POR LUCAS</u>	160
<u>FIGURA 5.16: REFLEXÃO DE PONTOS</u>	161
<u>FIGURA 5.17: TRABALHANDO COM PONTOS</u>	162
<u>FIGURA 5.18: O EIXO OBLÍQUO</u>	162
<u>FIGURA 5.19: A ASSERTIVA DE LUCAS</u>	164
<u>FIGURA 5.20: INICIANDO O ESTUDO DE REFLEXÃO</u>	168
<u>FIGURA 5.21: UM OBSTÁCULO</u>	170
<u>FIGURA 5.22: O PONTO DE VISTA DE EDSON</u>	170
<u>FIGURA 5.23: REPETINDO A TAREFA</u>	171
<u>FIGURA 5.24: CONSTRUINDO A FIGURA IMAGEM</u>	172
<u>FIGURA 5.25: USANDO A RELAÇÃO DA EQUIDISTÂNCIA</u>	174

<u>FIGURA 5.26: A ESTRATÉGIA DE EDSON</u>	174
<u>FIGURA 5.27: COMBINANDO TAREFAS</u>	175
<u>FIGURA 5.28: CONSTRUINDO SEGMENTO-IMAGEM</u>	176
<u>FIGURA 5.29: A TAREFA E A RESPOSTA DE EDSON</u>	177
<u>FIGURA 5.30: UMA IMAGEM EM 3D</u>	179
<u>FIGURA 5.31: UMA NOVA ESTRATÉGIA</u>	181
<u>FIGURA 5.32: USANDO SIGNOS EXTERNOS</u>	183
<u>FIGURA 5.33: AMPLIANDO O PSEUDOCONCEITO</u>	185
<u>FIGURA 5.34: FAZENDO A REFLEXÃO DE PONTOS</u>	186
<u>FIGURA 6.1: UM ELEMENTO MEDIADOR</u>	193
<u>FIGURA 6.2: A ÚLTIMA TAREFA</u>	198
<u>FIGURA 7.1: OS NÍVEIS INTRA E INTERFIGURAL</u>	206

ÍNDICE DE TRECHOS TRANSCRITOS

<u>TRECHO 4.1: O TERMO FIGURA</u>	102
<u>TRECHO 4.2: O TERMO SIMETRIA</u>	103
<u>TRECHO 4.3: REFLEXÃO PARA EDSON</u>	104
<u>TRECHO 4.4: REFLEXÃO PARA LUCAS</u>	104
<u>TRECHO 4.5: ESTABELECENDO RELAÇÕES</u>	108
<u>TRECHO 4.6: A VOZ MATEMÁTICA</u>	109
<u>TRECHO 4.7: UMA TENTATIVA DE IDENTIFICAR MAIS PROPRIEDADES</u>	110
<u>TRECHO 4.8: EIXO DE SIMETRIA POR LUCAS</u>	111
<u>TRECHO 4.9: CONSTRUINDO IMAGENS</u>	112
<u>TRECHO 4.10: PRIMEIRA DISCORDÂNCIA</u>	114
<u>TRECHO 4.11: UMA REPARAÇÃO</u>	115
<u>TRECHO 4.12: UM “MAL ENTENDIDO PRODUTIVO”</u>	120
<u>TRECHO 4.13: ADICIONANDO UM EIXO DE SIMETRIA</u>	123
<u>TRECHO 4.14: PRIMEIRAS PROPRIEDADES DE FIGURAS SIMÉTRICAS</u>	124
<u>TRECHO 4.15: INTRODUÇÃO DA VOZ MATEMÁTICA</u>	125
<u>TRECHO 4.16: CONSTRUINDO UM EIXO DE SIMETRIA</u>	128
<u>TRECHO 4.17: O EIXO DE SIMETRIA DO TRAPÉZIO ISÓSCELES</u>	129
<u>TRECHO 4.18: EIXO DE SIMETRIA - MEDIATRIZ</u>	130
<u>TRECHO 4.19: LEVANTANDO CONJECTURAS</u>	131
<u>TRECHO 4.20: TRABALHANDO COM OS QUADRILÁTEROS</u>	132
<u>TRECHO 4.21: VALIDANDO RESULTADOS</u>	134
<u>TRECHO 4.22: USANDO A IMAGEM MENTAL</u>	136
<u>TRECHO 5.1: INTRODUZINDO REFLEXÃO DE FIGURAS</u>	142
<u>TRECHO 5.2: A IDÉIA DE REPRODUÇÃO</u>	144
<u>TRECHO 5.3: RECONHECENDO PONTOS SIMÉTRICOS</u>	146
<u>TRECHO 5.4: REFAZENDO A TAREFA</u>	148
<u>TRECHO 5.5: O “X” DA QUESTÃO</u>	151
<u>TRECHO 5.6: CONCEITOS CIENTÍFICOS X CONCEITOS COTIDIANOS</u>	152

<u>TRECHO 5.7: DESTACANDO O PERPENDICULARISMO</u>	154
<u>TRECHO 5.8: VOZ MATEMÁTICA - PERPENDICULAR</u>	157
<u>TRECHO 5.9: UMA SIMULAÇÃO</u>	159
<u>TRECHO 5.10: UMA NOVA FORMA GEOMÉTRICA</u>	161
<u>TRECHO 5.11: PERCEBENDO A INCLINAÇÃO DO EIXO DE SIMETRIA</u>	163
<u>TRECHO 5.12: FAZENDO UMA REPARAÇÃO</u>	163
<u>TRECHO 5.13: AO TELEFONE</u>	165
<u>TRECHO 5.14: UMA POSIÇÃO DISCORDANTE</u>	169
<u>TRECHO 5.15: RECONHECENDO DOIS TRIÂNGULOS</u>	169
<u>TRECHO 5.16: UM MAL-ENTENDIDO</u>	170
<u>TRECHO 5.17: RECONHECENDO A DISTÂNCIA</u>	172
<u>TRECHO 5.18: PERCEBENDO O CARÁTER DE BISSETRIZ DO EIXO</u>	174
<u>TRECHO 5.19: USANDO A RELAÇÃO COM ESPELHOS</u>	175
<u>TRECHO 5.20: AS RELAÇÕES DE CONGRUÊNCIA</u>	176
<u>TRECHO 5.21: RECORRENDO A UMA IMAGEM VISUAL</u>	177
<u>TRECHO 5.22: EIXO DE SIMETRIA POR EDSON</u>	178
<u>TRECHO 5.23: REFLEXÃO POR EDSON</u>	178
<u>TRECHO 5.24: A IDÉIA DE ESPELHO</u>	179
<u>TRECHO 5.25: DO CIENTÍFICO AO COTIDIANO</u>	180
<u>TRECHO 5.26: A VOZ MATEMÁTICA - PERPENDICULAR</u>	182
<u>TRECHO 5.27: NO PAPEL DE INSTRUTOR</u>	186

INTRODUÇÃO

... eu entendo que o mundo não é visto simplesmente em cor e forma, mas também como um mundo com sentido e significado.

(Vygotsky, 1998a, p. 44)

Atualmente, há uma forte tendência no campo da Educação Matemática que se apóia na idéia que os indivíduos constroem seus próprios conhecimentos, passando assim a ter acesso ao saber. Existem propostas concretas que emergem da sociedade, dos órgãos governamentais, dos educadores, da mídia e dos pesquisadores que têm como objetivo proporcionar ao aprendiz situações que o permita analisar e interpretar questões vindas do cotidiano do cidadão. Assim, um dos principais papéis do professor é envolver seus alunos em situações que lhes permitam gerar novos conhecimentos a partir de outros, já dominados, através de interações em seus meios socioculturais. É necessário levar-se em conta que tais interações dependem de conhecimentos prévios do sujeito da educação, oriundos de sua origem cultural, social e econômica, existentes em qualquer grupamento social como, por exemplo, nas minorias étnicas (Souza, 1999, pp.142-145).

Busca-se uma Educação Matemática que desenvolva no sujeito da educação um senso crítico permitindo-lhe transformar seus conhecimentos num instrumento através do qual ele possa estabelecer uma relação ética com seus pares e com o meio ambiente.

Refletindo sobre essas colocações, somos levados a questionar alguns pontos que surgem subliminarmente. O que fazer quando os sujeitos de educação fazem parte de um grupo de minorias? Como o professor deve agir, quando sua

formação não lhe proporcionou estrutura suficiente para lidar com tais minorias? O que fazer quando a lei diz “sim”, e a prática social diz “não”.

A Educação tem como meta o ser humano (ibid.), e a revalorização desse ser humano e de seu meio sócio-histórico envolvem, necessariamente, a qualidade da educação que lhe é oferecida e as possibilidades que lhe são proporcionadas para o desenvolvimento de suas capacidades cognitivas (Moysés, 1997), independentemente, de esse homem pertencer ou não num grupo de minorias.

O presente trabalho, que intitulamos “*Uma análise vygotyskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual*”, pretende discutir as potencialidades de um desses grupos - os cegos.

Trazer esta pesquisa sobre Educação Matemática para indivíduos portadores de necessidades especiais, mais especificamente para indivíduos sem acuidade visual, corrobora nossa concepção de uma sociedade consciente da diversidade, que se estrutura para atender as necessidades de cada cidadão. É preciso que se deixe de encarar a cegueira como sendo apenas uma condição limitadora ou mesmo incapacitadora. O cego apresenta os mesmos sentimentos e aspirações daqueles considerados “*videntes*”. Possui, portanto, potencial que precisa ser estimulado e trabalhado a fim de possibilitar sua integração no mundo em que vive.

Algumas elucidações se fazem necessárias em relação ao que é tratado, neste trabalho, por *deficiência visual*, *acuidade visual* e *cegueira*. Em 1972, um grupo de estudos sobre a Prevenção da Cegueira da Organização Mundial da Saúde propôs normas para a definição da cegueira e dos valores de acuidade visual (Conde, 2004).

A visão é uma soma de várias funções visuais: acuidade visual, campo visual, visão cromática (visão para cores), estereopsia (percepção de profundidade) e outras. Dependendo da patologia, a pessoa portadora de visão subnormal pode

ter uma baixa acuidade visual ou um campo visual reduzido (IBC, 2003). No caso dos cegos não há nenhuma espécie de visão ou eles possuem unicamente percepção de luz (Conde, 2004).

O *deficiente visual* pode ser educacionalmente cego ou portador de visão subnormal (Carvalho et al, 2002). Entende-se por educacionalmente cego, o indivíduo que não é capaz de ler impressos a tinta nem mesmo com o uso de auxílios ópticos (óculos, lupas ou telescópios) ou não-ópticos (como o controle de iluminação, ampliação dos tipos ou sistema de circuito fechado de televisão). A visão subnormal é uma perda severa de visão que não pode ser corrigida por tratamento clínico ou cirúrgico, nem com óculos convencionais. Também pode ser descrita como qualquer grau de enfraquecimento visual que diminua sensivelmente o desempenho visual (ibid.).

As patologias que levam à deficiência visual incluem, principalmente, alterações das seguintes funções visuais: visão central (aquela que se usa para leitura), visão periférica (visão que permite perceber objetos ao nosso redor) e sensibilidade aos contrastes. Tais patologias podem ser congênitas (já ocorrem no nascimento) ou adquiridas (por doenças adquiridas, como diabetes, deslocamento de retina, glaucoma, catarata, degeneração senil de mácula e traumas oculares) (ibid.).

As causas mais freqüentes de cegueira e visão subnormal são: *retinopatia da prematuridade*, causada pela imaturidade da retina, em decorrência de parto prematuro ou de excesso de oxigênio na incubadora; *catarata congênita* em consequência de rubéola ou outras infecções na gestação; *glaucoma congênito* que pode ser hereditário ou causado por infecções; *atrofia óptica*; *degenerações retinianas* e *alterações visuais corticais*. Podem ainda ser consequências de doenças como diabetes, descolamento de retina ou traumatismos oculares (Gil, 2000, p.9).

A *acuidade visual* refere-se à distância que um determinado objeto pode ser visto. O método usual para avaliação da acuidade visual é realizado com o emprego da tabela optométrica de Snellen¹ (ver Anexo 1). Considera-se normal a acuidade visual de 1,0 pela tabela de Snellen. Um indivíduo com visão subnormal enxerga menos que 0,3 mesmo com o uso de recursos ópticos (Carvalho et al, 2002). A acuidade visual é função da mácula (ver Anexo 2), ponto central da visão.

A visão periférica é medida pelo *campo visual*. Os limites do campo visual normal são, aproximadamente, 60 graus superiormente, 76 graus inferiormente, 100 graus temporalmente e 60 graus nasalmente (ibid.).

O termo *cegueira* reúne portadores com vários graus de visão residual, não significando, necessariamente, total incapacidade de ver, mas sim prejuízo dessa aptidão para a realização de tarefas cotidianas. São portadores de “*cegueira parcial*”, também denominada *legal* ou *profissional*, aqueles indivíduos que apresentam acuidade visual menor que 0,1 com a melhor correção, ou campo visual abaixo de 20 graus (ibid.). Mais próximos da *cegueira total*, estão os indivíduos que são capazes somente de distinguir entre claro e escuro ou que identificam a direção de onde provém a luz. A *cegueira total*, ou *amaurose*, pressupõe visão nula, isto é, o indivíduo não possui nem mesmo a percepção luminosa (Conde, 2004).

Neste estudo centramos nossas investigações, na apropriação de conceitos matemáticos por indivíduos que se enquadram na condição de cegueira total, tanto a congênita como a adquirida. Escolhemos o campo da Geometria, mais especificamente noções ligadas à simetria e reflexão, por serem conceitos fortemente relacionados a experiências visuais. No entanto, além da visão o tato também possibilita o reconhecimento das formas, de regularidades e propriedades no espaço que as englobam, o que nos sugere não inviabilizar o desenvolvimento do pensamento geométrico por aprendizes cegos.

¹ Herman Snellen (1834 – 1908) oftalmologista holandês.

Dentro de uma perspectiva vygotskiana, partimos da hipótese que esses aprendizes têm o mesmo potencial que os videntes para apropriar-se de tais noções geométricas, desde que o acesso a esses conceitos seja viabilizado por instrumentos que substituam o olho. Assim, para esta pesquisa consideramos pertinente o desenvolvimento de sistemas mediadores que estimulem os sistemas háptico, auditivo e fonador e o estudo da influência destes sistemas mediadores em situações instrucionais envolvendo cegos.

Nosso objetivo é analisar os aspectos dos *diálogos* e das *ações* de aprendizes sem acuidade visual, ocorridos durante situações instrucionais a fim de compreender como eles apropriam significados para simetria e reflexão. Com esse objetivo em mente, formulamos nossa questão de pesquisa:

Como evoluem os significados associados à simetria e reflexão dos aprendizes sem acuidade visual durante os diálogos instrucionais e como esta evolução é influenciada pelos sistemas mediadores?

Na busca de resposta para esta questão complexa, tomamos o conjunto formado por três dimensões para nortear nossas análises: a operacionalidade entre os níveis intrafigural, interfigural e transfigural (Piaget e Garcia, 1987); a apropriação da “voz matemática” (Renshaw, 1996) e a emergência e manutenção da ZDP (Meira, 2002). Com base nestas três dimensões, elaboramos perguntas mais específicas que nos auxiliaram na resposta da questão de pesquisa:

- Em que medida as transições entre os níveis intra, inter e transfigural do pensamento geométrico emergem nos diálogos instrucionais e como elas são influenciadas pelas ferramentas materiais?
- Qual é o papel da “voz matemática”, oferecida pela pesquisadora, na apropriação de significados atribuídos à simetria e reflexão?

- É possível identificar aspectos dos diálogos instrucionais que permitem a emergência, manipulação e manutenção de espaços simbólicos nos quais significados matemáticos podem ser ampliados?

Com a finalidade de atingir os propósitos a que se destina esta pesquisa, a dividimos em sete capítulos.

No **primeiro capítulo** traçamos um breve histórico sobre as modificações na concepção de deficiência e da educação especial, oriundas de questionamentos que emergiram, principalmente da sociedade, especialmente na segunda metade do século XX. Ainda, nesse capítulo, trazemos a visão de Vygotsky para a ciência denominada Defectologia², e outros aspectos de sua teoria sociocultural relevantes para este trabalho. A releitura de alguns pesquisadores contemporâneos sobre conceitos dessa teoria, particularmente o de zona de desenvolvimento proximal também são apresentados nesse capítulo, em particular os trabalhos de Meira (2002), Meira e Lerman (2001) e de Renshaw (1996).

O **segundo capítulo** destina-se ao objeto matemático – transformações geométricas, e destacamos evidências relevantes, para este trabalho, de pesquisas precedentes realizadas com aprendizes videntes. As formas geométricas e os aprendizes cegos são discutidos a partir dos resultados de Argyropoulos (2002) que examinou como os parâmetros da percepção tátil de formas implicam num resultado cognitivo. Apresentamos, também, as fases de desenvolvimento das noções geométricas de Piaget e Garcia (1987) que compõe o conjunto de dimensões para nossas análises.

Nossas escolhas metodológicas são apresentadas no **terceiro capítulo**. A fundamentação teórica da metodologia que utilizamos para a estruturação das entrevistas e das tarefas aplicadas aos sujeitos – método da dupla estimulação (Vygotsky, 1998a, 1998b) e por entrevistas baseadas em tarefas (Goldin, 2000) -

² Termo usado, na época de Vygotsky, para denominar a ciência que estuda os processos de desenvolvimento de crianças que apresentam deficiências físicas, mentais ou múltiplas.

e os aspectos metodológicos do desenvolvimento das ferramentas materiais, das entrevistas e das tarefas.

Os três capítulos seguintes referem-se as nossas análises. No **quarto capítulo**, analisamos a fase exploratória e as tarefas do grupo 1 – estudo de figuras simétricas. O **quinto capítulo** destina-se as análises pertinentes ao conceito de reflexão e as conexões que os sujeitos de pesquisa estabelecem entre os conceitos relacionados a figuras simétricas e reflexão e sua prática cotidiana. No **sexto capítulo** procedemos às análises da fase retrospectiva, comparando os significados atribuídos aos objetos matemáticos, pelos sujeitos, antes da situação instrucional (fase exploratória) e depois das intervenções.

No **sétimo capítulo**, apresentamos considerações a partir das nossas três dimensões de análises, que nos permitem destacar aspectos relevantes sobre a evolução dos significados atribuídos, após a situação instrucional, por aprendizes cegos, e a influência dos sistemas mediadores (prática discursiva e ferramentas materiais) nessa evolução. Nesse capítulo apontamos ainda, uma breve discussão sobre a inclusão de educandos com deficiência visual no sistema regular de ensino.

O APRENDIZ CEGO NA PERSPECTIVA VYGOTSKIANA

A cegueira cria uma nova e peculiar configuração da personalidade, origina novas forças, modifica as direções normais das funções, reestrutura de forma criativa e organicamente a psique do homem. Por conseguinte, a cegueira não é somente um defeito, uma deficiência, uma debilidade, senão também, em certo sentido, uma fonte de revelação de atitudes, uma vantagem, uma força.

(Vygotsky, 1997, p. 99) Tradução nossa.

1.1. BREVE HISTÓRICO

Durante a primeira metade do século XX as pessoas eram consideradas deficientes por causas fundamentalmente orgânicas. Considerava-se que o distúrbio era um problema inerente da criança, com poucas possibilidades de intervenção (Marchesi e Martín, 1995, p.7).

Entre os anos 40 e 50 inicia-se o questionamento sobre a concepção da deficiência. Questiona-se que a deficiência poderia ser causada por falta de uma estimulação adequada ou por processos de aprendizagem incorretos. Passa-se a acreditar que as influências sociais e culturais podem determinar um funcionamento intelectual mais adequado, o que trouxe a perspectiva de possíveis intervenções (ibid, p. 9).

Nos anos seguintes, especialmente na década de 70, surge um movimento, apoiado em considerações vindas da Medicina, Psicologia, Sociologia e de outros campos, que trouxe profundas modificações na concepção de deficiência e da

educação especial. A partir daí começa a ser utilizado o conceito de “necessidades educacionais especiais”³.

Em 1978, no Brasil, uma ementa a Constituição Federal “assegura a pessoa deficiente à melhoria de sua condição social e econômica especialmente mediante educação especial gratuita”.

A nova Constituição Federal de 1988 a atribui ao Poder Público o “atendimento educacional especializado aos *portadores de deficiência* [grifo nosso], preferencialmente na rede regular de ensino”. Em 1996, a chamada Diretrizes e Bases da Educação Nacional, estabelece uma correção social e uma sintonia internacional ao promover a substituição do termo “portadores de deficiência” para “educandos com necessidades educacionais especiais” (Martins, 2002).

Segundo a Resolução CNE/CEB Nº 2, de 11 de setembro de 2001, a Educação Especial é um:

... processo educacional definido por uma proposta pedagógica que assegure recursos e serviços educacionais especiais, organizados institucionalmente para apoiar, complementar, suplementar e, em alguns casos, substituir os serviços educacionais comuns, de modo a garantir a educação escolar e promover o desenvolvimento das potencialidades dos educandos que apresentam necessidade especial de educação, em todas etapas da educação básica.

Na década de 90 a Conferência Mundial sobre Educação para Todos, prevê que as necessidades educacionais básicas sejam oferecidas a todos pela universalização do acesso, promoção da igualdade, ampliação dos meios e conteúdos da Educação Básica e melhoria do ambiente de estudo. Assim, o movimento “Educação para todos” prevê uma escola que integre os educandos

³ O conceito “necessidades especiais” começou a ser utilizado nos anos 60, mas não foi capaz de modificar a concepção dominante. O informe Warnock, solicitado pelo Secretário de Educação do Reino Unido a uma comissão de especialistas, (...) publicado em 1978, teve o mérito de convulsionar os esquemas vigentes e popularizar uma concepção diferente da educação especial (Marchesi e Martín, 1995, p.11).

com necessidades especiais no ambiente escolar, respeitando a diversidade dos educandos, de modo a contemplar as suas necessidades e potencialidades.

Em junho de 1994 dirigentes de oitenta e dois países, entre eles o Brasil, assinam na Espanha a Declaração de Salamanca, cujos princípios norteadores são:

- o reconhecimento das diferenças;
- o atendimento às necessidades de cada um;
- a promoção de aprendizagem;
- o reconhecimento da importância da "escola para todos";
- a formação de professores.

Em 1998, a Secretaria de Educação Fundamental e a secretaria de educação especial em ação conjunta, produziram e publicaram um documento intitulado "Parâmetros curriculares nacionais: Adaptações curriculares. Estratégias para a Educação de alunos com necessidades educacionais especiais" que passou a compor o conjunto dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, ficando assim em sintonia com a escola integradora proposta na Declaração de Salamanca. Segundo esse documento todos os educandos devem ser inseridos no sistema educacional, "sem distinção de condições lingüísticas, sensoriais, cognitivas, físicas, emocionais, étnicas, socioeconômicas ou outras" (PCN: Adaptações curriculares, 1998, p. 19).

A legislação mais recente sobre o assunto é a Convenção de Guatemala. O documento, promulgado no Brasil por decreto de 2001, reafirma que as pessoas com deficiência têm os mesmos direitos e liberdades que as demais (Revista Nova Escola, 2003, p. 46).

A atual Política Nacional de Educação Especial 2 define o aluno com necessidades educacionais especiais aquele que "por apresentar necessidades próprias e diferentes dos demais alunos no domínio das aprendizagens curriculares correspondentes à sua própria idade, requer recursos pedagógicos e

metodologias educacionais específicas” (PCN: Adaptações curriculares, 1998, p.24).

No Brasil, de acordo com artigo publicado na Revista Nova Escola (2003, p. 44) e segundo o INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), há cerca de 110 mil alunos com algum tipo de deficiência estudando em escolas regulares. O censo 2002 mostra que a inclusão vem ganhando espaço – desde 1998, aumentou 135% - mas ainda é minoria. Cerca de 340 mil crianças com deficiência estão segregadas.

Segundo matéria publicada em 16 de setembro de 2001 no jornal O Estado de São Paulo, a rede estadual paulista atende 19.215 alunos com necessidades especiais em salas regulares, de um total de 6,1 milhões de estudantes. Das 5.580 escolas, apenas 695 praticam a inclusão. Mais 15.100 alunos são assistidos por instituições especializadas, em consequência do seu alto grau de deficiência. Essa assistência é feita através de convênios firmados entre essas instituições e o Estado, atualmente são 192 convênios firmados entre o Estado e essas instituições. De acordo com a Lei de Diretrizes para Educação Especial, as escolas que possuem deficientes visuais e auditivos devem ter as chamadas salas de recursos, equipadas para facilitar a aprendizagem, em São Paulo existem 1.300 dessas salas.

A Secretaria de Educação Especial do Ministério da Educação e do Desporto classifica os alunos que necessitam de educação especial de acordo com suas características. Tal classificação consta na Política Nacional de Educação Especial 2 como se segue:

- portadores de deficiência mental, visual, auditiva, física e múltipla;
- portadores de condutas típicas (problemas de conduta);
- portadores de superdotação (PCN: Adaptações curriculares, 1998, p.24).

Dentre as deficiências apontadas, nossos estudos centram-se na deficiência visual.

Segundo a Organização Mundial de Saúde, nos países em desenvolvimento de 1 a 1,5 por cento da população é portador de deficiência visual, o que no Brasil representa cerca de 1,6 milhão de pessoas com algum tipo de deficiência visual, a maioria com visão subnormal⁴. Estima-se que no Brasil a cada 3 mil pessoas, uma é cega, e que a cada quinhentas crianças uma tem visão subnormal (Gil, 2000, p.19).

De acordo com os dados do Censo Escolar, em 1998 havia 337.326 alunos com necessidades especiais matriculados em escolas de todo país. Destes, 15.473 (4,6 por cento) apresentavam deficiência visual (ibid, p.20). O que, para nós, justifica a importância desse trabalho.

A cegueira é um tipo de deficiência sensorial e, portanto, sua característica mais central é a carência ou comprometimento de um dos canais sensoriais de aquisição da informação, neste caso o visual. Isto, obviamente, tem conseqüências sobre o desenvolvimento e a aprendizagem, tornando-se necessário elaborar sistemas de ensino que transmitam, por vias alternativas, a informação que não pode ser obtida através dos olhos (Ochaita e Rosa, 1995, p.183).

É sob essa perspectiva que as adaptações curriculares dos PCN para a educação dos alunos que não tem acuidade visual dentro dos padrões normais foram elaboradas. Tais adaptações, nos procedimentos didáticos e nas atividades de ensino-aprendizagem referem-se ao *como* ensinar os componentes curriculares, e entre outros, destaca a importância de se alterar o nível de abstração de uma atividade oferecendo recursos de apoio, sejam auditivos, gráficos ou materiais manipulativos. Cabe ao professor explicitar os passos que devem ser seguidos para orientar a solução da tarefa e ainda selecionar recursos materiais, e se necessário adaptá-los, mesmo que tais materiais não tenham sido previstos para os demais alunos.

⁴ Considera-se visão subnormal ou baixa visão a alteração da capacidade funcional que diminui significativamente a acuidade visual (Gil, 2000, p.6).

Pode-se ler nos PCN – Adaptações curriculares de 1998, que uma das estratégias adaptativas propostas é “mudar a temporalidade dos objetivos, conteúdos e critérios de avaliação, isto é, considerar que o aluno com necessidades especiais pode alcançar os objetivos comuns ao grupo, mesmo que possa requerer um período mais longo de tempo” (p. 20).

Segundo Rocha (2001), há atualmente uma sintonia entre o governo, meios de comunicação e todas as esferas da sociedade sobre o objetivo principal da educação: a formação do cidadão.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, os educandos com necessidades especiais devem ser capazes de:

...compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito (PCN: Adaptações curriculares, 1998).

Tal discurso é também apoiado pela LDB (Lei de Diretrizes e Bases), onde a Educação Especial é apontada como uma modalidade de educação escolar, voltada para a formação do indivíduo, a fim de que esse possa exercer sua cidadania.

Como “formar cidadãos”, se não nos preocuparmos em oferecer a todos, independentemente de suas necessidades serem especiais ou não, o direito de construir conhecimentos?

Os PCN destacam a importância que cabe aos educadores de “focalizar as capacidades, o potencial, a zona de desenvolvimento proximal (nos termos de Vygotsky) e não se centrar nas deficiências e limitações do aluno” (PCN: Adaptações curriculares, 1998, p.38). O que sugere ser pertinente explorar a visão de Vygotsky sobre os educandos cegos.

1.2. A VISÃO DE VYGOTSKY

A teoria formulada por Vygotsky propõe que a criança com necessidades especiais seja estudada sob uma perspectiva qualitativa e não como uma variação quantitativa da criança “normal”. Vygotsky declarou que a deficiência gera um processo de compensação, estimulando o desenvolvimento do indivíduo, cabendo a Defectologia estudar os processos compensatórios, que permitem ao deficiente transpor suas deficiências, através de análises de suas reações físicas e psicológicas (Vygotsky, 1997, Introdução).

Seriam os não videntes, menos capazes de aprender do que os videntes⁵?

A singularidade da teoria proposta por Vygotsky é que o desenvolvimento do deficiente estaria nos efeitos positivos da deficiência, ou melhor, nos meios encontrados para a superação da deficiência. Desse modo o deficiente não é inferior aos seus pares “normais”, mas sim apresenta um desenvolvimento qualitativamente diferente. Sendo assim, para Vygotsky; os sujeitos cegos têm potencial para um desenvolvimento mental normal, o que não significa que o seu desenvolvimento cognitivo deva seguir necessariamente o mesmo caminho que o dos videntes.

A biografia de um cego não é similar a de um vidente; é impossível admitir que a cegueira não provoque uma singularidade profunda de toda linha do desenvolvimento (Vygotsky, 1997, p.50) (Tradução nossa).

As teorias contemporâneas sobre o desenvolvimento psicológico de aprendizes com necessidades especiais - que trazem uma visão vygotkiana - destacam que é através da ação sobre o ambiente e da comunicação social que esses educandos podem dominar as habilidades mentais que os permitem o conhecimento da realidade.

⁵ O termo “vidente” refere-se aos indivíduos com acuidade visual dentro dos padrões normais.

1.2.1. DEFECTOLOGIA

Em 1924 Vygotsky publica seu primeiro trabalho na área de Defectologia. Nesse período ele trabalhava no Instituto de Psicologia Experimental de Moscou, dirigido por Kornilov, juntamente com seu colega Luria então secretário científico do instituto (Vergnaud, 2000, p.8) onde Vygotsky ocupava-se com a educação social de crianças surdas e cegas.

Em 1925 – 1926 Vygotsky organiza um laboratório de psicologia que em 1929 deu origem ao Instituto de Defectologia Experimental do qual foi diretor científico até sua morte prematura em 1934 com 38 anos de idade (Vygotsky, 1997, p.366 Epílogo por Bein, Vlásova e Shif).

Uma característica comum dos primeiros trabalhos publicados por Vygotsky em 1924 e 1925, é o destaque dado à importância da educação social de crianças deficientes e no potencial destas crianças para um desenvolvimento normal. Vygotsky afirmava que as deficiências como cegueira, surdo-mudez ou retardamento mental congênito afetavam, antes de tudo, as relações sociais das crianças e não suas interações diretas com o ambiente físico. A partir daí, conclui que a educação social baseada na compensação social dos problemas físicos era a única maneira de proporcionar uma vida satisfatória às crianças defeituosas⁶.

Ele defendia uma escola que integrasse essas crianças na sociedade, para que elas tivessem a oportunidade de conviver com pessoas normais, pois uma criança “defeituosa” é noventa e cinco por cento saudável e tem potencial para um desenvolvimento normal (ibid., p.75). O que passou a ser preocupação mundial somente em 1994 com a Declaração de Salamanca.

Vygotsky provocou uma mudança profunda nos estudos defectológicos, e elevou a Defectologia ao nível de uma ciência dialética demonstrando que a criança deficiente é antes de tudo uma criança que se desenvolve como qualquer outra,

⁶ Termo usado por Vygotsky.

porém de um modo particular (Vygotsky, 1997, p.379). Ele fez algumas declarações importantes para que possamos compreender o desenvolvimento de seu trabalho com crianças surdas e cegas.

Várias vezes ele argumentou que aprender a escrita Braille não difere, em princípio, da aprendizagem da escrita normal, uma vez que a aprendizagem de ambos os tipos de escrita baseia-se na conjugação múltipla de dois estímulos. Vista do ponto de vista fisiológico, em ambos os casos a aprendizagem da escrita estava baseada na formação de reflexos condicionados, sendo a única diferença que órgãos receptivos diferentes eram condicionados a estímulos ambientais diferentes (Valsiner e Veer, 1996, p.76).

Os escritos de Vygotsky, nesses anos, eram carregados de otimismo. Ele acreditava que a cegueira e a surdez não eram nada mais do que a falta de uma das possíveis vias para a formação de reflexos condicionados com o ambiente. A solução consistia em substituir uma via tradicional por outra, o que indicava não ser necessária nenhuma teoria especial para o tratamento de crianças surdas e cegas. Nesse período, Vygotsky pensava muito em termos de reflexologia. Ele acreditava que aprender a ler não era mais do que o estabelecimento de reflexos condicionados.

Vygotsky (1997, p.83) apresentou a idéia de que o olho é um instrumento servindo a determinada atividade, que pode ser substituído por outro instrumento. Ele afirmou que para o cego, outra pessoa poderia atuar no papel de instrumento e que a base vital de qualquer pedagogia especial era transcender os limites da pedagogia individualista.

Para Vygotsky, a tarefa das pessoas que trabalhavam com crianças cegas consistia em ligar os sistemas e signos simbólicos a outros órgãos receptivos como a pele e o ouvido o que, a princípio, não mudaria nada, pois o signo simbólico (letras ou escrita Braille) não altera a idéia da leitura. Para ele o “importante é o significado, não o signo” (Valsiner e Veer, 1996, p.77).

Ler com a mão, como faz uma criança cega, e ler com os olhos são processos psicológicos diferentes, porém cumprem a mesma função cultural na conduta da criança e tem, basicamente, um mecanismo fisiológico similar (Vygotsky, 1997, p.28) (Tradução nossa).

Durante o período de 1924 a 1926, várias idéias que posteriormente teriam importância primária nos trabalhos de Vygotsky - que nos permitem compreender o desenvolvimento do seu pensamento - foram apresentadas e defendidas. A distinção que implicitamente ele faz entre signo e significado e a idéia do olho e a fala serem “instrumentos” para ler e pensar respectivamente. O que segundo Valsiner e Veer (1996) indica a primeira formulação do conceito de mediação.

Em 1927, sob a influência de Adler⁷, Vygotsky começa a destacar a possibilidade de compensação para os defeitos físicos das crianças.

Adler pensa dialeticamente: o desenvolvimento da personalidade é impulsionado pela contradição; o defeito, a não adaptação, a insuficiência, não é somente uma deficiência, uma magnitude negativa, é também um estímulo para a supercompensação (Vygotsky, 1997, p.44) (Tradução nossa).

Para Adler não era possível entender de fato o comportamento de uma pessoa sem conhecer sua função e seu objetivo. Todos os organismos lutam para alcançar determinada meta, e a luta para alcançar a perfeição é inicialmente causada por um sentimento de inferioridade. Essas idéias vinham de encontro com as de Vygotsky, no sentido de que a inferioridade (“defeitos”) poderia ser superada e que a luta pela compensação poderia resultar até mesmo em supercompensação.

...todo defeito cria estímulos para elaborar uma compensação. Por isso o estudo dinâmico da criança deficiente não pode limitar-se a determinar o nível e gravidade da insuficiência, mas sim incluir obrigatoriamente a consideração dos processos

⁷Alfred Adler (1870-1937) Psiquiatra e psicólogo austríaco interessado na luta das “crianças defeituosas” para superar suas deficiências e conquistar uma posição na sociedade.

compensatórios, e escolher substitutos reestruturados e niveladores para o desenvolvimento e a conduta da criança (Vygotsky, 1997, p.14) (Tradução nossa).

A luta por uma posição social, a que Adler deu ênfase, é compatível com a idéia de que, para as crianças deficientes, era de vital importância alcançar uma posição na “coletividade”. Vygotsky ficou entusiasmado com essas idéias, particularmente a de que tendências compensatórias surgem automática e naturalmente na criança defeituosa. O defeito era visto como um estímulo primário para o desenvolvimento da personalidade da criança, cabendo ao processo educacional aproveitar essas tendências naturais.

Vygotsky, baseando-se nessas idéias e em seus pensamentos ainda parcialmente reflexológicos postula a “completa reeducabilidade da natureza humana”, ao mesmo tempo, afirma que esse é um dos lados da questão e começa a indicar a natureza única de cada criança defeituosa, o que faz necessário um sistema especial de educação (Valsiner e Veer, 1996).

Em 1929, Vygotsky acrescenta a sua premissa de que o olho é um instrumento que pode ser substituído por outro a argumentação de que essa substituição causa uma profunda reestruturação de todas as forças do organismo e da personalidade do deficiente visual, já que para alcançar as mesmas metas dos que podem ver ele, geralmente, precisa utilizar meios e instrumentos que diferem daqueles utilizados pelos videntes (ibid., pp.78-83).

O importante não é que o cego veja as letras, e sim que saiba ler. O importante é que o cego leia (...). O importante é que o cego saiba escrever (...). Se aprende escrever marcando o papel com pontos estamos ante o mesmo princípio e ante um fenômeno praticamente idêntico [ao processo utilizado pelos videntes] (Vygotsky, 1997, p. 62) (Tradução nossa).

Só em 1931, Vygotsky amplia a proposta de Adler, afirmando que as oportunidades que as crianças “defeituosas” encontram no seu meio social são mais importantes para a possibilidade de compensação do que seus sentimentos

subjetivos de inferioridade. Vygotsky adota então uma abordagem histórico-cultural, onde os problemas das crianças deficientes têm origem na falta de adequação entre a sua condição psicofisiológica e os meios culturais disponíveis.

Vygotsky afirmou que a criança deficiente não tem uma relação harmoniosa com a estrutura das formas culturais existentes, que foram desenvolvidas a partir das condições de um tipo biológico estável. A deficiência exige uma reorganização da mente da criança que compromete o processo de assimilação da cultura humana. O uso de meios especialmente projetados para as crianças portadoras de deficiências poderia minimizar esse comprometimento. Para Vygotsky os defeitos deveriam ser superados por meio da palavra (Valsiner e Veer. pp.87-88; Vygotsky, 1997, p. 32).

O mais característico da personalidade do cego (...) é a possibilidade de assimilar a experiência social dos videntes com ajuda da linguagem (p.50). A utilização da palavra é a ferramenta para superar as conseqüências da cegueira (Vygotsky, 1997, p.109) (Tradução nossa).

Com essa citação podemos reconhecer que durante seus estudos sobre Defectologia, o papel das ferramentas - elemento mediador da relação do deficiente com seu meio social - na formação do indivíduo foi recebendo destaque. Na próxima seção consideramos as ferramentas que potencializam a interação social dos deficientes e trazemos o conceito de mediação.

1.2.2. MEDIAÇÃO

O conceito de mediação, segundo Vygotsky, é a utilização de um elemento intermediário numa relação. Durante sua história, o homem armazena mais e mais dados, gerando assim mais elementos mediadores.

Para Vygotsky, a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas uma relação mediada e complexa, que se realiza através de dois tipos de mediadores: os instrumentos⁸ e os signos⁹. O uso de mediadores aumenta a capacidade de atenção e de memória e, sobretudo, permite maior controle voluntário do sujeito sobre sua atividade (Valsiner e Veer, 1996, pp.252 – 260).

Vygotsky procurou fazer uma análise da função mediadora presente nos instrumentos elaborados para as ações da atividade humana. Assim, os homens não apenas criam seus instrumentos para a realização de tarefas específicas, mas também têm a capacidade de conservá-los para próximas utilizações, são capazes de preservar e transmitir suas funções para outras pessoas e de aperfeiçoar antigos instrumentos ou produzir novos (Cole e Wertsch, 1996, p.252).

Durante o desenvolvimento do indivíduo, ocorrem duas mudanças qualitativas fundamentais no uso dos signos. A utilização de marcas externas transforma-se em processos internos de mediação. Esse mecanismo foi nomeado por Vygotsky processo de internalização, o qual desenvolve sistemas simbólicos que organizam os signos em estruturas complexas e articuladas. O indivíduo deixa de utilizar marcas externas e passa a usar signos internos, ou seja, representações mentais que substituem os objetos do mundo real. Tais representações mentais da realidade exterior são na verdade, os principais mediadores a serem considerados na relação do homem com o mundo, o que liberta o homem da necessidade de interação concreta com os objetos de seu pensamento (Oliveira, 2002, pp. 34–35).

⁸ O instrumento é um objeto social e mediador da relação entre o indivíduo e o mundo (Oliveira, 2002, p. 29).

⁹ Os signos, também chamados “instrumentos psicológicos”, são elementos orientados para o próprio indivíduo e auxiliam nos processos psicológicos, ou seja, nas tarefas que exigem memória ou atenção. Nesse sentido, os signos são elementos de representação da realidade (Oliveira, 2002, p. 30).

Na teoria de Vygotsky, o processo de internalização caracteriza a origem das funções psicológicas superiores¹⁰. Para ele, o processo social dá origem ao processo individual e ambos são essencialmente mediados por instrumentos. Vygotsky explica a primeira dessas colocações em sua “lei genética geral do desenvolvimento cultural”, segundo a qual o processo interpessoa/intermental é precursor e condição necessária para a emergência do processo individual/intramental (funções psicológicas superiores) (Cole e Wertsch, 1996, p.254).

A falta de acuidade visual é uma deficiência do tipo sensorial, assim sua característica principal é a carência ou o comprometimento de um dos canais sensoriais de aquisição da informação - o visual. Essa carência pode comprometer o processo de internalização, sendo assim fator determinante do desenvolvimento cognitivo dos deficientes visuais que, como explicitado anteriormente, segue por caminhos que não coincidem necessariamente com o dos videntes. Isso implica que as situações de aprendizagem, para esses indivíduos, devem ser mediadas de forma distinta.

Geralmente a distinção dos objetos é feita através de suas propriedades visuais, inacessíveis aos cegos, o que não quer dizer que esses não sejam capazes de conhecer ou representar o seu meio social, mas sim que necessitam potencializar a utilização de outros sistemas sensoriais (Ochaita e Rosa, 1985, p.184).

As informações chegam aos deficientes visuais mediadas por dois canais principais: a linguagem – pois ouvem e falam – e a exploração tátil (Gil, 2000, p.24). Assim, para a aquisição da informação, três sistemas sensoriais mostram-se especialmente importantes para esses indivíduos: o sistema háptico, o sistema fonador e o sistema auditivo.

¹⁰ Capacidade própria do ser humano de lembrar, imaginar, planejar. Diferencia-se de mecanismos mais elementares como ações reflexas, reações automatizadas e associações simples entre eventos (Oliveira, 2002, p. 26).

Nesta pesquisa centramo-nos nos sistemas háptico e fonador, pois em relação ao sistema auditivo, Ochaita e Rosa (1995) afirmam ter comprovado experimentalmente que o deficiente visual não apresenta diferenças, em relação aos videntes, no que diz respeito a sua capacidade de codificação semântica da informação recebida por esse sistema. Isso nos faz crer, que no caso de não ter acesso a algum outro tipo de informação, o deficiente visual pode compreender um fenômeno a partir de informações verbais recebidas de outros indivíduos.

1.2.2.1. SISTEMA HÁPTICO

É através do sistema háptico (ou tato ativo) que o indivíduo sem acuidade visual é capaz de captar e processar informações dos objetos que constituem o ambiente. Particularidades do desenvolvimento cognitivo desses indivíduos podem ser explicadas pelas características da captação e processamento da informação pelo tato (Ochaita e Rosa, 1995, pp. 184-185).

Segundo Gibson¹¹ (1966) citado por Ochaita e Rosa (1995, p.185) é preciso estabelecer diferenças entre o tato passivo e o sistema háptico, ambos constituem o sistema tátil-cinestésico. No primeiro, as informações táteis são recebidas de forma não intencional, como calor e textura. Já no segundo as informações são recebidas de forma intencional, ou seja, o indivíduo ao explorar com as mãos um objeto que lhe é estranho move-se de forma intencional levantando dados do objeto para posteriormente constituir uma imagem.

O tato permite analisar um objeto de forma parcelada e gradual, ao contrário da visão que é sintética e global. Assim, as informações parciais fornecidas pelo tato têm um caráter seqüencial que devem ser integradas, exigindo uma carga maior de memória (Gil, 2000, p.25). Ao explorar um objeto, as mãos do não vidente movem-se de forma intencional captando particularidades da forma a fim de obter uma imagem deste objeto (Ochaita e Rosa, 1995 p.185). Podemos perceber nessa declaração a idéia de Vygotsky sobre a substituição do olho por outro

¹¹ GIBSON, J. **The senses considered as perceptual systems**. Boston: Houghton Hifflin, 1966.

instrumento, nesse caso, as mãos. Não uma substituição direta, pois o processamento da informação se dá de forma qualitativamente diferente, mas que permite analisar o objeto que está sendo explorado.

Uma área da Matemática na qual o campo visual tem um papel particularmente importante é a Geometria. No entanto, isso não parece inviabilizar que os cegos dediquem-se ao estudo dessa área, pois na literatura encontramos vários matemáticos cegos que se destacaram nessa área.

Desses matemáticos, ressaltamos nomes como: Leonhard Euler (1707-1783) que perdeu a visão com cinquenta e nove anos; Lawrence W. Baggett da Universidade do Colorado; Nicholas Saunderson (1682-1739); Lev Semenovich Pontryagin (1908-1988) que perdeu a visão com catorze anos; A. G. Vitushkin do Instituto Steklov de Moscou que trabalha com análise complexa; Louis Antoine (1888-1971) que perdeu a visão na Primeira Guerra Mundial aos vinte e nove anos; Emmanuel Giroux geômetra que perdeu a visão com onze anos; Norberto Salinas da Universidade de Kansas que ficou cego aos dez anos; Abraham Nemeth da Universidade de Detroit; Zachary J. Battles portador de cegueira congênita da Universidade de Oxford; Bernard Morin geômetra que vive na França, perdeu a visão com seis anos de idade (Jackson, 2002).

Esses matemáticos mostram que a cegueira não representa, necessariamente, um impedimento ao no estudo da Geometria, mas como podemos estruturar situações didáticas que facilitem o acesso de aprendizes cegos a Geometria?

O tato é um dos principais canais de exploração para os deficientes visuais. Assim para favorecer a efetiva participação e integração dos deficientes visuais são necessárias: a seleção, a adaptação e a utilização de recursos materiais tanto para desenvolver as habilidades perceptivas táteis como para construção de estratégias de conhecimento a fim de desenvolver o processo cognitivo desses sujeitos (PCN: Adaptações curriculares, 1998). O trabalho com aprendizes sem acuidade visual dentro dos padrões normais exige ferramentas que possam ser

adaptadas às necessidades específicas do aprendiz a fim de viabilizar o processo ensino-aprendizagem.

A inclusão de ferramentas materiais no processo ensino-aprendizagem para os deficientes visuais deve considerar que essas ferramentas devem torná-los capazes de construir conhecimentos (Dick e Becker, 2002). Segundo Vygotsky¹², citado por Cole e Wertsch (1996, p.255)

A inclusão de uma ferramenta no processo de comportamento: (a) introduz várias novas funções conectadas ao uso e ao controle da ferramenta; (b) aboli e tornam desnecessários vários processos naturais, cujo trabalho é efetuado pela ferramenta; e altera o curso e os recursos individuais (a intensidade, duração, seqüência, etc.) de todo processo mental que compõe o ato instrumental, substituindo algumas funções por outras (isto é, ela recria e reorganiza toda estrutura do comportamento como uma ferramenta técnica recria toda a estrutura de operações de trabalho) (Tradução nossa).

Por esse ponto de vista, as ferramentas materiais não servem simplesmente para facilitar os processos mentais o que poderia ocorrer de outra forma. Fundamentalmente elas formam e transformam esses processos (ibid.).

1.2.2.2. SISTEMA FONADOR

O estudo realizado por Vygotsky sobre o desenvolvimento da linguagem, revela a sua importância no desenvolvimento cognitivo. Como já citado, nos seus trabalhos sobre Defectologia, Vygotsky destaca que os defeitos devem ser superados por meio da palavra.

Especificamente em relação à linguagem e ao pensamento, os estudos realizados por Vygotsky e seus colaboradores, sobre as relações entre pensamento e

¹² VYGOTSKY, L. S. **The instrumental method in psychology**. In: WERTSCH, J. V. (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk, NY: M.E. Sharpe, pp. 134-143.

linguagem, trouxeram importantes contribuições no que diz respeito ao conhecimento desses conceitos (Valsiner e Veer, 1996).

A questão foi enfatizada de forma especial. Foi abordada sob a ótica social, uma vez que utilizou um conceito mais amplo abrangendo, para a linguagem, além da função comunicativa a função de organização e desenvolvimento dos processos de pensamento. De acordo com esse pressuposto, a linguagem representa um marco no desenvolvimento dos indivíduos, pois além de possibilitar o contato social com outras pessoas, permite planejar a solução de problemas, antecipando seus resultados.

Em muitas ocasiões, é através da linguagem que os deficientes visuais conhecem e aprendem manipular os objetos, sejam esses reais ou de estudo. Para Vygotsky, a fala é um instrumento de ação recíproca social, e, ao mesmo tempo, o instrumento de ação recíproca íntima consigo mesmo (Valsiner e Veer, 1996). Segundo Vygotsky, a linguagem é um sistema semiótico de representação, principalmente a linguagem egocêntrica e a interna. A linguagem egocêntrica é uma fase de transição entre a linguagem de comunicação e a linguagem interna, tendo essa, portanto, suas origens na fala social interativa. É a linguagem interna que torna possível o controle do processo metacognitivo¹³ (Vygotsky, 1998b; Vergnaud, 2000; Martín e Marchesi, 1995).

“[A] aprendizagem é um processo ativo, no qual o aluno constrói seus conhecimentos e no qual o professor deve ser capaz de facilitar a aprendizagem cada vez mais autônoma do aluno por intermédio da construção conjunta de significados. A linguagem ocuparia uma função básica no processo de regulação da atividade cognitiva” (Martín e Marchesi, 1995, p.28).

Um dos principais fatores que envolvem uma situação de aprendizagem é a intervenção do outro, capaz de estabelecer situações interativas com os sujeitos

¹³ Refere-se à regulação e controle das atividades que o indivíduo realiza durante sua aprendizagem, incluindo o planejamento das atividades cognitivas, o controle do processo intelectual e a avaliação dos resultados (Martín e Marchesi, 1995, p.27).

envolvidos numa situação de aprendizagem com a finalidade de através de sistemas de mediação, favorecer o planejamento e a regulação das atividades de aprendizagem.

A transmissão racional e intencional de experiência e pensamento a outros requer um sistema mediador, cujo protótipo é a fala humana, oriunda da necessidade de intercâmbio (Vygotsky, 1998b, p. 7).

É importante destacar as elucidações de Vygotsky sobre o processo de conquista da utilização da linguagem como instrumento do pensamento, evidenciando a maneira como o sujeito internaliza as formas de comportamento fornecidas por seu grupo social, a partir da interação com os indivíduos. Como foi possível verificar, por essa perspectiva, o termo linguagem é bastante amplo, pois não se restringe somente a uma forma de comunicação, mas é tudo que envolve significação - que tem o valor semiótico – por ser um instrumento criado e produzido no contexto social e na interação entre os indivíduos, servindo como elo entre o cognitivo e o desenvolvimento social (Vygotsky, 1987, pp. 48-49).

Assim poderíamos definir o ambiente onde acontece um processo de instrução como o espaço onde se desenvolve o processo de ensino-aprendizagem de um determinado grupo de aprendizes, sendo esse processo, basicamente, uma relação de comunicação entre o instrutor e os aprendizes e destes últimos entre si – diálogos.

Podemos considerar, também, que as questões apresentadas contribuem significativamente para a área da educação, na medida em que trazem importantes reflexões sobre o processo de formação das funções psicológicas superiores e, conseqüentemente, promove questionamentos, indica caminhos e estimula a criação de alternativas no campo didático-pedagógico. De acordo com o exposto, o domínio da linguagem promove mudanças radicais nos sujeitos, principalmente no seu modo de interagir com o meio, possibilitando novas formas de comunicação com os indivíduos e de organização de seu modo de agir e pensar. Uma prática instrucional baseada nesses princípios desempenhará bem o

seu papel se considerar o indivíduo ativo e interativo no seu processo de construção de conhecimento.

Compreendendo a aquisição de conceitos na aprendizagem de acordo com a perspectiva de Vygotsky percebe-se a real importância do meio social e do papel da interação com os pares no desenvolvimento do pensamento e da linguagem.

1.2.3. FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS

De acordo Valsiner e Veer (1996), pode-se distinguir várias fases no trabalho de Vygotsky sobre os processos de formação e desenvolvimento de conceitos. Dentre elas, destacamos uma primeira fase relacionada às replicações e desdobramentos de trabalhos feitos por Ach e seus seguidores e uma segunda fase ligada à replicação e desdobramento do trabalho de Piaget.

Para Vygotsky, o método de Ach¹⁴ apresentava méritos e falhas. Seu mérito consistia em defender que a formação de conceitos não era um processo mecânico e passivo, mas um processo criativo. Considerando assim o desenvolvimento dos conceitos como uma operação complexa, desencadeada pela busca de solução para algum problema. Sua falha era não considerar o papel funcional da palavra na formação dos conceitos.

Na segunda fase de seus estudos sobre a formação de conceitos (replicação e desdobramento do trabalho de Piaget) Vygotsky buscava investigar o desenvolvimento dos conceitos aprendidos pelas crianças na escola - conceitos científicos (não espontâneos), e a relação desses com o desenvolvimento dos conceitos apreendidos pelas crianças por meio de suas experiências - os conceitos cotidianos (ou espontâneos).

¹⁴ Narciss Ach (1878-1958) filósofo e psicólogo alemão.

Segundo Valsiner e Veer (1996) o interesse de Vygotsky pelo estudo das relações entre os conceitos científicos e os conceitos cotidianos eram as divergências que existiam entre suas idéias e as idéias de Piaget sobre esse tema. Enquanto Vygotsky (1998b, p 109) se perguntava como ocorria o processo de desenvolvimento dos conceitos científicos e dos conceitos cotidianos, e quais as possíveis relações entre ambos, dando destaque à importância de compreender a formação dos conceitos científicos, Piaget negava a relevância de tais questões.

Para Vygotsky, os conceitos cotidianos, carregados de experiência pessoal, estão diretamente ligados aos objetos concretos do mundo: generalizam coisas, percorrendo um caminho ascendente que vai do concreto ao abstrato. Os conceitos científicos envolvem uma atitude mediada em relação aos objetos: são mediados por outros conceitos, são generalizações de generalizações, e ocupam um lugar dentro de um sistema de conceitos. Percorrem um caminho descendente que vai do abstrato para o concreto, fazendo com que a criança num primeiro momento reconheça melhor o próprio conceito do que o objeto que ele representa (Vygotsky, 1998b, 1987).

Pode-se remontar a origem de um conceito espontâneo a um confronto com uma situação concreta, ao passo que um conceito científico envolve, desde o início, uma atitude mediada em relação a seu objeto. Embora os conceitos científicos e espontâneos se desenvolvam em direções opostas, os dois processos estão intimamente relacionados. É preciso que o desenvolvimento de um conceito espontâneo tenha alcançado um certo nível para que a criança possa absorver um conceito científico correlato (Vygotsky, 1987, p. 135).

Portanto, é possível considerar que - conceito cotidiano e conceito científico - seguem caminhos diferentes de desenvolvimento, mas se relacionam e se influenciam constantemente ao longo desses trajetos, uma vez que fazem parte de um único processo: o desenvolvimento da formação de conceitos (Rego, 1995, p.78).

O desenvolvimento dos conceitos científicos começa com o domínio da consciência¹⁵ e da volição. O seu crescimento é descendente em direção ao concreto e a experiência pessoal. Por outro lado, o desenvolvimento dos conceitos cotidianos começa com o domínio do concreto e do empírico. A ligação entre essas duas linhas de desenvolvimento, uma descendente e outra ascendente, reflete a verdadeira natureza desses conceitos (cotidianos e científicos). O desenvolvimento dos conceitos científicos pressupõe certo nível de desenvolvimento dos conceitos cotidianos. Os conceitos científicos reestruturam e elevam a um nível mais alto os conceitos cotidianos, fazendo emergir a ZDP (Vygotsky, 1987, p. 220).

1.2.4. ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL

O conceito de zona de desenvolvimento proximal (ZDP) descrito por Vygotsky possibilita a compreensão de uma série de pressupostos pertinentes à gênese social do ser humano, sobretudo no que diz respeito ao processo de internalização, fundamental na relação desenvolvimento-aprendizagem, nos jogos, nas brincadeiras e nas interações sociais.

Vygotsky, criticando o pensamento psicológico de sua época, considerava não ser suficiente descrever os processos de desenvolvimento das funções psicológicas superiores baseando-se somente nos conceitos já amadurecidos pela criança. Defendia a idéia de que era importante compreender as possibilidades de utilizar conceitos potenciais para o desenvolvimento dessas funções (Moysés, 1997, pp. 32-34). Através de atividades experimentais conseguiu observar como a criança criava e, ainda, como utilizava novos meios para a realização ou para a reorganização de tarefas. O método da dupla estimulação (discutido na seção 3.2) lhe permitiu analisar esses meios, que emergiam à medida que a criança

¹⁵ Vygotsky utiliza a palavra *consciência* para indicar a percepção de estar consciente, ou seja, o indivíduo não realiza sua atividade de forma mecânica, mas sim pensando em cada um de seus atos (Vygotsky, 1998b, p. 114).

interagia com o ambiente, com a tarefa, com as ferramentas materiais e com as pessoas envolvidas nas atividades, o que lhe permitiu acessar a zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky, 1998b, p.70).

“O conceito de zona de desenvolvimento proximal emergiu primeiramente a partir das reflexões de Vygotsky em defectologia e enfatizou relações entre aprendizagem formal e desenvolvimento cognitivo, e apenas mais tarde foi ampliado para a discussão de questões relativas à interação social, imitação e mediação semiótica” (Meira, 2001, p.51).

O conceito de mediação semiótica, desenvolvida por Vygotsky, enfatiza os aspectos simbólicos e discursivos de atividades diversas, ainda associando-as a aspectos sócio-interacionais entre os indivíduos envolvidos numa situação problema. O desenvolvimento teórico dessa fase foi interrompido pela sua morte, mas muito nos interessa no desenvolvimento deste trabalho. Vygotsky atribuía um papel central aos instrumentos de natureza semiótica, dentro destes, se ocupou centralmente da fala como via principal para a análise das raízes genéticas do pensamento e da consciência.

“... a criança, com auxílio da fala, cria um campo temporal que lhe é tão perceptivo e real quanto o visual. A criança que fala tem, dessa forma, a capacidade de dirigir sua atenção de uma maneira dinâmica. Ela pode perceber mudanças na sua situação imediata do ponto de vista de suas atividades passadas, e pode agir no presente com a perspectiva do futuro”.(Vygotsky, 1998a, p.47).

Essa interação entre os participantes de uma atividade instrucional faz emergir uma zona de desenvolvimento proximal (ZDP) que, segundo Vygotsky é à distância entre o nível de desenvolvimento real da criança, característico das habilidades que ela já havia dominado (resultados do passado) e o nível de seu desenvolvimento potencial, quando a criança realiza tarefas com a cooperação de indivíduos mais capazes o que caracteriza um desempenho futuro (resultados de amanhã) (Vygotsky, 1998a, p.112).

Para Vygotsky, a fala permite a criança o controle verbal de sua atenção, o que lhe possibilita reorganizar seu campo perceptivo. “O campo de atenção da criança engloba não uma, mas a totalidade das séries de campos perceptivos potenciais que formam estruturas dinâmicas e sucessivas ao longo do tempo” (ibid., p.47), no caso dos deficientes visuais esses campos perceptivos limitam-se ao tato, a audição e a fala.

A teoria de Vygotsky pode ser conectada diretamente com a Educação Especial. Quando utilizamos o conceito de ZDP sobre o desenvolvimento real de um educando com necessidades especiais e o desenvolvimento potencial desse educando, são inúmeras as possibilidades cognitivas que esse educando tem para o seu desenvolvimento pleno, tanto nos aspectos educacionais como nos aspectos sociais. A aprendizagem desses educandos vai sendo assim construída mediante um processo de relação do indivíduo com seu ambiente sócio-cultural e com o suporte de outros indivíduos. É na ZDP que a interferência desses outros indivíduos é mais transformadora. A ZDP compreende uma região de potencialidade para o aprendizado, que pode emergir através do diálogo e/ou da utilização de ferramentas materiais.

1.3. ESTUDOS MAIS RECENTES SOBRE A ZDP

Segundo Vygotsky (1987) a “instrução só é útil quando leva ao desenvolvimento” (p.212), “conduzindo a criança a superar a si mesma” (p.213) (tradução nossa). De acordo com Wells, (1999, p. 4) “aprender e ensinar através da ZDP depende claramente de uma interação social, e no campo educacional isso envolve mais tipicamente a interação face a face mediada pelo diálogo” (tradução nossa). Uma afirmação de Wells (ibid., p.6) importante para nossa pesquisa é que a ZDP é criada pela interação entre os aprendizes e os outros participantes da atividade; incluindo as ferramentas disponíveis e as práticas selecionadas, e depende da natureza e da qualidade das interações que elevam a capacidade de aprendizagem.

Muitos autores contemporâneos, como Cole e Wertsch (1996), Oliveira (2002), Wells (1999), discutem o conceito de ZDP de Vygotsky por abordagens distintas. Nesta pesquisa adotamos a releitura da ZDP proposta por Meira e Lerman (2001) e o modelo de análise das práticas discursivas de Meira (2002).

1.3.1. A ZDP: UM ESPAÇO SIMBÓLICO - TEMPORAL

De acordo com Meira e Lerman (2001, p. 13) a ZDP não é algo pré-existente no indivíduo, nem um espaço físico que o instrutor de uma situação de aprendizagem deve encontrar. Esses autores vêem a ZDP como um espaço simbólico de interação e comunicação, onde a aprendizagem leva ao desenvolvimento. Eles argumentam que a ZDP pode emergir ou não dependendo da forma que os participantes da situação de aprendizagem interagem e comunicam-se. Em suas análises, a emergência da ZDP é investigada com base em duas práticas discursivas: (a) linguagem orientando o conteúdo, isto é, a linguagem sendo utilizada para conduzir o sujeito a refletir sobre o conceito científico em estudo e (b) linguagem orientando a comunicação, por exemplo, às intervenções feitas pelos participantes a fim de construir relações entre eventos ou ações passadas, atuais e futuras. Assim a ZDP é ao mesmo tempo um resultado - da interação e da comunicação - e uma ferramenta - que pode ser usada para elevar o nível potencial dos aprendizes - dentro de uma análise vygotskiana do desenvolvimento.

Meira (2002) propõe um modelo de análise dos discursos e das situações de interação entre os participantes que acontecem durante as atividades de matemática realizadas na sala de aula, baseada nas noções de *diálogo* e *tempo* que faz surgir, manipular e mantêm as ZDPs como espaços simbólicos. Para isso trabalhou com as noções de dialogicidade e temporalidade da fala e sua importância na relação entre aprendizagem e desenvolvimento cognitivo.

Segundo Meira (2002) a análise da evolução do discurso matemático dos participantes de um diálogo instrucional permite perceber conexões temporais entre conhecimentos do passado, na situação atual (presente) e ações futuras (futuro). Eventualmente, pode-se identificar ligações entre essas conexões temporais e as formas pelas quais os participantes dos diálogos produzem concordâncias, discordâncias ou reparações em relação à fala de seus interlocutores. O discurso argumentativo entre professor e aluno ou entre alunos é fator importante tanto para a aprendizagem como para a construção de novos conhecimentos.

A pesquisa de Meira (2002), cujas bases encontram-se nos estudos de Vygotsky, tem o objetivo de posicionar o conceito da ZDP como um *campo simbólico-temporal*, e para isso parte do pressuposto que a ZDP é constituída a partir de diálogos, e que pode ser operacionalizada através de diálogos que ajudem os participantes a estabelecer relações entre passado-presente, criando assim cenários semióticos apropriados para o desenvolvimento e manutenção das ZDP. A análise desses diálogos permite investigar o processo de aprendizagem e construção do conhecimento.

Desse modo, o processo interativo vivenciado nas situações de aprendizagem deve ser entendido em toda sua complexidade, envolvendo dificuldades e avanços na compreensão, negociação de sentido das diferentes perspectivas dos interagentes e o controle dessa dinâmica por parte dos mesmos, até que o conhecimento seja compartilhado.

1.3.2. A APROPRIAÇÃO DE VOZES

Em termos de diálogo instrucional, Renshaw (1996, p. 64) destaca que é particularmente relevante, quando examinamos a aplicação da teoria

sociocultural, perceber que os pseudoconceitos¹⁶ ocupam uma posição crucial na possibilidade destes diálogos. Nós destacamos o construto pseudoconceito discutido por Vygotsky (1998a), que se situam entre os conceitos imaturos e uma forma mais madura de conceitos, e é essa posição intermediária que cria a possibilidade de diálogo entre aprendiz e instrutor, onde paradoxalmente um desequilíbrio na estrutura cognitiva do aprendiz pode produzir uma mudança conceitual - ou um “mal-entendimento produtivo¹⁷” (Newman, Griffin e Cole, 1989).

Explorando esse paradoxo que ocorre durante a interação com o instrutor, o aprendiz começa a usar palavras de modo parecido ao usado pelo instrutor, mas, de fato, o instrutor entende as palavras de maneira mais geral e abstrata que o aprendiz, ou seja, o instrutor fala a “voz matemática” que pode ser gradativamente apropriada pelo aprendiz.

Nesse sentido, Confrey (1995, p. 40) argumenta que para Vygotsky, o aprendiz pode sair de uma atividade experimental empregando de forma sintaticamente correta a linguagem do seu interlocutor mesmo sem ter desenvolvido completamente um novo conceito, estando assim fazendo uso de um pseudoconceito.

Dessa forma, Renshaw (1996, p. 62) aponta o papel do pseudoconceito na produção da zona de desenvolvimento proximal (ZDP), citando Newman, Griffin e Cole (1989), que numa interpretação da teoria sociocultural de Vygotsky, aplicam a idéia de produção de “mal-entendimento produtivo” a ZDP. Ele argumenta que a criação das condições necessárias para uma mudança conceitual requer uma divergência nos entendimentos. Neste contexto da ZDP, o pseudoconceito tem origem a partir da noção de “mal-entendimento produtivo” que acaba motivando a divergência de entendimentos.

¹⁶ Os pseudoconceitos, discutidos por Vygotsky no capítulo cinco de *Pensamento e Linguagem*, ficam entre os conceitos complexos e uma forma mais madura de conceitos.

¹⁷ Nossa tradução para *productive misunderstanding*.

Segundo esses autores o número de significados atribuídos a uma palavra não depende somente do nível relativo de desenvolvimento dos participantes do diálogo, mas também das diferenças de experiência pessoais ou interpretações da situação presente. Desse modo, a interação colaborativa com os participantes de uma situação de aprendizagem capacita o aprendiz a ingressar numa forma nova, mais geral e abstrata, de diálogo que permite a emergência de uma ZDP. Isso vem de encontro com o trabalho de Meira e Lerman (2001) que caracterizam a ZDP como um espaço simbólico de interação e comunicação. Dessa forma, a apropriação de um conceito matemático não pode ocorrer automaticamente. É necessário um processo de ensino que construa conexões entre conceitos cotidianos e conceitos científicos dentro de uma análise vygotskiana do desenvolvimento.

Renshaw (1996) adota uma posição parecida em sua descrição dos experimentos de ensino de Davydov, no qual ele descreve como o instrutor de uma situação de aprendizagem induz os aprendizes a empregarem a voz matemática. Inicialmente os aprendizes ingressam no diálogo com uma variedade própria de gêneros de discursos e o instrutor mostra uma maneira particular de falar, encorajando os aprendizes a “ventricular” (falar com) suas vozes (p. 74).

Para Renshaw (1996, p. 75), por essa perspectiva, ensinar consiste em introduzir o aprendiz numa comunidade que tem uma forma particular de agir, falar e representar objetos e experiências. Desse modo o desenvolvimento conceitual não consiste somente a aprender a falar com novas vozes, mas aprender também a articular essas vozes para manter a comunicação e se tornar capaz de adotar uma voz privilegiada em significado para influenciar seus pares.

1.4. SÍNTESE

A visão de Vygotsky, apresentada neste capítulo, é o ponto de partida para o nosso estudo, ou seja: os indivíduos cegos têm potencial para um

desenvolvimento cognitivo normal, cabendo aos educadores buscar estímulos e instrumentos adequados para que através de intervenções e interações, esses sujeitos possam ter acesso ao conhecimento.

Não tendo nossos sujeitos de pesquisa acuidade visual, não podemos deixar de lado a mediação através da fala e do tato. O objetivo da pesquisa é investigar se um conceito matemático impregnado por experiências visuais, no caso dos videntes, pode ser acessível a indivíduos cegos, se viabilizado por sistemas mediadores adequados (ferramentas materiais e diálogos) e operacionalizados de forma a potencializar as habilidades dos indivíduos e não sua deficiência (visual).

Dentro dessa perspectiva o desafio que enfrentamos é investigar de que forma podemos criar um espaço simbólico (ZDP) dentro do qual, aprendizes cegos possam internalizar noções matemáticas. Para isso pretendemos analisar as interações que ocorrem dentro de uma situação instrucional, buscando identificar os aspectos do diálogo que possibilitam a emergência e manutenção da ZDP. A concepção da ZDP a ser utilizada por nós conecta-se com a perspectiva de Meira e Lerman (2001) - um espaço simbólico de interação e comunicação, ou seja, a utilizamos como uma ferramenta a fim de elevar o nível potencial do sujeito, que pode emergir dos diálogos (e cuja manutenção também depende desses) e permitem ao sujeito estabelecer relações e formular concepções sobre conceitos matemáticos ou outros conceitos científicos, os quais ele, possivelmente, não poderia formular sozinho (fora de uma situação instrucional).

Para isso, escolhemos dentre as várias áreas da Matemática a Geometria, mais especificamente a transformação geométrica reflexão.

No próximo capítulo discorreremos sobre o objeto matemático, e os conceitos cotidianos e científicos ligados mais especificamente à reflexão e simetria.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E OS PROCESSOS ENVOLVIDOS EM SUA APRENDIZAGEM

Eu sou totalmente cego desde que nasci e tenho estudado álgebra, geometria e cálculo. Eu achava a geometria especialmente difícil porque eu tinha dificuldade para entender, muitos conceitos espaciais... Eu acho que tinha dificuldade para entender conceitos tais como: como quatro paredes encontram o teto e, de fato, subi numa cadeira para estudar isso.

Bev Wieland, Programmer/Analyst, University of Delaware (em Dick e Becker, 2002) Tradução nossa.

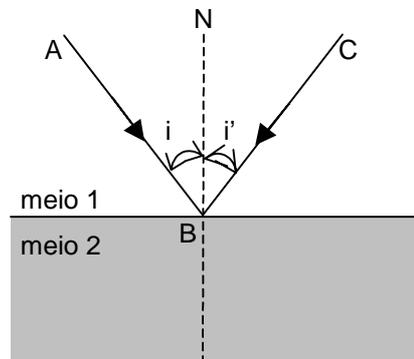
2.1. INTRODUÇÃO

O ensino de Geometria desempenha um papel fundamental na medida em que “possibilita ao aprendiz desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (PCN, 1998, p. 122). As transformações geométricas, em particular, constituem um ramo da Matemática com aplicabilidade em vários campos do conhecimento. A reflexão, em particular, é muito presente tanto no campo científico como no cotidiano:

- na natureza aparentemente há várias estruturas que apresentam simetria (Pires et al, p. 211). O corpo humano, por exemplo, externamente é simétrico em relação a um plano vertical;
- desde a antiguidade, os homens tem na simetria uma referência para suas realizações artísticas e arquitetônicas, como pode-se perceber, por

exemplo, nas pirâmides do Egito, nas colunas do Palácio da Alvorada em Brasília ou no Arco do Triunfo em Paris;

- nas ciências, especialmente na Física onde, por exemplo, as leis que regem os fenômenos óptico estão baseadas no princípio da propagação retilínea dos raios luminosos. Estas leis dizem respeito à mudança que a luz sofre quando é refletida ou quando passa de um meio transparente para outro.



AB: raio incidente.
BC: raio refletido.
N: normal à superfície de separação dos dois meios.
B: ponto de incidência.
i: ângulo de incidência.
i': ângulo de reflexão.

Figura 2.1: Propagação retilínea da luz

A reflexão da luz é descrita pelas seguintes leis (Chiqueto e Parada, 1992, p. 167):

- O raio incidente, o raio refletido e a reta normal á superfície pertencem ao mesmo plano.
- O ângulo de incidência é igual ao de reflexão:

$$i = i'$$

Nos espelhos planos a imagem de um objeto extenso é obtida a partir da construção do simétrico em relação ao espelho de cada um dos pontos que o compõe. Assim com relação à imagem, as dimensões são as mesmas do objeto, mas há uma inversão.

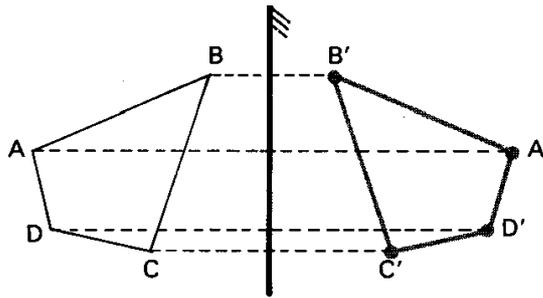


Figura 2.2: Imagem nos espelhos planos

A Geometria lida com relações entre objetos reais e objetos teóricos e sua origem está em trabalhos práticos reais e, ao mesmo tempo, em teorias abstratas. Na próxima seção explicitamos o significado atribuído a alguns conceitos e termos matemáticos utilizados por nós durante o desenvolvimento do nosso trabalho.

2. 2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Definimos uma transformação no plano como uma aplicação bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo (ver Alves e Galvão, 1996 e Lima, 1996).

Consideremos uma aplicação F do conjunto dos pontos do plano em si mesmo, isto é, uma correspondência que a cada ponto P do plano associa um único ponto desse plano que indicaremos $F(P)$. F é dita sobrejetora se para todo ponto Q do plano existir um ponto P de modo que $F(P) = Q$. F é injetora se $F(R) = F(S)$ implica $R = S$.

Uma aplicação que é simultaneamente injetora e sobrejetora é dita bijetora. Assim, se F é uma aplicação bijetora, podemos garantir que para todo ponto Q do plano existe um único ponto P tal que $F(P) = Q$.

Nosso propósito é estudar a transformação geométrica reflexão, uma das transformações que quando aplicadas a figuras do plano não alteram as

distâncias entre pontos, ou seja, uma das transformações que relacionam figuras congruentes, que são denominadas transformações isométricas.

2.3. ISOMETRIAS

O plano é entendido como um espaço onde se adota uma distância (a distância euclidiana). Uma isometria no plano é uma função, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que preserva distância entre pontos do plano.

Escolhemos como objeto matemático desse estudo *reflexão*, pois entendemos que toda isometria é uma composição de, no máximo três reflexões, que produzem apenas quatro tipos de transformações geométricas: reflexões; translações; rotações e reflexões com deslizamento, como podemos verificar na Figura 2.3.

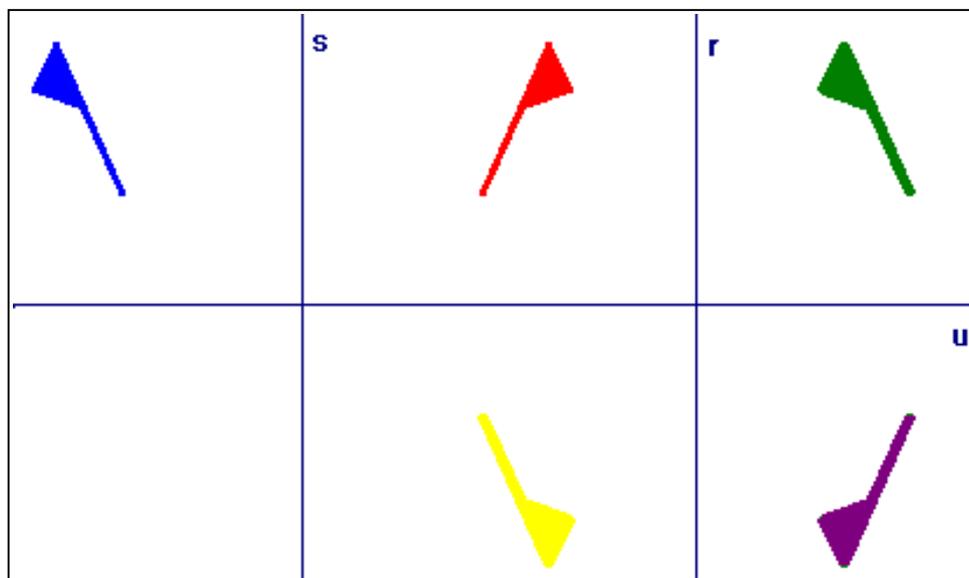


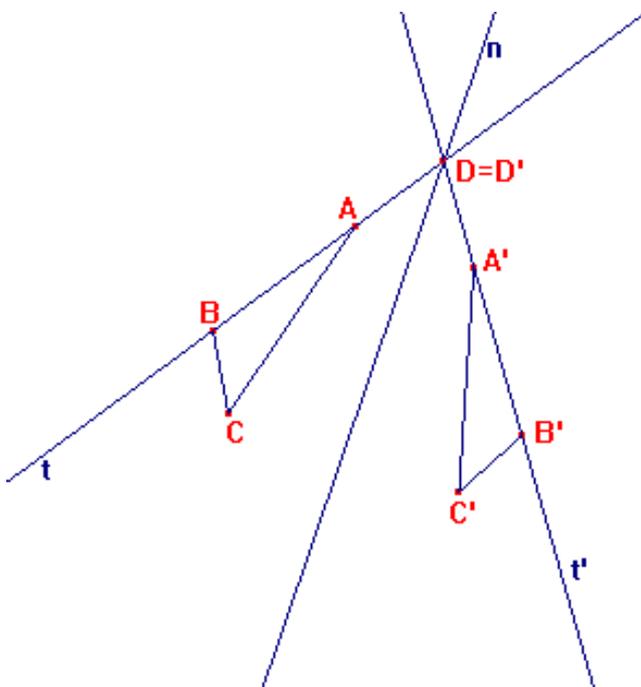
Figura 2.3: Transformações geométricas

- A figura vermelha é a imagem da figura azul por meio de uma reflexão na reta s .

- A figura amarela é a imagem da figura azul por meio de uma rotação, feita a partir de duas reflexões: da figura azul na reta s , gerando a figura vermelha e , em seguida da figura vermelha na reta u .
- A figura verde é a imagem da figura azul por meio de uma translação, feita a partir de duas reflexões: da figura azul na reta s , gerando a figura vermelha e , em seguida da figura vermelha na reta r .
- A figura violeta é a imagem da figura azul por meio de uma reflexão com deslizamento, feita a partir de três reflexões: da figura azul na reta s , gerando a figura vermelha e , em seguida da figura vermelha na reta r originando a figura verde e desta na reta u .

A propriedade que distingue a reflexão das outras isometrias é que sob essa transformação qualquer ponto do plano e sua respectiva imagem são eqüidistantes de uma reta, denominada *eixo de simetria*.

A Figura 2.4 representa um triângulo $A'B'C'$ obtido a partir da reflexão do triângulo ABC em relação à reta n e as propriedades associadas a essa transformação.



- $n \perp \overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ pelos pontos médios de $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ respectivamente.

- n é bissetriz de $\hat{A}A', \hat{B}B'$ e $\hat{C}C'$

$$T_n(t) = t'$$

$$T_n(A) = A', T_n(B) = B' \text{ e } T_n(C) = C'$$

$$T_n(A') = A, T_n(B') = B \text{ e } T_n(C') = C$$

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

Figura 2.4: Propriedades associadas à reflexão

De acordo com Healy (2002) a análise dessa figura nos permite destacar alguns conhecimentos relevantes sobre a transformação:

- A imagem de um ponto (D) no eixo de simetria é o próprio ponto (D = D'). Os pontos do eixo podem ser considerados invariantes na transformação.
- O eixo é perpendicular ao segmento com extremidades num ponto (qualquer) e sua imagem e contém o ponto médio desse segmento.
- A imagem de uma reta é outra reta ($T_n(t) = t'$), e o eixo é a bissetriz do ângulo formado pela reta e sua imagem que tem como vértice o ponto de intersecção dessas retas.
- Um objeto geométrico e sua imagem são congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$)
- A reflexão é uma transformação auto-inversível ($T_n(A) = A', T_n(A') = A$).
- A transformação inverte a orientação dos pontos não-colineares (no $\triangle ABC$ os pontos A, B e C, nessa ordem, estão no sentido anti-horário, no $\triangle A'B'C'$ as respectivas imagens desses pontos estão no sentido horário).

Uma definição clássica para *reflexão em torno de uma reta* (adaptada de Lima, 1996), apóia-se na propriedade do eixo de simetria como mediatriz do segmento formado por um ponto e sua respectiva imagem:

Dada uma reta r , diz-se que : é uma *reflexão com relação à reta r* (referida como o eixo de simetria) se esta é a mediatriz do segmento de extremidades P e P' , onde P representa um ponto qualquer do plano.

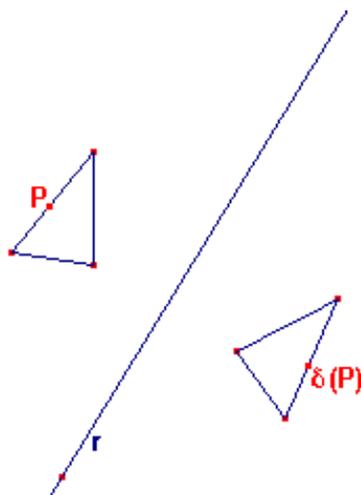


Figura 2.5: Reflexão do Plano com relação à reta r

Uma segunda definição para essa transformação, elaborada a partir de elementos geométricos distintos da definição apresentada anteriormente é (Healy, 2002):

Dada uma reta r , diz-se que δ_r é uma *reflexão com relação à reta r* (referida como o eixo de simetria) tal que $\delta_r(P) = P'$ se e somente se r é a bissetriz do ângulo $P\hat{A}P'$ ($\forall A \in r$ e $A \neq P$) e $\overline{PA} \equiv \overline{P'A}$, onde P representa um ponto qualquer do plano.

A primeira definição dá ao eixo de simetria o caráter de mediatriz, enquanto a segunda definição destaca seu caráter de bissetriz. Embora dando ênfase a propriedades diferentes do mesmo eixo de simetria, essas duas definições são equivalentes, e chamam a atenção para a configuração simétrica composta pela figura e sua respectiva imagem sob reflexão. Na próxima seção exploramos os significados matemáticos associados a figuras simétricas e simetria.

2.3.2. SIMETRIA

Pode-se ler no dicionário Aurélio (1986) que a palavra simetria tem origem grega que significa “*justa proporção*” ou harmonia resultante de certas combinações e

proporções regulares. A simetria é descrita como uma “correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio, ou ainda que, se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo”. Especificamente na Geometria, simetria é definida como propriedade de uma configuração que é invariante sob transformações que não alteram as relações métricas, mas alteram a posição dos seus elementos constitutivos.

Neste estudo estamos considerando somente a simetria de uma figura em relação a um eixo, apesar de não ser esta a única simetria que uma figura pode apresentar.

Considerando o quadrilátero ABCD (Figura 2.6), pode-se verificar que em relação ao eixo r :

- o ponto A “é levado” no ponto C;
- o ponto C “é levado” no ponto A;
- o ponto D “é levado” no ponto D;
- o ponto B “é levado” no ponto B.

O quadrilátero ABCD é levado em si mesmo pela simetria em relação ao eixo r . Dizemos que o quadrilátero ABCD é uma *figura simétrica*.

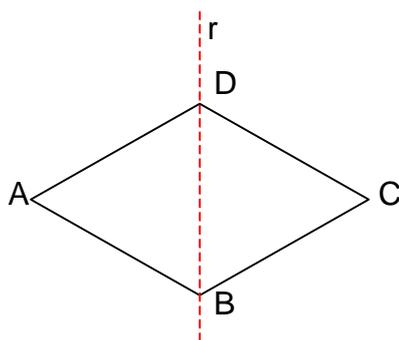


Figura 2.6: Figura simétrica

Formalmente podemos definir uma figura simétrica, como se segue:

“Seja δ uma transformação isométrica, diz-se que uma figura plana F (i. é., um subconjunto de pontos do plano) possui *simetria*, se $\delta(F) = F$, ou seja, se F é invariante por δ , diremos aqui que $\delta(F)$ representa o conjunto imagem de F pela transformação δ ” (Siqueira et al, 2003, p. 43).

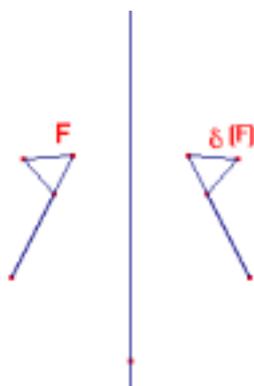


Figura 2.7: uma transformação isométrica

A partir dessa definição, podemos salientar o aspecto funcional associado a figuras simétricas.

Quando uma figura é simétrica de si mesma em relação a um eixo r , dizemos que a reta r é *eixo de simetria* dessa figura, apresentamos aqui mais alguns exemplos como os citados por Alves e Galvão (1996):

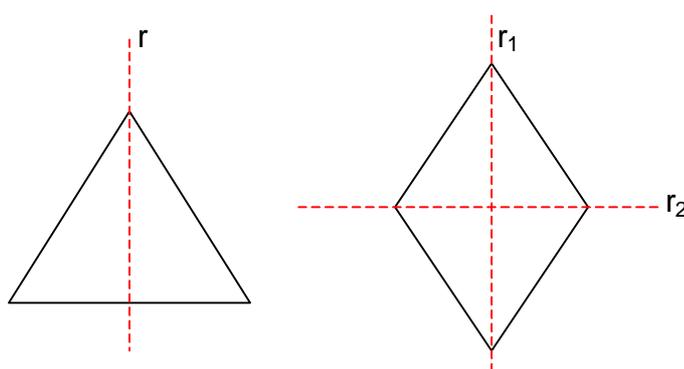


Figura 2.8: Duas figuras simétricas

A reta que contém a bissetriz do ângulo correspondente ao vértice de um triângulo isósceles é um eixo de simetria do triângulo.

As retas que contém as diagonais de um losango são eixos de simetria do losango.

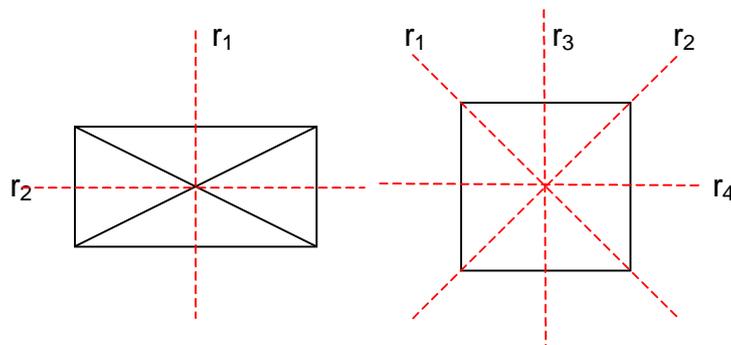


Figura 2.9: Simetria no quadrado e no retângulo

As retas que passam pelo ponto de intersecção das diagonais de um retângulo e são paralelas aos seus lados são eixos de simetria do retângulo. As retas que contém as diagonais de um quadrado bem como as que passam pelo seu ponto de intersecção e são paralelas aos seus lados são eixos de simetria do quadrado.

Por outro lado, um paralelogramo, que não seja losango nem retângulo não tem nenhum eixo de simetria¹⁸.

Nesta seção nos concentramos nos aspectos matemáticos das transformações geométricas, na próxima discutimos os aspectos associados à simetria e a reflexão enfatizados por aprendizes com acuidade visual dentro dos padrões normais.

¹⁸ Quando usamos o termo *eixo de simetria* na verdade estamos nos referindo apenas a *simetria ortogonal*. Crozes e Gilet (1963) descrevem simetria axial como uma transformação envolvendo duas retas referenciais, sendo uma o eixo de simetria e a outra a direção. Segundo essa definição o paralelogramo apresenta quatro eixos de simetria.

2.4. SIMETRIA, REFLEXÃO E OS CONCEITOS COTIDIANOS

Voltando ao dicionário Aurélio vemos que simetria tem significados além dos associados ao contexto matemático. Assim por exemplo se pensarmos na idéia de simetria, há saberes sociais, a seu respeito, e usos nas diferentes culturas (Pires, 2002a).

Há várias pesquisas que estudam as concepções relacionadas às isometrias por aprendizes com acuidade visual dentro dos padrões normais. Em sua pesquisa Healy (2002) aponta os trabalhos de Willson (1977), Coxford e Usiskin (1971), Küchemann (1981), Edwards e Zazkis (1993) e Leher *et al.* (1998) que destacam a ligação entre as transformações isométricas e ações físicas. Para esses autores essa ligação permite aos alunos estabelecer relações e os auxiliam na construção de figuras geométricas geradas por uma transformação geométrica. Destacamos inicialmente, a título de exemplo, os trabalhos de Edwards e Zazkis (1993) e de Leher *et al.* (1998).

Edwards e Zazkis (1993) sugerem que os aprendizes têm uma concepção “primitiva” ou “ingênua” sobre reflexões e rotações, anterior a qualquer instrução formal sobre transformações geométricas. Leher *et al.* (1998), em suas investigações, selecionaram algumas situações simples, aos quais deram o nome de “trampolim”¹⁹, como, por exemplo, padrões geométricos familiares aos aprendizes, como ponto de partida para o estudo de transformações geométricas e simetria. No entanto, esses pesquisadores chamam a atenção para o fato de que se não for oferecido aos aprendizes exemplos desafiadores, eles não terão a oportunidade de modificar e ampliar os conhecimentos originais – ou, para utilizar o termo vygotskyano *conceitos cotidianos* - ou ainda de conectá-los a concepções alternativas que os permitam aproximar-se de um conhecimento matemático “oficial”, ou seja, *conceitos científicos*.

¹⁹ *Springboard* em inglês.

A relação que os alunos fazem do conceito de reflexão com o mundo físico (conceitos cotidianos) nos levou a escolher esse conceito matemático para nossos estudos, principalmente por serem nossos aprendizes não videntes. Existem estudos documentados que tratam das diferentes concepções, estratégias utilizadas e a matemática que aprendizes que “podem ver” devem aprender para ter acesso aos conceitos ligado à reflexão e simetria, mas não encontramos pesquisas que tratam dessas mesmas relações por aprendizes que “não podem ver”.

Healy (2002) em pesquisas realizadas na Inglaterra observa que os alunos com acuidade visual dentro dos padrões normais relacionam o conceito de reflexão a imagens formadas em espelhos planos ou em outras superfícies como água e metal. Nessa pesquisa os alunos listaram um rol de conceitos cotidianos ao explicitarem as relações entre figuras simétricas e seus respectivos eixos de simetria, como: *cada parte do desenho é com sua imagem no espelho; dobrando, as duas partes ficam iguais; a reta é o lugar em que deve ficar o espelho; o espelho divide o desenho na metade*. Obviamente essas relações estão distantes da definição formal de reflexão, mas mostram intrinsecamente o conhecimento de algumas propriedades de reflexão, como congruência e, mesmo que implicitamente, a eqüidistância.

Nas pesquisas de Grenier (1985) e Küchemann (1981) os alunos receberam várias figuras que deveriam ser transformadas por reflexão numa série de tarefas realizadas em papel. Os resultados dessas pesquisas também indicam que os alunos conhecem algumas propriedades ligadas à reflexão, mas o desempenho desses alunos depende de vários aspectos ligados à forma que as tarefas são propostas, como: orientação da figura ou do eixo, a presença ou não da malha quadriculada no papel ou ainda o tipo da figura proposta.

2.5. FORMAS GEOMÉTRICAS E OS APRENDIZES NÃO VIDENTES

Embora não tenhamos encontrado pesquisas diretamente relacionada ao conceito de reflexão por aprendizes cegos, a pesquisa realizada por Argyropoulos (2002) é interessante para nosso trabalho por explorar o pensamento geométrico de aprendizes sem acuidade visual, e examinar como os parâmetros da percepção tátil de formas (toque, postura, movimento, forma e linguagem) implicam num resultado cognitivo.

O objetivo da pesquisa de Argyropoulos (2002) é relatar como aprendizes que não podem ver reconhecem formas geométricas e suas propriedades, para isso ele utiliza o modelo proposto por Van Hiele a fim de explorar individualmente como esses aprendizes “pensam na geometria”. Ele considera ainda as implicações do método de ensino relacionado às necessidades especiais desses aprendizes e examina a interferência dos parâmetros de percepção tátil da forma com os resultados cognitivos. Um dado importante para nossa pesquisa, já que trabalhamos com o conhecimento matemático de simetria em figuras e reflexão, foi também discutido por Ochaita e Rosa (1995). Segundo esses autores, a partir de uma investigação, Carpenter e Eisenberg²⁰ (1978) concluíram que os indivíduos nascidos cegos “foram capazes de perceber mentalmente a alteração de formas nos eixos horizontal, vertical e oblíquo do espaço euclidiano, cabe inferir que o sistema háptico pode dar lugar a representações mentais de caráter espacial” (*apud.* p.186).

O aspecto central da teoria de Van Hiele (1986) é a distinção entre cinco níveis de entendimento no estudo de Geometria, que são apresentados de forma hierárquica, ou seja, não se pode atingir o nível n sem que se tenha passado pelo nível $n - 1$. Em síntese esses níveis são: nível 0 - visualização, nível 1 – análises, nível 2 - dedução informal, nível 3 - dedução formal e o nível 4 - rigor.

²⁰ CARPENTER, J.C.; EISENBERG, P. **Mental rotation and frame of reference in blind and sighted individuals.** Perception of Psychophysics, 23, 117-124. 1978.

Para Van Hiele, quando um aprendiz alcança um nível não implica que ele atingirá o nível seguinte, entretanto a passagem de um determinado nível para um nível superior ocorre de forma explícita. Isso mostra o caráter hierárquico e mutuamente dependente entre os níveis.

Alguns resultados e observações oriundos da pesquisa de Argyropoulos (2002) são relevantes para o nosso trabalho:

- Através do tato os deficientes visuais formam imagens mentais e a partir dessas imagens fazem ligações com seus conhecimentos. Em outra experiência esse novo conhecimento adquirido de forma háptica estará disponível.
- Memória, hipóteses e decisões são construídas com base em estímulos hápticos.
- Um aluno que pode ver tem a oportunidade de reconhecer uma mesma forma geométrica, várias vezes em posições e tamanhos distintos, o que é mais limitado para os que não podem ver. Assim o primeiro estímulo háptico adquire grande importância e predominará no desenvolvimento de conceitos desses sujeitos.
- A maior parte das informações sobre formas geométricas por esses aprendizes é adquirida com base em experiências concretas e muito pouco do seu conhecimento é abstrato.

A análise dos resultados obtidos por Argyropoulos coloca os deficientes visuais, sob a perspectiva de Van Hiele, em níveis que variam entre 0 e 1, mas, para ele, apesar do modelo utilizado ser adequado para explorar o pensamento geométrico desses sujeitos, uma categorização do entendimento desses aprendizes em um simples nível é irrealista. Segundo Argyropoulos, apesar de haver a predominância de um determinado nível é preciso que se considere a transição

entre os níveis durante as investigações, especialmente quando o primeiro contato com as formas geométricas é háptico e não visual.

Apoiamo-nos nas declarações de Argyropoulos citadas acima, e decidimos não utilizar o modelo proposto por Van Hiele. Optamos pela perspectiva intrafigural, interfigural e transfigural de Piaget e Garcia (1987) para as análises da evolução do pensamento geométrico dos sujeitos na realização da seqüência de tarefas propostas.

2.6. INTRA, INTER E TRANSFIGURAL

Piaget e Garcia (1987) fazem um estudo histórico-crítico do desenvolvimento da Geometria, associado aos estudos psicogenéticos e a psicogênese das noções geométricas, buscando dar um significado epistemológico a noção de transformação, entre outros conhecimentos matemáticos. Para esses autores, tanto o desenvolvimento histórico da Geometria como a psicogênese das estruturas geométricas, caracterizam-se por três etapas de desenvolvimento: intra, inter e transfigural.

Na etapa intrafigural,

... se estudam as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto *relações internas* entre os elementos destas figuras e destes corpos. Não se toma em consideração o *espaço* enquanto tal, nem, por conseqüência, as transformações da figura no interior de um espaço que as compreenderia todas (Piaget e Garcia, 1987, p. 110).

Assim, na etapa intrafigural os sujeitos não percebem as transformações da figura dentro do conjunto (figuras-plano). Centram-se nas propriedades internas das figuras e nas relações internas de duas ou mais figuras o que resulta numa comparação entre essas figuras.

A segunda etapa é denominada por Piaget e Garcia de interfigural:

A etapa caracterizada por um estabelecimento de relação das figuras entre elas, cuja manifestação específica é a procura de transformações, ligando figuras segundo múltiplas formas de correspondência, mas sem chegar à subordinação das transformações às estruturas de conjunto (Piaget e Garcia, 1987, p. 110).

Nessa etapa o sujeito utiliza apenas as referências internas do sistema analisado, ou seja, as figuras estão num plano, e esse conjunto (figuras-plano) apresenta características de totalidade. A transformação associa a uma figura objeto sua figura imagem, mas não é aplicada a nenhum outro ponto do plano, que é visto apenas como um suporte para as figuras. O sujeito considera que qualquer mudança de forma de uma figura deve-se ao deslocamento de suas partes já que somente compara posições iniciais e finais com suas respectivas referências (ibid, p. 118).

“Em seguida começa uma terceira etapa, que chamaremos *transfigural*, caracterizada pela preeminência das estruturas” (ibid, p. 110). Essa etapa não trata somente da transformação de uma figura noutra, mas opera sobre todos os pontos do plano, verificando a realização de determinadas condições (manter sem variação alguns elementos - invariantes). Trata-se, sobretudo, de uma fase em que se opera sobre um conjunto de elementos, podemos dizer de relações entre relações onde às transformações podem ser compostas e decompostas já que passam a ser objetos.

Em suas conclusões esses autores deixam claro que essa tríade (intra, inter e transfigural) são fases de um processo contínuo, ou seja, “as estruturas atingidas no nível transfigural dão lugar, por sua vez, às análises intrafigurais que conduzem a novos interfigurais, depois à produção de superestruturas transfigurais e assim indefinidamente” (ibid, p. 132), assim embora ocorra um processo de sucessão entre os níveis, essa sucessão independe de um grau hierárquico absoluto.

Para o nosso trabalho interessa-nos especialmente os níveis intra e interfigural, e a possibilidade de conduzir nossos sujeitos à passagem do nível intrafigural para o nível interfigural. A passagem de um nível a outro, no caso dos aprendizes cegos, talvez seja mais perceptível através de sua ação sobre as ferramentas materiais utilizadas na execução das atividades, ou seja, não explicitadas verbalmente. Essa ação poderá criar uma representação do que esse sujeito pode captar através dos estímulos hápticos.

2.7. OS PARÂMETROS DA REFLEXÃO NO CONTEXTO INTRA, INTER E TRANSFIGURAL

O desenvolvimento do pensamento geométrico ligado à apropriação dos conceitos científicos – simetria e reflexão – é objeto de vários estudos com alunos videntes, desses, alguns foram citados na seção 2.4. A perspectiva de Piaget e Garcia (1987) permite uma reconsideração sobre as estruturas cognitivas envolvidas nessa apropriação em termos da classificação intra, inter e transfigural.

Pesquisas com aprendizes videntes, apontam vários aspectos das tarefas relacionadas à reflexão que parecem influir nas respostas dadas, particularmente nos índices de acertos desses aprendizes. Acreditamos que é possível relacionar esses aspectos com a tríade intra, inter e transfigural, ou seja, para nós os aprendizes têm mais sucesso na realização das tarefas, quando essas favorecem o trabalho no nível intrafigural.

Por exemplo, os estudos realizados com alunos videntes na década de 80 em três países²¹, que buscavam investigar o nível de compreensão dos aprendizes sobre reflexão e a influência dos aspectos ligados às tarefas no desempenho desses

²¹ Na Inglaterra por Küchemann em 1981 dentro do projeto Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS); na França desenvolvida por Gras em 1979 e em 1983 por Bernadette Denys do I.R.E.M de Paris VII e por Denise Grenier em 1985 da Equipe de Pesquisa em Didática da Matemática e de Informática da Universidade de Grenoble I da França e na Espanha por Gutiérrez e Jaime em 1987 que elaboraram testes baseados no projeto inglês Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS).

alunos, consideraram os seguintes aspectos relativos às tarefas: (a) a natureza do objeto: ponto, segmento de reta ou triângulo; (b) a posição do eixo de simetria: vertical, horizontal ou inclinado; (c) a posição da figura em relação ao eixo de simetria: intercepta ou não o eixo de simetria; (d) tipo de papel: quadriculado ou não. A análise dos resultados obtidos nessa investigação identifica que as maiores dificuldades dos aprendizes videntes referem-se a:

- posição do eixo de simetria: o eixo inclinado é uma variável significativa no desempenho do aluno. Nas propostas onde o eixo de simetria é vertical ou horizontal ocorreram os maiores índices de acertos;
- posição relativa eixo-objeto: há maior dificuldade quando a figura intercepta o eixo;
- uso da malha quadriculada: se o eixo coincide com uma das linhas da malha é um elemento facilitador na realização das tarefas, se não coincide representa um obstáculo. Os alunos apresentaram, de uma maneira geral, maiores índices de acertos quando há a presença da malha quadriculada, indicando que a malha pode ajudar no que se refere à distância e direção.
- complexidade da figura: quanto mais complexa maior a dificuldade apresentada. De uma maneira geral os alunos parecem evitar as respostas em que figura-dada e figura-imagem ficam sobrepostas, como representamos no exemplo da Figura 2.10.

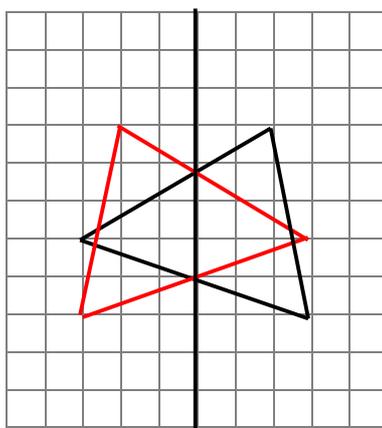


Figura 2.10: Uma figura complexa

Em relação à posição do eixo de simetria, os resultados obtidos podem ser entendidos pela associação que os aprendizes fazem com espelhos e outras superfícies refletoras nas posições vertical ou horizontal que, normalmente, são experiências vivenciadas no dia-a-dia. A associação feita com as imagens produzidas por essas superfícies pode ser fonte de dificuldades para os aprendizes quando a figura cruza o eixo de simetria, já que em situações empíricas esse resultado não pode ser verificado, por exemplo, usando um espelho.

Segundo Vergnaud (1997, p. 14) as concepções necessárias para resolver tarefas com as apresentadas na figura abaixo (Figura 2.11) envolvem pensamentos distintos. As concepções envolvidas em F2 são hierarquicamente mais complexas do que as envolvidas em F1. Na Figura F1 as medidas de comprimentos e distâncias são facilitadas pelo papel quadriculado, assim a tarefa requer um pequeno trabalho cognitivo por parte do aprendiz. Na Figura F2 a construção da figura-imagem exige a utilização de alguns materiais de desenho (régua, compasso e transferidor) e o aprendiz deve conservar os ângulos, mas não a orientação.

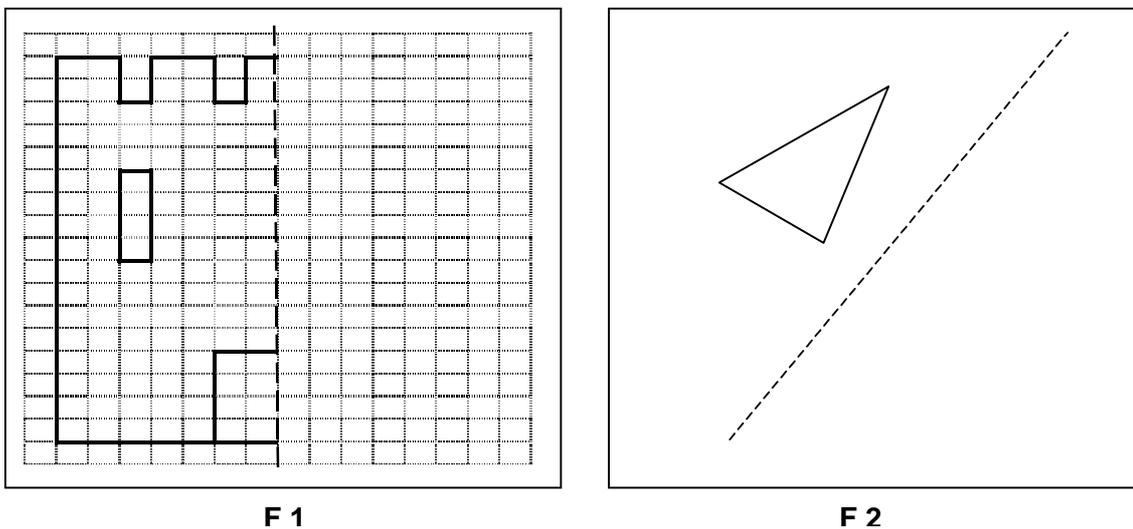


Figura 2.11: Esquemas de Vergnaud

Os dois primeiros níveis da tríade intra, inter e transfigural são perceptíveis nas Figuras F1 e F2. O tipo de figura-objeto apresentada em F1, a presença da malha

quadriculada e a posição do eixo de simetria (vertical), favorece o trabalho no nível intrafigural, ou seja, o aprendiz não percebe as transformações da figura-objeto dentro do conjunto (figuras-plano). Ele vê figura-objeto e a figura-imagem como partes de uma única figura. Em F2 a posição do eixo de simetria (inclinado) e a posição da figura em relação ao eixo, podem favorecer o trabalho no nível interfigural, já que na determinação da figura-imagem o aprendiz precisa considerar, minimamente, as posições iniciais e finais de partes da figura com suas respectivas referências.

Vergnaud (1997) destaca ainda a importância das invariantes operacionais por traz do comportamento. Para ele estas invariantes são fontes essenciais para os conceitos, juntamente com a linguagem e outros meios de expressão. No estudo da simetria palavras e expressões como “a mesma forma”, “a mesma distância”, “a medida é conservada”, “o ângulo é o mesmo, mas invertido” mostram diferentes níveis conceituais, que denotam características de teoremas como “a figura é simétrica”, “a simetria conserva medidas e ângulos”, “a simetria é uma isometria”.

Para nós, o parágrafo anterior indica uma conexão evidente entre o estudo das simetrias dentro da Teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1997) e os níveis intra, inter e transfigural de Piaget e Garcia (1987). A reinterpretação dos diferentes níveis conceituais destacados por Vergnaud, nos levam estabelecer as seguintes relações:

- O teorema “a figura é simétrica”, caracterizado por termos como “a mesma forma”, “a mesma distância”, “a medida é conservada” denotam o trabalho no nível intrafigural, pois se centram nas propriedades internas das figuras e nas relações internas destas com o eixo de simetria.
- O teorema, “a simetria conserva medidas e ângulos”, caracterizado por termos como “o ângulo é o mesmo, mas invertido” sugerem o trabalho no nível interfigural, pois a transformação associa a figura sua respectiva imagem, mas não é aplicada a outros pontos do plano.

- O teorema “a simetria é uma isometria” que pode ser caracterizado pelo conjunto dos termos apontados anteriormente, permite o trabalho no nível transfigural, já que, neste caso, a transformação está sendo vista como uma função (uma bijeção do plano no plano).

2.8. SÍNTESE

Nesse capítulo apresentamos o conceito de transformações geométricas e isometrias (conceitos científicos) e as relações que aprendizes com acuidade visual dentro dos padrões normais estabelecem entre esses conceitos e o mundo físico (conceitos cotidianos).

As pesquisas citadas, que avaliam a influência das variáveis nos resultados obtidos pelos aprendizes, mostram a importância dos sistemas mediadores utilizados nos processos de ensino-aprendizagem. Nesta pesquisa, a elaboração das ferramentas materiais a serem utilizadas para viabilizar o acesso dos aprendizes não videntes ao conceito científico em estudo apóia-se nas idéias de Vygotsky sobre mediação e nas dificuldades associadas à estrutura das tarefas apontadas por esses estudos precedentes.

A análise das ações sobre as ferramentas materiais e dos procedimentos verbalizados pelos sujeitos envolvidos neste estudo nos permitirá avaliar quais aspectos, ligados à reflexão e simetria, são privilegiados por ferramentas materiais desenvolvidas para oferecer estímulos táteis. Nesses termos, destacamos a importância da pesquisa de Argyropoulos a respeito do pensamento geométrico de aprendizes cegos, que segundo ele é estruturado através de estímulos táteis (experiências concretas), e as implicações que essa forma captar informações trazem para a construção desse pensamento.

É nosso interesse analisar as possíveis mudanças na estrutura cognitiva dos sujeitos que podem produzir uma mudança conceitual na medida em que, gradativamente, o aprendiz apropria-se da “voz matemática” falada pela

instrutora-pesquisadora, o que nos traz o conceito de Vygotsky – mediação semiótica, onde os aspectos discursivos das situações instrucionais têm papel central. Por outro lado durante o desenvolvimento de um diálogo instrucional, os pseudoconceitos ocupam uma posição importante na produção da zona de desenvolvimento proximal (ZDP). Com isso em mente, pretendemos investigar os aspectos da prática dialógica que indiquem uma mudança na estrutura cognitiva dos sujeitos, gerada a partir da emergência da ZDP e ampliada a partir da manutenção dessa zona.

Nos capítulos 1 e 2 apresentamos os modelos teóricos que utilizaremos em nossas análises. Os níveis intra, inter e transfigural de Piaget e Garcia que nos permitirá analisar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos; a apropriação da “voz matemática” de Renshaw que permite avaliar a mudança na estrutura cognitiva do aprendiz decorrente do uso de pseudoconceitos na situação instrucional e o caráter temporal da ZDP de Meira e Lerman.

Tomando o conjunto formado pelas considerações destes três modelos de análises, formulamos a questão de pesquisa que norteará nossos estudos no que diz respeito ao processo de internalização dos conceitos de simetria e reflexão por aprendizes sem acuidade visual:

Como evoluem os significados associados à simetria e reflexão dos aprendizes cegos durante os diálogos instrucionais e como esta evolução é influenciada pelos sistemas mediadores?

No próximo capítulo decorremos sobre a fundamentação teórica da metodologia que utilizamos para a estruturação das entrevistas e das tarefas aplicadas aos sujeitos e destacamos os aspectos metodológicos do desenvolvimento das ferramentas materiais, das entrevistas e das tarefas, elucidando sobre nossas escolhas metodológicas.

CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Que verdade libertadora (...) o cego desenvolve uma superestrutura psicológica com base na função falha, com uma única tarefa: substituir a visão; o surdo, de todas as maneiras, desenvolve meios de superar o isolamento e a reclusão da mudez!... Não sabíamos que um defeito não é apenas pobreza psicológica, mas também uma fonte de riqueza, não só fraqueza, mas também uma fonte de força.

(Vygotsky, 1997, p.47) Tradução nossa.

3.1. INTRODUÇÃO

Nossas escolhas metodológicas foram feitas a fim de que pudéssemos estabelecer uma variedade de entendimentos a respeito da capacidade cognitiva e dos processos cognitivos dos sujeitos envolvidos nessa pesquisa, quando os objetos de estudo são noções geométricas. Sendo os sujeitos desta pesquisa indivíduos cegos, os dados empíricos a serem analisados centram-se nas ações e nos diálogos. Os processos interacionais (diálogos) e as ações nos permitem perceber e avaliar as estratégias utilizadas pelos sujeitos para a realização das tarefas.

Quando usamos o termo ação, o fazemos de acordo com a visão de Goodwin (2000, p.1492), que propõe que a ação humana seja analisada em termos de “configurações contextuais”: uma abordagem interacional que investiga o uso simultâneo de múltiplos recursos semióticos pelos participantes, tais como diferentes classes de fenômenos sócio-cognitivos que emergem do fluxo da fala, da expressão gestual, da produção e uso de registros materiais e da manipulação de artefatos.

O suporte metodológico dessa pesquisa é dado por Vygotsky (1998a, 1998b) – Método da dupla estimulação e por Goldin (2000) – Entrevistas baseadas em tarefas.

3.2. O MÉTODO DA DUPLA ESTIMULAÇÃO

O método da dupla estimulação foi desenvolvido por Vygotsky em contraposição aos métodos tradicionais de pesquisas usados por seus contemporâneos em Psicologia. Esses métodos limitavam-se a oferecer aos sujeitos *estímulos simples*²², dos quais se esperava uma resposta direta (Vygotsky 1998a, p.98), o que permitia analisar somente o nível atual de desenvolvimento intelectual do sujeito, através do estudo das respostas externas já contidas no repertório do sujeito. Para Vygotsky era preciso um método de pesquisa que possibilitasse o estudo dos processos de desenvolvimento por meio dos quais surgem formas novas e superiores de funcionamento intelectual (Valsiner e Veer, 1996, p. 187).

Vygotsky postulava que um experimento deveria ter por objetivo estudar “o curso do desenvolvimento de um processo” e para isso deveria oferecer o máximo de oportunidades para que o sujeito experimental se engajasse nas mais variadas atividades, que deveriam ser observadas e não rigidamente controladas (Cole e Scribner, 1998, p. 16). Assim, os dados fornecidos por esse experimento não indicariam apenas o nível de desempenho com tal, mas os métodos pelos quais o desempenho foi atingido. Por essa perspectiva, o ambiente experimental torna-se um contexto de investigação em que o pesquisador pode manipular sua estrutura para desencadear (mas não produzir) a construção pelo sujeito de novas formas de resolver problemas.

²² Para Vygotsky “é o ser humano quem decide que alguns estímulos podem servir como meios para operar sobre outros estímulos, criando, assim, duas classes de estímulos: os estímulos-meios ou signos e os estímulos-objetos. Quando estas duas classes de estímulos são combinadas num só ato, Vygotsky falava de atos instrumentais” (Valsiner e Veer, 1996, p. 241).

No método da dupla estimulação o sujeito é colocado “frente a uma tarefa que excede em muito os seus conhecimentos e capacidades” (Ibid, p. 17). Essa tarefa é proposta dentro de uma situação estruturada e o sujeito recebe uma orientação ativa, por parte do pesquisador, no sentido da construção de uma estratégia (que ainda não existia para o sujeito) para a realização da tarefa (Valsiner e Veer, 1996, p. 187).

Ao usar essa abordagem, não nos limitamos ao método usual que oferece ao sujeito estímulos simples dos quais se espera uma resposta direta. Mais do que isso oferecemos, simultaneamente, uma *segunda série de estímulos* que têm função especial. Dessa maneira, podemos estudar o *processo de realização de uma tarefa com ajuda de meios auxiliares específicos*; assim, também seremos capazes de descobrir a estrutura interna e o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores (Vygotsky, 1998a, p. 98).

O estímulo simples, para Vygotsky, é um objeto neutro colocado à disposição do sujeito durante a realização da tarefa que, naquela situação, adquire a função de um signo através do qual o sujeito, para solucionar um problema, cria ligações temporárias e lhe atribui significados.

Nessa pesquisa, as tarefas serão propostas e executadas a partir das ferramentas materiais que desenvolvemos cujo papel é oferecer a primeira série de estímulos aos sujeitos. Um segundo estímulo é proporcionado pela pesquisadora através de suas intervenções.

As ferramentas materiais têm a função de auxiliar na formação de uma imagem mental pelos sujeitos (não videntes), para que a partir dessas “imagens” eles possam estabelecer relações e formular concepções sobre os objetos de estudo. Essas ferramentas materiais são descritas em detalhes na seção 3.4.1.

Cole e Scribner (1998, p. 18) destacam implicações importantes sobre o método proposto por Vygotsky. Uma delas é que os resultados experimentais podem ser tanto qualitativos quanto quantitativos. As descrições detalhadas, baseadas em

observações cuidadosas são partes importantes do processo experimental e se realizadas objetivamente e com rigor científico adquirem o *status* de fato confirmado. Vygotsky (1998a, p. 98) destaca ainda que “o método da dupla estimulação provoca manifestações cruciais no comportamento de pessoas de todas as idades”. Considerações importantes para nossos estudos que justificam a escolha dos sujeitos desta pesquisa.

A metodologia proposta por Vygotsky foi inovadora em sua época. Hoje, aproxima-se dos métodos de pesquisas empregados na Educação Matemática. Por exemplo, na metodologia apresentada por Goldin (2000) que complementa o suporte metodológico dessa pesquisa.

3.3. ENTREVISTAS BASEADAS EM TAREFAS

Goldin (2000) sugere que a coleta de dados feita a partir das entrevistas baseadas em tarefas oferece um caminho para analisar os conceitos ou estruturas conceituais, cognição ou estruturas cognitivas, competências, atitudes, estágios de desenvolvimento, sistemas de representação interna e estratégias que os sujeitos têm ou utilizam ao executar tarefas.

A estrutura de entrevistas baseadas em tarefas para o estudo do conhecimento matemático envolve, minimamente, um sujeito (executor da tarefa) e um entrevistador, interagindo em relação a uma ou mais tarefas introduzidas pelo entrevistador ao sujeito de modo pré-planejado. Esta estrutura precisa levar em conta as propostas da pesquisa. Isso inclui investigação exploratória, descrição, inferência ou técnicas de análises; desenvolvimento de conjecturas; investigação ou testes para levantar hipóteses; aprendizagem ou solução de problemas. Esse método permite que o pesquisador centre o foco de sua atenção diretamente no processo do desenvolvimento da tarefa matemática executada pelo sujeito. Mais do que respostas certas ou erradas interessam ao pesquisador o processo de obtenção dos resultados.

O que está em consonância com as idéias de Vygotsky, ou seja, a pesquisa não se centraliza apenas no resultado final da tarefa, mas sim em descobrir os meios, métodos e estratégias utilizados pelos sujeitos para organizar o seu próprio comportamento, ou seja, “permite estudar o processo total da formação de conceitos em todas as suas fases dinâmicas” (Vygotsky, 1998b, p. 72).

Uma característica da estrutura das entrevistas baseadas em tarefas é que as intervenções fazem parte do processo de desenvolvimento da metodologia a ser aplicada à pesquisa. Nessa metodologia as intervenções devem permitir ao sujeito planejar e desenvolver heurísticamente uma forma competente para executar a tarefa proposta. O sujeito sabe que haverá intervenção durante a entrevista e a execução da tarefa. É claro que intervindo na solução do problema o resultado segue por um caminho diferente daquele tomado sem nenhuma intervenção. O que, nesse método qualitativo de pesquisa, traz elementos para análises posteriores, já que o desejado é explorar as características do processo de aprendizagem de um determinado grupo, no nosso caso de indivíduos cegos, e investigar as articulações feitas por esses sujeitos, entre os seus conhecimentos matemáticos disponíveis e os conceitos que se pretende explorar.

Acreditamos que a importância dada por Goldin (2000) as interferências e inferências feitas pelo pesquisador seja o elo entre essa metodologia e o método da dupla estimulação desenvolvido por Vygotsky (ver 1.2.4) para suas pesquisas.

Goldin (2000) indica princípios metodológicos para desenhar e construir entrevistas baseadas em tarefas, desses destacamos os pontos principais que foram norteadores na estruturação das sessões deste trabalho.

O desenho da entrevista baseada em tarefas deve ser endereçado as questões de pesquisa que devem influenciar o desenvolvimento de instrumentos (a escolha das tarefas e das ferramentas materiais), a decisão sobre quais conhecimentos queremos observar, o critério para as interferências e outras variáveis controláveis, e ainda devem ser cuidadosamente preparados para a comunidade

de pesquisa a que se destinam no nosso caso aprendizes cegos. As questões devem ser estruturadas de tal forma que o sujeito tenha a oportunidade de se corrigir, voltar atrás ou até mesmo comprovar suas hipóteses. As entrevistas devem ser estruturadas de tal forma que o sujeito possa interagir com a diversidade de representações e com o ambiente externo de aprendizagem.

As tarefas matemáticas devem ser acessíveis aos sujeitos, e escolhidas de tal forma que permitam ao sujeito flexibilidade nas respostas e que deixem evidente ao pesquisador a emergência de diferentes capacidades do sujeito. Os sujeitos devem executar as tarefas livremente, para que o pesquisador possa observar os seus conhecimentos e reações espontâneas. Sugestões ou novas questões devem ser oferecidas somente depois de dar ao sujeito a oportunidade de resolver o problema livremente. Os momentos de assistência não devem ter a característica diretiva.

Para Goldin (2000) a estrutura das entrevistas deve deixar espaço para que o pesquisador possa fazer adaptações para o novo ou para possibilidades não previstas. A exemplo do método da dupla estimulação, proposto por Vygotsky, em que o controle máximo do pesquisador; sobre o que acontece no experimento, não é uma regra modal (Valsiner e Veer, 1996, p. 429).

3.4. DESENVOLVIMENTO DAS ENTREVISTAS BASEADAS EM TAREFAS

O desenvolvimento das entrevistas dividiu-se em duas partes: o desenvolvimento das ferramentas materiais e o desenvolvimento das tarefas. O que inclui escolher algumas questões “neutras²³” que poderiam ser usadas pela pesquisadora, a fim de favorecer o diálogo e que permitissem aos sujeitos estabelecer relações.

²³ Goldin (2000, p. 522) denomina como neutras intervenções do tipo: “Você poderia me explicar isso?”, “Como você pensou?”, “Você poderia me mostrar isso usando esse material?”.

O primeiro desafio, que enfrentamos na estruturação das entrevistas, foi produzir os meios que nossos sujeitos usariam para explorar figuras geométricas e expressar suas propriedades e relações.

3.4.1. O DESENHO DAS FERRAMENTAS MATERIAIS

Durante o desenvolvimento das ferramentas materiais, nossa atenção estava voltada para que tais ferramentas não fossem apenas artefatos usados na situação instrucional, mas que assumissem um caráter semiótico que além de atender as necessidades especiais dos sujeitos de pesquisa, pudessem viabilizar o acesso desses sujeitos aos conceitos matemáticos em estudo.

Sendo o tato um sistema sensorial com características específicas, uma de nossas preocupações foi desenhar ferramentas materiais confortáveis para nossos sujeitos. Procuramos usar texturas não agressivas, mas que permitissem aos sujeitos captar o maior número de informações possíveis. Além disso, queríamos construir ferramentas materiais que fossem economicamente acessíveis, isto é, que pudessem ser replicadas a um baixo custo.

Antes de chegar à forma final das ferramentas utilizadas nesta pesquisa fizemos alguns protótipos, que foram testados por um sujeito sem acuidade visual o qual chamaremos de Caio que teve baixa visão até os dezoito anos quando perdeu totalmente a visão. Os estudos-piloto foram realizados em três sessões. A primeira delas foi audiogravada e as seguintes videogravadas. Caio nos auxiliou não só em relação às ferramentas materiais, mas também nas tarefas a serem propostas.

Dois tipos de ferramentas foram desenvolvidos. A primeira para ser usada nas tarefas iniciais que tratariam de figura simétricas, e a segunda para o estudo de figuras simétricas e de reflexão.

3.4.1.1. FERRAMENTA MATERIAL 1

As tarefas iniciais tinham o propósito trabalhar figuras simétricas. Para isso o primeiro protótipo de ferramenta desenvolvido replicava uma das tarefas propostas a aprendizes videntes por Healy (2002). Na pesquisa de Healy os aprendizes realizaram essa tarefa usando papel e lápis, neste estudo o papel e lápis deveriam ser substituídos por outro material que facilitasse a percepção tátil. Na Figura 3.1 apresentamos uma foto da primeira ferramenta que desenvolvemos.

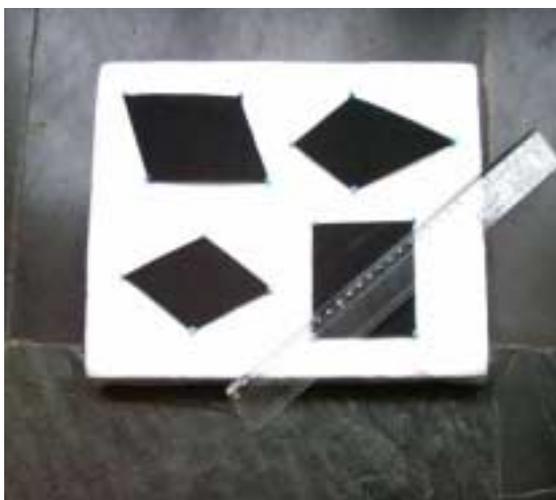


Figura 3.1: Primeiro protótipo

Nessa ferramenta os polígonos foram feitos com material emborrachado e fixados numa placa de isopor. Seus vértices, destacados por alfinetes, facilitariam a percepção tátil e o uso de outros tipos de materiais como régua, esquadro e transferidor. Esses materiais preparados para aprendizes com necessidades especiais são facilmente manipulados por eles. Mas, durante os testes-piloto, a rigidez do material indicou que ele era inadequado para a execução da tarefa pelos nossos sujeitos, pois limitava a escolha de estratégias que poderiam ser aplicadas.

No segundo protótipo (Figura 3.2) fizemos os polígonos em papel canson, procedimento similar ao empregado por Argyropoulos (2002) que utilizou figuras

feitas com cartolina. O uso do papel canson além de favorecer a exploração tátil de lados e ângulos, permite que o sujeito faça várias dobraduras sem que o vinco prejudique a forma do polígono. Essa acabou sendo a forma final dessa ferramenta.



Figura 3.2: Polígonos em papel canson

3.4.1.2. FERRAMENTA MATERIAL 2

A segunda ferramenta material destina-se a execução das tarefas relativas à reflexão. Os resultados das pesquisas já citadas (ver 2.7) nos levaram a optar pelo trabalho com grade, ou seja, replicar uma folha de papel quadriculado na ferramenta.

Em pesquisas sobre ferramentas materiais usadas para o ensino de Matemática, encontramos o *geoboard*²⁴ cuja invenção é atribuída a Caleb Gattegno (1911–1988) por volta de 1950 quando trabalhava em Londres (Dunkels, 1999). Entretanto, segundo Ozanam (1844, p.11), a idéia de construir uma ferramenta para o ensino de Matemática dentro desse padrão surgiu por volta de 1720. O

24 Na literatura consultada, alguns autores traduzem *geoboard* como *geoplano*. O objeto Geoplano é usualmente formado por um pedaço de madeira, com dimensão aproximada de 20x20 cm, e por pregos, formando um quadriculado. Passando um elástico circular entre estes pregos, formamos os polígonos. Hoje, encontramos o Geoplano Computacional - um software do tipo educacional.

matemático inglês Nicholas Saunderson (1682-1739) professor da Universidade de Cambridge, que perdeu a visão no seu primeiro ano de vida ao contrair varíola, desenvolveu um método que ele chamou de “Aritmética palpável” para o estudo da aritmética e do cálculo algébrico. Esse método é aplicado com o auxílio de um instrumento similar ao ábaco e ao *geoboard* (Jackson, 2002). O *geoboard* padrão consiste em um quadrado de madeira com 25 pregos distribuídos igualmente em 5 linhas e 5 colunas.

Nosso primeiro protótipo (Figura 3.3) era composto por uma placa de isopor (representando o plano euclidiano) e por alfinetes (representam os pontos do plano) que determinavam a grade. Os alfinetes foram dispostos em nove linhas e nove colunas dando a ferramenta à forma de um quadrado. As figuras eram feitas com um fio bem flexível.

Logo no primeiro teste essa ferramenta apresentou problemas. Os alfinetes não se fixavam de modo adequado na placa o que dificultava a manipulação das figuras e a distância entre os alfinetes (quatro centímetros) não facilitava a execução das tarefas, mas o problema principal foi sua forma quadrangular.

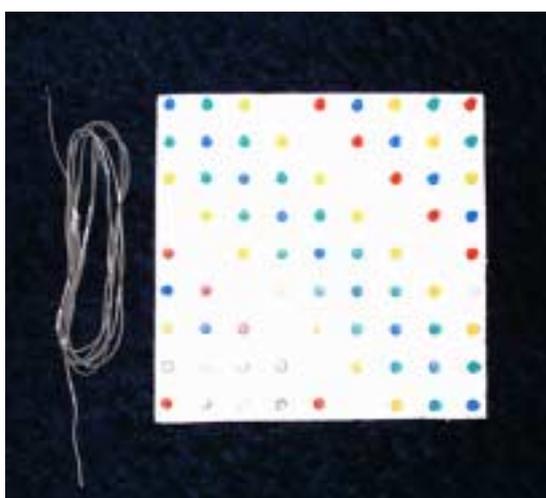


Figura 3.3: Primeira forma da ferramenta de desenho

Numa das tarefas propostas a Caio solicitamos que ele construísse a figura-imagem da figura-dada em relação ao eixo de simetria (Figura 3.4a). Sua resposta pode ser vista na Figura 3.4b.

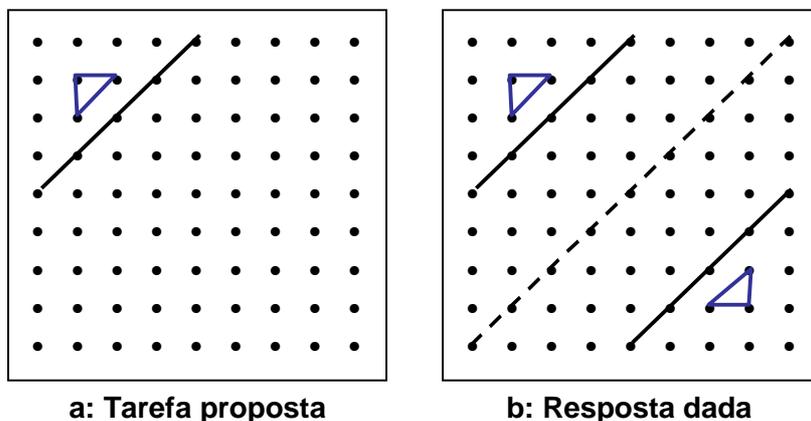


Figura 3.4: Uma tarefa dos estudos piloto

O sujeito “imaginou” um eixo de simetria posicionado na linha pontilhada (Figura 3.4b) e fez a reflexão não só da figura como do eixo de simetria. Pela análise que fizemos do teste piloto a forma quadrada da ferramenta parece ter induzido o sujeito a trabalhar no nível intrafigural, pois para ele figura, o eixo de simetria e os pontos do plano foram vistos como um único conjunto – uma só figura.

No segundo protótipo (Figura 3.5), procuramos reparar o que poderia representar obstáculos nos procedimentos empíricos. Além da forma retangular da ferramenta que substituía a forma quadrangular, o modo de representar os pontos do plano também foi alterado. A fim de favorecer a fixação das formas geométricas, os pontos de intersecção da grade passaram a ser furos onde colocamos buchas, que fixavam parafusos nos quais as fendas foram substituídas por argolas. Essas argolas representavam os vértices das figuras que eram feitas com canudos de plástico. À distância entre os pontos foi reduzida, passou a ser de três centímetros.

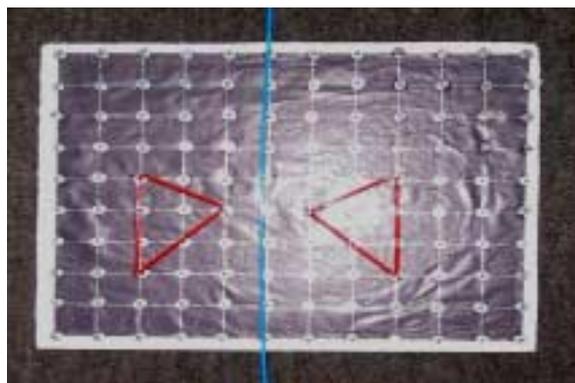


Figura 3.5: Segunda forma da ferramenta de desenho

Esse modelo não se mostrou adequado no teste-piloto, pois além de não favorecer a percepção tátil no que se refere aos pontos da grade, o sujeito encontrava dificuldade para representar as formas geométricas, já que para fechá-las era necessário que numa única argola houvesse duas extremidades de um mesmo canudo. Além disso, durante a exploração tátil as figuras, algumas vezes, eram desfeitas. Mas um ponto positivo deve ser apontado. Ao contrário do que ocorreu no modelo anterior (favorecimento do nível intrafigural), esse modelo pareceu-nos propício à transição entre os níveis intra e interfigural minimamente.

Iniciamos a estruturação do terceiro protótipo (Figura 3.6), procurando, mais uma vez, corrigir os problemas apontados nos protótipos anteriores. À distância entre os pinos que representariam a grade já havia se mostrado satisfatório no último modelo mencionado, assim como a forma da ferramenta (retangular). Restava-nos fixar de forma adequada os pinos e encontrar um modo adequado para representar as figuras.



Figura 3.6: Forma final da ferramenta de desenho

A base dessa ferramenta é feita de madeira e os pinos que representam os pontos do plano são pregos de aço com cabeças arredondadas para favorecer, e tornar confortável, a percepção tátil. As formas geométricas são feitas com elásticos (compostos por borracha natural) que favorecem a representação das formas geométricas e permite que elas fiquem perfeitamente ajustadas aos seus vértices não se desfazendo durante a exploração tátil. Para representar pontos usamos massa de modelar. Esse modelo mostrou-se adequado, nos testes-piloto, aos nossos propósitos sendo assim utilizada no desenvolvimento dos estudos empíricos.

Antes de iniciarmos o trabalho com essa ferramenta solicitamos aos sujeitos de pesquisa que fizessem à exploração tátil e nos dissessem suas impressões a seu respeito. Interessava-nos tanto os aspectos relativos a regularidades na forma quanto o conforto oferecido ao tato para o trabalho. A ferramenta foi aceita pelos sujeitos que declararam não só ser a ferramenta confortável como também destacaram com facilidade regularidades importantes na realização das tarefas, como:

- *“Temos 12 pinos na horizontal e 10 na vertical”.*
- *“Os pinos estão à mesma distância um do outro”.*
- *“Usando esses pinos podemos fazer muitas figuras, por exemplo, quadrados, retângulos ou qualquer outra que se queira”.*

3.4.2. TAREFAS

As tarefas propostas em nossas sessões de entrevistas foram estruturadas com base em pesquisas anteriores (ver 2.7). No Anexo 3 apresentamos as tarefas que serão propostas aos sujeitos desta pesquisa. Nesta sessão descrevemos como, essas tarefas foram divididas, o objetivo de cada um dos grupos de tarefas;

algumas das estratégias que poderiam ser empregadas pelos sujeitos e as variáveis controláveis²⁵ adotadas.

As tarefas serão propostas em dois grupos, conforme o diagrama abaixo, a serem descritos.

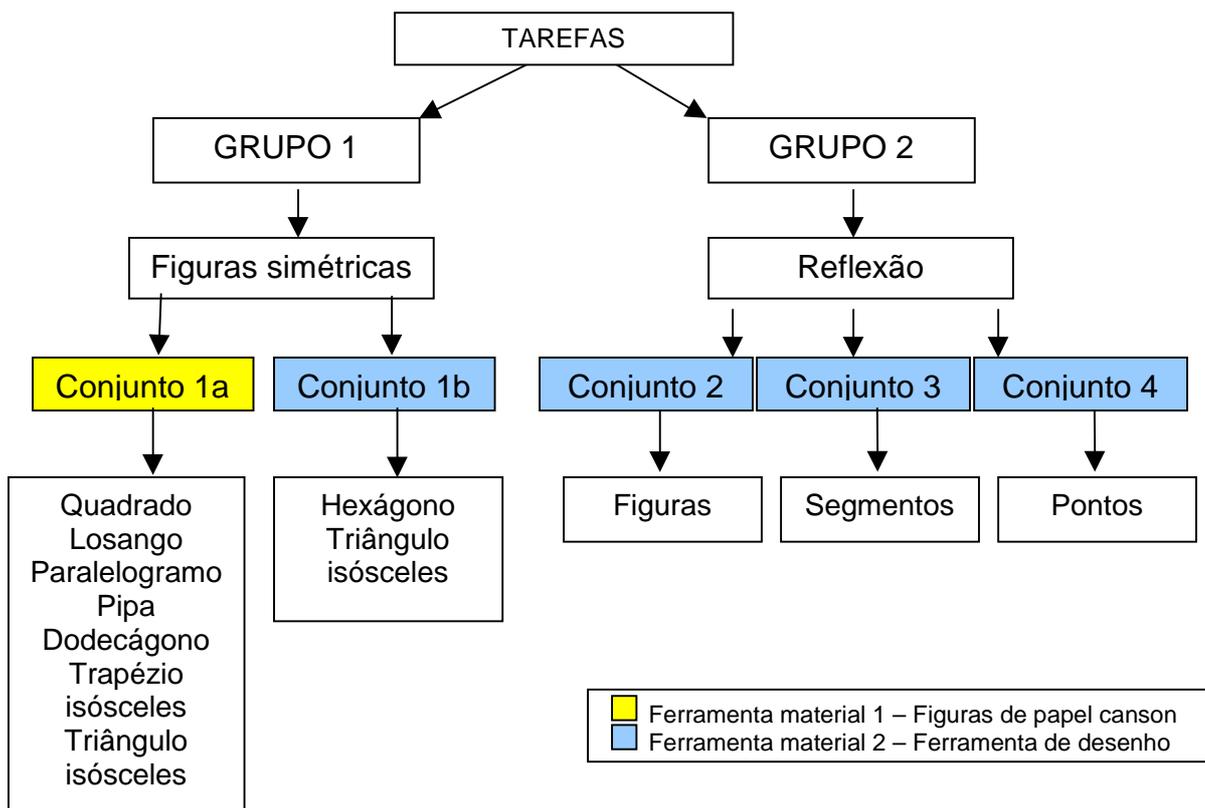


Diagrama 3.1: Estrutura das tarefas

3.4.2.1. O PRIMEIRO GRUPO DE TAREFAS

O objetivo desse grupo de tarefas é estudar as propriedades de figuras simétricas. A pesquisadora oferecerá inicialmente a cada um dos sujeitos, quatro dos cinco quadriláteros que fazem parte do Conjunto 1.a (quadrado, losango, paralelogramo e pipa), que deverão ser classificados de acordo com o número de

²⁵ Denominamos variáveis controláveis aspectos das tarefas como os explicitados na seção 2.7. No nosso estudo são eles: a posição do eixo de simetria (horizontal, vertical ou inclinado), posição relativa eixo-objeto e a forma geométrica (figura, segmento ou ponto).

eixos de simetria. Nesses quadriláteros, com exceção do paralelogramo, há ao menos um eixo de simetria que ocupa a posição de uma das bissetrizes, assim, o trabalho com o trapézio isósceles e com o dodecágono tem o objetivo de fazer com que os sujeitos percebam que “ser bissetriz” não é uma condição suficiente para ser eixo de simetria. Nesses polígonos o eixo de simetria ocupa a posição da mediatriz de um dos seus lados. Na representação do triângulo isósceles (Conjunto 1.a e 1.b) o eixo de simetria ocupa a posição da bissetriz de um dos seus ângulos (oposto a base) e da mediatriz da base. Na representação do hexágono, cada um dos seus eixos de simetria ocupa uma posição, um deles a posição de bissetriz e o outro a posição de mediatriz de um dos seus lados.

No Conjunto 1.a, os sujeitos poderão utilizar dois tipos de estratégias para sua realização. Uma das estratégias é usar uma régua especialmente projetada para deficientes visuais, onde a cada centímetro há uma pequena peça de metal que permite ao sujeito avaliar medidas através da percepção tátil. Uma outra estratégia seria fazer dobraduras na posição do eixo de simetria. Representamos abaixo (Figura 3.7) cada um dos polígonos estudados e seus respectivos eixos de simetria, quando esses polígonos possuem.

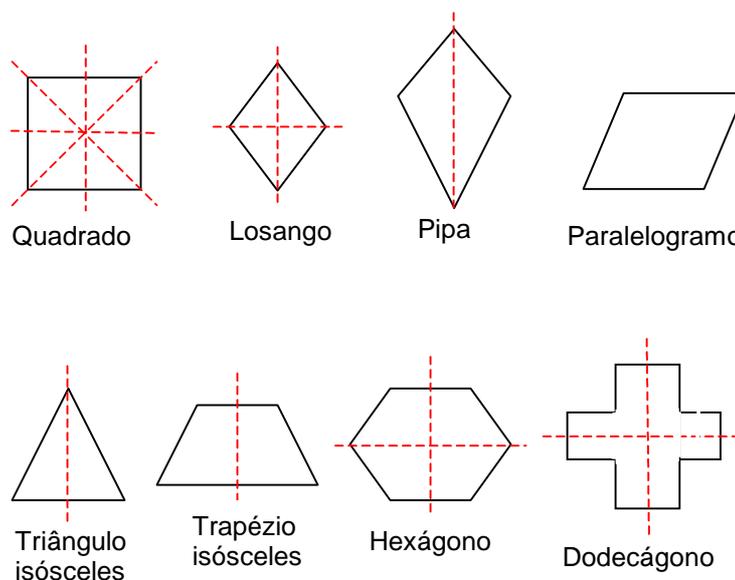


Figura 3.7: Polígonos

Na realização desses conjuntos de tarefas esperamos que os sujeitos trabalhem no nível intrafigural, e iniciem a internalização de propriedades associadas à simetria e a apropriação das “vozes matemáticas” relacionadas aos termos que envolvem esse conceito.

A exemplo do sugerido por Vygotsky (1998, pp. 71-72), na realização das tarefas desses conjuntos, os sujeitos começarão a ter contato com termos matemáticos, como, por exemplo, *eixo de simetria*, que serão explorados e usados pela pesquisadora e pelos sujeitos até o final do procedimento empírico (voz matemática). Assim, os meios para a realização das tarefas serão introduzidos gradualmente através dos diálogos, o que nos permitirá estudar o processo dinâmico de aquisição de conhecimentos ligados a esses objetos matemáticos.

3.4.2.2. O SEGUNDO GRUPO DE TAREFAS

Sendo nosso enfoque a transformação geométrica reflexão e suas propriedades, e não o conjunto das isometrias como estrutura, o Grupo 2 de tarefas foi estruturado para favorecer a operacionalidade entre os níveis intra e inter. Inicialmente não temos a expectativa de chegar à etapa transfigural, pois acreditamos que o sistema háptico pode limitar as representações mentais do espaço euclidiano representado pela ferramenta material, já que por suas características, permite aos cegos perceber as informações das partes que compõe o conjunto figuras-plano, para que a partir dessas, possam formular uma imagem mental do conjunto todo.

Os Conjuntos 2, 3 e 4 de tarefas serão realizados na ferramenta de desenho, e estruturados para o estudo sobre *reflexão* em relação a um eixo. Cada um deles estuda a reflexão de diferentes formas geométricas. O Conjunto 2 foi estruturado para o estudo de reflexão de figuras em relação a um eixo, o Conjunto 3 para o estudo da reflexão de segmentos e o Conjunto 4 a reflexão de pontos em relação a um eixo. Nos três conjuntos, as tarefas propostas na ferramenta de desenho,

alternam a posição do eixo de simetria entre horizontal, vertical e oblíquo, e a posição das formas geométricas representadas em relação ao eixo de simetria, como pode ser visto no Anexo 3 onde representamos as tarefas que compõe esses conjuntos.

3.5. PERFIL DOS SUJEITOS

Os sujeitos de pesquisa foram escolhidos com base em diversos pontos que foram levantados durante nossas leituras. Alguns deles já citados nas seções anteriores, outros serão citados no decorrer deste texto.

Nessa pesquisa trabalharemos com dois sujeitos cegos: um portador de cegueira congênita e outro portador de cegueira adquirida. Interessa-nos investigar a influência da memória visual, ou seja, os conceitos cotidianos que poderiam ser articulados durante os diálogos para que os sujeitos pudessem estabelecer relações entre esses conceitos e os conceitos científicos - simetria e reflexão. Nesse caso, o sujeito portador de cegueira adquirida possui memória visual - elementos do passado - que poderiam fazer parte dos diálogos quando necessário, tal procedimento não pode ser empregado com o portador de cegueira congênita que afirma não a possui.

O portador de cegueira congênita será chamado pelo nome fictício Lucas. Ele nasceu com uma doença congênita que o levou a perder a visão totalmente aos dois anos de idade tendo, até então, visão subnormal²⁶, o que o faz afirmar não ter nenhuma memória visual.

Iniciamos a primeira sessão de entrevistas com Lucas nos contando sua trajetória na vida escolar. Realizou seus estudos até a conclusão do Ensino Médio, inserido

²⁶ Uma definição simples de visão subnormal é a incapacidade de enxergar com clareza suficiente para contar os dedos da mão a uma distância de três metros, à luz do dia; em outras palavras, trata-se de uma pessoa que conserva resíduos de visão (Gil, 2000, p.6).

em escolas regulares, o que considera ter sido um grande desafio. Desde sua primeira infância recebeu estímulos táteis. Seu primeiro acesso a escola foi num Parque Infantil (creche) da Prefeitura de São Paulo próximo a sua casa, onde Lucas cumpria os horários de atividades com uma professora, numa sala oferecida a eles, e a integração com outras crianças era feita nos horários de recreio.

Sua alfabetização em Braille iniciou-se no ciclo básico. No início de sua vida escolar não havia sala de recursos, hoje implementada em algumas escolas públicas que trabalham com a inclusão de educandos com necessidades especiais. Lucas nos conta que o Estado dispunha de um quadro de professores, nomeados *professores itinerantes*, que acompanhavam os alunos com necessidades especiais até a conclusão dos seus estudos. Até a quinta série do Ensino Fundamental contou com esse acompanhamento especial (aulas dadas individualmente e fora do período de aulas regulares) que, segundo seu depoimento, contribuíram de forma decisiva para seu desempenho escolar. Ele mostrou ter um bom nível de conhecimento matemático e uma boa relação com a Matemática. Especialmente na Geometria, mostrou conhecer elementos que foram fundamentais para o desenvolvimento dos diálogos nas entrevistas, como: ceviana, ponto médio, mediatriz, bissetriz e outros.

Lucas considera um privilégio ter tido a oportunidade de estudar em escolas regulares, com seus pares:

Eu assistia aula normal de tudo. Assistia aula normal, obedecia aos mesmos regulamentos, normas. Eu estava enquadrado no contexto normal da Instituição. O único privilégio que eu tive nisso tudo – eu entendo como um privilégio – foi poder estudar dessa forma, no meio do povo, no meio das pessoas da minha comunidade. Isso para mim foi um privilégio. Agora, fora isso eu não tive privilégio nenhum de passar (de série) e não fazer prova, ou de tirar nota baixa e . . . Eu não tive nenhum privilégio dessa natureza.

A profissão declarada por Lucas foi à de estudante. Faz cursos profissionalizantes na ADEVA (Associação de Deficientes Visuais e Amigos) na área de informática, buscando não só o aprimoramento profissional, mas também uma colocação no mercado de trabalho.

Edson, nome fictício que demos ao portador de cegueira adquirida, nasceu em Pernambuco. Aos sete meses de idade, sua família recebeu o diagnóstico de glaucoma congênito²⁷, o que o fez perder totalmente a visão do olho esquerdo com quatro anos de idade. Sua alfabetização foi feita de acordo com o sistema convencional. Já em São Paulo, submeteu-se a treze cirurgias na tentativa de salvar o olho direito, mas aos quinze anos, após um descolamento da retina²⁸ ficou com dois por cento de visão no olho direito, o que o possibilita ter percepção e projeção luminosas²⁹.

Nesse período começou a fazer curso de reabilitação, o que implica não só na leitura e escrita Braille, mas também no desenvolvimento do sistema háptico ativo. Na época do desenvolvimento dessa pesquisa, Edson cursava a terceira série do Ensino Médio na Escola Estadual Gonzaga Pinto e Silva no período noturno inserido em classe comum e trabalha como recepcionista na ADEVA – Associação de Deficientes Visuais e Amigos.

Ao ser questionado sobre memória visual afirmou tê-la e, não apresentar dificuldades para reconhecer formas que conheceu quando ainda tinha visão, mesmo que as tenha conhecido no período de baixa visão. Na escola não tem acesso à sala de recursos que só funciona no período da manhã e da tarde por falta de funcionários para o período noturno. Para acompanhar e registrar as aulas, Edson usa uma máquina de escrever em Braille de sua propriedade.

²⁷ O glaucoma é uma doença causada pela lesão do nervo óptico (ver Anexo 2) relacionada à pressão ocular alta.

²⁸ Retina é a parte posterior do olho formada em sua maior parte por células nervosas. A retina é o local onde se forma a imagem ou visão que é traduzida pelo cérebro. Descolamento da retina é o desprendimento da retina da parte interna do globo ocular (ver Anexo 2).

²⁹ No primeiro caso (percepção), há apenas a distinção entre claro e escuro: no segundo (projeção) o indivíduo é capaz de identificar também a direção de onde provém a luz (Conde, 2004).

Pretende fazer curso superior e afirma ter muita dificuldade com a Matemática, pois considera os símbolos matemáticos em Braille “*muito complicados*”. Em relação à Geometria, mostrou conhecer ao menos nominalmente, alguns elementos que foram fundamentais para o desenvolvimento dos diálogos, como: ponto médio, bissetriz, perpendicular e outros.

De acordo com Ochaita e Rosa (1995, p. 186) para os deficientes visuais, existe um aumento gradual entre sete e onze anos de idade na compreensão tátil de tarefas espaciais. Quanto aos problemas mais complexos, por exemplo, os que envolvem perspectiva, tornam-se tão difíceis ao tato que só podem ser acessíveis aos videntes ou não videntes que os realizam usando esse sistema sensorial, a partir dos quatorze ou quinze anos.

Sendo nosso objetivo fazer a análise de diálogos e ações por três perspectivas diferentes, a serem citadas: intra, inter e transfigural (Piaget e Garcia, 1987); emergência e manutenção da ZDP (Meira e Lerman, 2001) e apropriação e articulação da voz matemática (Renshaw, 1996), decidimos que nossos sujeitos de pesquisa deveriam ter concluído (ou estarem concluindo) o Ensino Médio.

Acreditamos que os diálogos com esses sujeitos seriam facilitados, pois apesar de não terem estudado transformações geométricas durante sua vida escolar, a linguagem matemática desses sujeitos é mais rica do que os indivíduos ainda na fase escolar inicial. Além disso, a percepção tátil desses sujeitos é mais desenvolvida o que é crucial para a realização das tarefas que são propostas em ferramentas táteis.

Na próxima seção caracterizamos a instituição que se dispôs a acolher este trabalho. Cabe aqui destacarmos a dificuldade que enfrentamos para encontrar uma instituição que nos auxiliasse ou que se dispusesse a abrir suas portas para a realização do procedimento empírico.

3.6. A INSTITUIÇÃO

A Associação de Deficientes Visuais e Amigos – ADEVA é uma organização da sociedade civil sem fins lucrativos, atuante em São Paulo, que mantém seus projetos por meio da colaboração de seus associados, doações, patrocínios e parcerias, da receita de eventos e da produção de impressos em Braille.

Fundada em 1978, tem como meta promover a inclusão do deficiente visual na sociedade por meio de uma educação global integrada e de sua capacitação, reciclagem profissional e inserção no mercado de trabalho, preparando-o para o pleno exercício da cidadania.

Participando ativamente de movimentos reivindicatórios estaduais e nacionais em favor dos deficientes visuais desde 1981, a ADEVA é um modelo de referência nacional na oferta de oportunidades de educação, informação e profissionalização para os deficientes visuais no País.

3.7. ESTRUTURA DAS ENTREVISTAS

Realizamos, com cada um dos sujeitos, três sessões de entrevistas com aproximadamente uma hora e trinta minutos de duração cada uma, que foram transcritas em sua totalidade (ver Anexo 4) para facilitar as análises. Para que possamos analisar em detalhes os mecanismos cognitivos empregados pelos sujeitos, optamos pela gravação em vídeo das sessões, pois muitas estratégias usadas pelos sujeitos na realização das tarefas só poderiam ser percebidas pela pesquisadora através das ações dos sujeitos sobre as ferramentas materiais.

As entrevistas foram divididas em três partes, a serem descritas, como representamos no diagrama abaixo (Diagrama 3.2). Todas as tarefas foram propostas verbalmente aos sujeitos.

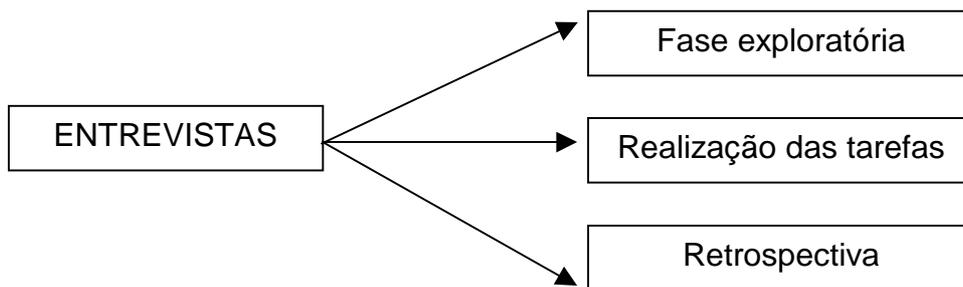


Diagrama 3.2: Estrutura das entrevistas

3.7.1. FASE EXPLORATÓRIA

Durante as entrevistas, consideramos importante que a pesquisadora, em suas intervenções, partisse dos conceitos cotidianos que os sujeitos associam a reflexão e outros aspectos ligados a Geometria, a fim de facilitar o acesso aos conceitos científicos relacionados a transformações geométricas. Para isso, a primeira parte das entrevistas que realizamos tinha o objetivo fazer uma investigação exploratória que nos permitisse identificar as conexões que esses sujeitos estabelecem com termos matemáticos relacionados ao objeto matemático a ser estudado posteriormente, adotando o procedimento utilizado por Healy (2002) em sua pesquisa.

Apresentamos verbalmente a cada um dos sujeitos, e nessa ordem, os termos matemáticos *figuras*, *plano*, *simetria* e *reflexão*. Eles deveriam dar uma definição e explicitar em que contextos encontram esses termos. Se descrevessem um contexto não matemático, estariam nos indicando as conexões que estabelecem entre esses termos matemáticos e seus conceitos cotidianos. Nesse caso, solicitamos que eles procurem estabelecer relações entre esses termos e a matemática escolar. Se o termo descrito fosse conectado a um contexto matemático, o sujeito estaria nos indicando ter conhecimento matemático prévio relacionado a esse termo.

Ainda na fase exploratória os sujeitos tiveram o primeiro contato com a ferramenta de desenho (ferramenta material 2). Nosso objetivo era levantar dados sobre o conforto tátil proporcionado pela ferramenta e sobre a facilidade que essa poderia propiciar na percepção de regularidades.

3.7.2. REALIZAÇÃO DAS TAREFAS

As tarefas propostas aos sujeitos foram planejadas para atender os objetivos deste estudo, mas isso não significa que elas devam ser propostas seguindo uma seqüência rígida. De acordo com os interesses da pesquisa e com o desenvolvimento dos sujeitos, no decorrer das sessões, as tarefas podem ser propostas em ordem distinta, desde que possibilite o desencadeamento de novas concepções sobre os objetos matemáticos que se pretende estudar por parte dos sujeitos ou que se preste a permitir que a pesquisadora possa averiguar a evolução de tais concepções.

3.7.3. RETROSPECTIVA

Ao final dos grupos de tarefas voltamos a apresentar aos sujeitos o termo *reflexão* apresentado na fase exploratória e solicitamos que eles explicitassem esses termos, agora dentro de um contexto matemático. Nosso objetivo era verificar se os aprendizes haviam construído novos significados para este termo e, em particular, se esses significados estavam próximos dos significados aceitos pela comunidade matemática.

Durante a situação instrucional sugerimos que os sujeitos estabelecessem relações entre os termos matemáticos *simetria*, *eixo de simetria* e *reflexão* (conceitos científicos) e sua vida cotidiana (conceitos cotidianos), o que será descrito nos capítulos referentes às análises.

3.8. ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

A transcrição das fitas de vídeo gravadas durante as sessões foi organizada separadamente para cada um dos sujeitos e seguindo a ordem cronológica (Anexos 4.a e 4.b). A análise dessas entrevistas será feita em três dimensões:

- Dimensão 1: Operacionalidade entre os níveis intra, inter e transfigural.
Analisaremos a influência das ferramentas materiais e do tipo de figuras no desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos, ou seja, as transições entre os níveis da tríade inter, intra e transfigural.
- Dimensão 2: A apropriação da “voz matemática”.
Faremos à análise da articulação dos pseudoconceitos na apropriação da “voz matemática” e consideraremos seu papel em eventuais mudanças conceituais por parte do aprendiz.
- Dimensão 3: A emergência e manutenção da ZDP.
Destacaremos aspectos temporais que podem ser percebidos nos diálogos instrucionais (conexões estabelecidas entre passado, presente e futuro) e analisaremos suas relações com a emergência, manipulação e manutenção das ZDPs.

O modelo de análise aplicado a essa dimensão é o proposto por Meira (2002, 2003), no qual as marcações temporais não dependem necessariamente do tempo ou da flexão verbal, mas também das relações entre eventos ocorridos no passado (conhecimentos do passado), a realidade atual (presente) e as realidades possíveis ou projetadas (futuro). Assim é possível explorar o caráter semântico das relações temporais produzidas nas falas dos interlocutores durante o diálogo instrucional.

De acordo com Meira (2003):

. . . não existe uma interpretação única atribuível à relação entre flexão verbal que denota um evento e os aspectos temporais de enunciado. A interpretação dessa relação depende essencialmente do conhecimento que os interlocutores possuem acerca do evento, e/ou sua capacidade para a construção de um cenário plausível no qual a relação entre o tempo verbal e a concepção temporal do evento é apropriada (Meira, 2003, p.6).

Esse modelo tem sido usado por Meira, estando ainda em fase de desenvolvimento, sendo um dos seus objetos de pesquisa atualmente. Nossa intenção ao optar por esse modelo de análise, é examinar sua operacionalidade e talvez colaborar com a pesquisa de Meira.

As convenções utilizadas seguem os padrões propostos por Meira: **P** = Passado; **PR** = Presente; **F** = Futuro; **X** = tempo indeterminado; = mudança de marcação temporal num mesmo enunciado; * = presença das condições necessárias e supostamente suficientes para a emergência do espaço simbólico identificado como ZDP; os textos entre colchetes representam interpretações do discurso do falante.

Nos próximos capítulos apresentamos as análises de acordo com estas três dimensões.

INTERAÇÕES SOBRE FIGURAS SIMÉTRICAS

Freqüentemente se coloca uma questão a respeito da humanidade em geral. Pergunta-se, criticando os sensualistas: se o homem não estivesse dotado de cinco sentidos e sim de quatro, como se formaria seu conhecimento e se produziria seu desenvolvimento mental? Pelo ponto de vista do sensualismo caberia esperar que a carência de um dos cinco sentidos levasse a formação de um quadro completamente distinto da realidade e condicionaria a orientação de um desenvolvimento psicológico do homem, absolutamente diferente do que é feito sobre a base dos cinco sentidos.

(Vygotsky, 1997, p. 228) Tradução nossa.

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo pretendemos analisar como a interação entre instrutora-pesquisadora e aprendizes influenciou nas estratégias empregadas pelos sujeitos e como as intervenções realizadas pela pesquisadora possibilitaram o controle das respostas dadas pelos sujeitos.

De acordo com a base teórica adotada nesta pesquisa, no decorrer da situação instrucional, o diálogo entre instrutora e sujeito tem a finalidade de coordenar a atenção e a interação durante as atividades e, gradualmente pode transformar os conceitos do aprendiz.

Na primeira entrevista realizada com cada um dos sujeitos, procuramos conhecer o seu histórico. A sua vida escolar, o tipo de relação que eles têm com a Matemática, a relação com o seu meio social, e no caso de Edson como foi o seu

percurso desde o diagnóstico de visão subnormal, até a perda total da visão. Esses dados foram apresentados na descrição do perfil dos sujeitos (Seção 3.5).

Neste capítulo iniciamos as análises pertinentes a cada uma das fases do procedimento experimental. Para tanto, consideraremos tanto os diálogos entre pesquisadora-instrutora e sujeitos como as ações dos sujeitos sobre as ferramentas materiais e realizaremos essas análises tendo por base as três dimensões explicitadas no capítulo anterior (Seção 3.8). Essas análises serão feitas num primeiro momento individualmente para cada um dos sujeitos e posteriormente faremos a comparação entre as estratégias e concepções desses sujeitos. Nossa intenção é avaliar, também, a influência da memória visual na combinação dos elementos – constituídos a partir dos campos perceptivos – do presente e passado.

Segundo Vygotsky (1998a p.48), “a memória não somente torna disponíveis fragmentos do passado como, também, transforma-se num método de unir elementos da experiência passada com o presente”. Nesta pesquisa interessamos investigar a influência da memória no caso do portador de cegueira congênita (Lucas) e do portador de cegueira adquirida (Edson), tendo em vista que o portador de cegueira adquirida possui memória visual (elementos do passado) que portador de cegueira congênita não possui.

Iniciamos nossas análises pela fase exploratória que nos dará os indicadores das perspectivas dos sujeitos em relação aos conceitos a serem estudados antes de iniciarmos nossas intervenções, a seguir procedemos as análises do Conjunto 1 de tarefas.

4.2. ANÁLISES DA FASE EXPLORATÓRIA

Nesta fase do procedimento experimental, a pesquisadora apresentou verbalmente a cada um dos sujeitos, os termos matemáticos *figuras*, *plano*,

simetria e *reflexão*, aos quais os sujeitos deveriam atribuir um significado conectado a um contexto matemático ou não matemático, ou seja, deveriam explicitar as conexões que estabelecem entre esses termos matemáticos e seus conceitos cotidianos antes de vivenciarem a situação instrucional que se seguiria.

4.2.1. O TERMO FIGURA

Antes do início das entrevistas, a pesquisadora esclareceu, a cada um dos sujeitos que se tratava de um estudo referente a objetos matemáticos e que o seu papel não era apontar erros ou acertos, mas sim estabelecer um diálogo produtivo que posteriormente seria analisado. Lucas procurou em suas respostas manter conexões com a Matemática, mas não especificamente com a Geometria. Edson mostrou-se menos preocupado com essas conexões.

Ao falar sobre *figura*, Lucas confirmou a declaração de Gil (2000, p.24) de que as informações chegam aos deficientes visuais mediadas por dois canais principais: a linguagem e a exploração tátil. E corroborou com duas elucidações de Vygotsky apontadas no Capítulo 1. A primeira delas em relação à formação de imagem mental de uma forma, captada e processada a partir do sistema háptico ou tato ativo, o que nos remete a idéia de Vygotsky sobre a substituição do olho por outro instrumento, nesse caso, as mãos. Outra, a importância da linguagem, como um dos principais sistemas mediadores da informação para os portadores de necessidades especiais, que os permitem, no caso de não terem acesso a algum outro tipo de informação, formular uma imagem mental de um objeto a partir das informações verbais recebidas de outros indivíduos.

Lucas: ... Para o deficiente visual que nunca enxergou figura é uma coisa complicada. A gente tem uma idéia da figura depois que a gente tocou essa figura. Sem o toque fica difícil definir uma figura.

Pes: Então você conhece as formas pelo toque?

Lucas: É. Se eu já tive algum acesso tátil sim, se não, não. A gente tenta fazer uma idéia de acordo com que as pessoas falam.

Trecho 4.1: O termo figura³⁰.

Edson respondeu prontamente: “*Figuras são formas, desenhos*”. Para nós a lembrança das formas e desenhos estudados quando ele tinha visão – elementos do passado - o permitiu estabelecer conexões com termo matemático empregado no presente. Edson, a exemplo do que foi dito por Lucas, afirma que uma nova figura só pode ser conhecida através do tato.

4.2.2. O TERMO PLANO

Lucas e Edson não indicaram dificuldades para falar sobre o termo plano, mas nenhum dos dois conectou este termo a um contexto matemático explicitamente, como pode ser visto nas transcrições abaixo.

Edson: Meu braço está sobre a mesa que é um plano. O chão é plano... É reto.

Lucas: Um plano é uma coisa mais fácil de reconhecer. É uma coisa para nossa memória mais simples. Se você tocar, quase tudo você pode considerar um plano.

Tanto para Edson como para Lucas, o termo plano foi associado a superfícies, mas não a superfícies ligadas diretamente a um contexto geométrico, e sim a sensações percebidas a partir de suas experiências cotidianas. Edson teve a preocupação de destacar que “*plano é reto*” e de estabelecer comparações entre planos e os objetos que faziam parte do nosso cenário, como mesa e chão (conceitos cotidianos).

³⁰ Falas de 22 a 24 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

4.2.3. O TERMO SIMETRIA

Para Lucas, simetria é o resultado de uma comparação entre duas “*figuras ou dois planos com formas diferentes*”.

Lucas: ... É simples desde que você tenha uma idéia fixa, uma idéia concreta na cabeça. Concreta no sentido de bem definida. É possível se fazer uma simetria sim, com garantia bastante boa de acerto.

Pes: Por exemplo?

*Lucas: É! Duas **figuras**, por exemplo, dois **planos** com formas diferentes é uma coisa que você consegue fazer uma diferenciação, uma comparação, digo assim.*

Pes: Ai, você espera um resultado dessa comparação?

Lucas: Isso. Acaba gerando um resultado na minha maneira de entender satisfatório.

Trecho 4.2: O termo simetria³¹

Para exemplificar Lucas usou alguns termos introduzidos no diálogo pela pesquisadora, como figuras e planos, mas nesse ponto da entrevista parece que Lucas está “ventriculando” a voz da pesquisadora, ou seja, estes termos foram usados de forma sintaticamente correta, sem que o sujeito tenha atribuído ao termo simetria o significado convencional do conceito científico envolvido.

Edson afirma ter ouvido falar do termo simetria na escola, mas não se lembra se na aula de Geometria, Física, Química ou Biologia. Edson diz não saber o que é simetria e não tenta estabelecer nenhuma relação entre este termo e seu repertório de experiências pessoais.

³¹ Falas de 30 a 34 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

4.2.4. O TERMO REFLEXÃO

Edson associa ao termo reflexão a idéia de “refletir sobre”, como podemos verificar no texto abaixo:

Edson: É quando você pensa no que vai fazer. É ficar sozinho com você mesmo.

Trecho 4.3: Reflexão para Edson³².

Lucas, num primeiro momento, estabelece uma relação bastante próxima a de Edson para o termo reflexão, posteriormente tenta associar o termo reflexão a um contexto matemático ligado a análise de resultados estatísticos, talvez por ter ciência que a pesquisa envolvia um estudo matemático.

Lucas: Reflexão é uma coisa que dá para conceituar também. Eu consigo muito bem conviver com o fato da reflexão.

Pes: Dá um exemplo.

Lucas: É! . . .Estatística, por exemplo. Estatística sobre alguns dados, alguns números, por exemplo. Comparação a uma situação diretamente ligada aquela estatística. Dá para fazer uma reflexão bastante segura.

Trecho 4.4: Reflexão para Lucas³³.

De qualquer forma, Edson e Lucas não associam reflexão ao contexto geométrico, nem nos dão indícios de associá-lo a conceitos cotidianos como imagens produzidas sobre superfícies polidas ou espelhos a exemplo das associações estabelecidas por aprendizes videntes (ver Seção 2.4).

³² Fala 20 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

³³ Falas de 36 a 38 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

4.2.5. EXPLORAÇÃO DA FERRAMENTA DE DESENHO

Antes de iniciarmos as tarefas oferecemos aos sujeitos a ferramenta material 2 (ferramenta de desenho) para que, através da exploração tátil, eles pudessem nos dar indicadores sobre sua funcionalidade. Além do reconhecimento da ferramenta, interessava-nos as sensações táteis, de conforto ou desconforto, que ela provocaria, mas Lucas vai, além disso. Ele diz que a ferramenta parecia ser uma ferramenta para cálculos e a compara a uma planilha eletrônica. A pesquisadora solicita que ele destaque regularidades que puderam ser percebidas, e com facilidade ele destaca que os *pinos estão alinhados* e que à *“distância entre esses pinos era sempre a mesma”*.

Os dois sujeitos declararam ser a ferramenta de desenho confortável ao tato, e Edson não aponta nenhuma regularidade importante que pode ser percebida.

4.2.6. CONSIDERAÇÕES SOBRE A FASE EXPLORATÓRIA

Algumas considerações sobre os resultados da fase exploratória devem ser destacadas por corroborarem com a base teórica deste estudo ou por serem importantes para o andamento da pesquisa.

Os dois sujeitos evidenciam não ter conhecimento prévio sobre transformações geométricas, pois esses termos (figuras, planos, simetria e reflexão) foram escolhidos por conectarem-se diretamente com este objeto matemático. Lucas, apesar de indicar ter um conhecimento ao menos intuitivo sobre simetria, não consegue explicitar nenhuma das propriedades de figuras simétricas, a partir da comparação entre elas. A princípio, os sujeitos não explicitam *conceitos cotidianos* que possam ser utilizados pela pesquisadora como ponto de partida para o estudo de transformações geométricas e simetria, ou ainda que permita

conectá-los a concepções alternativas que possibilitem aos sujeitos aproximar-se de um conhecimento matemático “oficial”, ou seja, *conceitos científicos*.

4.3. ANÁLISES DO GRUPO 1 DE TAREFAS

Cabe a esse grupo de tarefas o estudo de figuras simétricas e suas propriedades. O trabalho, com esse grupo de tarefas, realizou-se em duas partes – Conjuntos 1a e 1b, respectivamente. O Conjunto 1a, proposto na ferramenta material 1 (figuras de papel canson), foi apresentado em três etapas, cuja descrição feita a seguir não indica uma ordem de realização.

- I. Os sujeitos receberam da pesquisadora o quadrado, o losango, a pipa e o paralelogramo. A pesquisadora solicitou que os sujeitos indicassem qual dos quadriláteros apresentava um, dois, quatro ou nenhum eixo de simetria.
- II. A pesquisadora entregou aos sujeitos o trapézio isósceles e o dodecágono, que deveriam ser identificados por ter um ou dois eixos de simetria.
- III. Os sujeitos trabalharam com o triângulo isósceles com a orientação de determinar o seu eixo de simetria.

O Conjunto 1b, proposto na ferramenta material 2 (ferramenta de desenho), envolveu a determinação dos eixos de simetria do hexágono e do triângulo isósceles, com as mesmas dimensões do representado em papel canson. As instruções foram dadas verbalmente e de uma só vez e repetidas sempre que os sujeitos solicitaram.

Para o estudo de figuras simétricas e reflexão, um conceito fundamental é o *eixo de simetria*. Assim, para que o sujeito pudesse realizar as tarefas que seriam desenvolvidas durante as sessões, centramos, inicialmente, nossa atenção no

estudo de figuras simétricas com o objetivo de levar o sujeito a apropriar-se do conceito de eixo de simetria e suas propriedades.

4.3.1. O TRABALHO DE LUCAS NO CONJUNTO 1 DE TAREFAS

Sempre dizendo ao sujeito o que estava sendo feito, a pesquisadora coloca na ferramenta de desenho um elástico de tal forma que seja reproduzido um triângulo isósceles (Figura 4.1a), e pede que Lucas identifique essa forma. Ele faz a exploração tátil deslocando sua mão de forma intencional concentrando-se apenas no elástico que forma a figura e nos pinos que ficaram no interior da mesma.

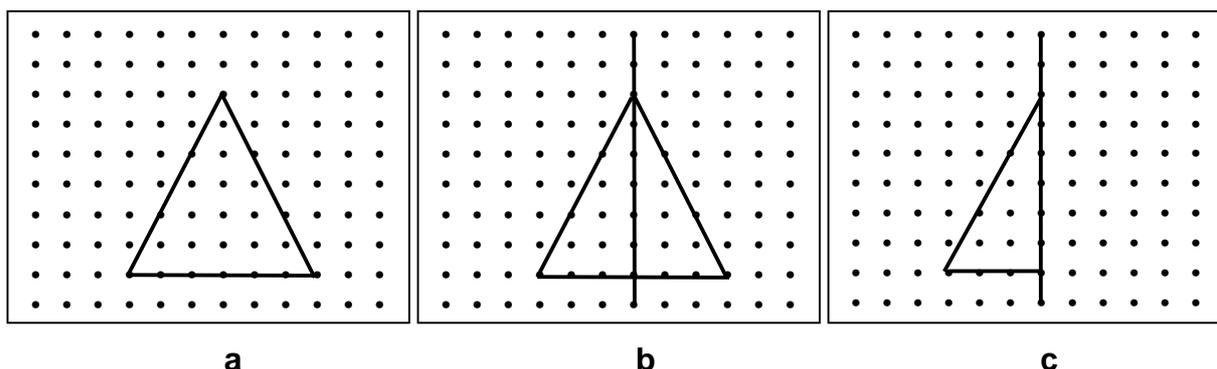


Figura 4.1: Trabalho inicial na ferramenta de desenho

Lucas prontamente reconheceu um triângulo e o classificou como isósceles por “*ter dois lados iguais e um diferente*”. Ao perceber que o sujeito reconheceu e classificou o triângulo com facilidade, a pesquisadora o estimulou a falar mais deste triângulo. Numa primeira análise, acreditamos que as propriedades apontadas poderiam auxiliar nas relações a serem estabelecidas entre essa figura simétrica e seu respectivo eixo de simetria, já que representavam conhecimentos do passado que estavam sendo articulados no presente. Lucas destacou então outras propriedades do triângulo isósceles como: a “*base dele é diferente dos outros dois lados e os ângulos da base são iguais*”.

A pesquisadora posiciona um segundo elástico na posição do eixo de simetria do triângulo (Figura 4.1b) e pede a Lucas que fale sobre esse segundo elástico. Após a exploração tátil, Lucas classifica esse segundo elástico como “*uma reta ceviana que dividiu o ângulo (indica o vértice) em dois ângulos*”, o que nos sugere que Lucas conhece algumas propriedades que caracterizam uma bissetriz. Como, nosso interesse nesse ponto da entrevista, era levar o sujeito a reconhecer propriedades do eixo de simetria de uma figura simétrica, a pesquisadora procura provocar o sujeito a falar sobre o que esse segundo elástico havia feito com o triângulo representado na ferramenta de desenho, ao que se segue um diálogo produtivo do qual reproduzimos um trecho que é analisado na seqüência.

Lucas: Ele acabou formando na verdade dois triângulos escalenos. Triângulos de lados diferentes.

Pes: E você consegue estabelecer alguma relação entre esses dois triângulos?

Lucas: A medida de um dos lados dos triângulos; das bases dos triângulos são iguais.

Pes: Então o que você pode me dizer sobre as duas extremidades da base do triângulo em relação a esse segundo elástico?

Lucas: Essas duas extremidades (aponta os vértices da base do triângulo isósceles) em relação a esse segundo elástico?

Pes: Isso.

Lucas: Você procurou colocar esse segundo elástico num ponto que a gente chama de ponto médio dessa base. Por exemplo, você calculou o ponto médio e a partir do ponto médio você traçou essa linha mediana.

Trecho 4.5: Estabelecendo relações³⁴

Lucas percebe que o eixo de simetria dividiu o triângulo isósceles em dois triângulos escalenos (conhecimentos do passado), e trabalhando no nível intrafigural, percebe a congruência entre “as bases dos dois triângulos”.

³⁴ Falas de 74 a 80 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

A fim de levá-lo a ampliar seus conhecimentos geométricos, a pesquisadora pede que ele observe a posição dos dois vértices da base do triângulo isósceles em relação ao eixo. Na resposta dada por ele, pode-se notar outros conhecimentos apropriados no passado, como *ponto médio* e *mediana*. Ao termo *ponto médio* (conhecimento do passado) era de nosso interesse que ele o conectasse com a propriedade de equidistância entre o eixo de simetria e os pontos simétricos (conhecimento futuro).

Com a intenção de facilitar o acesso de Lucas a um novo conceito matemático a pesquisadora decide introduzir a “voz matemática” ao discurso, oferecendo a ele um nome para esse segundo elástico:

Pes: Na Matemática, dentro do conceito que queremos estudar, esse segundo elástico que colocamos é chamado eixo de simetria.

Trecho 4.6: A voz matemática³⁵

Lucas repete o termo *eixo de simetria* como se produzisse um eco da fala da pesquisadora. A partir daí, passa a usar esse termo com características distintas durante o desenvolvimento de nossas sessões, que serão destacados no momento propício. O termo *eixo* que Lucas passa a usar criou a possibilidade de diálogo entre aprendiz e pesquisadora embora, os significados atribuídos a esse termo, pelo sujeito e pela pesquisadora, não sejam os mesmos, como ficará evidente no decorrer desse texto.

Na seqüência, ainda trabalhando com a tarefa ilustrada pela Figura 4.1b a pesquisadora diz a Lucas que esse era um eixo de simetria próprio da figura que estava na ferramenta de desenho, procurando induzi-lo a apontar características próprias desse eixo. Com essa intervenção a pesquisadora não tem êxito em sua investida, pois Lucas não destaca nenhuma propriedade intrínseca do eixo de simetria que possa conduzi-lo ao objeto matemático em estudo.

³⁵ Fala 81 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

Pes: Você consegue enumerar algumas particularidades dele?

Lucas: Ele é maior que a figura.

Pes: Mas esse eixo de simetria é um eixo próprio dessa figura.

Lucas: Não estou conseguindo perceber.

Trecho 4.7: Uma tentativa de identificar mais propriedades³⁶

Nesse trecho do diálogo, em sua primeira intervenção a pesquisadora tentou fazer com que o sujeito percebesse a equidistância entre os pontos das figuras em relação ao eixo de simetria (*futuro*). Em ação, Lucas verificou esta relação contando o número de pinos de cada uma das bases dos triângulos (*presente*) e afirma que o elástico, (eixo de simetria) intercepta o ponto médio da base do triângulo isósceles (*passado*). Mas, a fala seguinte da pesquisadora, parece ter provocado que pesquisadora e sujeito deixassem de compartilhar o mesmo espaço simbólico. Talvez porque, com sua intervenção, ela tenha interrompido a conexão com o passado, ao menos para Lucas. Nesse momento, Lucas passa a tentar adivinhar a propriedade específica que a pesquisadora tinha em mente. Mesmo a tentativa de reparação feita pela pesquisadora não tem êxito.

Para verificar se Lucas havia percebido a relação entre o eixo e a figura, que não havia verbalizado, a pesquisadora propõe uma nova tarefa. Lucas deveria construir a outra parte de uma figura simétrica em relação a um eixo (Figura 4.2c) aplicando o que ele pode perceber na tarefa anterior. Para isso, Lucas poderia usar uma reprodução em papel canson do triângulo isósceles que havia sido trabalhado na ferramenta de desenho. O sujeito explorou, com as mãos, atentamente o triângulo de papel canson, mas não o usou na execução dessa tarefa.

Inicialmente Lucas posiciona o elástico no vértice oposto ao lado que ele chamou “base” (considerando base o lado paralelo ao seu corpo), puxa-o até esse lado, conta três pinos para direita e completa a construção (Figura 4.2). Faz a

³⁶ Falas da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

verificação observando a congruência entre os segmentos que formam a base do triângulo.

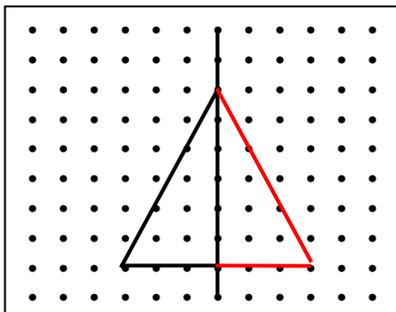


Figura 4.2: A resposta de Lucas

Apesar de não ter explicitado anteriormente relações entre o eixo de simetria e as formas representadas, ele aplica algumas delas para concluir a tarefa, como se pode verificar na declaração feita abaixo:

Lucas: Eu observei em primeiro lugar . . . O eixo de simetria foi importante para mim. Porque esse lado eu já tinha, era tranqüilo para minha observação, então o que eu tomei por base foi exatamente o eixo de simetria. A partir dele e da medida da base do triângulo, desse lado do triângulo (aponta a base) eu usei para construir o complemento dessa figura, ou um outro triângulo. A partir do eixo de simetria (volta a afirmar).

Trecho 4.8: Eixo de simetria por Lucas³⁷

Nesse trecho do diálogo fica evidente o trabalho no nível intrafigural, onde Lucas “vê” dois triângulos como partes de uma única figura, não destacando as relações entre ponto e ponto-imagem. Lucas emprega de forma sintaticamente correta a linguagem da pesquisadora – *eixo de simetria* – embora, o significado atribuído por ele a esse objeto matemático não esteja absolutamente claro. Na tarefa seguinte, suas estratégias indicam que ele não havia se apropriado do significado institucional desse termo, o que nos sugere que ele poderia estar fazendo uso de um *pseudoconceito*, no sentido descrito na Seção 1.3.2.

³⁷ Fala 94 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

A pesquisadora propõe a Lucas uma tarefa que deveria ser proposta no desenvolvimento do Conjunto 2 (Figura 4.3a), na qual caberia ao sujeito construir a *imagem* do triângulo representado segundo um eixo de simetria posicionado verticalmente em relação ao sujeito. A pesquisadora adiciona ao diálogo mais um termo próprio do estudo das transformações geométricas – *imagem*.

Pes: Agora você vai fazer a **imagem** dessa figura em relação a esse eixo (Figura 4.3a) (Posiciona uma das mãos do sujeito sobre a figura e depois sobre o eixo).

Lucas: (Faz a exploração tátil) *Você quer que eu faça a reprodução?*

Pes: Do outro lado do eixo.

Lucas: É. Desse lado de cá (indica o semi-plano da direita).

Pronto (Figura 4.3b).

Trecho 4.9: Construindo imagens³⁸

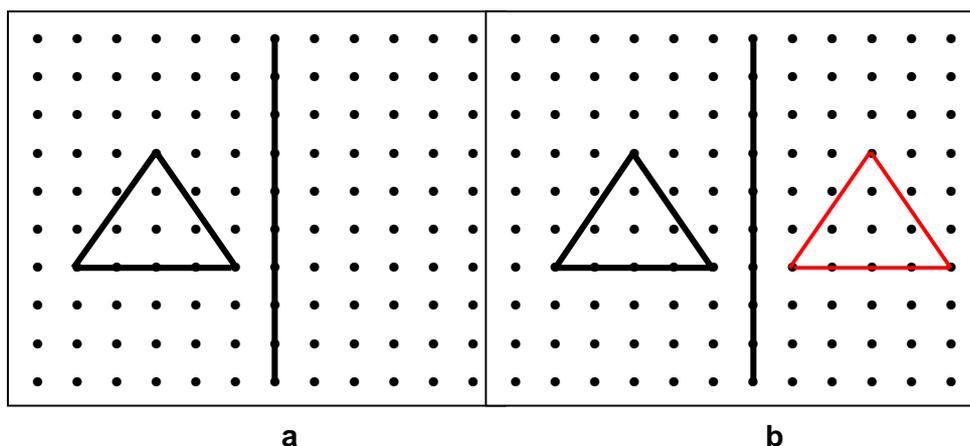


Figura 4.3: A tarefa e a solução de Lucas

Lucas tem êxito na tarefa e a inicia contando o número de pinos do vértice da figura dada ao eixo de simetria. Reproduz a distância do outro lado do eixo e completa o triângulo-imagem tateando o triângulo dado e sua imagem ao mesmo tempo, a fim de certificar-se da equidistância entre as figuras. Faz a verificação observando a congruência entre os dois triângulos, considerando para isso as medidas dos lados.

³⁸ Falas de 95 a 98 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

As falas de Lucas no Trecho 4.9, nos conduziram a buscar respostas para algumas questões. Ao usar a palavra *reproduzir*, Lucas estaria associando ao termo *imagem* uma idéia bastante próxima a dos videntes, ou seja, imagens que conservam forma e distância, mas sem mencionar a direção. Pudemos observar, a partir da ação de Lucas, que ele procurou fazer uma forma idêntica à dada, e para isso procurou manter a equidistância entre os pontos e pontos-imagem em relação ao eixo de simetria e a congruência entre a figura-dada e figura-imagem, mas nada podemos dizer a respeito da inversão de direção, já que a figura-dada representa um triângulo isósceles. No entanto, pensamento geométrico caracterizado pelas relações apontadas acima, denota o trabalho no nível intrafigural, pois se centram nas propriedades internas das figuras e nas relações internas dessas com o eixo de simetria.

Ao perceber que o significado atribuído ao eixo de simetria, por Lucas, parece estar associado apenas com reprodução, a pesquisadora volta às tarefas do Grupo 1, mais especificamente ao Conjunto 1a. Oferecendo ao sujeito o triângulo isósceles feito de papel canson (reprodução do explorado na ferramenta de desenho) propõe verbalmente que ele determine o seu eixo de simetria usando a estratégia que considere ser a mais adequada, colocando a disposição dele uma régua apropriada para pessoas sem acuidade visual dentro dos padrões normais.

Lucas posicionou o triângulo com um dos lados congruentes paralelo ao seu corpo (Figura 4.4) e iniciou a realização da tarefa. Ele procurou dispor a régua na posição que considerava ser a do eixo de simetria, mas ao perceber que essa estratégia dificultava a exploração tátil e a validação de suas conjecturas passou a fazer dobraduras como lhe foi sugerido pela pesquisadora.

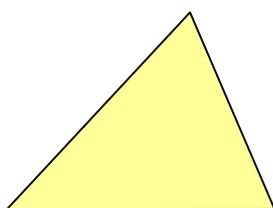


Figura 4.4: Posição do triângulo isósceles

Lucas faz a primeira tentativa fazendo uma dobradura no triângulo a partir da bissetriz de um dos seus ângulos congruentes e o entrega a pesquisadora (Figura 4.5), ao que se segue o seguinte diálogo:

Pes: Você pode me explicar por que esse é o eixo de simetria?

Lucas: (Faz a exploração tátil) Não é. Não ficou certo.

Trecho 4.10: Primeira discordância³⁹

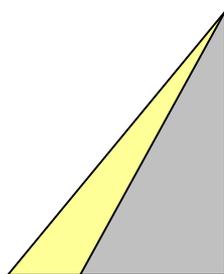


Figura 4.5: Primeira tentativa

Quando a pesquisadora pede que Lucas justifique sua resposta, ele começa a fazer imediatamente a exploração tátil de todos os lados do novo triângulo formado, e percebe não ter conseguido a sobreposição dos dois triângulos obtidos através da dobra. Lucas tenta novamente, usando agora o ponto médio de um dos lados congruentes do triângulo (Figura 4.6).

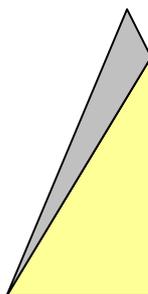


Figura 4.6: Segunda tentativa

Sendo, como já mencionamos o triângulo entregue a Lucas uma réplica do oferecido na ferramenta de desenho (fixo), ao entrar em contato com o triângulo de papel canson (não fixo), o sujeito usou a imagem mental formulada a partir do

³⁹ Falas de 105 a 106 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

triângulo fixo elegendo “como base” um dos lados congruentes o que o levou a não ter êxito em duas de suas tentativas. Lucas só abandonou essa idéia quando a pesquisadora sugeriu que ele tentasse outro vértice:

Pes: Você usou só um vértice. Tem mais dois para tentar.

Lucas: É mesmo.

Trecho 4.11: Uma reparação⁴⁰

Através da exploração tátil, o sujeito passou a avaliar as medidas dos lados do triângulo escolhendo o vértice oposto ao lado não congruente para vincar o eixo de simetria, realizando a tarefa com sucesso. Para validar sua resposta verifica a sobreposição dos lados e ângulos do triângulo.

Analisando as duas primeiras tentativas de Lucas, observamos que ele associa, apropriadamente, o eixo de simetria a bissetriz e a mediatriz, assim sua falta de êxito deveu-se a escolha do lado do triângulo tomado por base. Para nós esse problema está associado ao material concreto (a mobilidade do triângulo feito em papel canson) e não as concepções de Lucas.

Esse tipo de tarefa favorece a etapa intrafigural, já que para a sua realização o sujeito deve apenas preocupar-se com as propriedades internas da figura, ou com as relações internas das “duas figuras” criadas a partir do eixo de simetria, o que resulta na comparação dessas figuras, mas queremos aqui apontar um obstáculo, descrito por Argyropoulos (2002), sobre a importância da primeira imagem mental formulada pelo deficiente visual de uma figura dada.

Para Argyropoulos, o primeiro estímulo háptico tem grande importância e pode predominar no desenvolvimento dos conceitos desses sujeitos. Lucas posicionou inicialmente, o triângulo isósceles, com um dos lados congruentes paralelo ao seu corpo, e não preocupou-se em verificar se essa posição coincidia com o que lhe

⁴⁰ Falas de 107 a 108 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 114.

foi oferecido na tarefa anterior, o que o fez formular respostas como as representadas na Figura 4.7.

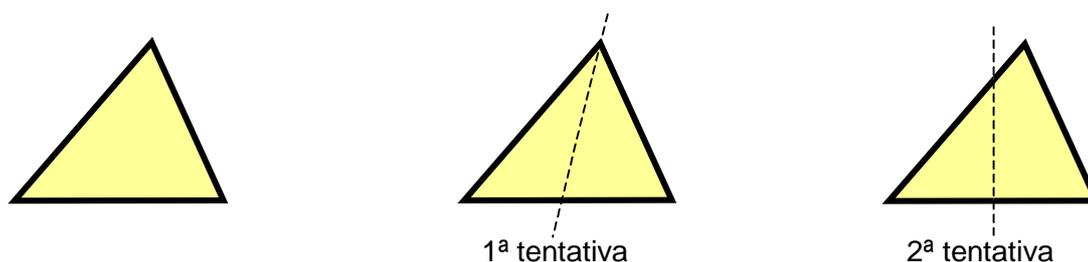


Figura 4.7: Primeira imagem mental

Segundo Argyropoulos as imagens mentais formuladas através do tato permitem ao aprendiz sem acuidade visual estabelecer relações com seus conhecimentos do passado, produzindo assim um novo conhecimento (adquirido de forma háptica), que em outra experiência estará disponível. Nesse exemplo, Lucas aplicou seus conhecimentos do passado sobre triângulo isósceles e estabeleceu relações entre esses conhecimentos e eixo de simetria.

Usando uma visão vygotskiana, a produção de novos conhecimentos gerados a partir do uso de mediadores adequados aumenta a capacidade de atenção e de memória e, permite maior controle voluntário do sujeito sobre sua atividade, o pode desencadear um processo de desenvolvimento da formação de conceitos, já que o desenvolvimento dos conceitos científicos começa com o domínio da consciência e da volição. Elevando a um nível mais alto esses novos conhecimentos pressupomos certo nível de desenvolvimento dos conhecimentos do passado. Por sua vez, numa nova experiência, esses novos conhecimentos assumirão a posição de conhecimentos do passado, que permitirão a reestruturação da estrutura cognitiva do aprendiz. Esse encadeamento entre ascendente e descendente pode propiciar as condições necessárias para a emergência da ZDP.

Para nos certificarmos que Lucas havia se apropriado dos conceitos que envolvem figuras simétricas, as tarefas seguintes continuaram a explorar essas

figuras. Lucas recebeu da pesquisadora o trapézio isósceles e o dodecágono do Conjunto 1a, com a orientação de escolher qual das figuras apresenta um único eixo de simetria e qual apresenta dois eixos de simetria. Usando a estratégia de dobraduras, o sujeito realiza a tarefa com sucesso numa única tentativa. Na seqüência a pesquisadora oferece a Lucas os quadriláteros, que completam o Conjunto 1a (quadrado, losango, pipa e paralelogramo), e o orienta no sentido de selecionar qual deles apresenta um, dois e quatro eixos de simetria e qual deles não apresenta eixo de simetria. Após a exploração tátil do conjunto de quadriláteros, Lucas começa a fazer dobras e entrega a pesquisadora cada um dos quadriláteros explicitando o número de eixos de simetria. Para validar seus resultados, ele verifica a congruência, através da sobreposição, das formas determinadas a partir da dobra que indica a posição do eixo de simetria. Essa foi à última tarefa proposta a Lucas na primeira entrevista.

Antes do início das tarefas na segunda sessão, a pesquisadora faz com Lucas uma retrospectiva do que foi discutido na sessão anterior, com o objetivo de saber se os conceitos estudados foram internalizados e quais concepções, Lucas desenvolveu sobre tais conceitos. Ao lembrar do encontro anterior Lucas menciona imediatamente simetria e eixo de simetria, e afirma ter encontrado esses termos em “*outros lugares*” como, por exemplo, “*num programa de televisão*”, no qual ele ouviu uma discussão sobre simetria. Isso nos sugere que esse conceito matemático percorreu, no caso de Lucas, um caminho distinto dos videntes, indo do científico para o cotidiano.

Ao falar de eixo de simetria Lucas destaca algumas relações importantes, das quais destacamos:

“Ele serve para que eu possa fazer uma comparação”.

“Entre duas figuras, dois planos”.

“Ele serviu para dividi-las em duas figuras iguais”.

“Ele dividiu a figura em duas figuras iguais em medidas de lados. Mesma forma”.

As relações explicitadas por Lucas nos levam a concluir que para ele simetria tem uma forte associação com congruência e a pesquisadora aproveita a fala do sujeito para introduzir mais uma vez a “voz matemática” atribuindo as figuras que apresentam eixos de simetria o nome de *figuras simétricas*, termo que ele repete imediatamente como se a fala da pesquisadora produzisse um eco.

Com o intuito de fazer com que Lucas explicita a relação entre eixo de simetria e os ângulos e lados das figuras simétricas, a pesquisadora usa o quadrado e a pipa que ele manipulou no encontro anterior. Primeiramente, a pesquisadora entrega a Lucas a pipa e pede que ele diga o que o eixo de simetria fez com os ângulos dos vértices dessa figura. Prontamente Lucas diz que “os ângulos foram divididos em dois ângulos iguais” e, a pedido da pesquisadora, nomeia essa ceviana de *bissetriz*.

Posteriormente, a pesquisadora entrega a Lucas o quadrado com quatro vincos nas posições ocupadas pelos eixos de simetria. A pesquisadora afirma a Lucas que dois desses eixos ocupam a posição de bissetrizes de seus ângulos e pede que Lucas fale sobre as posições ocupadas pelos outros dois eixos. Com facilidade ele diz que os outros dois dividiram os lados do quadrado em “dois lados iguais”, mas não consegue lembrar o nome dessas “cevianas” quando solicitado. A pesquisadora introduz a “voz matemática” nomeando-o de *mediatriz*, embora não haja evidências, nesse momento, para discernirmos se Lucas havia associado esse termo com as relações de perpendicularidade.

Nesse ponto da entrevista, pareceu-nos que, para Lucas, tanto eixo de simetria como figuras simétricas haviam passado da categoria de conhecimentos novos para conhecimentos adquiridos e que estariam disponíveis em outras atividades experimentais. Para nos certificarmos desse fato, propusemos a Lucas a última tarefa desse conjunto.

Na ferramenta de desenho a pesquisadora posiciona um hexágono (Figura 4.8), e diz a Lucas que tem tantos elásticos quanto os que forem necessários para que ele determine os eixos de simetria dessa figura.

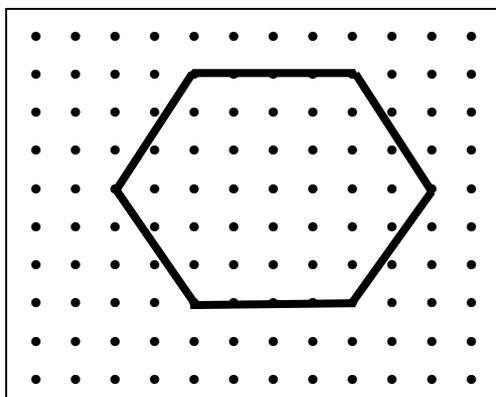


Figura 4.8: Hexágono

Após a exploração tátil, Lucas posiciona o primeiro elástico (Figura 4.9a), empregando a propriedade de mediatriz do eixo, o segundo elástico (Figura 4.9b) tem o caráter de bissetriz. Até este ponto ele emprega as propriedades discutidas com os polígonos de papel canson, mas os dois elásticos posicionados nos pontos médios dos outros quatro lados do hexágono nos surpreenderam. Pareceu-nos que Lucas, a exemplo do que fez no quadrado, considerou que o eixo de simetria deveria “dividir” todos os lados da figura. Foi somente na execução desta tarefa que a diferença dos significados atribuídos, pela pesquisadora e por Lucas, ao objeto matemático – eixo de simetria – ficou evidente. As suas ações sobre a ferramenta material, e as elucidações feitas por ele após a realização dessa tarefa, nos fizeram perceber, com mais clareza, que ele estava fazendo uso de um pseudoconceito.

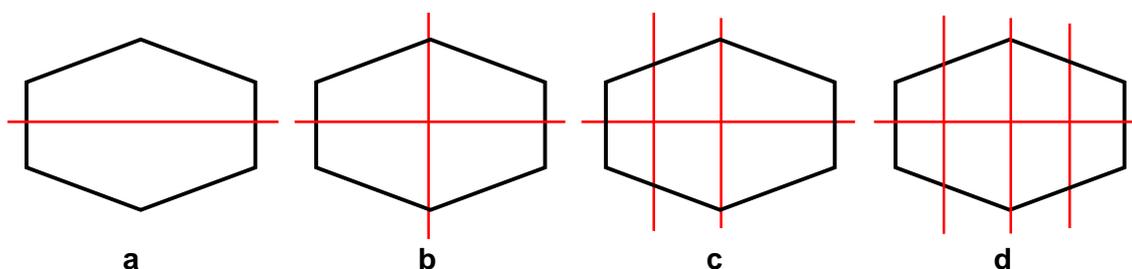


Figura 4.9: A seqüência realizada por Lucas

O trecho reproduzido abaixo mostra como um “mal-entendimento produtivo” acaba motivando a divergência de entendimentos entre sujeito e pesquisadora criando condições necessárias para uma mudança conceitual. O que na visão de Meira (2001) nos permite identificar as possíveis conexões entre eventos passados, presentes e futuros na evolução do discurso matemático, e as formas que os participantes desse diálogo produzem concordâncias, discordâncias e reparações.

Pes: Então você colocou quatro elásticos. Isso quer dizer que tem quatro eixos de simetria? **P X**

Lucas: É. **X**

Pes: Pelo que nós vimos um eixo de simetria não tem relação com outro eixo de simetria. Não é? **P X**

Lucas: É isso. **X**

Pes: Quando você determinou o eixo de simetria das figuras de papel você me mostrou um por vez independente dos outros.

Não é? **P X**

Lucas: É isso. **X**

Pes: Então eu posso tirar três eixos dos que você colocou que o que ficar estará dividindo a figura em duas partes iguais.

P-PR-F (discordância) *

Lucas: Não. Percebo agora que não.

Por exemplo, esses dois não servem (Figura 4.9d) (retira os elásticos da direita e da esquerda). Agora sim. Esse eixo (mostra o vertical) dividiu essa figura em duas iguais. E esse também (mostra o eixo horizontal).

P-PR (reparação) *

Pes: Então nessa figura você encontrou dois eixos de simetria.

P-[PR]

Lucas: Dois eixos de simetria. **X (concordância)**

Trecho 4.12: Um “mal entendido produtivo” ⁴¹

⁴¹ Falas de 31 a 40 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 100.

No trecho do diálogo transcrito acima, cada uma das práticas discursivas dos participantes do diálogo instrucional foi identificada pelo modo que esses participantes usam eventos do passado (**P**) para marcar o presente (**PR**) ou para indicar um caráter prospectivo (**F**). O indicador () representa mudança de marcação temporal, e (**X**) indica tempo indeterminado. De acordo com o modelo proposto por Meira (2002) marcamos com um asterisco (*) as contribuições que, no diálogo, indicam as condições necessárias e supostamente suficientes para a emergência da ZDP.

Podemos apontar alguns aspectos do diálogo entre pesquisadora e sujeito que acreditamos possam ter criado as condições necessárias para a emergência de uma ZDP. Na medida em que a pesquisadora, em suas três primeiras falas, usou a linguagem para conduzir o sujeito a refletir sobre as propriedades matemáticas de figuras simétricas envolvidas na atividade, pesquisadora e sujeito co-construíram e compartilharam um espaço simbólico, onde ambos ficavam mais capazes de estabelecer um diálogo voltado para o objeto matemático em estudo. A posição discordante da pesquisadora e a fala reparativa por parte do sujeito, produziram uma forma de discurso argumentativo, que acabou motivando uma divergência de entendimentos o que propiciou a construção de novos conhecimentos. Desse modo, a interação colaborativa entre os participantes da situação instrucional, capacita o sujeito a ingressar numa forma nova, mais geral e abstrata, de diálogo o que caracteriza um campo simbólico temporal - ZDP.

Essa foi à última tarefa proposta a Lucas que se destinava ao estudo de figuras simétricas. Em nossas análises consideramos que Lucas estava apto para o trabalho com reflexão, já que ele estava usando as principais propriedades de figuras simétricas e do eixo de simetria. Nesse conjunto de tarefas não foi possível verificar a evolução do pensamento geométrico de Lucas em relação aos níveis intra e interfigural, mas em relação à aquisição das vozes matemáticas Lucas estava indo além de ventricular com a voz da pesquisadora. Mesmo tendo, alguns dos termos introduzidos pela pesquisadora, ainda um caráter de pseudoconceito na voz de Lucas, é possível perceber que gradativamente ele

estava apropriando-se deles. Ao final do trabalho com esse conjunto de tarefas, figuras simétricas, para Lucas, são figuras com pelo menos um eixo de simetria, que ele associa a mediatriz de um dos seus lados ou a bissetriz de um dos seus ângulos em vários momentos. Nos diálogos transcritos desse primeiro conjunto de tarefas Lucas não explicita relações entre as figuras representadas de cada lado do eixo de simetria como, por exemplo, a equidistância.

Na seção seguinte executamos o mesmo procedimento realizado para Lucas em relação ao Conjunto 1 de tarefas para o portador de cegueira adquirida Edson.

4.3.2. O TRABALHO DE EDSON NO CONJUNTO 1 DE TAREFAS

Após a fase exploratória e o primeiro contato com a ferramenta de desenho, Edson iniciou a mesma seqüência de tarefas realizadas com Lucas. A primeira tarefa proposta a Edson era o reconhecimento da forma geométrica posicionada na ferramenta de desenho (Figura 4.10a).

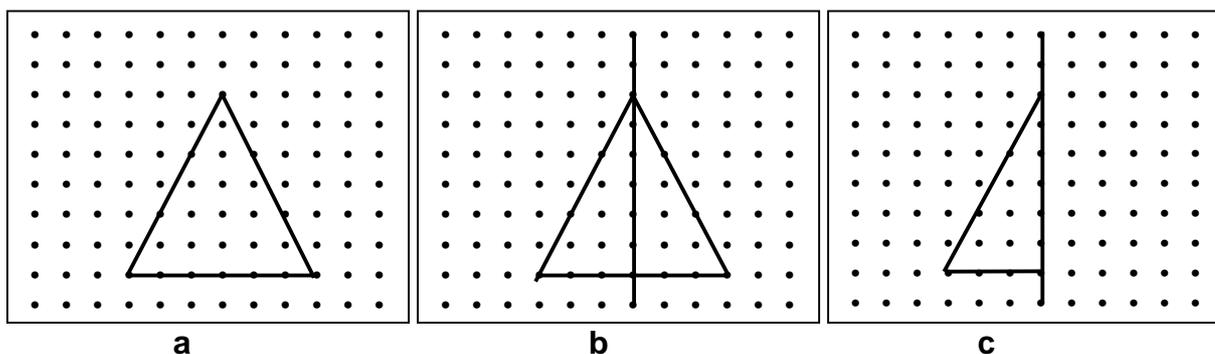


Figura 4.10: A primeira tarefa de Edson

Fazendo uma rápida exploração tátil, ele o classifica como um triângulo e justifica sua resposta dizendo que a figura tem três lados. Ao ser solicitado que ele destaque propriedades desse triângulo, não aponta nenhuma específica de um triângulo isósceles. A breve exploração tátil que fez inicialmente não o permitiu

levantar dados suficientes para classificar o triângulo, por exemplo, quanto aos lados.

A pesquisadora posiciona então um segundo elástico na posição do eixo de simetria, como mostra a Figura 4.10b, e pede ao sujeito que fale sobre o que esse segundo elástico fez com o triângulo. Edson descreve esse segundo elástico como “*um ponto de referência*”, mas não o relaciona ao triângulo. A pesquisadora insiste em sua colocação na tentativa de fazer com que o sujeito centre sua atenção no conjunto eixo – triângulo. O sujeito responde que o segundo elástico “*transformou o triângulo numa seta*”. A pesquisadora entra no jogo do sujeito e pergunta: “*Esse elástico fez alguma coisa com o triângulo além de transformá-lo numa seta*”? Assim consegue fazer com que o sujeito volte a perceber o triângulo.

Edson: Com o triângulo? Dividiu.

Pes: Como?

Edson: Em duas partes. Em dois lados.

Trecho 4.13: Adicionando um eixo de simetria⁴²

A pesquisadora pergunta se ele pode comparar esses *dois lados*, e ele declara que eles têm a “*forma de uma pirâmide*”, ou seja, para ele cada um dos triângulos (retângulos) representava faces de uma pirâmide. Possivelmente, isso se deva ao conteúdo matemático que Edson estava estudando no seu curso escolar – Geometria espacial. Edson pode ter trabalhado, na escola, com os sólidos geométricos representados em papel, reconhecendo assim esses sólidos em duas dimensões⁴³. A pesquisadora decide não questionar Edson a respeito da forma e pergunta se ele *pode comparar esses dois lados*.

Edson: São parecidos, porém de lados opostos

Pes: São parecidos como?

Edson: Foi dividido no meio. Ficou só coluna para um lado e coluna para o

⁴² Falas de 34 a 36 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

⁴³ Esse conflito com o trabalho em duas ou três dimensões, também foi destacado por Healy (2002) em sua pesquisa com aprendizes videntes.

outro lado

Pes: Você está querendo dizer mesma medida.

Edson: Mesma medida.

Pes: Mas está um virado para cada lado.

Edson: Isso. Um para cada lado.

Trecho 4.14: Primeiras propriedades de figuras simétricas⁴⁴

Nos trechos transcritos acima, Edson começa a identificar algumas propriedades ligadas a figuras simétricas. Em, sua primeira fala, Edson indica ter percebido a inversão de orientação da imagem obtida a partir da reflexão de um dos lados do triângulo segundo o eixo de simetria, e a pesquisadora procura explorar mais sua observação de que esses dois lados *são parecidos*. Edson volta a “ver” a forma representada na ferramenta como um único triângulo, pois para justificar sua colocação ele diz que o triângulo *foi dividido ao meio*. Enquanto fala, indica as colunas de pinos da ferramenta, fazendo com que a pesquisadora percebesse que ele estava contando a quantidade de pinos que ficaram no interior da figura, e ainda usando as duas mãos mostrava o mesmo número de pinos de um e de outro lado da figura. Na ação do sujeito é que pudemos perceber que ele referia-se a “*mesma medida*” ou a congruência entre as duas formas.

Na tarefa seguinte, a pesquisadora solicita que Edson realize a tarefa representada na Figura 4.10c, construindo a imagem do triângulo retângulo para produzir um triângulo simétrico (o mesmo triângulo da atividade anterior) com o intuito de levá-lo a perceber a equidistância entre ponto e ponto-imagem, propriedade que ele não havia destacado Edson executa a tarefa com sucesso e atende a solicitação da pesquisadora explicando como havia realizado a tarefa de acordo com o transcrito abaixo:

Edson: É só se basear aqui nessa parte que já tá feita.

Contei da esquerda para a direita quantos pinos tinha aqui em baixo (base do triângulo – contou do vértice em direção ao eixo de simetria). Continuei daqui

⁴⁴ Falas de 44 a 50 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

*mesmo (eixo de simetria) e contei 1, 2, 3, 4. Subi até a ponta de cima seguindo o **referente** (eixo de simetria).*

Poderia também ter contado 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (Contou os pinos da base ao vértice do triângulo sobre o eixo de simetria). No sete eu colocaria o elástico.

O sujeito aplica na construção da figura solicitada as estratégias que estruturou a partir da tarefa anterior, e agrega mais uma, pois para iniciar a construção começa imediatamente, a contar os pinos da base do triângulo representado reproduzindo essa “medida”. Contando os pinos, Edson indica estar usando a equidistância entre ponto e ponto-imagem em relação ao eixo de simetria, e em sua fala pode-se perceber a importância que ele atribuiu ao eixo de simetria para completar a figura, que ele nomeia de “referente”, pois não há no seu vocabulário uma palavra específica para esse objeto matemático.

Pes: Essa referência que você está dizendo foi realmente qual?

Edson: A central. Fiz a outra figura considerando essa central (aponta o eixo de simetria).

Pes: O nome desse elástico na Matemática é eixo de simetria. Tudo que tem de um lado dele tem do outro também, bem como você percebeu: as distâncias são as mesmas, o tamanho é o mesmo, mas fica tudo invertido.

Edson: Sim.

Trecho 4.15: Introdução da voz matemática ⁴⁵

Em sua fala a pesquisadora utiliza o termo empregado por Edson (ventriculando sua voz) ingressando no gênero de diálogo do aprendiz e compartilhando com ele o mesmo espaço simbólico. Edson usa a palavra “central” para indicar o eixo de simetria como pôde ser percebido em sua ação. A pesquisadora introduz pela primeira vez ao diálogo o nome matemático desse objeto, ao atribuir a essa referência um termo não conhecido pelo sujeito (voz matemática), e vincula ao eixo de simetria todas as propriedades destacadas por Edson nas tarefas anteriores.

⁴⁵ Falas de 53 a 56 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

Na ação do sujeito podemos perceber que ele trabalha usando a perspectiva intrafigural, pois, o sujeito, manteve sua atenção voltada às relações internas dos elementos das figuras buscando uma comparação entre elas, não buscando, em nenhum momento, as relações entre figuras-plano.

A pesquisadora propõe que Edson construa a *parceira* da figura representada na ferramenta de desenho, a partir de um eixo de simetria posicionado verticalmente em relação a seu corpo (Figura 4.11a). Ele reconhece a forma como sendo um triângulo, e realiza a tarefa corretamente. Inicialmente posiciona a base, mantendo o mesmo número de pinos do vértice ao eixo de simetria, mas deixa a base da figura-imagem com quatro pinos, enquanto a figura-dada tem cinco pinos (Figura 4.11.b).

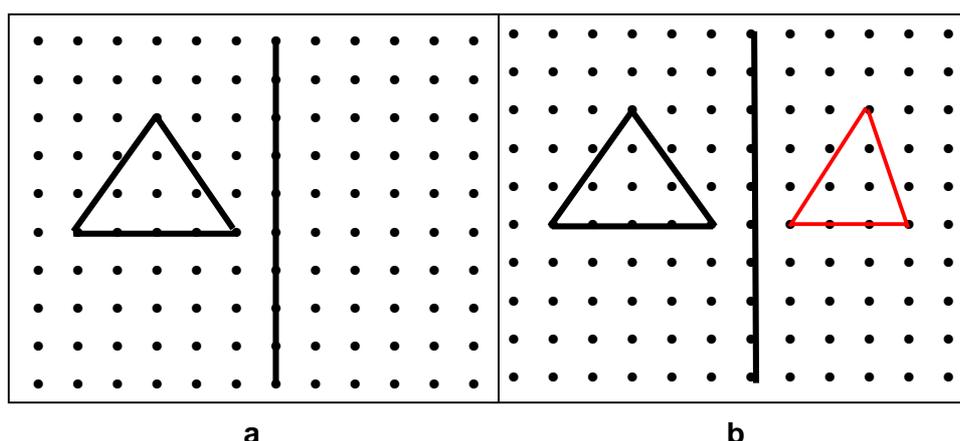


Figura 4.11: A resposta de Edson

Ao explicar a pesquisadora o seu procedimento, Edson tem a oportunidade de corrigir o número de pinos que deve pertencer à base (Figura 4.11b). Para validar sua nova (e correta) resposta conta os pinos que pertencem ao interior de cada uma das figuras, mantendo-se ainda no nível intrafigural. A pesquisadora pergunta então, o que foi importante para ele na realização da tarefa. Na resposta do sujeito, “a primeira figura”, ele não verbaliza a relação entre a figuras e eixo de simetria (ao qual o sujeito atribuiu o nome de referente), o que fez com a pesquisadora adicionasse uma tarefa na seqüência prevista (Figura 4.12a), que originalmente pertencia ao Conjunto 2.

Edson deveria determinar a “*parceira da figura*” representada na ferramenta (Figura 4.12a). Num primeiro momento não posiciona o elástico no vértice do triângulo dado, que está sobre o eixo de simetria e procura manter a distância a exemplo do que fez na tarefa anterior (Figura 4.12b). Para os outros pontos da figura-imagem manteve o número de pontos entre os simétricos em relação ao eixo de simetria. Ao fazer a verificação contando os pinos que ficaram no interior das figuras, percebe que figura-dada e figura-imagem não eram congruentes, e refaz a tarefa com êxito (Figura 4.12c).

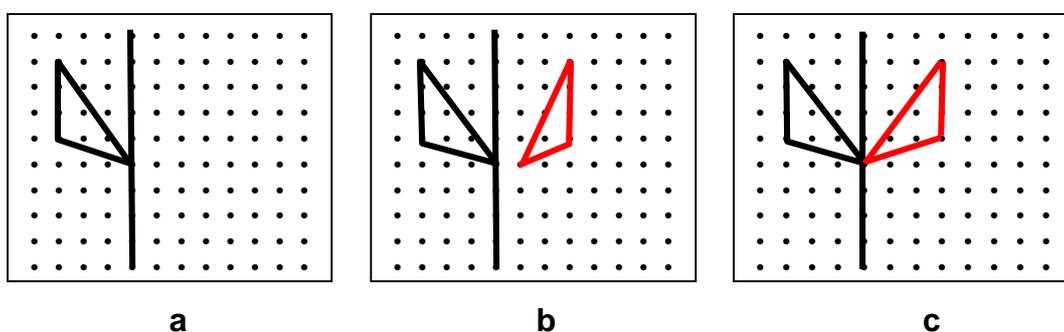


Figura 4.12: Adicionando uma tarefa

Falando sobre a realização dessa tarefa, Edson deixa claro estar empregando a mesma estratégia que estruturou para a realização das anteriores; manter a igualdade entre o número de pontos internos da figura-dada e da figura-imagem, o que caracteriza o trabalho no nível intrafigural.

Apesar de ter êxito nas tarefas Edson não verbalizava propriedades do eixo de simetria, sendo possível perceber somente pelas suas ações que “usar” o eixo de simetria fazia parte de sua estratégia. Para voltar à atenção do sujeito para o eixo, a pesquisadora retoma o roteiro original iniciando as tarefas do Conjunto 1a – figuras simétricas.

Edson recebe o triângulo isósceles recortado em papel canson (com as mesmas dimensões do explorado anteriormente), a fim de envolvê-lo na determinação do respectivo eixo de simetria. A estratégia empregada, pelo sujeito, na realização dessa tarefa foi dobradura, como sugerido pela pesquisadora.

Pes: Lembra o primeiro triângulo que eu coloquei na ferramenta? P

Edson: Sim. X

Pes: Eu fiz o triângulo com elástico e depois coloquei o segundo elástico que nos chamamos de eixo de simetria. Como aquele da ferramenta, esse de papel também tem eixo de simetria, e eu queria que você identificasse esse eixo. P-PR-F *

Edson: O eixo de simetria é sempre o mesmo? Não tem nada para eu por no meio (da figura)? Aqui? X PR

Pes: Você pode dobrar. PR-F

Edson: É esse o eixo de simetria (mostra a dobra que fez). PR

Pes: O eixo de simetria é esse da dobra.

É isso? PR

X

Edson: Isso, porque se você me der outro papel eu vou fazer aqui (mostra o outro lado) igual. Ai vai se tornar o eixo de simetria. [PR]-F *

Trecho 4.16: Construindo um eixo de simetria⁴⁶

Na fala da pesquisadora em que destacamos a combinação temporal **P-PR-F**, temos as condições necessárias, e supostamente suficientes, para a emergência da ZDP. Nessa fala a pesquisadora remete-se a eventos ocorridos no passado – “eu fiz o triângulo com elástico e depois coloquei o segundo elástico que nos chamamos de eixo de simetria” - para levar o sujeito a refletir sobre a situação atual (presente) – “esse de papel também tem eixo de simetria” - a fim de induzir o sujeito a estabelecer novas relações (futuro) – “e eu queria que você identificasse esse eixo”. Na fala seguinte a da pesquisadora, Edson usa pela primeira vez o termo eixo de simetria e nesse momento nos parece que ele o está usando de forma correta.

A pesquisadora propõe que Edson escolha entre o trapézio isósceles e o dodecágono qual deles apresenta um e dois eixos de simetria. Após a exploração

⁴⁶ Falas de 67 a 74 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

tátil e várias tentativas de fazer dobras, Edson diz não ser possível determinar o eixo de simetria de nenhum dos dois polígonos, pois “*falta papel para fazer os dois lados direitinho*”. A pesquisadora volta, então, a trazer para o cenário o triângulo trabalhado anteriormente, e faz com que Edson volte a falar sobre a congruência das formas obtida pela sobreposição a partir do eixo de simetria. Com o trapézio nas mãos, Edson afirma que só poderia determinar seu eixo de simetria se pudesse usar uma tesoura para deixar os dois lados iguais. Ele procurava determinar esse eixo a partir de um dos seus vértices sugerindo dois cortes na figura, como ilustramos abaixo (Figura 4.13).

Pes: Mas aí (no trapézio) tem como você dobrar essa figura para ela ficar duas partes, uma sobre a outra?

Edson: Aqui pelo que eu constato não. Com uma tesoura teria como cortar e deixar.

Trecho 4.17: O eixo de simetria do trapézio isósceles⁴⁷

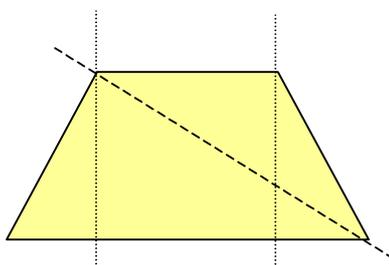


Figura 4.13: As propostas de Edson

Edson não estava percebendo o eixo de simetria como uma propriedade da figura e inicialmente investe no eixo de simetria como sendo a bissetriz de um de seus ângulos, depois para determinar o eixo de simetria acredita ser necessário modificar a figura, ou seja, para Edson o eixo de simetria não é próprio da figura, a figura é que precisa ser modificada para atender as propriedades do eixo de simetria. A pesquisadora volta a usar então o triângulo da tarefa anterior pedindo que Edson explore novamente o triângulo, mas ele mantém-se concentrado na posição de bissetriz ocupada pelo eixo e volta a tentar determinar o eixo de

⁴⁷ Falas de 89 a 90 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

simetria do trapézio a partir de um de seus vértices (Figura 4.13). A pesquisadora volta ao triângulo por mais duas vezes, com a intenção de fazer com que o sujeito vá além da relação eixo de simetria – bissetriz, percebendo também a relação eixo de simetria – mediatriz.

Pes: Na figura que eu lhe dei você está sempre procurando o vértice (para determinar o eixo de simetria), mas pelo que acabamos de discutir não precisamos procurar o eixo de simetria sempre a partir do vértice, podemos procurar dividir também os lados.

Após muitas tentativas, o sujeito não consegue determinar o eixo de simetria de nenhuma das duas figuras. Para sair desse impasse a pesquisadora realiza a tarefa determinando o eixo de simetria do trapézio (Figura 4.14) e entregando-o a Edson, para a exploração tátil ao que se segue o seguinte diálogo.

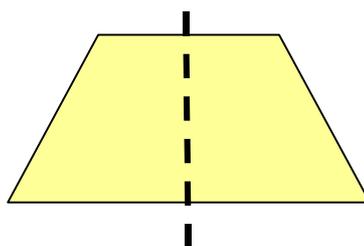


Figura 4.14: O eixo de simetria do trapézio

Pes: Agora eu vou fazer uma dobra para você. O que você acha desse?

Edson: Ficou!

Pes: É eixo de simetria?

Edson: Falta o outro lado.

Pes: Abre ele.

Edson: Ficou, é eixo de simetria sim.

Pes: Agora o que você pode fazer com a outra figura?

(Marca um eixo de simetria no polígono de doze lados).

Só tem esse?

Edson: Não, tem outro aqui, certo?

Pes: Perfeito.

Trecho 4.18: Eixo de simetria - mediatriz⁴⁸

⁴⁸ Falas de 107 a 115 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

A decisão da pesquisadora de determinar o eixo de simetria do trapézio fez com que Edson percebesse que o eixo poderia dividir também lados e o levou a determinar com mais facilidade os eixos de simetria do dodecágono. Mas, pelo que pode ser percebido em sua fala, ele continua procurando o “*outro lado*” para caracterizar o eixo de simetria, ou seja, a figura continua sendo considerada em segundo plano.

Usando a expressão de Renshaw, ele está apenas “ventriculando” a voz da pesquisadora, pois reproduz o realizado na ferramenta de desenho sem atribuir ao objeto matemático *eixo de simetria* uma identidade própria. Para Edson a dobra só representará o eixo de simetria se completarmos a figura. Por essa perspectiva o sujeito está usando um pseudoconceito, ou seja, está empregando de forma sintaticamente correta o termo eixo de simetria mesmo sem ter desenvolvido completamente um novo conceito. Apesar do objeto matemático, eixo de simetria estar em patamares distintos de significado, se comparamos as concepções do sujeito e da pesquisadora, o pseudoconceito é usado como veículo para o diálogo instrucional.

A partir desse ponto, esse termo passa a fazer parte do vocabulário de Edson. No desenvolvimento das tarefas é possível perceber que as concepções do sujeito evoluem em relação ao uso que estava fazendo desse termo em atividades anteriores, e ele começa a fazer conjecturas, dando indícios que o emprego desse pseudoconceito estava promovendo uma mudança em sua estrutura cognitiva.

Edson: Tira uma dúvida minha. Se eu tivesse dois círculos, um aqui e outro aqui (mostra duas posições distintas sobre a mesa) seria um eixo de simetria?

Pes: Se você colocasse um eixo entre os dois de tal forma que a distância entre cada um deles e o eixo fosse a mesma, você teria um eixo de simetria entre os dois círculos.

Trecho 4.19: Levantando conjecturas

Essa conjectura levantada por Edson indica que ele reconhece a congruência entre figura-dada e figura-imagem, restando-nos conectar essa propriedade ao eixo de simetria. De qualquer modo é possível reconhecer que o pseudoconceito empregado por ele nas tarefas iniciais está assumindo um caráter mais maduro e viabilizando a estruturação de um novo conceito.

A tarefa seguinte envolvia a classificação dos outros quatro quadriláteros (quadrado, losango, pipa e paralelogramo) de acordo com o número de eixos de simetria que apresentam. O diálogo entre sujeito e pesquisadora foi mediado durante todo tempo pelo pseudoconceito formulado pelo sujeito nas tarefas iniciais. Edson inicia seu trabalho pelo quadrado, usando dobraduras determina dois eixos de simetria, ambos relativos aos lados.

Edson: Essa tem dois. Está certo?

Pes: Tem uma que tem quatro.

Edson: (Começa a tentar dobrar a figura a partir dos vértices) Ou seja, descobri que essa tem quatro. Inacreditável. Mas é essa mesmo?

Pes: É.

(Começa a trabalhar com a pipa).

Edson: Não tem que estar reto. Tem que combinar (refere-se à sobreposição). Não é isso?

Pes: É.

Edson: Esse aqui é um eixo.

Pes: É.

Edson: Esse é dois? (determina um segundo eixo na pipa).

Pes: Combinou? (refere-se à sobreposição das formas)

Edson: Esse não (descarta a última dobra que havia feito). Então esse só tem um (eixo de simetria).

Pes: Certo. (Pega o losango e faz as dobras dos dois eixos de simetria).

Edson: Esse aqui tem dois. Certo?

Pes: Certo.

Edson: Então a que sobrou (paralelogramo) não tem nenhum.

Trecho 4.20: Trabalhando com os quadriláteros⁴⁹

⁴⁹ Falas de 116 a 130 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

Por exclusão o sujeito concluiu que o paralelogramo não apresentava eixo de simetria, sem ter tentado fazer nenhuma dobra. Na ação de Edson percebe-se ainda, que ele não consegue desvincular o eixo de simetria do “*outro lado*” da figura, assim a pesquisadora decide trazer para esse conjunto de tarefas outra tarefa que deveria ser proposta no Conjunto 2 (Figura 4.15).

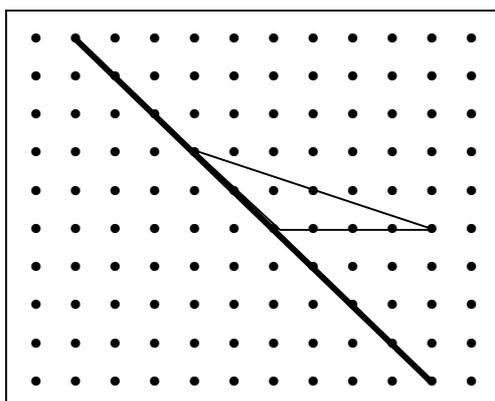


Figura 4.15: Uma tarefa adicional

A verificação da congruência entre figura-dada e figura-imagem obtida por reflexão sobre o eixo de simetria por sobreposição, não é tão facilmente perceptível como nas tarefas anteriores, não só pela rigidez da ferramenta, mas também pela posição oblíqua do eixo de simetria. Numa primeira tentativa Edson procura deixar o eixo de simetria no ponto médio da figura formada pelo conjunto figura-imagem (Figura 4.16.a), mas reconhece que não está correto:

Edson: Eu estou usando muitos pinos. Estou fazendo totalmente errado. Não é reto (a imagem da base).

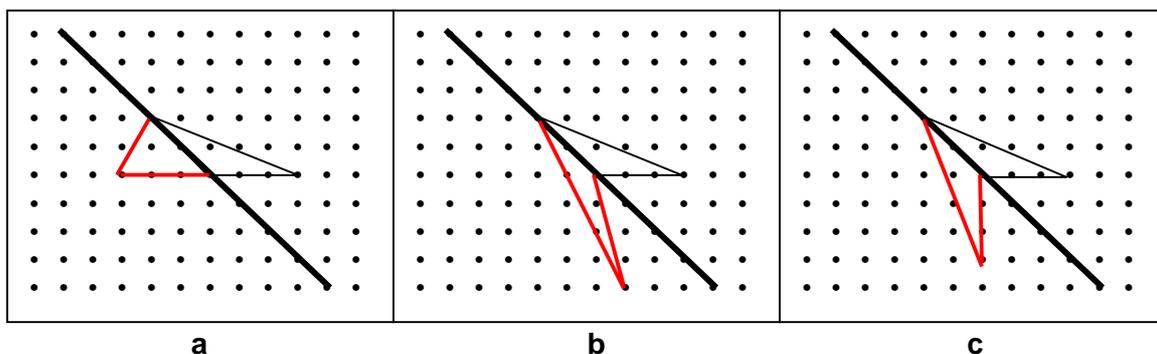


Figura 4.16: As respostas de Edson

O sujeito começa a relacionar o eixo de simetria com a bissetriz do ângulo formado pela base do triângulo e sua respectiva imagem, mas tem dificuldade para manter a congruência entre os ângulos (Figura 4.16.b).

Edson: Não quer dar certo.

Pes: O que você acha que está errado?

Edson: Esses pontos aqui (mostra a base da figura) estão encostados (nos pinos) esses daqui (imagem da base) não estão. Não quer dar certo.

Pes: E em relação ao eixo de simetria as figuras são iguais?

Edson: É. Aparentemente eu estou achando, mas eu estou em dúvida.

Pes: Em dúvida se está certo ou errado?

O que você acha que está errado?

Edson: Aqui dentro dessa (indica a figura que construiu) não tem o mesmo número de pontos que aqui (indica a figura dada).

Trecho 4.21: Validando resultados⁵⁰

Para verificar a validade de sua resposta, Edson continua contando o número de pinos que ficam no interior da figura, mantendo-se assim no nível intrafigural, mas isso acabou o ajudando a ter êxito na tarefa, como pode ser visto em sua resposta final representada na Figura 4.16.c. Essa foi à última tarefa proposta a Edson nessa sessão.

Antes de iniciar as tarefas da segunda sessão, a pesquisadora fez com Edson uma retrospectiva do que havia sido discutido na sessão anterior, repetindo o procedimento adotado com Lucas. Embora mais lentamente, Edson também destacou algumas propriedades importantes do eixo de simetria, como:

“O eixo de simetria faz a divisão em dois lados iguais”.

“E a figura fica dividida em duas iguais”.

Na primeira declaração de Edson, vemos que ele destaca o eixo de simetria ocupando a posição de mediatriz de um dos lados da figura, e na segunda a

⁵⁰ Falas de 140 a 146 da primeira sessão, enumeradas de 1 a 148.

congruência, por sobreposição, das duas formas determinadas a partir do eixo de simetria. Ele não destaca a propriedade do eixo de simetria ligada à bissetriz do ângulo de um dos vértices da figura simétrica, propriedade a qual se manteve tão preso na determinação dos eixos de simetria do trapézio isósceles e do dodecágono.

Ao propor a Edson que explorasse as figuras de papel canson trabalhadas na sessão anterior e seus respectivos eixos de simetria, a pesquisadora introduz ao diálogo uma nova “voz matemática” – figuras simétricas:

*Pes: As figuras que tem eixo de simetria são chamadas **figuras simétricas** na Matemática.*

Nesse ponto da entrevista, as falas do sujeito apresentavam as mesmas características do pseudoconceito desenvolvido por Edson no início da sessão anterior. Mas o seu trabalho com o hexágono na ferramenta de desenho (Figura 4.17a) nos surpreendeu, pois o sujeito que mantinha sua atenção centrada no eixo de simetria passou a centrá-la na figura, sugerindo que o significado atribuído por ele ao eixo de simetria havia se aproximado do significado convencional.

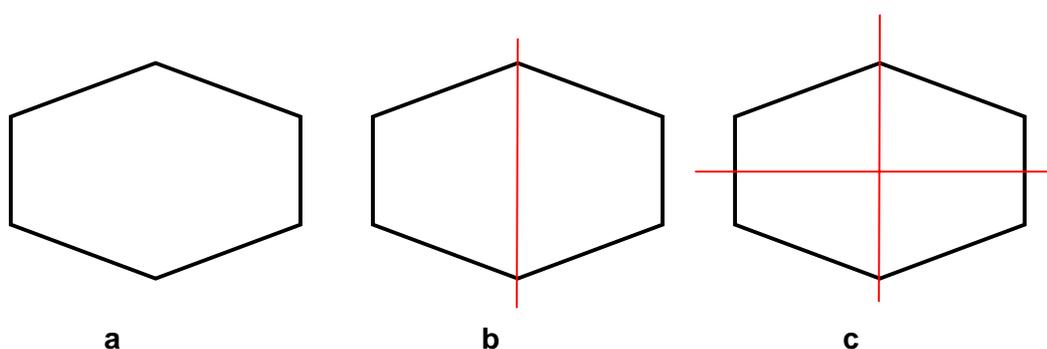


Figura 4.17: O trabalho de Edson com o hexágono

Inicialmente Edson procurou conhecer a forma representada na ferramenta através do tato. Posiciona o primeiro elástico (Figura 4.17b), após explorar a medida dos seus lados (número de pinos) e de reconhecer seus vértices. Logo

em seguida posiciona o segundo elástico (Figura 4.17c) anunciando que a figura tem dois eixos de simetria.

Pes: Dois eixos de simetria. Não tem mais nenhum?

Edson: Eu estou imaginando, fazendo na cabeça. Não dá para fazer mais nenhum.

Pes: Não dá por que?

Edson: Primeiro eu usei o tato para ter noção do desenho.

Agora eu estou usando a imagem na minha cabeça, como se eu estivesse dobrando com a mão.

Pes: Você está imaginando a figura?

Edson: Isso, visualmente.

Para cá um e para cá dois. (Simula a dobra na figura).

Tem só dois mesmo.

Trecho 4.22: Usando a imagem mental⁵¹

O procedimento declarado por Edson tem as características do processo descrito por Argyropoulos no qual, através do tato, os aprendizes não videntes formam imagens mentais, e a partir dessas imagens fazem ligações com seus conhecimentos. Isso fica evidenciado na segunda fala de Edson, presente nesse trecho, onde ele fala sobre a imagem mental formulada a partir da exploração tátil, que o permitiu “manipular” mentalmente a forma geométrica. Imaginando as dobras que poderiam ser feitas nessa figura, de tal forma que houvesse congruência entre as duas partes, Edson realiza a tarefa com êxito na primeira tentativa. Nas elucidações de Edson, percebe-se que o seu pensamento manteve-se no nível intrafigural. Em sua ação, pode-se perceber que ao procurar a posição de cada um dos eixos do hexágono, ele procurou usar a bissetriz dos ângulos dos vértices, assim como a mediatriz de seus lados. Isso nos encorajou a iniciar o trabalho com reflexão, o que foi feito ainda com base na figura representada na ferramenta de desenho.

⁵¹ Falas de 85 a 90 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

4.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE O GRUPO 1 DE TAREFAS

O domínio de alguns conceitos matemáticos relacionados aos termos que Lucas explicitou na fase exploratória, facilitou o seu acesso aos objetos matemáticos estudados nesse primeiro grupo de tarefas. Com Edson, o processo de internalização de alguns desses termos e dos conceitos discutidos no primeiro grupo de tarefas foi mais lento. Talvez essa resistência tenha origem no seu relacionamento com a Matemática.

Ambos os sujeitos mantiveram-se no nível intrafigural durante a realização das tarefas desse grupo, em relação a isso dois pontos principais devem ser destacados. Parece que o objeto matemático em estudo nesse grupo de tarefas – figuras simétricas – favorece o trabalho no nível intrafigural, pois, tanto para verificar se uma figura é ou não simétrica como para validar conjecturas, é suficiente manter a atenção nas propriedades internas das figuras. A ferramenta material 1 (figuras em papel canson) também pode ter favorecido o trabalho nesse nível, pois a facilidade da sobreposição das figuras, a partir do seu eixo de simetria (determinado por dobraduras), proporcionada pelo material fortalece a percepção das propriedades internas das figuras. Ainda sobre essa ferramenta material, queremos ressaltar o impacto que ela provocou sobre o trabalho de Lucas com o triângulo isósceles de papel canson. Embora tenha usado as propriedades corretas do eixo de simetria (como bissetriz e mediatriz), a ferramenta material induziu Lucas ao erro, quando ele escolheu para “base” um dos lados congruentes do triângulo.

Ao longo dessas atividades tanto Edson como Lucas vão refinando o significado atribuído (por eles) ao termo eixo de simetria, aproximando-se gradativamente do significado matemático desse termo comunicado pela pesquisadora. Na medida em que a pesquisadora usou a linguagem, fazendo perguntas e dando exemplos, para conduzir cada um dos sujeitos a refletir sobre as propriedades matemáticas de figuras simétricas; pesquisadora e sujeito co-construíram e compartilharam um espaço simbólico, onde ambos puderam estabelecer um diálogo cada vez mais

voltado ao objeto matemático em estudo. Esse espaço simbólico tem sua origem conectada ao “mal-entendimento produtivo” produzido pela divergência dos significados atribuídos, pelos sujeitos e pela pesquisadora, aos conceitos matemáticos.

A introdução da “voz matemática” ao discurso conduziu os sujeitos a utilizar um vocabulário que foi assumindo características distintas no desenvolvimento da prática dialógica. Desse modo, a interação entre sujeito e pesquisadora permitiu a cada um dos sujeitos (há seu tempo), ingressar numa nova forma de diálogo, que fez com que os sujeitos estruturassem pseudoconceitos, que acreditamos ter favorecido a emergência de uma ZDP, onde, gradualmente, os significados atribuídos aos conceitos matemáticos foram se modificando e possibilitou aos sujeitos estabelecessem conexões entre seus conhecimentos do passado e os conceitos científicos envolvidos.

Ao final do trabalho com o Grupo 1 de tarefas, consideramos que ambos os sujeitos apropriaram-se das vozes matemáticas introduzidas durante os discursos, tendo os pseudoconceitos utilizados, por esses sujeitos, características mais abstratas e concepções mais próximas às concepções do conceito científico envolvido.

NEGOCIANDO SIGNIFICADOS PARA REFLEXÃO

... a cegueira, a menos valia orgânica, impulsiona os processos de compensação, que levam, por sua vez, a formação de particularidades na psicologia do cego que reorganizam todas suas funções. Cada função do aparato neuropsicológico do cego possui particularidades, com freqüência, consideráveis em comparação com o vidente. Abandonado a sua própria sorte, este processo biológico de formação e acumulação de particularidades e desvios do tipo normal levaria, inevitavelmente, a criação de uma espécie particular de homens. Porém, apesar da pressão e das exigências sociais, idênticas para cegos e videntes, o desenvolvimento destas particularidades se conforma de tal modo, que a estrutura da personalidade do cego, tem a tendência de alcançar determinado tipo social normal.

(Vygotsky, 1997, p. 17) Tradução nossa.

5.1. INTRODUÇÃO

Nessa fase do procedimento experimental, ambos os sujeitos haviam estruturado significados para os objetos matemáticos eixo de simetria e figuras simétricas. Na seqüência da situação instrucional, o diálogo entre instrutora-pesquisadora e sujeitos passou a ser mediado por esses significados, que emergiram na forma de pseudoconceitos, e cujo papel foi fundamental na negociação de “mal-entendimentos”, e para a conexão entre conhecimentos do passado e a situação presente.

Neste capítulo faremos as análises pertinentes aos Conjuntos 2, 3 e 4 de tarefas, que envolvem o estudo de reflexão de figuras, segmentos e pontos

respectivamente em relação a um eixo. As tarefas propostas na ferramenta de desenho (ferramenta material 2), alternam a posição do eixo de simetria entre horizontal, vertical e oblíquo, e a posição das formas geométricas representadas em relação ao eixo de simetria. Em algumas dessas tarefas as figuras têm pontos comuns com o eixo de simetria em outras não. Evitamos tarefas que envolviam figuras complexas como as descritas na Seção 2.7.

No Grupo 1 de tarefas tanto o objeto matemático em estudo (figuras simétricas), quanto a natureza das atividades e das ferramentas materiais, favoreceram a percepção de propriedades que permitiram caracterizar as figuras obtidas como “produtos de uma reflexão”. Assim, nas tarefas propostas no Grupo 2 pretendíamos enfatizar a *reflexão* como um processo, ou seja, ao determinar a figura-imagem de uma figura-dada, não era desejável que o sujeito a associasse somente a idéia de reprodução, mas que percebesse as relações entre figura e imagem.

5.2. ANÁLISES DO GRUPO 2 DE TAREFAS

O Grupo 2 de tarefas é composto pelos Conjuntos 2, 3 e 4, cujo objetivo é o estudo de reflexão como uma transformação geométrica. O Conjunto 2 foi estruturado para o estudo de reflexão de figuras segundo um eixo. Composto por nove atividades, são variáveis nesse conjunto a posição do eixo de simetria e a posição da figura em relação ao eixo.

No Conjunto 3, as formas geométricas são segmentos. Esse conjunto é composto por oito atividades, nas quais são variáveis não só a posição do eixo de simetria como a posição do segmento em relação ao corpo do sujeito (paralelo, perpendicular e oblíquo). Em outras cinco atividades apresentamos, na ferramenta de desenho, dois segmentos cabendo aos sujeitos posicionar o eixo de simetria de modo que fosse representado na ferramenta um segmento e sua imagem segundo esse eixo.

O Conjunto 4 destinou-se ao estudo de reflexão de pontos segundo um eixo. Das cinco atividades propostas aos sujeitos, três variavam a posição do eixo de simetria e nas duas outras os sujeitos deveriam posicionar o eixo a exemplo do que foi proposto quando as formas geométricas eram segmentos.

O desenvolvimento desses conjuntos de tarefas iniciou-se na segunda sessão de entrevistas. As tarefas foram propostas aos sujeitos verbalmente, e antes de iniciar as construções tanto Lucas como Edson, exploraram, com as mãos, cuidadosamente cada uma das representações. Eles tinham liberdade para aplicar a estratégia que considerasse ser a mais adequada, e para isso deixamos a disposição uma régua utilizada por aprendizes cegos durante todo o tempo das entrevistas.

Os procedimentos, as estratégias formuladas por ambos os sujeitos e as análises das práticas discursivas entre sujeitos e instrutora-pesquisadora serão discutidas nas próximas seções.

5.2.1. O TRABALHO DE LUCAS

A tarefa que antecedeu o estudo do conceito de reflexão foi a de determinação dos eixos de simetria de um hexágono representado na ferramenta de desenho.

Antes de propor a Lucas as tarefas do Conjunto 2, a pesquisadora introduz reflexão como um processo: *Fazer a reflexão de uma figura é encontrar a imagem dessa figura do outro lado do eixo de simetria.* A partir dessa fala sugeriu que Lucas explorasse na ferramenta de desenho, uma figura e sua imagem a partir de um eixo de simetria (Figura 5.1). Lucas já havia tido contato com essa tarefa na sessão anterior.

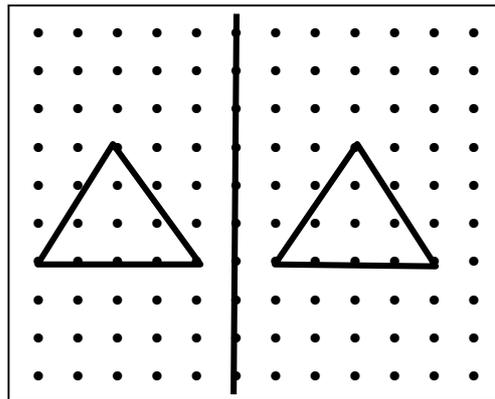


Figura 5.1: Um triângulo e sua imagem

Lucas explora com as mãos figura-dada e figura-imagem, sem se deter na posição do eixo de simetria em relação a elas. A pesquisadora tenta chamar a atenção do sujeito para que ele procure estabelecer relações entre a figura e sua imagem a partir do eixo de simetria.

Pes: A figura e sua imagem têm algumas características, algumas propriedades a partir do eixo de simetria. Ou algumas regularidades, algumas coisas em comum a partir do eixo de simetria. O que você percebe?

Lucas: Em primeiro lugar eu acho que elas estão mais ou menos centradas no eixo de simetria. Na parte central (no centro do eixo de simetria). À distância entre cada uma das figuras e o eixo de simetria são iguais. Foi isso que eu consegui perceber.

Trecho 5.1: Introduzindo reflexão de figuras⁵²

Na fala de Lucas pode-se perceber que ele mantém a perspectiva intrafigural. A relação de equidistância que ele destaca, é feita como se a ferramenta de desenho representasse uma figura e ele “vê” o eixo de simetria como o elemento que divide essa figura em duas, permitindo assim a comparação entre as duas partes da ferramenta de desenho. Ele não faz distinção entre os elementos que definem a imagem, ou seja, o eixo de simetria, o triângulo posicionado a esquerda do eixo (a figura original neste caso) e a própria imagem. Quando ele explora a configuração simétrica, a relação assimétrica entre as variáveis dependentes e

⁵² Falas 43 e 44 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 100.

independentes não é evidente. Isso nos sugere que explorando uma representação simétrica através do tato, assim como ocorre visualmente, às relações de dependência necessárias pra considerar reflexão como uma função são menos acessíveis do que a simetria do desenho.

A tarefa seguinte era muito semelhante à descrita acima. A diferença entre elas era a posição do triângulo (figura-dada) em relação ao eixo de simetria. Na tarefa a ser proposta, o triângulo representado na ferramenta de desenho tem um dos vértices sobre o eixo (Figura 5.2a).

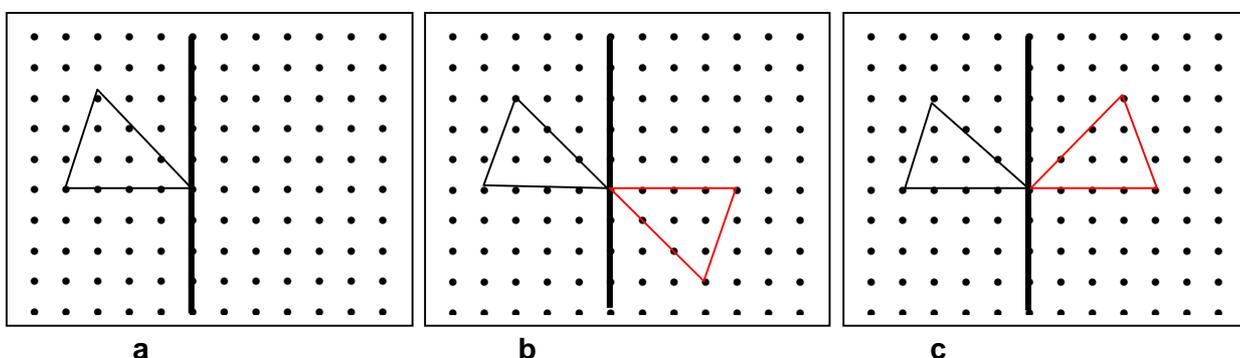


Figura 5.2: Trabalhando com reflexão

A princípio, Lucas tenta prolongar dois dos lados da figura (Figura 5.2b) deixando o terceiro lado paralelo ao seu correspondente na figura-dada. Antes de anunciar sua resposta faz a verificação e sem explicitar suas considerações, refaz com êxito a tarefa, apresentando a resposta como representamos na Figura 5.2c.

Em busca de compreender a primeira proposta de Lucas, a pesquisadora o questiona sobre sua primeira tentativa, ao que se segue o seguinte diálogo:

Lucas: Eu estava tentando reproduzir essa figura aqui, mas não estava conseguindo encontrar o alinhamento.

Ai, observando melhor eu pude perceber a base do triângulo, o que eu não havia notado ainda. Eu estava me preocupando muito com os lados e não com a base.

Pes: Então, essa base em relação ao eixo, como é a posição dela?

No que ela te ajudou que os lados inclinados não ajudaram?

Lucas: Eu imaginei ela dividindo o eixo de simetria

Imaginando um outro eixo de simetria para depois reproduzir esses lados aqui (os outros dois lados do triângulo).

Trecho 5.2: A idéia de reprodução⁵³

A tentativa de Lucas em manter o alinhamento entre dois lados da figura-dada e suas respectivas imagens o levou a fazer a inversão horizontal da figura. Lucas volta a associar a imagem à reprodução da figura do “outro lado”, e para isso imagina um eixo passando pela base da figura, como ilustramos na Figura 5.3.

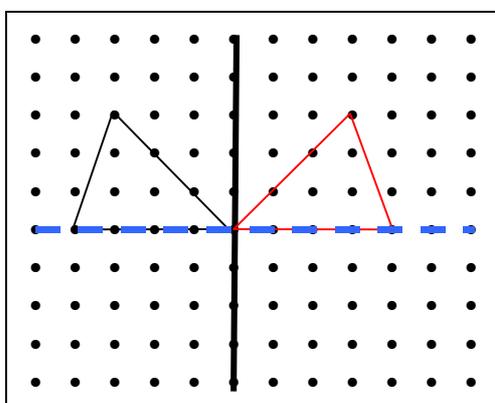


Figura 5.3: Imaginando outro eixo

Dois pontos merecem destaque na estratégia empregada por Lucas. Primeiro seu trabalho no nível intrafigural. Por considerar a ferramenta de desenho uma figura, ele a divide em outras duas partes ao imaginar um segundo eixo, e a partir desse procedimento consegue realizar com sucesso a tarefa. Segundo, o emprego de uma estratégia estruturada a partir das tarefas iniciais. Para Lucas a associação de imagem a reprodução o faz imaginar outro eixo convenientemente posicionado, para que a partir dele pudesse reproduzir o triângulo. Esse procedimento nos sugere que Lucas pode ter realizado mentalmente uma seqüência de reproduções como ilustramos abaixo (Figura 5.4).

⁵³ Falas 50 a 52 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 100.

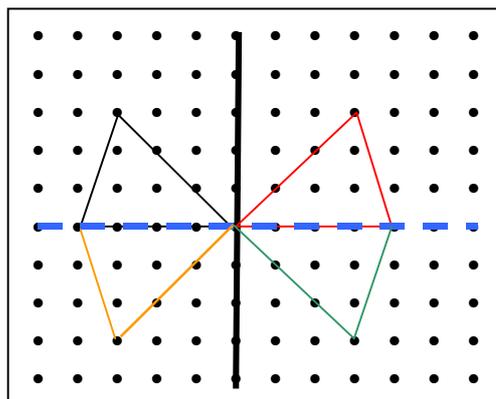


Figura 5.4: Fazendo reproduções sucessivas

Lucas, a partir do eixo imaginado, faz a reprodução da figura-dada obtendo o triângulo de cor laranja. Usando o eixo de simetria dado, reproduz esse triângulo o que resulta o representado de cor verde. Na seqüência, voltando ao eixo imaginado, faz a última reprodução nos oferecendo sua resposta final.

Ao perceber que Lucas mantém-se preso a idéia de reproduzir, a pesquisadora tenta fazê-lo perceber outras relações entre figura-dada e figura-imagem induzindo-o a reconhecer pontos simétricos.

Pes: Considerando as duas extremidades das bases (posiciona a mão do sujeito sobre os dois pontos), esta que eu coloquei e a que você determinou. Dizemos que esse ponto sofreu reflexão em relação a este eixo de simetria. Você compreende bem essa idéia?

Lucas: Compreendo.

Pes: Então me explica porque é exatamente esse ponto o reflexo daquele. O que levamos em consideração?

Lucas: A distância entre os pontos.

Pes: Isso vale para o outro vértice do triângulo também, (posiciona a mão do sujeito sobre outros dois pontos e ele conta os pinos destes pontos ao eixo de simetria) e ainda para todos os outros pontos que você tem aí na figura.

Lucas: Ficaram exatamente iguais, né? (explora vários pontos da figura e suas respectivas imagens)

Pes: Sim

Lucas: Posição, distanciamento entre os pinos (internos) e os lados.

Pes: Em relação a esse eixo.

Lucas: Em relação ao eixo.

Trecho 5.3: Reconhecendo pontos simétricos⁵⁴

Nossa expectativa era que essa intervenção tivesse provocado em Lucas a formulação de uma nova estratégia para a execução das tarefas, que o permitisse passar do nível intrafigural, onde a *distância* é vista como uma propriedade intrínseca das figuras sem relação com os pontos do plano, para o nível interfigural, onde a *distância* possa ser observada a partir dos pontos do plano que compõe (interna e externamente) figura-dada e figura imagem. Segue-se a essa, outra tarefa para a determinação da figura-imagem por reflexão segundo um eixo de simetria na posição vertical. Realizada com sucesso na primeira tentativa, a ação de Lucas não nos permitiu identificar o uso de outra estratégia, o que nos levou a variar a posição do eixo de simetria.

Na tarefa seguinte, a posição do eixo de simetria passa a ser inclinado (Figura 5.5a). Lucas aproveita-se da mobilidade da ferramenta e a gira, a fim de posicionar o eixo de simetria verticalmente ao seu corpo fazendo com que a representação na ferramenta de desenho ficasse semelhante a das tarefas anteriores. Lucas nos oferece sua resposta (Figura 5.5b), mas ao falar sobre seu procedimento não se refere à reprodução.

Primeiro tomei como base o eixo e esse ponto aqui (mostra um dos vértices da figura posicionado sobre o eixo). Aliás, ele sempre ajuda, porque só fiz a referência dos pinos para que eles me dessem à exata medida da imagem. Depois usei como referência os demais pinos e as suas posições para que eu pudesse terminar a imagem.

⁵⁴ Falas 53 a 62 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 100.

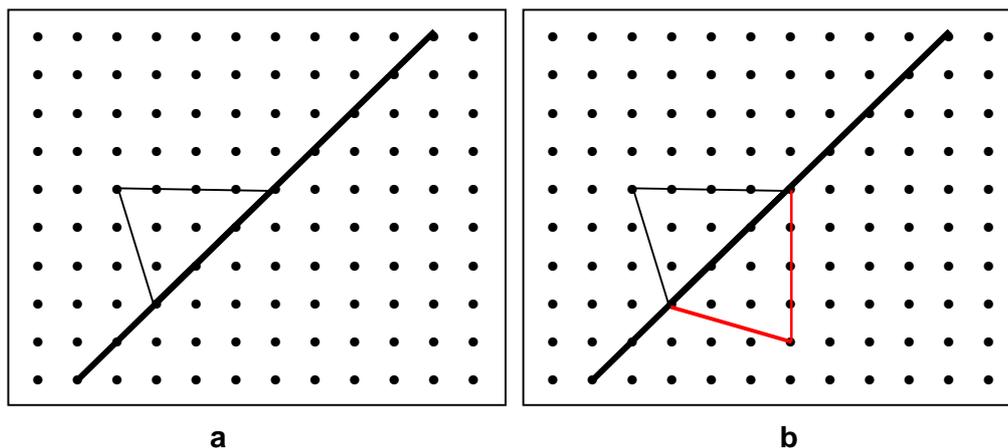


Figura 5.5: Eixo de simetria oblíquo

Nesse ponto começamos o trabalho com representações de segmentos (Conjunto 3), conservando a inclinação do eixo de simetria (inclinado). A pesquisadora propõe, a Lucas, a tarefa ilustrada na Figura 5.6a, e ele faz a seguinte declaração:

Aqui vou ter que improvisar porque se eu partir do mesmo ponto não vai ter a mesma medida. (Figura 5.6b)

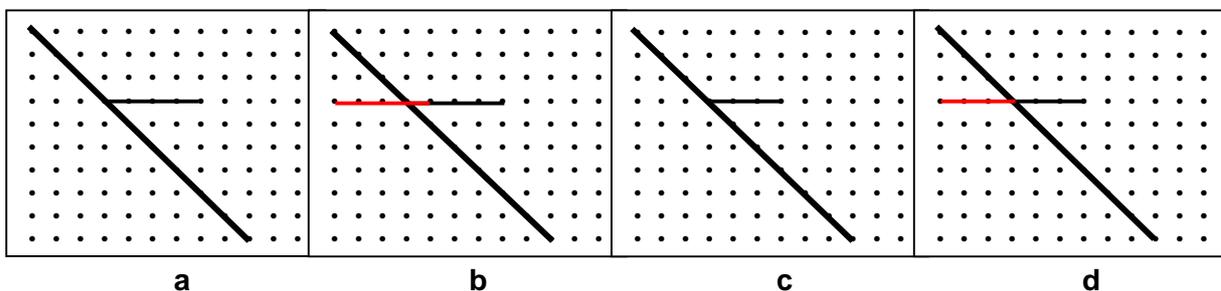


Figura 5.6: Trabalhando com segmentos

Lucas, talvez por ainda associar a imagem à idéia de “reproduzir”, mantém o alinhamento e a medida do segmento, para tanto sobrepõe ao segmento-dado parte de sua suposta “imagem” (Figura 5.6b), já que não havia número de pinos suficiente à direita do segmento para que sua medida fosse preservada. Mediante a declaração do sujeito, a pesquisadora reduz a medida do segmento-dado (Figura 5.6c) e pede que Lucas repita a tarefa:

Agora sim, porque eu estava comprometendo a medida da maneira como estava (Figura 5.6d).

Ele realiza a tarefa conservando a congruência entre as medidas dos segmentos, mas não conserva a congruência entre os ângulos formados entre figura-dada e figura-imagem com o eixo de simetria, o que parece ter ocorrido na tarefa anterior. A fim de levar Lucas a perceber a não congruência dos ângulos, a pesquisadora posiciona na ferramenta outra figura (um triângulo), que não fazia parte da estrutura original das tarefas.

Eu vou deixar essa figura ai e vou fazer uma outra mais embaixo, e vou pedir para você fazer a imagem dela. (Figura 5.7a)

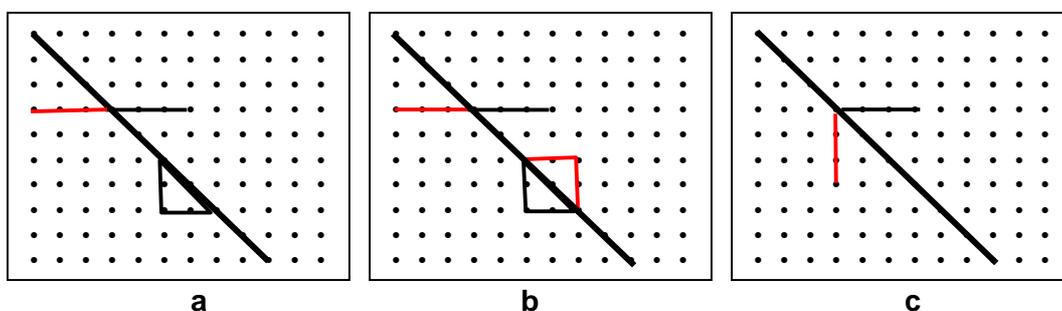


Figura 5.7: Adicionando outra forma

Com facilidade Lucas constrói a figura-imagem do triângulo como representado na Figura 5.7b. Para realizar essa tarefa ele volta a virar a ferramenta deixando o eixo de simetria na posição vertical ao seu corpo. Segue-se, então o seguinte diálogo:

Pes: Analisa a primeira figura que você fez em relação ao eixo de simetria. (Explora a primeira figura - segmento).

Lucas: O ângulo que a figura, que eu fiz forma com o eixo de simetria e o ângulo que a sua forma com o eixo de simetria não ficou o mesmo ângulo.

(Vai posicionando o elástico pino a pino e testando os ângulos)

Acho que está mais próximo agora. (Figura 5.7c)

Trecho 5.4: Refazendo a tarefa⁵⁵

⁵⁵ Falas 77 e 78 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 100.

A intervenção da pesquisadora permitiu que Lucas conectasse conhecimentos estruturados num passado próximo (quando o objeto de estudo era a reflexão de triângulos segundo um eixo), a situação atual (quando o objeto de estudo é a reflexão de segmentos segundo um eixo), a fim de que, a partir desses conhecimentos, ele pudesse formular uma estratégia para a realização das tarefas que envolvessem a reflexão de outras formas geométricas (caráter prospectivo). Nas ações e na fala reparativa de Lucas pode-se identificar a integração das perspectivas geradas a partir de suas percepções do passado, no momento real do experimento com projeção numa ação futura.

Seguiu-se a essa tarefa outra (Figura 5.8) na qual Lucas obtém êxito virando a ferramenta e posicionando verticalmente, em relação ao seu corpo, o eixo de simetria.

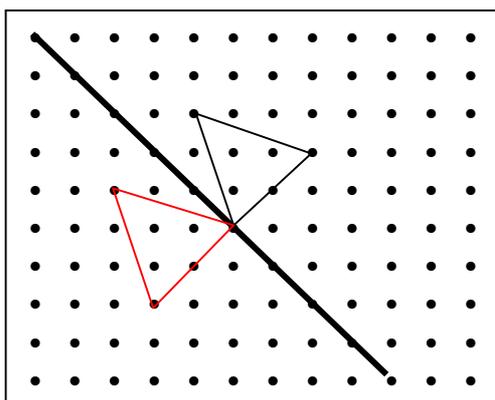


Figura 5.8: Virando a ferramenta de desenho

A última tarefa proposta a Lucas nessa sessão envolvia uma figura mais complexa (Figura 5.9a).

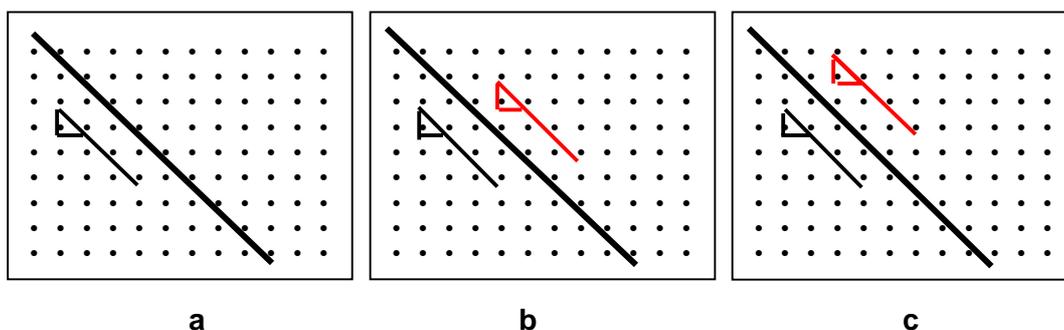


Figura 5.9: Uma forma mais complexa

Ao perceber que a figura não tem pontos em comum com o eixo de simetria a exemplo das tarefas anteriores, Lucas declara que “*a referência está fora do eixo de simetria*”. Até essa tarefa, ele tomava por referência o eixo de simetria para a determinação da figura imagem considerando o eixo de simetria, a figura dada e a figura imagem um único elemento (caráter intrafigural). Assim que fez a exploração tátil da figura proposta na ferramenta de desenho (Figura 5.9a), Lucas percebeu ser necessário eleger uma outra referência para realizar a tarefa. Sua fala nos sugere que ele começa a considerar aspectos do nível interfigural.

Numa primeira tentativa realiza a tarefa como representado na Figura 5.9b. A pesquisadora pede que ele explicita o que considerou para fazer a imagem. Enquanto a pesquisadora fala, Lucas continua explorando com as mãos figura-dada e figura-imagem. Podia-se perceber, por sua expressão facial, sua insatisfação com a construção.

Pera aí, deixa eu ver se está certo. Às vezes pela disposição da madeira parece que não está. (Vira a ferramenta novamente a fim de deixar o eixo perpendicular ao seu corpo).

Primeiro eu levei em consideração à distância do eixo de simetria. Comparei os pontos em que eu poderia estar reproduzindo essa imagem em relação ao eixo de simetria e a figura já feita.

O sujeito realiza a tarefa construindo uma figura com as mesmas dimensões da figura-dada, mas não conserva o alinhamento e não faz a inversão de orientação. Em sua ação pode-se verificar que ele centra sua atenção nas medidas das duas figuras. A pesquisadora o questiona sobre as distâncias das duas figuras em relação ao eixo. O que o fez corrigir o alinhamento, mas não a inversão (Figura 5.9c). O sujeito volta a ser questionado sobre as distâncias, e procura se certificar, novamente, da congruência entre as figuras, mas desta vez percebe que não estava considerando o eixo de simetria:

Lucas: *Só não estão obedecendo ao alinhamento (refere-se à disposição da figura imagem em relação ao eixo de simetria).*

Já achei o x da questão. De novo eu caí no mesmo erro.

Pes: *Qual?*

Lucas: *Do segmento. De novo eu levei em consideração só o eixo de simetria e não a direção do ângulo.*

Esse ângulo está para fora (aponta para a bandeira) e eu fiz para dentro.

Pes: *Sim*

Lucas: *Agora eu acho que sim (Figura 5.10). (Realiza a tarefa com sucesso)*

Trecho 5.5: O “X” da questão⁵⁶

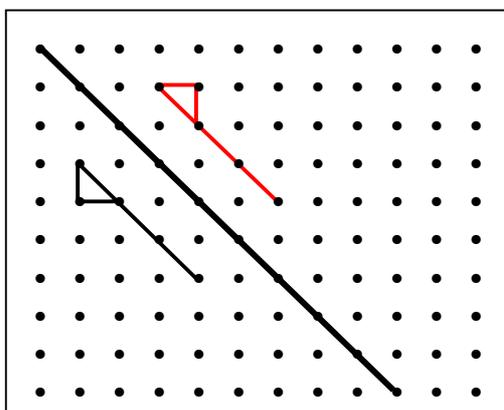


Figura 5.10: Resposta final

Lucas afirma ter considerado a equidistância, em relação ao eixo de simetria, da figura e de sua imagem, para isso estabeleceu comparações entre os pontos (pinos) representados na ferramenta nos dois semiplanos determinados pelo eixo de simetria, o que nos indica o nível interfigural, mas outro ponto reforça o trabalho no nível interfigural. Lucas consegue a inversão da imagem e a congruência entre os ângulos baseando-se nos pinos que representam os pontos do plano euclidiano. Ele utilizou referências internas do conjunto figuras-plano comparando a posição inicial (figura dada) e a posição final (figura imagem).

⁵⁶ Falas de 88 a 92 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 100.

Depois de realizar mais uma tarefa, a pesquisadora procura investigar se Lucas é capaz de conectar os conceitos matemáticos (conceitos científicos) a sua prática diária (conectá-los a conceitos cotidianos), e para encerrar a sessão, pesquisadora e sujeito estabelecem o seguinte diálogo:

Pes: Estudamos alguns conceitos matemáticos: simetria, figuras simétricas, reflexão. Na sua vida diária você encontra esses conceitos?

Há alguma prática na sua vida diária, no seu trabalho que te faz lembrar dessas coisas?

Lucas: Há sim, desde dobrar meu cobertor de manhã certinho. Eu tomo por base o eixo de simetria.

Pes: E formas simétricas? Na rua, em casa...

Lucas: Têm muitas. E antes eu não sabia conceituar nem fazer relações.

Pes: Por exemplo?

Lucas: Um prato, um copo.

Meu par de sapatos é um a imagem do outro.

Trecho 5.6: Conceitos científicos X conceitos cotidianos⁵⁷

No caso de Lucas é interessante perceber que conceitos científicos e conceitos cotidianos percorreram caminhos distintos se comparados ao que ocorre normalmente no caso dos videntes. Ao final da segunda sessão, ele pôde estabelecer, em sua prática cotidiana (conceitos cotidianos), relações com os conceitos matemáticos estudados (conceitos científicos). Tais relações já apontam uma mudança em sua estrutura cognitiva, pois na fase exploratória, ou seja, antes das intervenções, ele não havia estabelecido tais conexões.

Iniciamos a terceira sessão de entrevistas, retomando os conceitos estudados nas sessões anteriores. Voltamos a discutir figuras simétricas e propriedades ligadas ao eixo de simetria. A pesquisadora explicitou a Lucas que o objeto de nosso estudo era as transformações geométricas, mais especificamente a reflexão, e representou na ferramenta de desenho um triângulo e a sua imagem determinada por reflexão segundo um eixo de simetria (Figura 5.1). Lucas estabelece relações

⁵⁷ Falas de 95 a 100 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 100.

importantes, que ajudaram no decorrer dos diálogos, por exemplo: *Eles são iguais, mas está tudo invertido.*

Foi proposto a Lucas, que determinasse a imagem do segmento segundo um eixo de simetria, representados na ferramenta de desenho (Figura 5.11a). Em sua primeira tentativa, o sujeito conserva a congruência entre as medidas do segmento e sua imagem e suas respectivas distâncias (perpendiculares) em relação ao eixo de simetria, mas não perpendicularidade entre o segmento com extremidades em dois pontos simétricos e o eixo de simetria (Figura 5.11b). Quando a pesquisadora pede que ele reveja sua resposta, Lucas reposiciona o segmento-imagem, com êxito (Figura 5.11c).

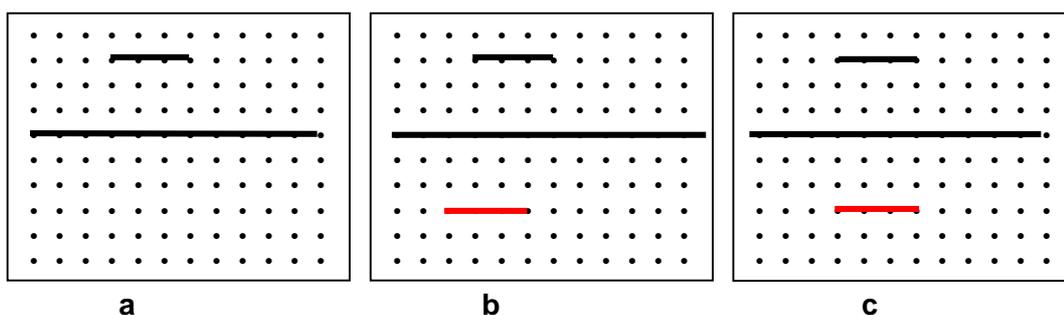


Figura 5.11: Uso implícito de perpendicularismo

No trecho transcrito a seguir, a pesquisadora procura incentivar Lucas a verbalizar o que havia ficado implícito em suas ações.

Pes: . . . Por que você posicionou a imagem bem aí, quer dizer para cima ou para baixo você já disse que queria preservar a distância (em relação ao eixo de simetria), mas por que não para a esquerda ou para a direita?

Lucas: Eu usei como base a direção dos pinos. (Indica com uma das mãos a perpendicular).

Pes: E por que exatamente essa direção e não uma inclinada à direita ou à esquerda?

Lucas: Porque eu tinha que reproduzir exatamente essa figura. A imagem

dela aqui embaixo (indica o semiplano inferior da ferramenta). Se eu fizesse qualquer inclinação eu não estaria fazendo a imagem da figura.

Trecho 5.7: Destacando o perpendicularismo⁵⁸

Pesquisadora e sujeito fazem emergir, no contexto da ação e da comunicação, aspectos temporais do evento instrucional, que revelam relações entre ações e eventos do passado, a situação atual e as possibilidades ou projeções para situações futuras. Lucas mostra, através de suas ações, ter estruturado uma nova estratégia para determinar a imagem de um segmento-dado segundo um eixo de simetria: a reta perpendicular ao eixo determinada por dois pontos simétricos, mas verbalmente, ele mostra ainda manter o enfoque na idéia de reprodução.

Nesse ponto do procedimento empírico, Lucas havia destacado, explicitamente, propriedades relevantes ligadas à reflexão:

- a equidistância, em relação ao eixo de simetria, de dois pontos simétricos;
- o eixo de simetria é bissetriz dos ângulos formados pelos lados da figura-dada e da figura-imagem que tem o vértice na intersecção desses lados;
- a transformação inverte a orientação da figura-dada.

Implicitamente, ou seja, em suas ações:

- o eixo é perpendicular ao segmento com extremidades num ponto qualquer e sua respectiva imagem;

Restava-nos tentar ajudar Lucas a conectar essas propriedades para a formulação de uma única estratégia que pudesse ser aplicada a qualquer tarefa, seja variando a posição do eixo de simetria ou da forma geométrica. Para isso,

⁵⁸ Falas de 21 a 24 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 148.

nas tarefas seguintes, a pesquisadora investe na idéia da perpendicular que o sujeito usou na atividade anterior como pôde ser observado em suas ações.

Na tarefa seguinte o segmento-dado foi posicionado verticalmente ao eixo de simetria (Figura 5.12a), cabendo a Lucas determinar sua imagem.

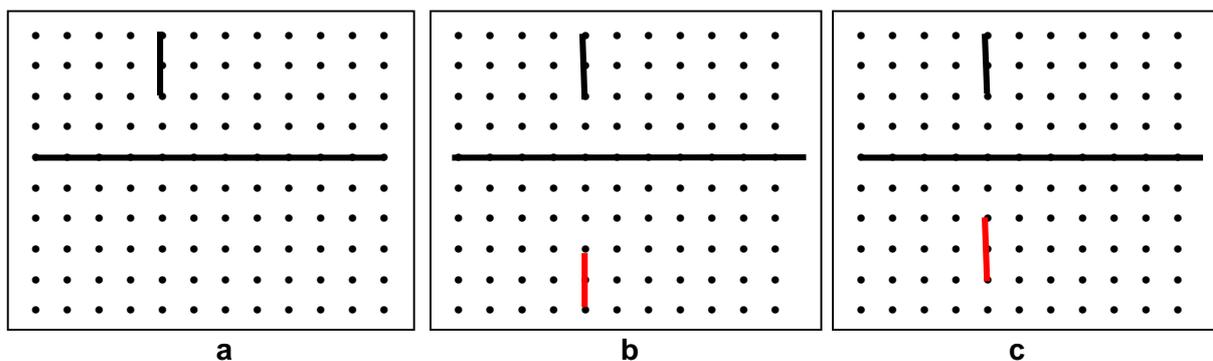


Figura 5.12: Discutindo a perpendicularidade

A primeira “imagem” construída por Lucas (Figura 5.12b), obedecia à relação de perpendicularidade entre o segmento formado por dois pontos distintos de cada um dos segmentos e o eixo de simetria, mas a perspectiva intrafigural o leva a preservar a distância de uma das extremidades dos segmentos em relação à borda da ferramenta de desenho, em ação Lucas conta o número de pinos de fora para dentro da ferramenta. Ao fazer a verificação das relações que teve que preservar para a sua construção, como lhe foi sugerido pela pesquisadora, o sujeito percebe que os segmentos não estão equidistantes do eixo, e faz a correção reposicionando o segmento-imagem (Figura 5.12c).

Na realização da tarefa seguinte (Figura 5.13a), Lucas volta a usar a relação de perpendicularidade. Realiza a tarefa, com êxito, usando a reta perpendicular, em relação ao eixo de simetria, determinada por dois pontos simétricos (Figura 5.13b). A pesquisadora aproveita o procedimento do sujeito para trazer ao discurso à voz matemática – perpendicular – que faz parte do repertório de conhecimentos do passado do aprendiz, para que, a partir desses conhecimentos ele pudesse estruturar suas concepções sobre o objeto matemático em estudo (reflexão axial).

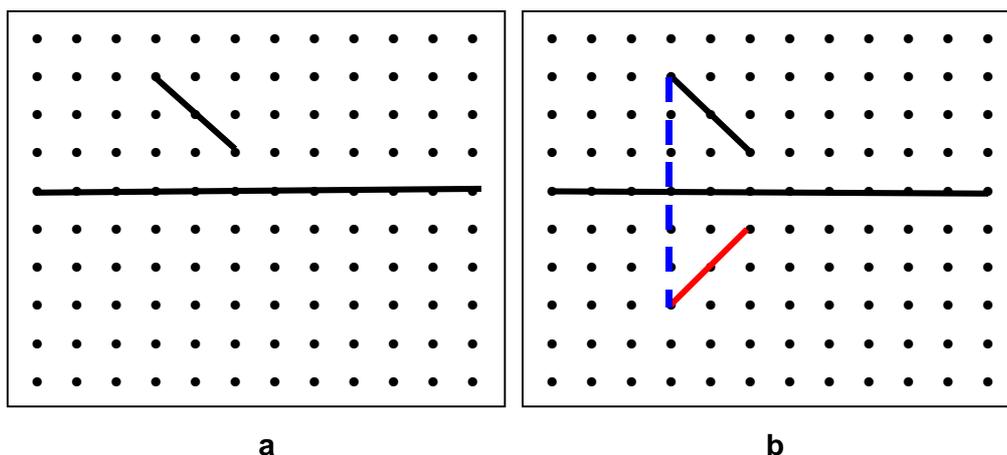


Figura 5.13: Estudando a perpendicular

Pes: Isso. Está certinho, mas você está procurando essa linha reta de um ponto ao outro passando pelo eixo de simetria. Essa reta que você está usando, vou colocar a régua aqui para você perceber de que reta estou falando. Não é essa que você está usando?

Lucas: É para achar esse ponto aqui (simétrico).

*Pes: Essa reta que você está usando é uma **reta perpendicular** ao eixo. Lembra de reta perpendicular?*

Lucas: Lembro, é uma reta que cruza, coincide com o eixo de simetria..

Pes: Ela cruzou o eixo. E cruzou formando um ângulo. . .

Lucas: Normalmente a perpendicular forma um ângulo de 90° .

Pes: Forma exatamente um ângulo de 90° . E se você perceber a distância desse ponto (uma das extremidades do segmento) até o eixo é desse eixo até esse ponto aqui (simétrico) Que posição ocupa esse eixo de simetria em relação à medida do segmento formado por esses dois pontos?

Lucas: Às vezes você pergunta algumas coisas difíceis de responder.

Pes: Essa distância desse ponto (uma das extremidades do segmento) até o eixo é desse eixo até esse ponto (simétrico) aqui (Figura 5.13b), como são essas distâncias? (Conta os pinos)

Lucas: Tem cinco certinho. As distâncias são iguais.

Pes: Então além do eixo de simetria ser perpendicular a essa reta que você está imaginando ele passa bem no “meio” do segmento formado por um ponto da figura e seu simétrico.

Lucas: É pelo ponto médio.

Pes: Em todos os pontos do segmento não é?

Lucas: É se você pegar esses dois pontos aqui (um ponto do segmento e seu simétrico) acontece a mesma coisa.

Trecho 5.8: Voz matemática - perpendicular⁵⁹

A decisão da pesquisadora de posicionar a régua em pontos simétricos dos segmentos (Figura 5.13b) permitiu que, através do tato, Lucas trouxesse para a situação atual conhecimentos do passado - *a perpendicular cruzou o eixo*; e a avaliação do ângulo formado por essas duas retas - *a perpendicular forma um ângulo de 90° e ponto médio*. Em suas falas a pesquisadora tenta conectar conhecimentos do passado, explicitados pelo sujeito, aos conhecimentos que estavam sendo estudados e que poderiam vir a ser empregados nas atividades futuras.

Na ação de Lucas sobre a ferramenta de desenho, nas três tarefas seguintes que envolviam a reflexão de um segmento segundo um eixo, observa-se que ele segue usando a perpendicular ao eixo de simetria que contém uma das extremidades do segmento dado como estratégia para obter a imagem, mesmo quando variamos a posição do eixo de simetria. Distintamente do que aconteceu nas sessões anteriores, ele realiza as tarefas sem virar a ferramenta de desenho, o que nos sugere que ao ter ficado explícita a relação perpendicular não era mais necessário o trabalho específico com eixos representados na vertical ou horizontal.

Nas atividades seguintes, Lucas recebia na ferramenta de desenho dois segmentos, e sua tarefa era posicionar o eixo de simetria de tal modo que tivéssemos na ferramenta um segmento e sua respectiva imagem segundo esse eixo. Nessas atividades ele não usa a relação perpendicular, pois pelas características das tarefas ele não se faz necessária.

⁵⁹ Falas de 37 a 50 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 148.

Foram cinco tarefas desse tipo (Figura 5.14), Lucas as realizou com êxito na primeira tentativa. Sua estratégia foi escolher um ponto e seu simétrico, contar os pinos que havia entre eles e posicionar o elástico, que assumiria o papel do eixo de simetria, no ponto médio do segmento “imaginado” por ele com extremidades nesses dois pontos.

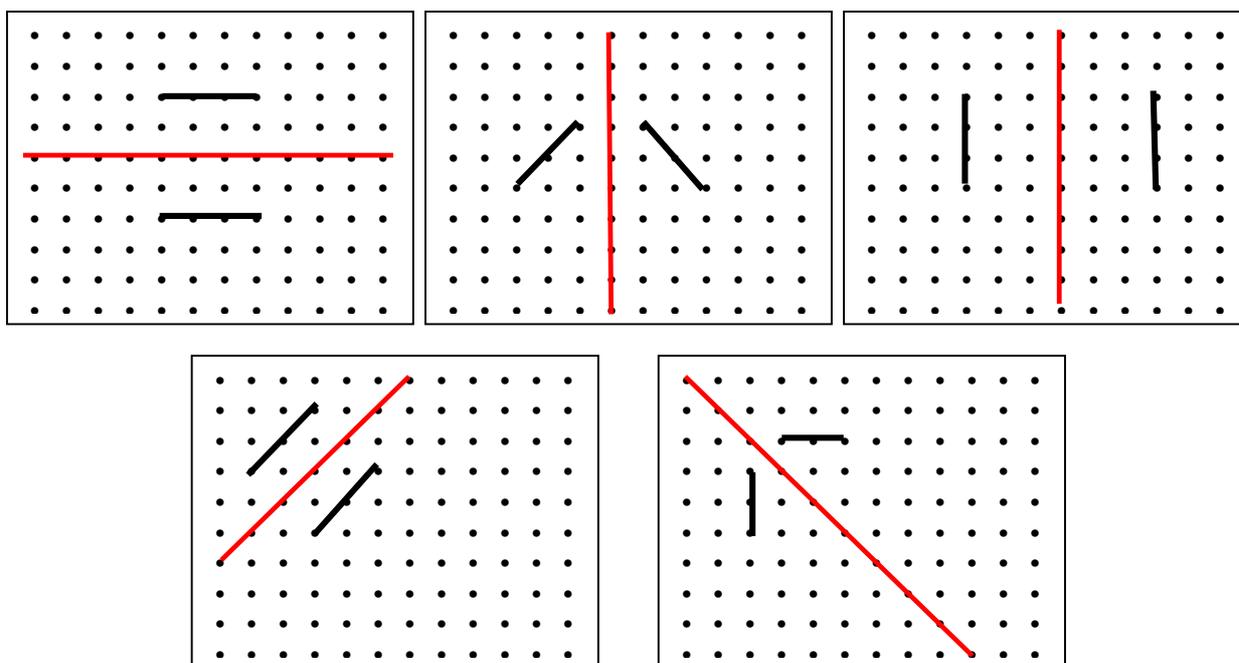


Figura 5.14: Determinando o eixo de simetria

O próximo passo era verificar se Lucas havia estruturado suficientemente esse novo conceito, a ponto de ter desenvolvido um método geral que permitisse realizar atividades que envolvessem reflexão de qualquer forma geométrica. Para isso fizemos a ele a seguinte proposta:

Agora vamos fazer uma simulação. Faz de conta que eu estou em casa ao telefone, com uma ferramenta como essa e com um par de elásticos posicionados nela, um é a imagem e outro o objeto, e você conversando comigo ao telefone tem que me ensinar determinar o eixo de simetria, mas você não tem idéia da posição dos segmentos nem da ferramenta, já comentamos que ela não é quadrada e se mudamos a posição da ferramenta o eixo de simetria vai junto. Então você vai ter que me dar um método, como um método geral que vale para qualquer situação para que eu possa fazer essa tarefa lá na minha casa.

Lucas assume o papel de instrutor, mas, a princípio, tem dificuldade para verbalizar o que tinha em mente, ao perceber isso, a pesquisadora posiciona na ferramenta de desenho dois segmentos para auxiliá-lo. Usando essa representação ele apresenta uma seqüência de procedimentos para a realização da tarefa. No trecho transcrito abaixo, pode-se verificar que a pesquisadora o fez justificar cada um deles.

Lucas: Você toma por base uma das extremidades de cada um dos segmentos.

Pes: Uma qualquer?

Lucas: As duas extremidades do mesmo lado (Com suas mãos, mostra referir-se a um ponto e seu simétrico). Você centraliza o eixo de simetria no ponto médio entre uma extremidade e outra de cada segmento.

Pes: E como eu faço para achar o ponto médio?

Lucas: Você pode usar uma régua ou mais simples contar os pinos a partir de um dos segmentos até o outro segmento, e localizar o pino que seja o ponto médio dessa distância entre um segmento e outro.

Pes: Tá achei, e agora?

Lucas: Fixa o elástico aí e traça uma reta sempre obedecendo à distância, ou seja, tanto as duas extremidades dos segmentos como os outros pontos dos segmentos guardam a mesma distância.

Pes: Então todos os pontos dos segmentos estão à mesma distância do eixo de simetria?

Lucas: Isso mesmo. As extremidades do segmento A, vamos chamar assim. Tem que ser a mesma distância do segmento A ao eixo de simetria e do eixo de simetria ao segmento B. Isso nas duas extremidades dos dois segmentos.

Trecho 5.9: Uma simulação⁶⁰

No papel de professor, Lucas cria um campo simbólico-temporal, em que se aproveita dos conhecimentos matemáticos (do passado) da pesquisadora, e os envolve num diálogo totalmente voltado para o objeto matemático em estudo.

⁶⁰ Falas de 80 a 88 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 148.

A emergência da perspectiva interfigural, que pode ser fortemente percebida no trecho transcrito abaixo, parece ter favorecido que Lucas criasse sua própria ZDP.

Fixa o elástico aí (no ponto médio) e traça uma reta sempre obedecendo à distância, ou seja, tanto as duas extremidades dos segmentos como os outros pontos dos segmentos guardam a mesma distância (do eixo de simetria).

Lucas, ao falar sobre a *distância*, não se refere somente às extremidades dos segmentos, mas aos *outros pontos dos segmentos*, o que denota o caráter interfigural. Além disso, ele passa a ver o eixo de simetria como o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de dois pontos simétricos, e implicitamente, ao solicitar que a pesquisadora determine o ponto médio para, a partir dele, *obedecer à distância* e determinar o eixo de simetria, manteve a preocupação com a perpendicularidade entre o eixo e o segmento formado por um ponto e seu simétrico.

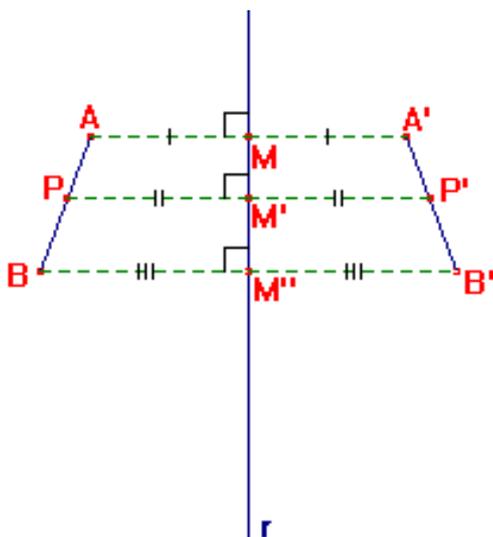


Figura 5.15: Caracterização do eixo de simetria por Lucas

Nesse ponto do trabalho empírico, muitas mudanças em relação às concepções de Lucas a respeito do conceito de reflexão foram observadas. A emergência de uma perspectiva interfigural e de uma ZDP a partir de suas próprias declarações, nos incentivou a avançar oferecendo ao sujeito a última forma geométrica que nos propusemos estudar: a reflexão de pontos segundo um eixo.

A primeira tarefa do Conjunto 4 foi proposta a Lucas como apresentada na Figura 5.16. O ponto foi representado por massa de modelar, e o sujeito recebeu da pesquisadora, um outro “ponto” com as mesmas dimensões do que estava sobre a ferramenta de desenho.

Pes: ... Eu vou colocar o eixo de simetria e posicionar um ponto e você vai determinar o simétrico desse ponto em relação ao eixo (Figura 5.16a).

Lucas: Então não tem figura nenhuma. Você quer que eu faça a imagem desse? (Indica a representação do ponto).

Trecho 5.10: Uma nova forma geométrica⁶¹

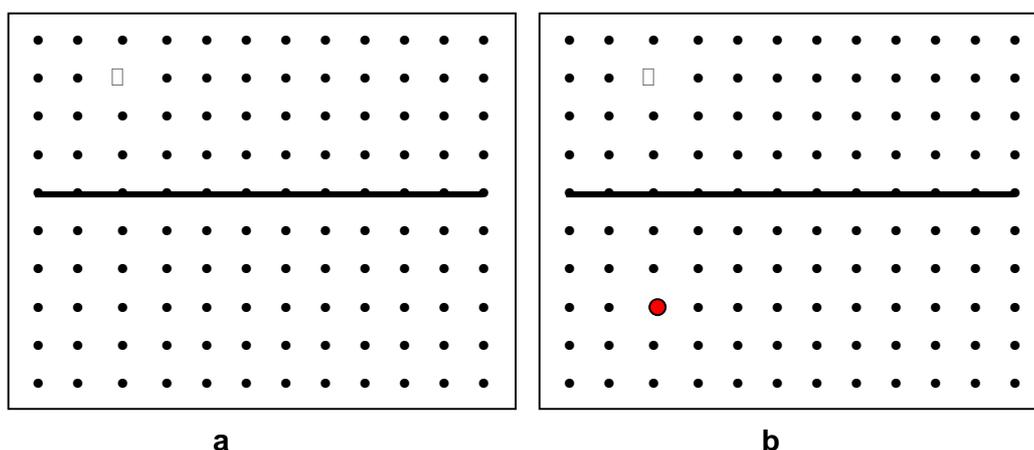


Figura 5.16: Reflexão de pontos

Lucas substituiu a voz da pesquisadora *simétrico* desse ponto em relação ao eixo por *a imagem* desse ponto, o que nos permite considerar que ele poderia estar usando esses dois termos como sinônimos, o que é coerente quando se trata do trabalho com pontos.

A tarefa é realizada com êxito numa única tentativa (Figura 5.16b). Na ação de Lucas observamos que ele conta o número de pinos do ponto-dado ao eixo de simetria, seguindo a orientação da perpendicular, e reproduz essa distância para posicionar o ponto-imagem. Ele justifica sua resposta declarando ter conservado a distância, mas não verbaliza a relação com a perpendicular.

⁶¹ Falas 89 e 90 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 148.

Nas duas tarefas seguintes (Figura 5.17) para determinar o simétrico do ponto-dado, Lucas aplica a mesma estratégia descrita acima, e ao descrever o seu método de determinação da imagem não explicita o uso da perpendicular. Parece-nos que a relação de perpendicular passa a fazer parte de um processo ainda implícito para Lucas na determinação da imagem de qualquer forma geométrica segundo um eixo.

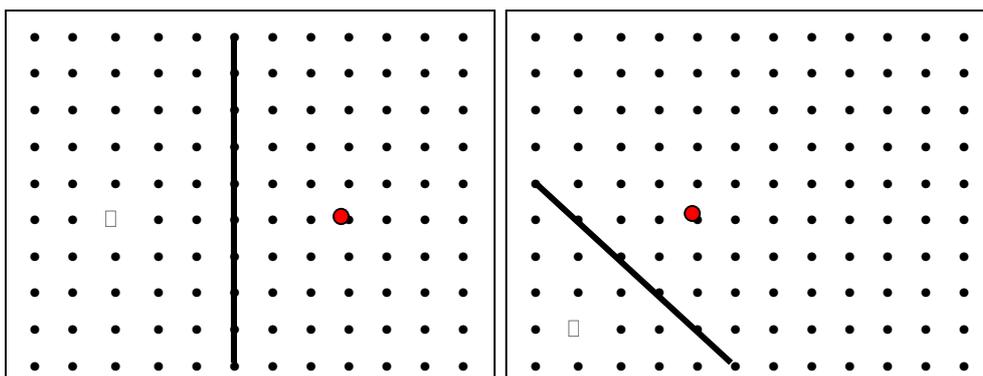


Figura 5.17: Trabalhando com pontos

O êxito de Lucas e a rapidez com que ele realizou as tarefas, mesmo quando representamos o eixo de simetria oblíquo, nos motivou a prosseguir com o roteiro original de tarefas.

Passamos a oferecer a Lucas dois pontos na ferramenta de desenho. Cabia a ele representar o eixo de simetria de modo que esses pontos assumissem o papel de ponto-dado e sua imagem, respectivamente. Na primeira tarefa Lucas deveria posicionar o eixo de simetria na horizontal, o que foi feito com exatidão. Na segunda tarefa (Figura 5.18a) o eixo de simetria deveria ser posicionado obliquamente, e nessa atividade Lucas deparou-se com alguns obstáculos.

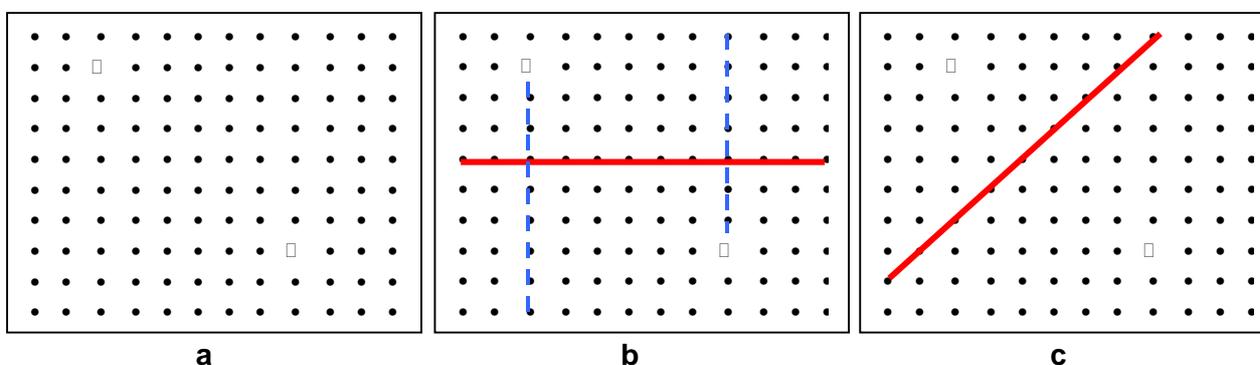


Figura 5.18: O eixo oblíquo

Na primeira tentativa (Figura 5.18b), Lucas não posiciona corretamente o eixo de simetria. Em sua ação, pode-se observar que ele considera duas retas distintas, perpendiculares ao elástico usado para representar o eixo, cada uma delas passando por um dos pontos representados na ferramenta de desenho. Ao ser questionado sobre a precisão de sua resposta, Lucas revê as distâncias entre os pontos e o eixo e afirma que sua resposta está correta. De fato, há dois pinos entre cada um dos pontos e o eixo na direção perpendicular. O que Lucas não percebe, a princípio, é que estava considerando duas retas perpendiculares paralelas entre si. Talvez o paralelismo entre elas e a forma parcial de aquisição das informações o tenha induzido a apresentar essa resposta.

A pesquisadora estabelece, então, um diálogo com o sujeito procurando deixar evidente sua posição discordante, a fim de levá-lo a reparar sua resposta.

Pes: Lembra quando colocamos a régua para ver a reta que você estava imaginando? (Régua posicionada sobre o segmento determinado por dois pontos simétricos).

Lucas: Lembro. O eixo de simetria tem que estar inclinado aqui.

Acho que agora está certo. (Figura 5.18c)

Trecho 5.11: Percebendo a inclinação do eixo de simetria⁶²

Lucas usa a régua para ajudar na determinação da posição perpendicular do eixo, mas descuida-se das distâncias entre os pontos e o eixo, o que faz a pesquisadora intervir novamente.

Pes: Agora é perpendicular, mas não está passando pelo ponto médio. (Refaz com êxito).

discordância

Lucas: Acho que agora está certo (Figura 5.19).

reparação

Trecho 5.12: Fazendo uma reparação⁶³

⁶² Falas 103 e 104 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 148.

⁶³ Falas 109 e 110 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 148.

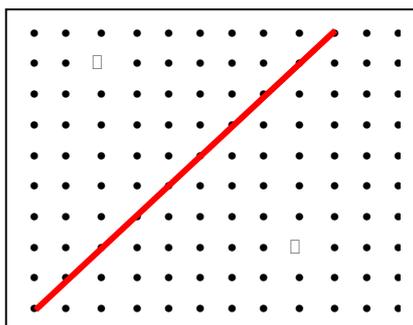


Figura 5.19: A assertiva de Lucas

A primeira tentativa de Lucas nos sugeriu, a princípio, que o pseudoconceito formulado nas atividades iniciais pouco havia evoluído, mas as respostas de Lucas para as intervenções feitas pela pesquisadora, nas tentativas seguintes, mostraram que isto não era verdadeiro. O discurso argumentativo e as ações do sujeito nos fazem perceber que ele percebe com clareza das propriedades que devem ser verificadas para a determinação do eixo de simetria, podendo assim estar sua dificuldade associada à natureza da figura (ponto), a posição do eixo de simetria (oblíquo) e a formulação de uma imagem mental, do conjunto representado na ferramenta de desenho, feita a partir de informações fragmentadas adquiridas através do tato (aquisição parcial de informações).

Antes de dar continuidade às atividades, a pesquisadora pergunta a Lucas qual das formas geométricas (figuras, segmentos ou pontos) propostas durante as atividades foi mais simples ou facilitadora para o seu trabalho. Ele declara que o trabalho com os segmentos foi mais fácil e com pontos, mais difícil e justifica sua colocação:

O ponto é mais chato porque eu não tenho outros parâmetros. Na figura eu tenho vários parâmetros. Eu posso me basear para traçar o eixo de simetria nas extremidades, é mais fácil achar a distância. No segmento da mesma forma. O ponto não me dá essa possibilidade eu só tenho um ponto, outro e o eixo de simetria.

As declarações de Lucas contrariam os resultados obtidos nas pesquisas citadas na sessão 2.4. Nessas pesquisas, realizadas com aprendizes videntes, as tarefas que envolviam a reflexão de um ponto em relação a um eixo tiveram alto índice de acertos (Küchemann, 1981), sugerindo que aprendizes videntes têm mais facilidade para visualizar a imagem de um ponto sem que seja necessário empregar uma abordagem analítica. Assim, a natureza dessa forma geométrica é um facilitador para esses aprendizes. Para nós, a fala de Lucas; *tenho vários parâmetros* quando a forma geométrica são segmentos ou figuras, talvez indique a necessidade de um número maior de informações, adquirida de forma háptica, para a estruturação não só de uma imagem mental mais precisa, mas com certeza de uma estratégia a ser empregada, ou seja, para Lucas as tarefas que envolvem reflexão de pontos exigem um tratamento analítico.

Para concluirmos o Conjunto 4 de tarefas, restava-nos voltar a simulação da ligação telefônica.

Pes: Então vamos voltar ao telefone. Na minha casa eu tenho a ferramenta com dois pontos e você da sua casa vai tentar me explicar como posicionar o eixo de simetria.

Lucas: Eu acho que a maneira mais simples é medir com a régua a distância entre um ponto e outro e calcular o ponto médio. E fixar o eixo de simetria de forma que se tenha um ângulo de 90° entre o eixo de simetria e o segmento formado pelos dois pontos.

Trecho 5.13: Ao telefone⁶⁴

Com mais clareza e segurança, Lucas expõe um procedimento preciso para a determinação do eixo de simetria. O sujeito nos parece estar completamente submerso no nível interfigural, já que descreve um procedimento que não depende, para sua realização, da posição dos pontos ou do eixo de simetria que será representado, mas que leva em conta todos os elementos que compõe o conjunto (figuras e pontos do plano). Nem mesmo a presença da malha

⁶⁴ Falas 119 e 120 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 148.

quadriculada é essencial, pois Lucas não recorreu, a exemplo do que fez na simulação anterior, à contagem dos pinos.

Essa atividade completou o roteiro previamente determinado. As mudanças nas ações de Lucas deve-se a muitos fatores como, por exemplo, as ferramentas materiais táteis e as escolhas didáticas (tarefas, variáveis, tipo de intervenções), mas a importância da prática dialógica na interação entre pesquisadora-instrutora e sujeito é indiscutível.

Na discussão sobre a fase retrospectiva, que fazemos no próximo capítulo, tanto a apropriação dos conceitos discutidos, quanto o caminho percorrido por esses conceitos, do científico ao cotidiano ficam evidentes, mas algumas considerações sobre o trabalho de Lucas nesse grupo de tarefas devem ser destacadas.

5.2.1.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE O TRABALHO DE LUCAS COM O GRUPO 2 DE TAREFAS

A primeira estratégia formulada por Lucas para a realização das tarefas, que envolviam a reflexão de figuras, o manteve preso à idéia de reprodução, o que, até certo ponto, o fez trabalhar na perspectiva intrafigural. Com essa estratégia, ele conseguia ter êxito na realização das tarefas, pois a idéia de reprodução o permitia preservar a congruência entre figura-dada e figura-imagem, e a equidistância entre os pontos simétricos era obtida a partir de “uma distância” entre elementos das figuras (vértices ou lados). Assim para ter sucesso em suas investidas, Lucas não precisava reestruturar os pseudoconceitos formulados a partir do trabalho com as figuras de papel canson (ferramenta material 1).

Passou a ser desejável que ele estabelecesse outras relações e reconhecesse outras propriedades ligadas ao conceito de reflexão. Nesse ponto a pesquisadora iniciou o trabalho de enfatizar a distância na perpendicular.

A passagem para o nível interfigural só começou a tornar-se evidente no trabalho com uma forma mais complexa - as bandeiras (Figuras 5.9 e 5.10). Nessa

atividade Lucas ampliou os (pseudo)conceitos formulados anteriormente tendo que considerar para a realização da atividade além da distância e da reprodução, a orientação da figura (ângulos).

As tarefas com os segmentos trouxeram a Lucas mais uma necessidade, pois para *ser fiel* as representações ele precisou lançar mão de mais um recurso em sua estratégia. A partir daí passa usar a distância na perpendicular. Agora a distância usada por Lucas não é mais “uma distância qualquer” e durante o trabalho com segmentos vai ampliando-se a quantidade de elementos que compõe o (conjunto figuras–plano) que Lucas precisa considerar para a realização das tarefas, o que faz o nível interfigural prevalecer.

Na primeira simulação do telefone quando a forma geométrica são segmentos, Lucas ao exercer o papel de instrutor, faz emergir sua própria zona de desenvolvimento proximal, o que provoca uma mudança no seu nível de pensamento geométrico. Essa mudança torna-se mais evidente quando realizamos a mesma simulação trabalhando com a reflexão de pontos. Lucas descreve com segurança sua estratégia, sem que seja necessária uma única intervenção da pesquisadora.

5.2.2. O TRABALHO DE EDSON

No caso de Edson, a pesquisadora inicia o trabalho com reflexão aproveitando a tarefa em que ele teve que determinar os eixos de simetria de um hexágono representado na ferramenta de desenho.

A pesquisadora deixa posicionada na ferramenta o hexágono e um dos seus eixos de simetria (Figura 5.20), e usa esta representação para introduzir ao diálogo a “voz matemática” de dois novos termos – imagem e reflexão.

Nós vamos sair um pouco das figuras simétricas e vamos discutir um outro conceito matemático – **o conceito de reflexão**.

Quando falamos de reflexão, falamos de uma **figura e sua imagem**. Se você pensar nessa figura que está na ferramenta, metade dela, a metade que está na sua esquerda é idêntica à metade que está a sua direita. (Aguarda a exploração tátil).

O eixo de simetria atravessa a figura e tudo que você tem a direita tem também a sua esquerda.

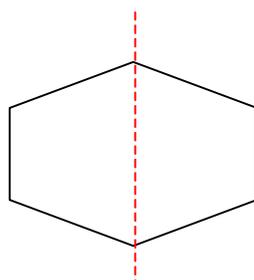


Figura 5.20: Iniciando o estudo de reflexão

A expressão facial de Edson sugere que ele aceitou bem ambos os termos, e na seqüência do diálogo a pesquisadora o faz indicar alguns pontos e suas respectivas imagens. Ao solicitar que ele destaque alguma relação entre esses pontos e o eixo de simetria, o sujeito diz que *se for até o meio* poderá *ter uma base da divisão entre os dois lados* (da figura). Edson, dentro de uma perspectiva intrafigural, continua a imaginar uma dobra na posição do eixo de simetria, o que o leva a centrar sua atenção *no meio*.

A exemplo do procedimento realizado com Lucas, a pesquisadora oferece a Edson na ferramenta de desenho, a representação de um triângulo isósceles e sua imagem segundo um eixo (Figura 5.1). Após a exploração tátil ele reconhece a forma geométrica, e respondendo a solicitação de falar sobre a posição do eixo de simetria em relação à figura e sua imagem diz que *ele está no meio*, mas a seqüência de sua declaração -... *o eixo de simetria é o que separa os desenhos em dois desenhos. Desenhos que tem a mesma imagem, que são idênticos* - fez com que a pesquisadora assumisse uma posição discordante.

Pes: O que você está considerando como desenho?

Edson: O triângulo e o outro lado e no meio o eixo de simetria, ou seja, o eixo de simetria dividiu o triângulo em dois.

Pes: Mas cadê as duas partes do triângulo?

Edson: Tá uma aqui e outra aqui (indica os dois triângulos).

Trecho 5.14: Uma posição discordante⁶⁵

A fala e as ações de Edson sobre a ferramenta de desenho, sugerem a pesquisadora que ele está considerando cada um dos triângulos como partes de um único “triângulo”. O pseudoconceito desenvolvido nas atividades que envolviam o estudo de figuras simétricas (Conjunto 1) associado ao nível intrafigural, está dificultando que Edson reconheça duas formas geométricas: um triângulo e sua imagem obtida por reflexão sobre um eixo.

A insistência da pesquisadora em discutir as colocações de Edson, o faz perceber a sua posição discordante.

Pes: Essas duas partes formam um único triângulo?

Edson: Não. Não foi dividido não. Aqui tem dois triângulos.

Pes: Tem dois triângulos.

Edson: O eixo de simetria está no meio.

Trecho 5.15: Reconhecendo dois triângulos⁶⁶

Nesse trecho do diálogo nos parece que o mal-entendido criado pelas primeiras colocações de Edson havia sido resolvido. Para certificar-se disto a pesquisadora pergunta: *Se eu te der um triângulo, como você faria para determinar a imagem dele?* A resposta (Figura 5.21) e a justificativa de Edson nos surpreenderam.

Eu faria assim, olha (Figura 5.21). Aqui tem um lado (completa o triângulo vermelho) e aqui tem o outro. É o triângulo.

⁶⁵ Falas 125 a 128 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

⁶⁶ Falas 121 a 124 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

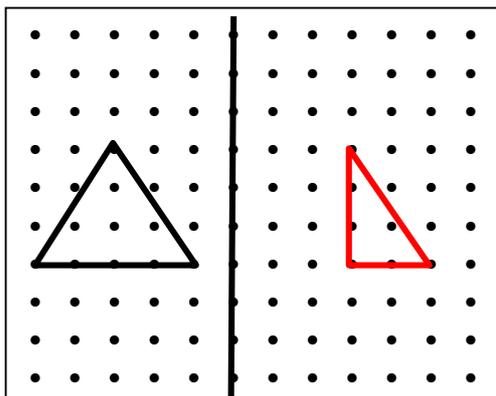


Figura 5.21: Um obstáculo

Pes: E o que você levou em conta para fazer isso?

Edson: O exemplo. O eixo de simetria. Esse aqui no caso é o eixo de simetria (aponta o eixo). Aqui é o triângulo (aponta os dois triângulos).

Ou seja, aqui (posiciona um triângulo na ferramenta como fizemos na tarefa anterior-Figura 5.1) temos um eixo de simetria, mas para ficar uma simetria tenho que deixar só uma parte (Figura 5.21).

Trecho 5.16: Um mal-entendido⁶⁷

Parecia-nos mais claro o que Edson tinha em mente. Ele estava imaginando os dois triângulos como duas partes simétricas de um único triângulo simétrico. No esquema abaixo procuramos representar esta idéia (Figura 5.22).

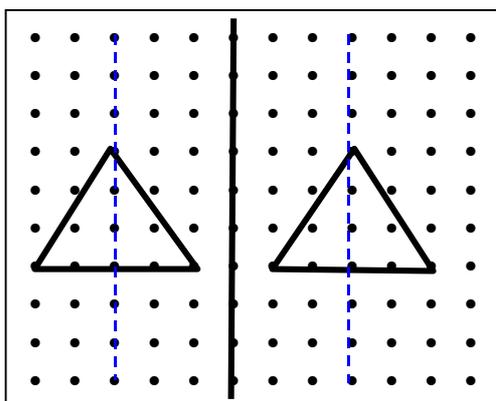


Figura 5.22: O ponto de vista de Edson

⁶⁷ Falas 131 e 132 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

Interpretamos então que o sujeito está usando um pseudoconceito, pois está empregando de forma sintaticamente correta o termo eixo de simetria, mas atribuindo a esse termo um significado distinto do aceito pela comunidade matemática, criando um conceito idiossincrático. Nesse momento, o objeto matemático eixo de simetria está em patamares distintos de significado se comparamos as concepções do sujeito e da pesquisadora.

Na seqüência do diálogo, Edson diz estar aplicando a esta situação a mesma estratégia que usou nas figuras de papel canson. A pesquisadora volta a falar sobre as propriedades das figuras simétricas discutidas no Conjunto 1, tentando mostrar que a diferença entre as duas situações. Segue-se, então, um longo trecho de diálogo, no qual a pesquisadora procura fazer com que Edson amplie o pseudoconceito formulado para eixo de simetria. Em várias respostas dadas pelo sujeito, durante essa interlocução, ele emprega os termos usados pela pesquisadora como se produzisse um eco, não atribuindo a esses termos nenhum significado conectado ao objeto matemático.

A pesquisadora oferece ao sujeito a oportunidade de construir a imagem do triângulo que estava sendo estudado (Figura 5.23a). Edson realiza a tarefa com êxito (Figura 5.23b), e justifica sua resposta.

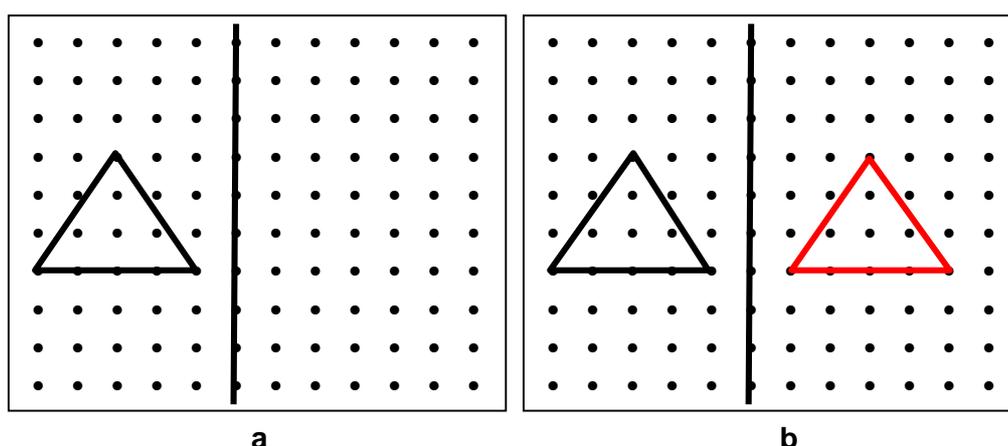


Figura 5.23: Repetindo a tarefa

Pes: E por que você escolheu bem esse ponto aqui para ser a imagem desse daqui? (posiciona a mão do sujeito em dois pontos simétricos, um de cada triângulo).

Edson: Porque eu contei daqui até aqui e daqui até aqui (distância do ponto ao eixo de simetria e do eixo até o ponto-imagem).

Pes: Então o que você está mantendo entre as figuras?

Edson: Distância.

Trecho 5.17: Reconhecendo a distância⁶⁸

Edson recebe a proposta de determinar a imagem de outro triângulo (Figura 5.24). A tarefa é realizada com sucesso numa segunda tentativa, e para fazer a verificação da sua construção, em sua ação percebe-se ele certifica-se que o número de pinos que ficaram no interior dos dois triângulos é mesmo (característica do nível intrafigural).

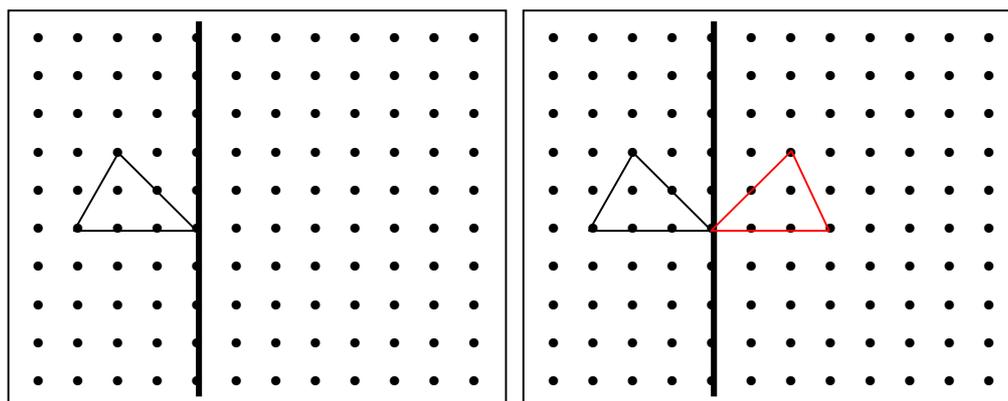


Figura 5.24: Construindo a figura imagem

A pesquisadora pede que Edson justifique a posição dos vértices simétricos que não pertencem ao eixo de simetria. Ele diz ter contado de 1 a 4 até chegar ao eixo, e começando por esse ponto conta mais quatro para chegar a posição do simétrico. Na ação de Edson a pesquisadora percebe que ele começa a usar, mesmo que implicitamente, à distância na perpendicular.

⁶⁸ Falas 157 a 160 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

Ao perceber a dificuldade do sujeito em estabelecer relações e para facilitar o diálogo, a pesquisadora decide aproveitar os resultados de pesquisas precedentes com aprendizes videntes (ver Seção 2.4), recorrendo à memória visual de Edson (portador de cegueira congênita).

Para que o pseudoconceito utilizado por Edson pudesse se aproximar do significado atribuído pela pesquisadora, ao objeto *eixo de simetria*, foi feita uma tentativa para conectar esse termo com a noção de imagens no espelho – conceito cotidiano.

Na sua memória visual você tem a sua imagem no espelho?

Parece-nos que esta intervenção da pesquisadora, conectando a memória visual do sujeito a situação presente, motivou uma re-concepção do termo eixo de simetria para ele, e fez emergir um campo simbólico temporal (ZDP), onde o diálogo instrucional desenvolve-se com mais facilidade.

Na discussão sobre a posição da imagem no espelho Edson lembra-se que a imagem aparece invertida. Na sessão anterior ele já havia percebido a inversão de orientação quando o objeto de estudo eram figuras simétricas (ver Seção 4.3.2), mas não estava conseguindo conectar essa propriedade as imagens obtidas por reflexão em torno de uma reta. A pesquisadora frisa, ainda, a equidistância entre objeto e imagem em relação ao espelho.

Na execução da tarefa seguinte (Figura 5.25), Edson inicia posicionando o elástico no vértice sobre o eixo de simetria, puxa-o, simultaneamente, nas duas direções dos lados do triângulo-dado (Figura 5.26). Ele determina a posição do lado paralelo ao eixo contando o número de pinos na altura do triângulo relativa a esse lado, estando assim, usando a distância na perpendicular. Em relação a isso, queremos chamar a atenção para o fato de que ele não procura estabelecer, primeiro, a posição dos vértices para desses determinar a figura-imagem. Usa a perpendicular para determinar a que distância deve estar o outro lado.

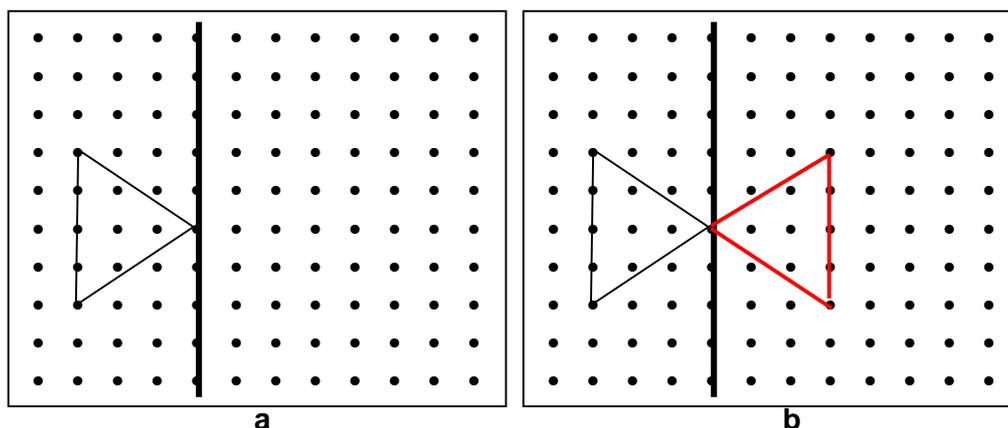


Figura 5.25: Usando a relação da equidistância

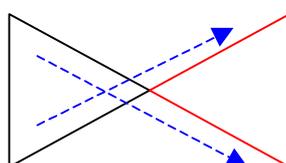


Figura 5.26: A estratégia de Edson

A ação de Edson, ao realizar essa tarefa, sugeriu a pesquisadora que para determinar os lados não paralelos ao eixo, ele estava buscando o alinhamento entre o lado da figura dada e da figura que estava construindo (Figura 5.26). Essa estratégia o levou ao êxito, mas na determinação da imagem de um outro tipo de figura poderia tornar-se um obstáculo.

Passa a ser nossa intenção chamar a atenção de Edson para o caráter bissetor do eixo de simetria. Para isso a pesquisadora, usando a representação da tarefa anterior, o faz falar sobre os ângulos.

Pes: E o que o eixo de simetria fez com esse ângulo formado por esses dois lados? (ângulo formado por 1 e 2 – Figura 5.26).

Edson: Dividiu. Separou.

Pes: Dividiu como?

Edson: Em dois.

Pes: Em dois como?

Edson: Ao meio.

Trecho 5.18: Percebendo o caráter de bissetriz do eixo⁶⁹

⁶⁹ Falas 205 a 210 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

A tarefa seguinte (Figura 5.5) é realizada com sucesso na primeira tentativa. O eixo de simetria é representado obliquamente, e Edson vira a ferramenta de desenho para deixá-lo perpendicular em relação a seu corpo. Ao destacar a importância do eixo de simetria para a realização da tarefa, ele destaca a possibilidade de comparar distâncias e o seu papel de facilitador para validação do resultado. Não faz nenhuma referência aos ângulos.

Iniciamos o trabalho com o Conjunto 3 de tarefas – reflexão de segmentos em torno de uma reta. Na primeira tarefa proposta desse conjunto (Figura 5.27a), a orientação do segmento implicava numa atenção especial em relação ao ângulo que o segmento imagem deveria determinar junto ao eixo de simetria.

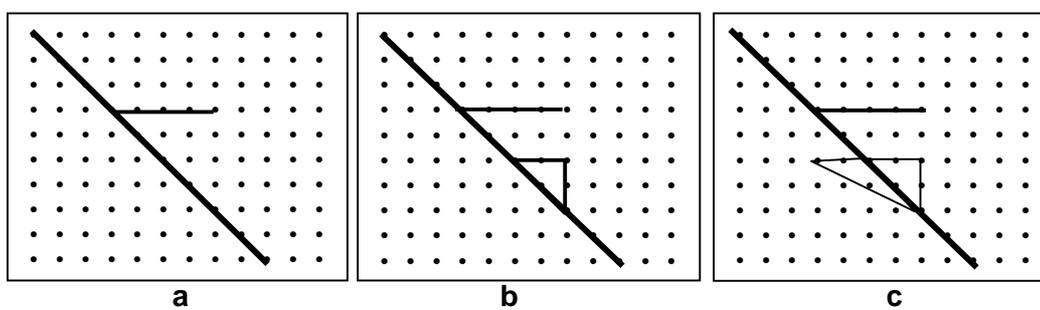


Figura 5.27: Combinando tarefas

A primeira reação de Edson foi dizer que não era possível realizar a tarefa.

Edson: A distância aqui. Não tem mais espaço. (contando o número de pinos seguindo o sentido do segmento dado). É para fazer embaixo?

Pes: É para fazer a imagem segundo esse eixo de simetria.

Edson: Mas pode ser ao lado?

Pes: Quantas imagens a gente tem usando um único espelho? Nas tarefas que você fez antes, havia outras figuras além das que você encontrou que eram imagens?

Edson: Não, então não pode (explora). Essa não pode ser feita.

Pes: Por quê?

Edson: Porque a figura tem cinco pinos e na esquerda eu só tenho quatro pinos.

Trecho 5.19: Usando a relação com espelhos⁷⁰

⁷⁰ Falas 230 a 236 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

A preocupação de Edson com a congruência das medidas dos segmentos (dado e imagem) não se estendeu à congruência entre os ângulos, e como no trabalho com Lucas, a pesquisadora adiciona outra forma geométrica a composição representada na ferramenta de desenho (Figura 5.27b).

Edson construiu a suposta imagem do triângulo dado, conservando a congruência de um dos seus lados (Figura 5.27c). Segue-se uma longa discussão sobre a congruência dos ângulos da figura que ele construiu o que o faz reparar sucessivas vezes sua construção. Ao chegar a uma resposta definitiva, a pesquisadora faz com que Edson verbalize o que foi necessário conservar para chegar à resposta. Edson não percebe nenhum outro ponto que compõe o conjunto (figuras – plano) o que denota a perspectiva intrafigural.

Pes: O que foi preciso conservar para fazer a imagem?

Edson: Os lados.

Pes: Só?

Edson: E os ângulos.

Trecho 5.20: As relações de congruência⁷¹

Ao retomar a tarefa anterior (determinar o segmento-imagem do segmento-dado em relação ao eixo) Edson, ao justificar sua resposta (Figura 5.28a), considera ter mantido a congruência entre as medidas dos segmentos e entre os ângulos que esses formam com o eixo de simetria. Para ele a congruência entre os ângulos opostos pelo vértice (que representamos em azul) bastava para garantir a imagem.

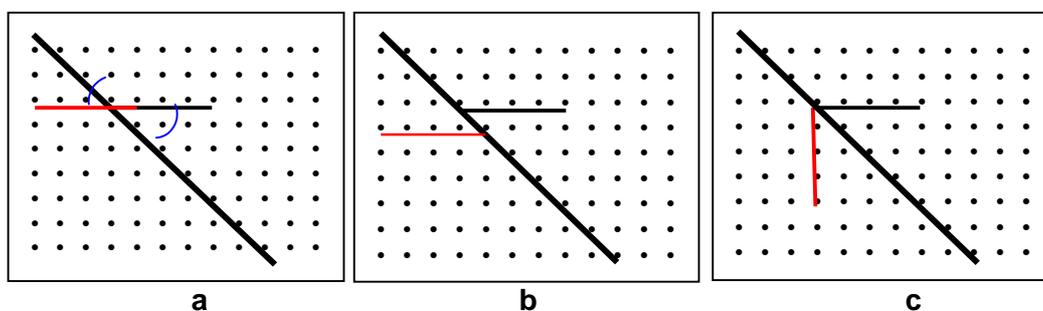


Figura 5.28: Construindo segmento-imagem

⁷¹ Falas 251 a 254 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

Depois de discutir as medidas dos ângulos, Edson representa sua imagem como mostramos na Figura 5.28b. O trabalho no nível intrafigural o fazia preocupar-se somente em reproduzir duas partes de mesma medida de uma única figura. O impasse só foi superado quando a pesquisadora apelou para as imagens formadas em espelhos.

Pes: Quando você tem a imagem no espelho, se você encosta o dedo no espelho a sua imagem encosta o dedo no espelho também, e você tem a impressão que sua imagem encosta o dedo no seu dedo.

Edson: Sim.

Pes: Aqui o eixo de simetria é como se fosse o espelho e esse ponto aqui (ponto sobre o eixo de simetria) é como se fosse o seu dedo.

Edson: Tá errado.

Trecho 5.21: Recorrendo a uma imagem visual⁷²

Depois de muitas tentativas e negociações, Edson apresenta a resposta como na Figura 5.28c. Para convencer que a resposta estava correta a pesquisadora precisou discutir com o sujeito a posição de cada um dos pinos que formavam a figura com seus respectivos simétricos.

Na proposta da última figura nessa sessão (Figura 5.29a) Edson, a princípio, não quer nem tentar realizá-la, pois considera ser impossível determinar a imagem. Só aceita arriscar-se com a ajuda da pesquisadora que o induz a verificar distâncias, orientação e posicionamento.

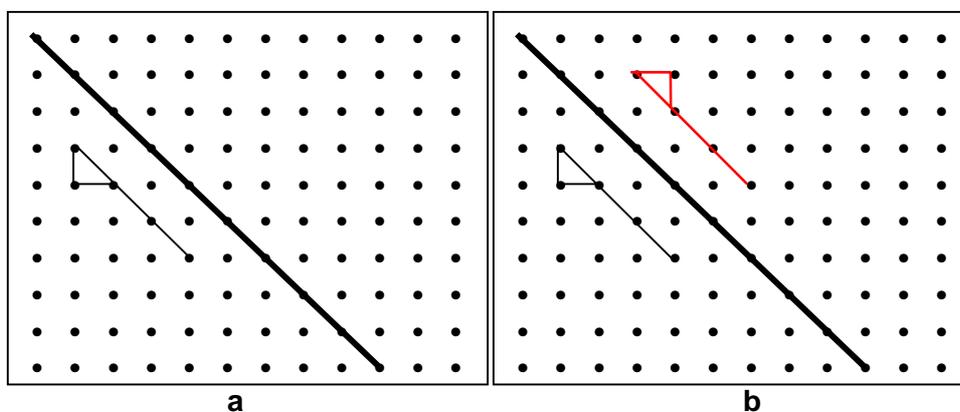


Figura 5.29: A tarefa e a resposta de Edson

⁷² Falas 271 a 274 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

Não tendo sido possível perceber a passagem do nível intrafigural para o interfigural, ao final dessa sessão a pesquisadora procura verificar se a sucessão de tarefas havia provocado alguma mudança nos pseudoconceitos estruturados na sessão anterior (ver Capítulo 4).

Pes: Me fala uma coisa então agora: o que é o eixo de simetria para você?

Edson: É o que separa uma figura em duas ou em uma e a imagem.

Trecho 5.22: Eixo de simetria por Edson⁷³

Ao falar sobre o eixo de simetria, Edson deixa ainda mais evidente sua perspectiva intrafigural. Para ele o eixo de simetria continua sendo o elemento que divide a figura em duas (no caso figura parece ser a ferramenta de desenho). Nesse sentido, o pseudoconceito formulado por Edson para eixo de simetria, continua no mesmo patamar que se encontrava ao final do trabalho com figuras simétricas.

Pes: E a reflexão aqui na nossa Matemática. O que é para você?

Edson: Pensar e analisar tudo.

Pes: Essa aqui é a figura que lhe dei, e essa é a figura refletida segundo esse eixo. Então o que você fez foi à imagem da que eu dei por esse eixo. Então me fala da reflexão.

Edson: É a imagem da figura, do desenho.

Trecho 5.23: Reflexão por Edson⁷⁴

Ao falar sobre reflexão, inicialmente Edson a defini usando termos que próximos aos usados na fase exploratória (ver Seção 4.2.4). A pesquisadora insiste na questão oferecendo a ele um exemplo, mas não tem êxito em sua investida.

O próximo passo era investigar se Edson poderia conectar os conceitos matemáticos (conceitos científicos) a sua prática diária (conceitos cotidianos).

⁷³ Falas 323 e 324 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

⁷⁴ Falas 325 a 328 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

Pes: Na sua vida, no dia-a-dia, tem figuras simétricas, eixo de simetria e reflexão? Não com esses nomes, é claro, mas aparecem esses conceitos?

Edson: Em objetos sim. Por exemplo: uma flor em cima da minha mesa, outra pessoa pode colocar igual, na mesma mesa, da mesma cor, daí pode ter o eixo de simetria.

Trecho 5.24: A idéia de espelho⁷⁵

O exemplo dado por Edson parece estar associado à idéia de imagem em espelhos. Ele imagina uma representação em três dimensões (Figura 5.30).

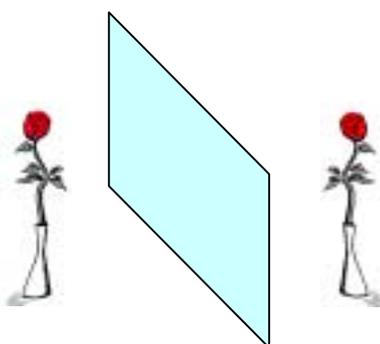


Figura 5.30: Uma imagem em 3D

Edson dá mais um exemplo com as características descritas acima, e diz que - *reflexão são imagens, duas figuras iguais*. A pesquisadora procura fazê-lo estabelecer outras relações entre os conceitos científicos estudados e seus conceitos cotidianos.

Pes: E suas duas orelhas são simétricas?

Edson: É (risos) totalmente.

Pes: E cadê o eixo de simetria?

Edson: Tá no meu nariz (risos).

Pes: E o que mais você tem de simétrico?

Edson: Meus braços, minhas pernas . . .

Pes: Então! E fora do corpo humano?

Edson: Não tem.

Pes: Como você dobra suas calças?

⁷⁵ Falas de 329 e 330 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

Edson: Ah tá! Tem eixo de simetria na calça, na camisa, no blusão. . . em tudo tem.

Pes: Sai da roupa. Onde mais? Você percebeu quantas coisas estamos conseguindo falar?

Edson: Vi, mas acho que agora não tem mais não.

Pes: Não? Como você dobra seu cobertor?

Edson: Em dois. Ponta com ponta. Tem eixo de simetria.

Dá inclusive para fazer vários eixos de simetria

Trecho 5.25: Do científico ao cotidiano⁷⁶

No caso de Edson, a relação entre conceitos científicos e cotidianos não foi um processo natural. As intervenções da pesquisadora o auxiliaram a estabelecer tais relações. É interessante realçar que ele se surpreende ao perceber que é possível encontrar simetria (ou eixo de simetria) em muitos objetos que fazem parte de sua prática diária.

No início da terceira sessão, Edson só fala sobre os termos matemáticos discutidos nas sessões anteriores respondendo as intervenções da pesquisadora. Suas respostas são vagas, e não apontam grande mudança em relação ao início da segunda sessão, como pode ser visto nos trechos abaixo:

Pes: Discutimos algumas figuras que tinham eixo de simetria. O que é eixo de simetria então?

Edson Eixo de simetria é o que divide em duas figuras idênticas.

Pes: Quando uma figura é simétrica?

Edson: Quando os dois lados são idênticos, ou seja, se eu dobrar a figura fica igual.

Pes: E como chama essa dobra?

Edson: Eixo de simetria.

Pes: O que é reflexão?

Edson: É pensar. É desenhar alguma coisa na cabeça. Imaginar. Como

⁷⁶ Falas de 335 a 348 da segunda sessão, enumeradas de 1 a 350.

você deu o exemplo do espelho. Eu me olhando no espelho. Eu criei uma imagem de mim.

A ação de Edson, ao realizar a primeira tarefa proposta do Conjunto 3 (Figura 5.31a), foi surpreendente.

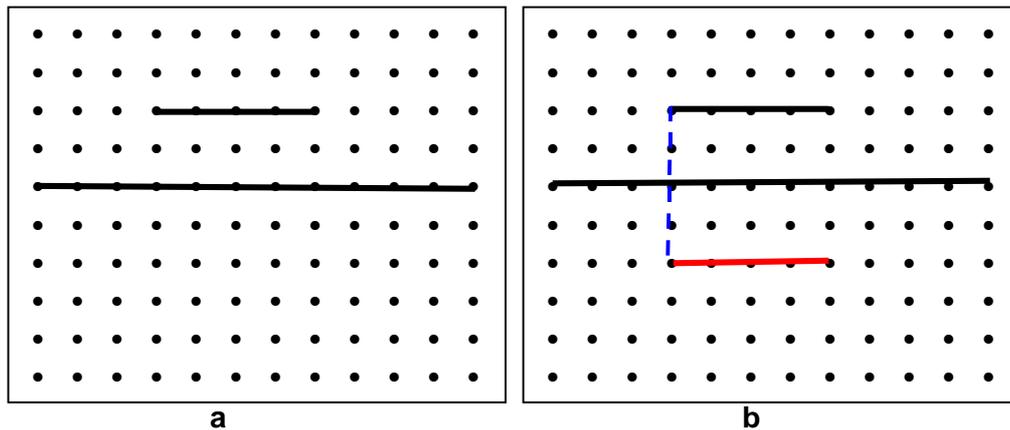


Figura 5.31: Uma nova estratégia

Edson posiciona um elástico numa das extremidades do segmento, de modo que esse elástico fique perpendicular ao eixo de simetria. Conta o número de pinos do segmento-dado ao eixo, reproduz o mesmo número de pinos partindo do eixo de simetria para o semiplano inferior e determina o simétrico da extremidade eleita. A partir desse ponto constrói o segmento-imagem. Faz a verificação certificando-se da equidistância entre os segmentos em relação ao eixo e a congruência dos mesmos.

O trabalho com segmentos trouxe a necessidade de uma nova estratégia, já que manter as distâncias, os ângulos e a inversão das figuras exigia mais do que o intuitivo, ou seja, sua memória visual associada a espelhos. Embora não tenha falado explicitamente sobre a relação de perpendicularismo, na descrição da ação do sujeito, observamos que ele cria um signo externo (usando um elástico para definir a perpendicular) a fim de determinar o simétrico de um ponto. Para realizar a tarefa Edson não se concentra apenas nas distâncias, mas também na orientação do segmento e imagem em relação ao eixo. Ao justificar seu

procedimento, o sujeito nos sugere a aplicação de algumas propriedades, ligadas à distância na perpendicular.

No entanto, até esse ponto nessa sessão, Edson havia trabalhado com o eixo de simetria nas posições horizontal e vertical, assim não fica óbvio se que ele está usando o objeto matemático perpendicular ou usando um signo externo somente para auxiliá-lo na eqüidistância entre um ponto e seu simétrico. O que, no caso de eixos horizontais ou verticais, pode ser associado a imagens no espelho.

Talvez, prematuramente a pesquisadora oferece a Edson o termo matemático para designar o signo externo que ele estava usando, introduzindo ao diálogo a voz matemática.

Edson: Eu usei um exemplo meio louco. Eu fiz como se tivesse trabalhando com um espelho, e eu tentei medir a distância, a mesma distância.

*Pes: Essa reta que você traçou é chamada **reta perpendicular**.*

Edson: Perpendicular.

Trecho 5.26: A voz matemática - Perpendicular⁷⁷

A fala da pesquisadora ecoa na voz de Edson, mas ele não inclui de imediato esse termo ao seu repertório.

A nova estratégia aplicada por Edson sugeria a passagem para o nível interfigural, pois o uso de um signo externo poderia indicar a necessidade de relacionar outros pontos do conjunto figuras-plano para conservar distâncias e medidas.

O trabalho no nível interfigural ficou mais evidente na realização de tarefa oferecida a Edson, em que o segmento-dado é posicionado obliquamente em relação ao eixo de simetria (Figura 5.32a).

⁷⁷ Falas de 36 a 38 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 226.

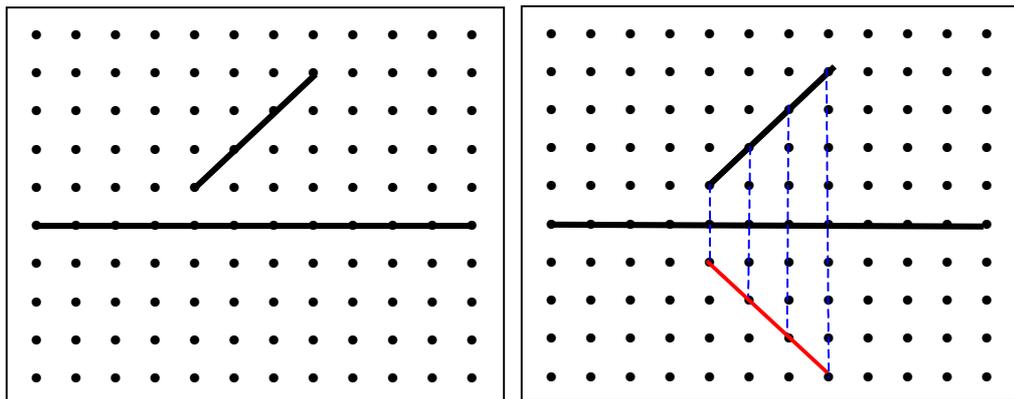


Figura 5.32: Usando signos externos

Edson começa a posicionar elásticos perpendicularmente ao eixo de simetria (Figura 5.32b) para determinar a distância entre cada um dos pontos e seu respectivo simétrico. Curiosa para saber o que Edson tinha em mente ao posicionar cada um dos elásticos, a pesquisadora pede que ele vá contando o que está fazendo.

Eu tô medindo, já fazendo de uma vez, por isso que eu estou usando vários elásticos. Quando eu terminar já vou ter a forma feita desse outro lado aqui.

Acreditamos que a ação e a declaração de Edson confirmam o trabalho no nível interfigural. Nas quatro tarefas seguintes, que envolviam a construção da imagem de um segmento em relação a uma reta, o sujeito aplicou a estratégia descrita acima, mesmo quando o eixo de simetria era inclinado. Em determinado ponto do desenvolvimento das atividades Edson percebe não ser necessário usar tantos elásticos auxiliares, e passa a posicioná-los somente nas extremidades dos segmentos.

Ao observar, que Edson reconhece a eficiência da estratégia que formulou, a pesquisadora passa a simulação da ligação telefônica, para certificar-se que essa estratégia constituía um método geral para ele.

Edson usa como elemento mediador do seu diálogo com a pesquisadora, uma representação que ele mesmo formulou na ferramenta de desenho. Mesmo com

sucessivas intervenções da pesquisadora Edson não usa o termo *perpendicular* que lhe foi oferecido. O emprego da perpendicular só pode ser percebido em sua ação, quando ele posiciona elásticos auxiliares ocupando essa posição, o que não pode ser comunicado ao telefone. Todo processo parece ser absolutamente natural para ele.

Notamos que depois do eco (*perpendicular*) produzido imediatamente após sua introdução, Edson as poucas vezes que usa esse termo, até o final da sessão, o faz ecoando a voz da pesquisadora, mas a sua introdução levou Edson a adaptar a mesma estratégia para todas as tarefas que se seguiram. Ao explicitar sobre seu procedimento ele fala de distâncias ou espelhos. Analisando a apropriação dos conceitos relacionados à perpendicular, por Edson, acreditamos que ao oferecer a ele o termo perpendicular, a pesquisadora lhe deu sinais de que o procedimento usado era matematicamente adequado, sem que ele atribuísse ao signo externo o significado matemático pretendido, o que o fez seguir com esse procedimento de forma mecânica, sem que ele percebesse a importância do perpendicularismo.

Iniciamos as tarefas representadas na Figura 5.14, na qual cabia a Edson determinar a posição do eixo de simetria. Na realização da última dessas tarefas (Figura 5.33a) ele assume voluntariamente o papel de instrutor. Em sua fala pode-se perceber que o pseudoconceito formulado para o conceito *reflexão* está sendo ampliado.

Edson: Vou te ensinar de um jeito que você pode se basear, mas se você quiser fazer uma prova você pode deixar isso acontecer. Vamos lá.

De uma ponta a outra temos dentro do segmento 1, 2, 3 pontos. Pega os três pontinhos que estão aqui (posiciona um elástico em três dos pontos) e usamos o outro segmento da mesma forma (Figura 5.33b). Por que estou dizendo que isso não é recomendável fazer, a menos que você realmente esteja disposto a entender? Porque aqui vamos criar o eixo de simetria. Contamos agora a distância entre uma figura e outra, 1, 2, 3, 4, 5, também temos cinco (medida do segmento), interessante isso. É como se fosse rascunho. Agora vamos fazer o principal para

identificar o eixo de simetria. Contamos 1, 2 do outro lado da mesma forma 1, 2 (posiciona o elástico) e fazemos uma linha reta. O eixo de simetria é uma reta (executa a tarefa com sucesso). Tira esses daqui (elásticos auxiliares) que eu usei só para me ajudar. Certo.

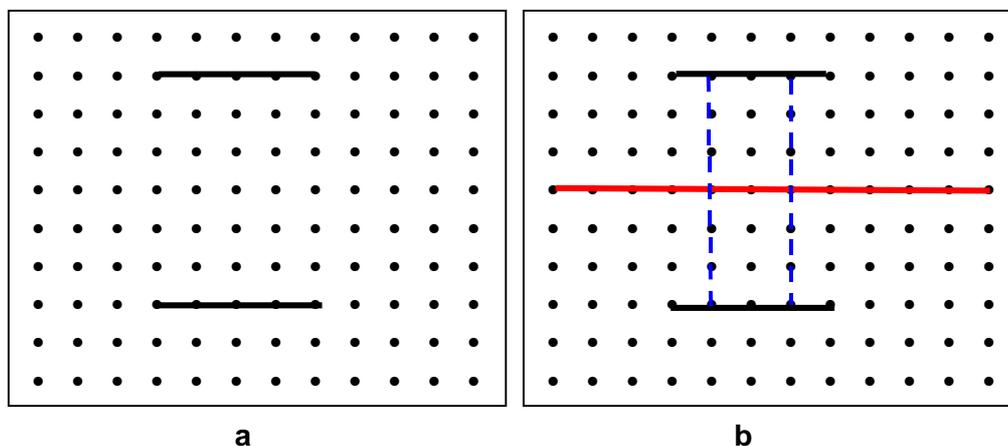


Figura 5.33: Ampliando o pseudoconceito

Implicitamente Edson está empregando relações intimamente ligadas ao conceito de reflexão:

- Pontos simétricos estão a uma mesma distância, medidas na perpendicular, em relação ao eixo de simetria.
- Figura-dada e figura-imagem têm a mesma medida.
- O eixo de simetria deve coincidir com a mediatriz do segmento formado por um ponto e sua respectiva imagem.

Especificamente, nessa atividade, nada podemos falar a respeito da inversão de orientação.

O discurso de Edson marca a passagem para o trabalho com o Conjunto 4 de tarefas – reflexão de pontos em relação a uma reta. Nas quatro tarefas, onde ele deveria determinar o ponto imagem, à estratégia continuou a mesma: posicionar um elástico auxiliar para determinar a distância na perpendicular. Apesar da insistência da pesquisadora, o sujeito só se apropria do termo *perpendicular* na realização da última tarefa desse tipo.

Na simulação da ligação telefônica, Edson faz suas colocações com a mesma naturalidade descrita na anterior. Ele deveria ensinar como determinar o simétrico de um ponto em relação a um eixo (Figura 5.34), mas suas declarações não denotam nenhuma evolução em relação à simulação anterior.

Pes: E agora como você me ensinaria a fazer isso pelo telefone?

Edson: Conta os pontos que estão dentro do eixo de simetria, entre uma ponta e outra. São cinco vai ao meio dos cinco certo? E você pega um ponto e conta quantos tem dentro (entre o eixo de simetria e o ponto). Tem um, posiciona então a imagem deixando um também do outro lado.

Trecho 5.27: No papel de instrutor⁷⁸

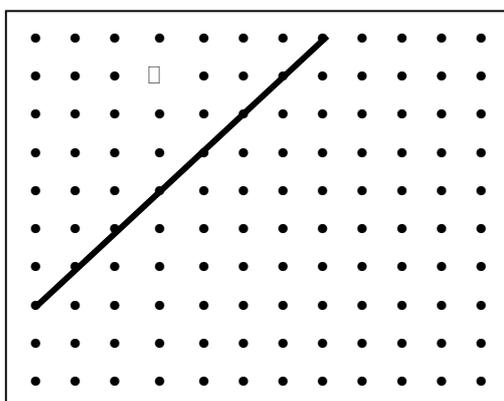


Figura 5.34: Fazendo a reflexão de pontos

Na próxima série de tarefas Edson deveria posicionar o eixo de simetria entre dois pontos. A determinação de Edson em usar um signo externo para determinar a posição tanto da imagem (de pontos ou segmentos) como do eixo de simetria, fez com que a pesquisadora decidisse aplicar uma única tarefa desse tipo, que foi realizada com êxito.

No próximo capítulo discutiremos a fase retrospectiva de Edson. Na próxima seção queremos destacar algumas considerações sobre o seu trabalho com esse grupo de tarefas.

⁷⁸ Falas 199 e 200 da terceira sessão, enumeradas de 1 a 226.

5.2.2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O TRABALHO DE EDSON COM O GRUPO 2 DE TAREFAS

No trabalho com o Conjunto 1, Edson criou uma estratégia para a determinação do eixo de simetria de figuras simétricas, que acabou dificultando a realização do Grupo 2 de tarefas. Esse impasse só foi superado quando a pesquisadora recorreu à memória visual de Edson (portador de cegueira congênita). A partir da associação que ele passa a estabelecer entre “imagens no espelho” e “imagem de uma figura”, a realização das tarefas seguintes torna-se um processo mais rápido.

No Grupo 1 de tarefas, Edson havia identificado propriedades importantes como, por exemplo, o caráter bissetor do eixo de simetria, mas, num primeiro momento, tais propriedades não o auxiliaram na passagem do nível intra para interfigural, no estudo de reflexão em torno de uma reta. Isso só aconteceu quando ele passou a usar um signo externo para determinar pontos simétricos na produção da imagem de um segmento-dado, obtida por reflexão sobre um eixo.

A relação entre suas ações e declarações, com imagens formadas em espelhos, pôde ser reconhecida em todo o desenvolvimento das atividades, e a (nova) estratégia formulada (uso de signo externo), por ele, a partir dessa relação o conduziu ao êxito e fez com que o nível interfigural prevalecesse. Edson usou essa estratégia em todas as tarefas propostas, inclusive na determinação da imagem de pontos e nas atividades que envolviam eixo de simetria inclinado.

Embora os pseudoconceitos formulados nas tarefas iniciais tenham sido ampliados durante o desenvolvimento das situações instrucionais, não há evidências que nos permitem afirmar que Edson tenha formulado um conceito matemático formalmente aceito. No entanto, durante a realização das tarefas, o diálogo entre sujeito e pesquisadora é mediado por esses pseudoconceitos, que permitiram pesquisadora e sujeito, negociar e comunicar significados. Na medida em que a pesquisadora usa a linguagem, fazendo perguntas e dando exemplos, para conduzir o sujeito a refletir sobre as propriedades matemáticas de figuras

simétricas e reflexão, pesquisadora e sujeito co-constroem e compartilham um espaço simbólico, onde ambos envolvem-se num diálogo cada vez mais voltado para o objeto matemático em estudo. Ao longo dessas atividades parece-nos que Edson vai refinando o significado atribuído (por ele) ao termo eixo de simetria, aproximando-se, gradativamente, do significado matemático desse termo comunicado pela pesquisadora.

5.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE O GRUPO 2

No desenvolvimento das tarefas, no caso de Lucas, a instrutora-pesquisadora não podia apoiar-se em qualquer concepção “primitiva” do aprendiz, do tipo sugerido por Edwards e Zazkis (1993) no trabalho realizado com aprendizes videntes, já que essas concepções são ligadas com experiências visuais. Detemo-nos então nas idéias de Leher *et al.* (1998), oferecendo aos sujeitos situações simples que pudessem ajudar na formulação de significados que, na medida em que as tarefas tornavam-se mais desafiadoras, eram modificados permitindo que eles se aproximassem de um conhecimento matemático oficial.

No caso de Edson, a instrutora-pesquisadora apelou à associação com espelhos, o que normalmente ocorre com aprendizes videntes estudando reflexão, recorrendo assim a sua memória visual. A conexão entre sua memória visual e a situação presente o permitiu formular estratégias para realização das atividades, e o fez gradativamente transformar os pseudoconceitos desenvolvidos na primeira fase do trabalho experimental.

Edson e Lucas iniciaram o trabalho com o Grupo 2 de tarefas associando a reflexão a reprodução de figuras. No desenvolvimento deste grupo de tarefas, Edson manteve-se trabalhando nessa perspectiva, já que ela lhe oferecia uma estratégia que o conduzia ao êxito na execução das tarefas. Para ele reflexão continuou a ser o produto de um processo, talvez pela associação que ele podia

estabelecer fazendo uso dos recursos oriundos de sua memória visual ligada a imagens no espelho.

Lucas, não podendo fazer uso dos mesmos recursos que Edson, tinha somente as informações fragmentadas, adquiridas de forma háptica, para formular e processar as informações fornecidas pelo sistema figuras-plano. Para ele reflexão é um processo, que deve controlar as distâncias na perpendicular de dois pontos simétricos em relação ao eixo de simetria, os ângulos e a inversão da orientação da figura-dada.

A estratégia desenvolvida pelos dois sujeitos é uso da distância na perpendicular para determinar pontos simétricos. O que a distingue é o signo. Edson precisa recorrer a um signo externo e a aplica em praticamente todas as atividades. Lucas a aplica sem precisar de uma representação concreta, exceto numa das atividades, a de determinar o simétrico de um ponto onde o eixo de simetria é oblíquo. Nesse caso ele usa a régua para simular perpendicular e facilitar o posicionamento do ponto simétrico.

No trabalho com figuras (Conjunto 2) Lucas inicia as tarefas determinando o simétrico de cada um dos seus vértices, e a partir desses completa a construção. Edson usa a altura relativa ao lado paralelo ao eixo (quando ele existe) ou o número de pontos (pinos) que pertencem ao interior da figura.

Durante o trabalho com as tarefas do Grupo 2, evidencia-se o desenvolvimento do nível de pensamento geométrico de ambos os sujeitos: a passagem do nível intrafigural, empregado quando o objeto de estudo eram figuras simétricas, para o nível interfigural. Tanto Lucas como Edson, deixam de virar a ferramenta de desenho para posicionar convenientemente o eixo de simetria, a partir do momento que estruturam uma estratégia que os permite realizar com sucesso as tarefas.

No papel de instrutor Lucas faz emergir sua ZDP, já para Edson a simulação não traz mudanças para suas estratégias ou concepções. Ele e a pesquisadora só partilham o mesmo espaço simbólico quando o sujeito aplica um pseudoconceito ou quando, para sair de um impasse, a pesquisadora recorre à memória visual dele.

A prática dialógica desenvolve-se com mais facilidade com Lucas, pois o seu repertório de termos matemáticos, ou seus conhecimentos matemáticos do passado, são mais amplos do que os de Edson. Mostra-se essencial, para que se possa estabelecer um diálogo produtivo, conservar a conexão entre os conhecimentos do passado do aprendiz e os conceitos que estão sendo discutidos.

Ambos os sujeitos ampliam seus conhecimentos matemáticos relativos à simetria e reflexão em torno de uma reta, mas a apropriação desses conhecimentos por Lucas ocorre com mais naturalidade e o resultado desse processo é um conhecimento mais maduro e abstrato se comparado aos apropriados por Edson. Isso poderá ser verificado no próximo capítulo em que trazemos às análises pertinentes a fase retrospectiva.

FASE RETROSPECTIVA

O defeito, ao criar um desvio do tipo humano biológico estável do homem; ao provocar à perda de algumas funções, a insuficiência ou deterioração de órgãos, a reestruturação mais ou menos substancial de todo o desenvolvimento sobre novas bases, seguem um novo tipo; perturba, logicamente, o curso normal do processo da criança de inserir-se na cultura; é que a cultura está acomodada a uma pessoa normal, típica, está adaptada a sua constituição, e o desenvolvimento atípico condicionado pelo defeito não pode fixar-se direta e imediatamente na cultura, como acontece com a criança normal.

(Vygotsky, 1997, p. 27) Tradução nossa.

6.1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, além das análises pertinentes a execução do Grupo 2 de tarefas, procuramos levantar dados que permitam perceber as relações que os sujeitos passaram a estabelecer entre os conceitos matemáticos estudados e sua vida cotidiana. Neste capítulo pretendemos traçar um paralelo entre as declarações dos sujeitos feitas na fase exploratória e na retrospectiva, que nos permita avaliar mudanças provocadas pelo procedimento empírico nos significados atribuídos, por eles, a esses conceitos.

Na fase retrospectiva, volta ao cenário alguns termos matemáticos discutidos na fase exploratória (ver Seção 4.2). No início dessa fase a pesquisadora traz ao discurso “a voz matemática”, introduzida no desenvolvimento do processo empírico, e procura, através de uma colaboração participativa, ajudar os sujeitos a

agregarem as propriedades destacadas, durante a situação instrucional, para os objetos matemáticos estudados.

Especialmente no caso de Lucas, portador de cegueira congênita, interessava-nos saber como ele lidava com a manipulação das imagens mentais formuladas a partir de estímulos táteis, e a conexão que ele poderia fazer com objetos ou situações vivenciadas em sua prática diária.

Além de nossas análises, no que se refere aos conceitos matemáticos, usaremos as falas dos sujeitos com a intenção de oferecer aos educadores, que trabalham com aprendizes cegos, indicadores de como construir e compartilhar um mesmo espaço simbólico com seus alunos.

6.2. A FASE RETROSPECTIVA DE LUCAS⁷⁹

A atividade que antecedeu a fase retrospectiva para Lucas foi a simulação de uma ligação telefônica, onde ele assume o papel de instrutor. A pesquisadora inicia a fase retrospectiva fazendo uma síntese do trabalho realizado nas três sessões.

*Nesse estudo nós trabalhamos primeiro com **figuras simétricas** e depois construímos figuras a partir de uma dada e que mantinha algumas relações com o **eixo de simetria** e com a figura dada. Essa figura que você construiu que é simétrica a figura dada, que várias vezes você notou, estava do outro lado do eixo, nós a chamamos de imagem, o que tem a ver com o nome da transformação geométrica – **reflexão**.*

A pesquisadora pede que Lucas realize mais uma tarefa (Figura 6.1a) que servirá como elemento mediador no diálogo que se seguirá. Ele realiza a tarefa com sucesso na primeira tentativa (Figura 6.1b), e colocando a mão do sujeito sobre cada um dos elementos representado na ferramenta de desenho, a pesquisadora

⁷⁹ Os trechos reproduzidos nesta seção, referem-se às falas de 121 a 148 da terceira sessão de entrevista.

os nomeia (usando a linguagem matemática), e convida Lucas a destacar algumas propriedades.

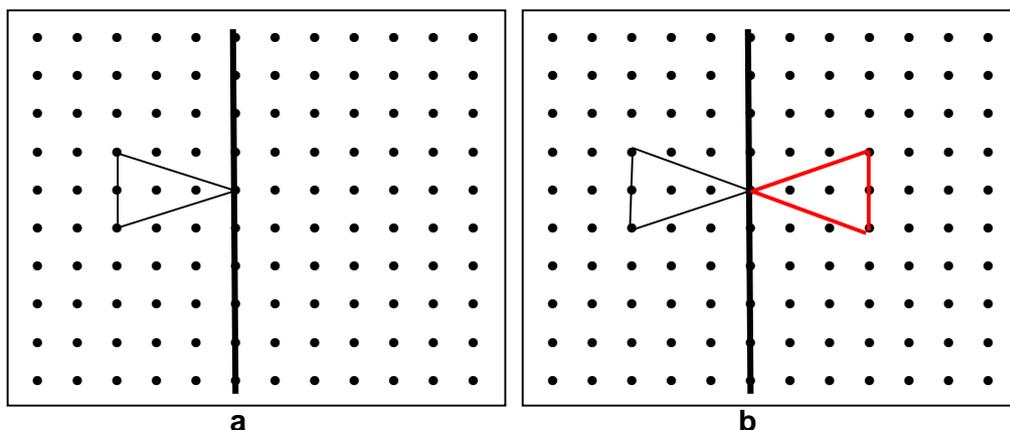


Figura 6.1: Um elemento mediador

Pes: Na Matemática algumas dessas coisas têm nomes especiais. Eixo de simetria, figura dada e figura imagem (indica colocando a mão do sujeito sobre o elástico que representa cada um desses elementos).

Nós dizemos que ocorreu aí uma transformação geométrica, mais exatamente uma reflexão da figura dada em relação a esse eixo.

Propriedades dessa imagem? O que você precisa saber para fazer essa imagem?

Lucas: O tamanho dela. Primeiro a forma dela, depois o tamanho dela Para relacionar ao eixo de simetria as extremidades, a distância entre as extremidades (vértices) da figura, a distância que essa extremidade guarda até o eixo de simetria. As extremidades da figura dada e da imagem devem estar numa perpendicular. Se é eixo de simetria passa exatamente pelo ponto médio das duas extremidades correspondentes da figura dada e da imagem, imaginando um segmento.

Lucas descreve com precisão propriedades intrínsecas da transformação geométrica reflexão: congruência entre a figura e sua imagem, equidistância entre as figuras em relação ao eixo de simetria, perpendicularidade entre o eixo de simetria e o segmento determinado por dois pontos simétricos, fazendo referência, ainda, ao ponto médio.

Para que a descrição dada por Lucas se aproximasse ainda mais do conceito matemático formal, bastava que ele reconhecesse a inversão da imagem obtida por reflexão em torno de uma reta, o que ele faz quando solicitado.

Pes: Me fala tudo agora da figura imagem.

Lucas: Ela tem as mesmas medidas que a figura dada e está invertida em relação à figura dada.

Traçando um paralelo entre o que Lucas define como *reflexão* na fase exploratória e na fase retrospectiva, pode-se perceber que o sujeito apropriou-se de vários aspectos do conceito matemático.

- Na fase exploratória:

Lucas: Reflexão é uma coisa que dá para conceituar também. Eu consigo muito bem conviver com o fato da reflexão.

Pes: Dá um exemplo.

Lucas: É! . . . Estatística, por exemplo. Estatística sobre alguns dados, alguns números, por exemplo. Comparação a uma situação diretamente ligada aquela estatística. Dá para fazer uma reflexão bastante segura.

- Na fase retrospectiva:

Pes: O que é reflexão então na Matemática?

Lucas: É construir uma figura a partir de outra em relação a um eixo de simetria.

Pes: E o que precisa acontecer para ser reflexão?

Lucas: O tamanho da figura e da imagem devem ser o mesmo e as distâncias entre elas e o eixo de simetria devem ser iguais.

Ao falar sobre o conceito matemático *reflexão*, Lucas mostra um conhecimento maduro que passa a fazer parte do seu rol de conhecimentos do passado, estando pronto para ser aplicado a outras situações, sejam elas instrucionais ou cotidianas. Os pseudoconceitos gerados a partir das tarefas iniciais deram lugar a significados mais próximos daqueles comunicados pela pesquisadora durante as

intervenções, conseqüentemente mais próximos dos significados institucionais atribuídos a esses conceitos matemáticos.

Termos introduzidos pela pesquisadora, como imagem e eixo de simetria fazem parte do repertório de Lucas agora, e ele são empregados de forma sintática e semanticamente correta, ou seja, a voz matemática usada pela pesquisadora e pelo sujeito encontra-se nos mesmos patamares.

Pela facilidade que Lucas verbaliza seu pensamento, o que faz os diálogos transcorrerem com naturalidade, a pesquisadora começa a investigar como se dá o processo de formação de imagens mentais para os cegos que nunca enxergaram. A falta de parâmetros que auxiliem na formação dessas imagens, os faz depender dos estímulos táteis e da forma como as informações oriundas desses estímulos são processadas.

Pes: Você tem cegueira congênita. Você não tem memória visual.

Lucas: Nenhuma.

Pes: E foi muito interessante que quando eu falei de imagem, reflexão com portadores de cegueira adquirida, apareceu à memória visual de espelho, que é a mesma relação que os videntes fazem com esse conceito matemático. E o que eu gostaria de mostrar é que essas relações não são únicas e que é possível chegar ao conceito matemático de reflexão mesmo sem ter “esse referencial”, e que os deficientes visuais são tão capazes quanto, e que, muitas vezes, não estabelecer essa relação com espelhos acaba sendo um facilitador. E você acertou a construção de imagens de figuras que normalmente os videntes erram.

Agora, como é que você constrói isso na sua cabeça? Porque você tem que estabelecer muito mais relações do quem está vendo.

Lucas: Perfeito.

Pes: E como é que você faz isso?

Lucas: No meu caso, como quando eu era pequeno eu fui muito estimulado pela minha professora de Braille e pela minha família. Eu tenho esses referenciais muito claros em função desse trabalho que foi feito.

Pes: Mas que referências? O que você usa?

Lucas: Eu uso como base, primeiro os lados das figuras, eu procuro manter

o contexto da figura, o formato da figura, a distância entre uma extremidade e outra, se são iguais ou não, tudo isso relacionado em primeiro plano com a forma da figura no contexto geral.

Para Lucas “enxergar” com as mãos é um processo extremamente natural, tanto que ele tem dificuldade para descrevê-lo⁸⁰. Ele atribui essa habilidade aos estímulos recebidos precocemente. Em sua fala fica evidente a importância das ferramentas materiais, o que ele chama contexto geral.

Lucas não faz menção sobre o modo que processa as informações, o que faz a pesquisadora insistir na questão.

Pes: E quando você está fazendo isso você vai criando imagens?

Lucas: Mentalmente sim, vou construindo imagens. É perfeitamente possível dependendo evidentemente da figura. Quando uma pessoa me fala da figura ou de alguma coisa dá para ter uma idéia de como é aquela figura, que de repente eu não consigo construir fisicamente, mas na minha cabeça dá para ter uma idéia.

A declaração de Lucas ratifica os aspectos discutidos na Seção 1.2.2 que trata do conceito de mediação. A possibilidade de formar imagens mentais a partir de estímulos táteis e de informações verbais recebidas por outras pessoas, garante, aos cegos, acesso a quaisquer conhecimentos.

O trecho transcrito abaixo merece destaque pela colocação surpreendente de Lucas. A pesquisadora revela resultados de pesquisas precedentes que tomou conhecimento quando preparava as tarefas propostas neste estudo.

Pes: Essas últimas figuras que nós trabalhamos, com eixo inclinado, segundo pesquisas, são figuras que 60, 70% dos videntes não acertam.

Lucas: Pode ser que eles têm o conceito de “reta é reta”, não podem imaginar uma “reta torta” – inclinada.

Pes: Ou então estão muito presos ao espelho.

⁸⁰ Imaginamos que um vidente teria uma dificuldade parecida para explicar como ele “vê” os objetos no campo visual.

Lucas: É, às vezes o visual atrapalha, confunde. Porque o visual é uma forma de juízo imediato e nem sempre correto.

Na última fala de Lucas, parece que ele considera que a natureza imediata e global da visão, algumas vezes, pode obscurecer certas propriedades importantes⁸¹.

6.3. A FASE RETROSPECTIVA DE EDSON⁸²

Edson formulou a estratégia de usar um signo externo (posicionar um elástico auxiliar) para determinar a perpendicular ao segmento com extremidades em dois pontos simétricos, nas tarefas iniciais da terceira sessão de entrevistas, e seguiu usando essa estratégia até a conclusão das atividades. Para ele o êxito alcançado pelo emprego dessa estratégia era satisfatório, mas talvez não tenha ajudado na evolução dos significados atribuídos aos conceitos matemáticos envolvidos.

No caso de Edson a pesquisadora procura respeitar o ritmo do sujeito, fazendo com que a fase retrospectiva transcorra de forma que não fique evidente para ele o nível de desempenho desejado.

Na ferramenta de desenho tínhamos a última tarefa realizada por Edson (Figura 6.2) que foi usada por ele como suporte para a discussão que se seguiu. O primeiro termo matemático que voltou a ser discutido foi eixo de simetria. Não nos parecia claro, ainda, o significado que ele atribuía a esse objeto matemático.

⁸¹ Healy (2002), analisando os resultados obtidos em seus estudos, destaca a influência que as imagens em espelhos têm no índice de acertos dos aprendizes em atividades realizadas com papel e lápis.

⁸² Os trechos reproduzidos nesta seção, referem-se às falas de 213 a 226 da terceira sessão de entrevista.

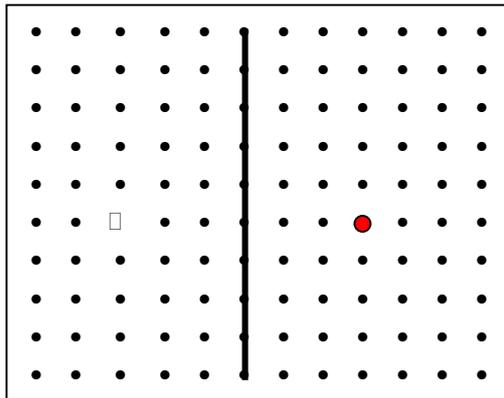


Figura 6.2: A última tarefa

Pes: O que você pode falar para mim agora sobre o eixo de simetria?

Edson: No início parecia difícil, mas depois se tornou fácil.

Pes: Como você explicaria para outra pessoa o que é o eixo de simetria?

Edson: Eixo de simetria é o que fica no meio de duas imagens.

Pes: Duas imagens?

Edson: Duas figuras, ou seja, eu vou ter uma figura feita e vou ter que fazer a outra figura para que o eixo de simetria seja identificado tendo a mesma distância dos dois lados. Isso me baseando no eixo de simetria. Como está aí (mostra a distância preservada na última tarefa executada na ferramenta).

Em sua primeira fala, Edson refere-se à facilidade que obteve para a realização das tarefas quando começou a usar elásticos auxiliares para determinar o simétrico de um ponto. Ao invés de pedir uma definição para o objeto eixo de simetria, a pesquisadora usa uma estratégia similar a da ligação telefônica.

Analisando a resposta dada pelo sujeito verificamos que ele destaca a equidistância entre figura-dada e figura-imagem a partir do eixo, mas parece-nos que, para ele, não há distinção entre elas, pois ele usa o termo imagem para se referir as duas figuras.

A pesquisadora dá indícios de sua posição discordante e Edson faz uma reparação de sua fala, descrevendo o procedimento usado para a realização das atividades. Novamente destaca a equidistância entre as figuras em relação ao

eixo de simetria. O conceito descrito por ele não parece ter evoluído muito em relação ao pseudoconceito que ele vinha usando discutido na Seção 4.3.2.

Quanto ao conceito de reflexão, na fase exploratória Edson descreveu um conceito totalmente desconectado do contexto matemático, associado à idéia de “refletir sobre”.

É quando você pensa no que vai fazer. É ficar sozinho com você mesmo.

Na fase retrospectiva:

Pes: E reflexão na Matemática, você chegou a alguma conclusão?

Edson: Na Matemática. A Matemática é exata.

Pes: O que estamos fazendo é reflexão. Estamos determinando a imagem desse ponto segundo esse eixo de simetria (posiciona a mão do sujeito sobre o ponto e o eixo de simetria).

Edson: Sim. Isso é reflexão, porque eu tenho que me basear, analisar, . . . Quanto eu tenho de distância da figura até o eixo de simetria para depois me basear do eixo de simetria para a figura que vou fazer preservando a distância. Para fazer a perpendicular para fazer a figura.

Apesar do emprego de termos matemáticos, Edson continua associando o termo reflexão à idéia de “refletir sobre”. Para ele a reflexão de figuras é o resultado de uma análise a respeito das distâncias na perpendicular das figuras em relação ao eixo.

Reparando a fala de Edson, a pesquisadora atribui a essa figura a qual ele fez referência, o nome de imagem. A resposta dele indica uma posição de concordância, embora acreditemos que essa intervenção não tenha modificado o significado que o sujeito estava atribuindo às figuras.

Pes: A imagem?

Edson: A imagem. Isso.

Pes: Todo esse processo que você descreveu é chamado de reflexão.

Então reflexão na Matemática é construir a imagem de uma figura segundo um eixo de simetria. Criar uma duplicata, como a imagem num espelho plano, e por ser imagem num espelho, ela tem que conservar a distância e as medidas da figura. E o que mais você percebeu hoje?

Edson: Não é muito fácil, precisa ter bastante atenção.

Mais uma vez a pesquisadora pronuncia a voz matemática. Usando termos não matemáticos como *criar uma duplicata* e associando reflexão a *imagens formadas em espelhos*, procura agregar numa só fala as declarações de Edson. Sua pretensão era estimulá-lo a falar mais sobre o conceito que estava sendo discutido. Pela resposta dada por ele, percebe-se que ela não teve êxito em sua investida.

No caso de Edson, os termos introduzidos pela pesquisadora, como imagem, reflexão e eixo de simetria passam a fazer parte do seu repertório, mas ainda com características de pseudoconceitos, pois são empregados de forma sintaticamente correta, sem que o sujeito tenha estruturado completamente um novo conceito. No término do procedimento experimental, os significados atribuídos, pela pesquisadora e pelo sujeito, para as vozes matemáticas introduzidas durante o processo, continuavam em patamares distintos.

6.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE A FASE RETROSPECTIVA

Comparando a fase retrospectiva dos dois sujeitos pode-se perceber que para Lucas, os pseudoconceitos formulados nas tarefas iniciais deram lugar a significados muito próximos aos conceitos matemáticos formais. No caso de Edson, embora os pseudoconceitos iniciais tenham assumido um caráter mais maduro, semanticamente há, ainda, uma distância considerável entre os significados atribuídos por ele ao conceito de reflexão, e os significados institucionais desse conceito.

REFLEXÕES FINAIS

Imaginemos que em algum país, (...) em certa época o cego nascia para ser juiz, pensador, adivinho. Imaginemos que a cegueira pudesse ser necessária para algo, ser socialmente útil. Está claro, então, a que cegueira implicaria num destino social completamente distinto para o homem, e que o defeito se converteria num mérito. (...) Devemos aceitar que em tal país a cegueira jamais poderia converter-se num defeito, nem a criança em um deficiente. Consequentemente, a "defectibilidade" seria a valoração social da cegueira... Se criássemos um país onde os cegos encontrassem um lugar na vida, onde a cegueira não significasse indubitavelmente uma insuficiência, ali à cegueira não seria vista como um defeito.

(Vygotsky, 1997, pp. 93-94) Tradução nossa.

7.1. INTRODUÇÃO

Nosso estudo tem um caráter exploratório, portanto nossas conclusões devem ser tratadas como conjecturas e sugestões para inspirar futuros trabalhos. Assim, para nós, este é somente o início e não o fim de um trabalho, mas acreditamos que o compartilhar dos resultados e das evidências que obtivemos poderá auxiliar na busca de caminhos, não só para o trabalho com cegos, mas para que todos, independentemente de suas necessidades serem especiais ou não, tenham a oportunidade de construir conhecimentos.

Neste capítulo trazemos algumas considerações feitas a partir do trabalho empírico e sustentadas no quadro teórico que adotamos.

7.2. O ESTUDO

Nesta pesquisa procuramos analisar os aspectos dos *diálogos* e das *ações* dos sujeitos de pesquisa ocorridos durante uma situação instrucional a fim de investigar a apropriação de aspectos relacionados a transformações geométricas por aprendizes cegos. Para tanto, elaboramos atividades e intervenções visando criar condições para a emergência de um campo simbólico, no qual a interação face a face entre os agentes envolvidos, possa permitir a produção de novos significados. Dentro do quadro teórico que dá suporte a este estudo, este campo simbólico caracteriza a *zona de desenvolvimento proximal*.

Segundo o modelo proposto por Meira (2002), “a emergência (e manutenção) de ZDPs depende da frequência e qualidade de enunciados que explicitamente indiquem relações entre eventos passados e futuros como forma do sujeito justificar a realidade presente” (Meira, 2002, p. 54). Aplicando esse modelo, procuramos destacar os aspectos do discurso matemático que produzem conexões entre eventos passados, presentes e futuros e a influência dessas conexões na produção de discordâncias, concordâncias ou reparação na interação entre instrutora-pesquisadora e aprendiz sem acuidade visual.

A apropriação de “vozes” relacionadas ao conceito *simetria* no estudo da transformação geométrica de *reflexão*, nos permitiu investigar a forma que esses sujeitos incorporam ao seu vocabulário a voz matemática durante os diálogos instrucionais, e ainda, a mudança conceitual que a apropriação desse vocabulário pode provocar.

Nossa investigação centra-se no campo da Geometria, uma área usualmente relacionada com experiências visuais. Em relação a esse campo, Piaget e Garcia (1987) realizaram um estudo histórico-crítico, examinando os aspectos psicogenéticos e a psicogênese das noções geométricas. Para esses autores, tanto o desenvolvimento histórico da Geometria como a psicogênese das estruturas geométricas, caracterizam-se por três etapas de desenvolvimento:

intrafigural, interfigural e transfigural. Com esse suporte teórico procuramos caracterizar a mudança de operacionalização entre esses níveis em situações instrucionais. Interessava-nos especialmente os níveis intra e interfigural, e a possibilidade de conduzir nossos sujeitos de pesquisa à passagem do nível intrafigural para o nível interfigural. Não tínhamos a expectativa de chegar à etapa transfigural, pois acreditávamos que o sistema háptico limitava as representações mentais do espaço euclidiano representado pela ferramenta material – ferramenta de desenho.

A fim de estabelecer uma variedade de entendimentos a respeito da capacidade cognitiva e dos processos cognitivos dos sujeitos envolvidos nesta pesquisa, optamos pelo *método da dupla estimulação* de Vygotsky (1998, 1998a). No nosso estudo, o primeiro estímulo é dado pelas ferramentas materiais que desenvolvemos na fase inicial do trabalho com base em estudos-piloto descritas na Seção 3.4.1, e o segundo estímulo é oferecido pela instrutora-pesquisadora através de intervenções.

As tarefas propostas a dois sujeitos: um portador de cegueira congênita - Lucas, e outro portador de cegueira adquirida - Edson, foram estruturadas com base em pesquisas anteriores sobre as noções de reflexão realizadas com aprendizes videntes, como Healy (2002), Vergnaud (1997), Grenier (1985), Kuchemann (1981). Divididas em dois grupos de tarefas e propostas em ferramentas materiais diferentes, o primeiro destinava-se ao estudo de figuras simétricas e o segundo grupo ao estudo de reflexão de figuras segundo um eixo de simetria.

A primeira ferramenta material (figuras feitas em papel canson), possibilitava aos sujeitos a utilização de dois tipos de estratégias, o uso de régua (especial para deficientes visuais) ou dobradura. Nessa ferramenta foi desenvolvido o estudo de figuras simétricas. O segundo grupo de tarefas, que se destinava ao estudo de reflexão em torno de uma reta, foi realizado na segunda ferramenta material – ferramenta de desenho, um “geoboard” no qual, segmentos e retas foram representados com elásticos.

Foram realizadas no total três sessões de aproximadamente uma hora e trinta minutos com cada um dos sujeitos, que foram videogravadas e transcritas em sua totalidade para facilitar as análises.

7.3. AS DIMENSÕES DE ANÁLISES

O objetivo principal desta pesquisa era investigar se o conceito matemático de reflexão (conceito científico), tão impregnado por experiências visuais (conceitos cotidianos) no caso dos videntes é acessível a indivíduos sem acuidade visual dentro dos padrões normais, se viabilizado por sistemas mediadores adequados (ferramentas materiais e diálogos) e operacionalizados de forma a potencializar as habilidades dos indivíduos e não sua deficiência (visual). Para atingir este objetivo formulamos a seguinte questão de pesquisa:

Como evoluem os significados associados à simetria e reflexão dos aprendizes cegos durante os diálogos instrucionais e como esta evolução é influenciada pelos sistemas mediadores?

Em busca de parâmetros que nos permitissem responder nossa questão de pesquisa, as análises foram realizadas com base em três dimensões: operacionalidade entre os níveis intra, inter e transfigural, a apropriação da “voz matemática” e a emergência e manutenção da ZDP (ver Seção 3.8). A primeira dessas três dimensões nos deu indicadores para analisar aspectos diretamente ligados aos conceitos matemáticos, ou seja, a transição entre os níveis dessa tríade nos possibilitou apontar a influência das ferramentas materiais e do tipo de figuras no desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos.

As duas outras dimensões estão intrinsecamente ligadas. Nos diálogos instrucionais a articulação dos pseudoconceitos na apropriação da “voz matemática”, nos permitiu destacar a importância do caráter temporal nestes

diálogos. As conexões estabelecidas entre os conhecimentos do passado do aprendiz na situação presente, podem produzir uma mudança conceitual (por parte do aprendiz), promovendo uma re-concepção dos significados atribuídos a “voz matemática” (futuro). De acordo com o modelo que empregamos, tais conexões favorecem o diálogo argumentativo e oferecem as condições necessárias e supostamente suficientes para a emergência, manipulação e manutenção das ZDPs.

Nas seções seguintes destacamos os principais resultados obtidos a partir das análises em cada uma destas dimensões.

7.3.1. A TRÍADE INTRA, INTER E TRANSFIGURAL

Com a análise da operacionalidade entre as etapas intra e interfigural, nas ações dos sujeitos sobre as ferramentas materiais, inspirada no trabalho de Piaget e Garcia, destacamos indicadores de mudanças conceituais em nossos sujeitos de pesquisa, ou seja, a passagem do nível intra para interfigural os induziu perceber propriedades ligadas à simetria e reflexão e a adotar novas perspectivas em relação aos objetos matemáticos em questão.

No primeiro conjunto de tarefas (estudo de figuras simétricas), o trabalho no nível intrafigural possibilitou o uso de uma estratégia (dobradura) que os sujeitos não tinham antes da situação instrucional para a sua realização. Esta estratégia ainda permitiu que eles validassem suas conjecturas através da sobreposição.

De fato, observamos que nossos sujeitos de pesquisa, a exemplo do que ocorre com aprendizes videntes privilegiaram, inicialmente, o trabalho no nível intrafigural. Em suas falas, esses sujeitos explicitamente descrevem as propriedades internas de duas figuras, ou as propriedades de duas partes de uma mesma figura, obtidas a partir do eixo de simetria.

Para os aprendizes videntes, o domínio da perspectiva intrafigural, pode ser justificado pelo modo de aquisição das informações. Os videntes recebem as informações de forma global e sintética, assim a visão beneficia a formação de imagens com características de totalidade. É esta característica que parece favorecer a predominância no nível intrafigural, pois faz com que o conjunto figuras-plano seja “visto” como uma unidade.

No caso dos cegos, a exploração tátil oferece informações de forma gradual e parcelada. Essa forma de aquisição das informações nos levou a pensar que a natureza interfigural poderia ser privilegiada desde o início das atividades. Por exemplo, ao explorar com as mãos figuras como a representada na Figura 7.1a, o aprendiz cego, em contraste com o vidente, pode perceber e relacionar as duas partes da figura antes de reconhecê-la como uma única figura. Nessa análise tátil a *distância* pode ser observada a partir dos pontos do plano que compõe (interna e externamente) cada uma das partes da figura.

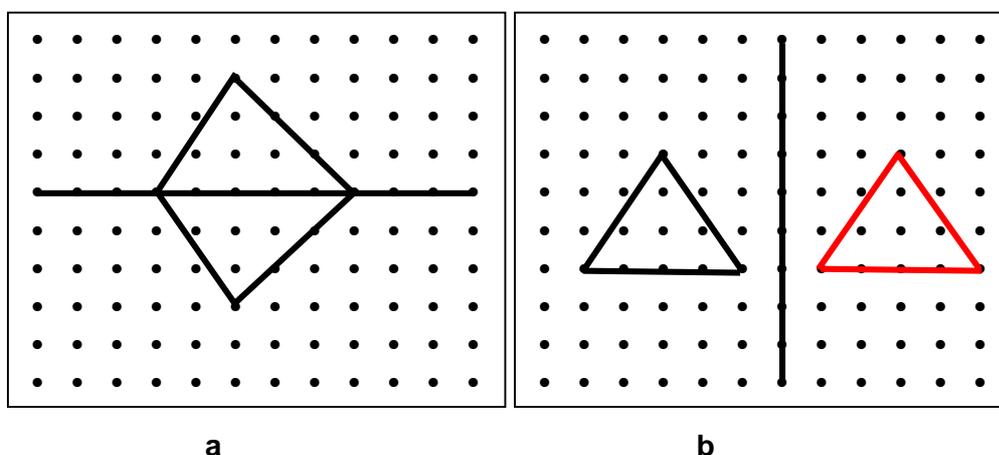


Figura 7.1: Os níveis intra e interfigural

De fato, as análises pertinentes às ações dos nossos sujeitos, seguiram trajetórias muito parecidas a dos aprendizes videntes, ao menos até o momento que eles começaram a trabalhar com segmentos. Mesmo trabalhando com figuras como a representada na Figura 7.1b, nossos sujeitos, assim como os aprendizes

videntes, tinham a tendência de perceber cada uma das formas geométricas representadas e relacioná-las com o eixo de simetria, considerando, por exemplo, a *distância* entre elas e o eixo onde a *distância* é vista como uma propriedade intrínseca das figuras sem relação com os pontos do plano – uma estratégia basicamente intrafigural. Essa ação sugere que a percepção de que todos os pontos do plano são submetidos à mesma transformação geométrica possa ser prejudicada.

No entanto, observamos nos procedimentos de ambos os sujeitos movimentos entre as perspectivas intra e interfigural. Para Lucas, a transição entre as perspectivas intra e interfigural, tornou-se evidente quando, além da equidistância entre figura-dada e figura-imagem em relação ao eixo de simetria e da idéia de associar a imagem a uma reprodução, ele percebeu a necessidade de considerar a orientação da figura (ângulos) para determinar sua imagem. Outro ponto que merece destaque no trabalho de Lucas, em relação a essa transição, é a primeira simulação de uma conversa ao telefone. Ao falar sobre a determinação do eixo de simetria a partir da representação de uma figura e sua respectiva imagem, ele considera o eixo de simetria como o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de dois pontos simétricos, caracterizando-o como mediatriz, o que denota fortemente uma perspectiva interfigural.

No caso de Edson, a estratégia criada no trabalho com figuras simétricas acabou gerando um pseudoconceito resistente, no qual o eixo de simetria não era reconhecido como próprio da figura, mas a figura é que deveria ser modificada para atender as propriedades do eixo de simetria. Esse pseudoconceito só foi superado com o apelo da pesquisadora a memória visual do sujeito, associada a sua experiência com espelhos, o que motivou uma re-concepção do termo eixo de simetria para ele, e o fez identificar propriedades importantes do eixo de simetria. Mesmo assim, essa memória visual associada a espelhos, não o auxiliaram na passagem do nível intra para interfigural, o que aconteceu quando ele passou a usar um signo externo para determinar pontos simétricos.

Para ambos os aprendizes, o trabalho no nível interfigural não aconteceu espontaneamente a partir da construção de imagens, mas iniciou-se quando os sujeitos buscaram ir além da equidistância entre um ponto da figura-dada e o seu ponto-imagem a partir do eixo de simetria. É interessante notar que ao longo do desenvolvimento das atividades, Lucas e Edson não consideram apenas extremidades ou vértices das formas geométricas para determinar sua imagem, envolvendo, em suas ações, outros pontos do plano (ou das formas geométricas) – Lucas quando descreve como determinar o eixo de simetria de dois pontos simétricos e Edson na construção da imagem de um segmento-dado. Nos dois casos há sinais de uma perspectiva interfigural geralmente ausente no trabalho de videntes. Talvez, isso possa ter sido motivado pela presença dos pinos que favorece a percepção tátil de vários pontos do plano, das retas ou dos segmentos representados na ferramenta de desenho, o que não é perceptível nas tarefas realizadas em papel e lápis por aprendizes videntes.

Em nossa opinião, há evidências de que a passagem de um nível a outro não garante que os sujeitos não retornem ao nível anterior nem a passagem para o nível seguinte. De fato, pode ser um engano imaginar que o nível representativo de um tipo de atividade seja cognitivamente superior ou inferior ao outro. De qualquer modo, a transição entre os níveis, e até mesmo o trabalho no nível intrafigural, permitiu a ampliação dos significados atribuídos, pelos sujeitos, a noções associadas a transformações geométricas. Os sujeitos puderam tirar de uma situação particular, a ação que os conduziram à apropriação de noções ligadas a transformações geométricas, conectando o conceito gerado a partir de uma experiência concreta, a um conceito mais próximo do institucionalmente aceito. A estrutura das tarefas (não rígida) e as ferramentas materiais, desenhadas para favorecer a percepção tátil dos sujeitos e a passagem de um nível a outro, foram decisivos para o desenvolvimento do trabalho empírico.

Com a análise baseada no trabalho de Argyropoulos, das atividades realizadas pelos sujeitos, podemos destacar alguns aspectos da influência das ferramentas materiais na execução de tarefas por aprendizes sem acuidade visual.

A influência da primeira imagem mental formulada a partir de estímulos hápticos, ficou particularmente evidente no caso de Lucas (portador de cegueira congênita). Observamos que sua tendência de considerar só uma orientação para um triângulo isósceles, que pode ter sido originada a partir de sua experiência com essa forma geométrica neste trabalho ou a partir de experiências predominantes em sua vida escolar, dificultou na determinação do seu eixo de simetria, embora, teoricamente, Lucas sabia exatamente o que estava procurando. O impasse na tarefa de determinar o eixo de simetria de um triângulo isósceles não foi ocasionada pelas concepções de Lucas, mas pela mobilidade da figura recortada em papel canson e a primeira imagem mental formulada.

7.3.2. A APROPRIAÇÃO DA “VOZ MATEMÁTICA”

Realizamos a análise das vozes nos discursos instrucionais inspiradas no trabalho de Renshaw e destacamos aspectos dos diálogos que indicam mudanças nos significados atribuídos a termos matemáticos, expressos nas falas e nas ações dos sujeitos, o que nos deu indicações de mudanças conceituais ocorridas durante o desenvolvimento do processo empírico. Os conceitos incitados pelo experimento permitiram a formulação de pseudoconceitos que posteriormente deram lugar a conceitos mais próximos dos conceitos científicos.

Nas tarefas iniciais, ambos os sujeitos “ventriculavam” os termos introduzidos pela pesquisadora (por exemplo, eixo de simetria) como se esses produzissem ecos. Nesse ponto, o emprego sintaticamente correto da linguagem da pesquisadora, antes que se tenha desenvolvido, completamente, o conceito conectado a esses termos, remete-nos a visão de Vygotsky sobre os pseudoconceitos. Embora não

tenham o mesmo significado do conceito matemático, esses pseudoconceitos assumem o papel de elemento mediador para os diálogos instrucionais, permitindo sua manutenção. Durante as interações entre sujeito e pesquisadora, esse “ventricular”, algumas vezes, dá espaço a um outro modo de falar, onde a divergência de significados atribuídos a esses termos, pela pesquisadora e pelos sujeitos, vai ficando menos evidente. Assim, no decorrer das atividades os sujeitos refinam os significados, atribuídos por eles, aos termos introduzidos pela pesquisadora, e gradualmente aproximam-se dos significados matemáticos desses termos.

A apropriação de aspectos da voz matemática por parte dos sujeitos, além de permitir que eles criassem estratégias para resolver as tarefas propostas, os ajudou conectar os conceitos matemáticos em estudo (conceitos científicos) a sua prática cotidiana (conceitos cotidianos). O que nos leva a teoria de Vygotsky sobre a formação e desenvolvimento de conceitos.

Para os nossos sujeitos de pesquisa, o desenvolvimento dos conceitos científicos em estudo ocorre a partir do domínio empírico, e segue em direção ao concreto e a experiência pessoal, ou seja, as conexões que eles estabeleceram entre os conceitos científicos estudados e sua prática cotidiana (com dobrar o cobertor, o par de sapatos e as calças), só aconteceram quando os conceitos científicos assumiram algum significado para eles ou quando foram parcialmente apropriados.

Vygotsky declara que o desenvolvimento dos conceitos científicos pressupõe certo nível de desenvolvimento dos conceitos cotidianos. Por outro lado, os conceitos científicos reestruturam e elevam a um nível mais alto os conceitos cotidianos, fazendo emergir a ZDP. O que nos dá a oportunidade de discutir uma diferença importante em relação à formação de conceitos por parte dos sujeitos desta pesquisa.

No caso de Edson, havia conceito cotidiano, associado a sua memória visual sobre imagens no espelho, que podia ser articulado como conhecimento do passado, ou seja, havia um conceito cotidiano que podia auxiliar no desenvolvimento do conceito científico - reflexão. Para ele, a apropriação, mesmo que parcial, do conceito de reflexão foi viabilizada até certo ponto pelo conceito cotidiano – imagens no espelho.

Lucas, portador de cegueira congênita, não havia conceito cotidiano que pudesse ser articulado como ponto de partida para o estudo de reflexão. Assim, a partir do momento que a prática dialógica e as atividades o auxiliam na formulação de um significado para os conceitos estudados, ele foi estabelecendo relações entre o conceito científico e sua vida cotidiana, evidenciando a reestruturação dos seus conceitos cotidianos.

As evidências apontadas na formação dos conceitos de simetria e reflexão por ambos os sujeitos, corroboram com a teoria de Vygotsky. A influência recíproca dos conceitos científicos nos conceitos cotidianos, no caminho ora ascendente, ora descendente, percorrido por ambos, os reestrutura e os eleva durante todo processo de formação e desenvolvimento de novos conceitos.

Devemos apontar a importância da introdução da voz matemática para a criação de pseudoconceitos por parte dos aprendizes que, através da interação colaborativa com a pesquisadora, os capacita a ingressar numa forma nova de diálogo que pode criar condições propícias para a emergência de uma ZDP, levando-os a estabelecer conexões com seus conhecimentos do passado.

7.3.3. ZDP: UM ESPAÇO SIMBÓLICO

Com o modelo proposto por Meira (2002) analisamos os aspectos do diálogo que possibilitaram a emergência e manutenção da ZDP. Nossos resultados ressaltam a importância da prática discursiva e de diálogos caracterizados por conexões entre eventos ou ações passadas, atuais e futuras, o que nos traz o caráter temporal da ZDP. As evidências apresentadas nos capítulos quatro e cinco atestam que é particularmente essencial manter conexões com o “passado” do aprendiz – aspectos da Geometria que ele já dominava caso contrário, as atividades perdem facilmente o sentido para ele.

A ZDP foi utilizada por nós, dentro da perspectiva de Meira e Lerman (2001), como um espaço simbólico de interação e comunicação, ou seja, a utilizamos como uma ferramenta a fim de elevar o nível potencial dos sujeitos. A emergência da ZDP a partir dos diálogos (sua manutenção também depende desses), permitiu, aos sujeitos, estabelecerem relações e formularem concepções sobre conceitos matemáticos ou outros conceitos científicos, aos quais, possivelmente, eles não poderiam formular sozinhos (fora de uma situação instrucional).

O discurso argumentativo entre pesquisadora e sujeitos, gerador de discordâncias, concordâncias e reparações, permitiu a criação das condições necessárias para uma mudança conceitual por parte dos aprendizes, e favoreceu a interação e a comunicação.

Em nossa opinião, as interações com as tarefas e pesquisadora, ocasionaram, em alguns momentos, a co-construção e o partilhar de um mesmo espaço simbólico entre pesquisadora e sujeitos, que favoreceram a criação das condições necessárias para a emergência da ZDP, o que possibilitou uma evolução dos significados associados à simetria e reflexão expressos pelos sujeitos.

7.4. APROPRIAÇÃO DA REFLEXÃO POR APRENDIZES CEGOS

Através do trabalho empírico realizado com Lucas e Edson, pudemos nos certificar que o limite imposto pela falta de acuidade visual não determina um limite absoluto ao conhecimento, já que esses indivíduos dispõem de outros recursos.

Nossas escolhas para esse estudo, foram feitas para estimular os três principais canais de aquisição de informações para os cegos. O sistema auditivo e o fonador foram estimulados pelas intervenções da pesquisadora, ora fazendo perguntas para que o sujeito explicitasse suas conjecturas, ora oferecendo ao sujeito a “voz matemática” ao introduzir termos que gradativamente deveriam ser apropriados. O sistema háptico ativo recebeu estímulos através das ferramentas materiais, que deveriam facilitar o acesso aos conceitos científicos em estudo.

Salientamos que durante a investigação empírica além das falas, a ação gestual dos sujeitos foi especialmente importante para nossas análises, considerando-se as necessidades especiais dos sujeitos envolvidos. A partir dessas ações pudemos analisar as estratégias empregadas que muitas vezes ficavam implícitas nas falas. Os diálogos representam então a junção desses gestos com a fala oral, e permitem ao cego formular imagens mentais a partir de informações recebidas de seus interlocutores.

Refletindo sobre as análises oriundas de nossos resultados podemos afirmar que a evolução dos significados, associados à simetria e reflexão, para os aprendizes cegos, dá-se de modo similar ao processo descrito por outros autores com aprendizes videntes.

A predominância do trabalho na perspectiva intrafigural, a exemplo dos resultados obtidos com videntes, entretanto, pode ter sido consequência das tarefas escolhidas e das ferramentas materiais. A natureza da primeira ferramenta material (figuras em papel canson) não favorecia o trabalho em outra perspectiva.

A ferramenta desenho foi planejada para simular uma malha quadriculada, já que em pesquisas realizadas com videntes, a presença da malha quadriculada havia sido apontada como um facilitador no que se refere à distância e direção.

Quanto às tarefas, não tínhamos a possibilidade de oferecer aos sujeitos figuras na ferramenta de desenho cujos lados não coincidisse com a malha quadriculada, pois elas eram representadas com elásticos sustentados pelos pinos. No entanto, é preciso destacar que a percepção tátil dos pinos, que na verdade representam pontos pertencentes às figuras, algumas vezes favoreceu o trabalho na perspectiva interfigural, o que difere das atividades realizadas com papel e lápis. Evitamos tarefas nas quais as figuras cruzavam o eixo de simetria, que foram apontadas por estudos com videntes como um entrave em situações empíricas.

Tais decisões foram tomadas, considerando-se a estrutura de entrevistas baseadas em tarefas propostas por Goldin, o qual declara que as tarefas matemáticas devem ser acessíveis aos sujeitos, e escolhidas de tal forma que permitam ao sujeito flexibilidade nas respostas e que deixem evidente ao pesquisador a emergência de diferentes capacidades do sujeito. O que não se contrapõe ao método da dupla estimulação de Vygotsky, já que na fase exploratória evidenciou-se o fato que nossos sujeitos não tinham nenhum conhecimento prévio sobre os conceitos matemáticos que seriam estudados.

Em relação à apropriação de vozes e a articulação de pseudoconceitos, nossos resultados são similares aos descritos por outros pesquisadores em estudos realizados com aprendizes videntes, embora esses estudos não tenham envolvido os conceitos de simetria e reflexão.

A importância da introdução da voz matemática na formulação de pseudoconceitos, e a relevância do papel mediador desses pseudoconceitos nos diálogos entre aprendizes e instrutora-pesquisadora são destacadas em vários momentos de nossas análises. A posição intermediária dos pseudoconceitos

(entre os conceitos gerados a partir do experimento e os conceitos oficialmente aceitos) ofereceu a pesquisadora a possibilidade de articulá-los produzindo um desequilíbrio na estrutura cognitiva dos aprendizes a fim de produzir uma mudança conceitual.

Nesse contexto, a divergência de significados atribuídos aos objetos matemáticos pela instrutora-pesquisadora e pelos sujeitos, acabou produzindo um discurso argumentativo, no qual as discordâncias, concordâncias e reparações, conduziram a relações entre os conhecimentos adquiridos no passado pelo aprendiz na realização das tarefas (situação presente), o que em algumas oportunidades possibilitou a construção de novos conhecimentos (futuro). Desse modo, em muitas oportunidades, tivemos as condições necessárias e suficientes para a emergência de uma ZDP, caracterizada por Meira (2002) como um espaço simbólico de significação.

Como ocorre com aprendizes videntes, nem todas as oportunidades conduziram ao desenvolvimento de novos conhecimentos, principalmente quando perdíamos a conexão entre passado-presente no desenrolar dos diálogos. Dessa forma, o processo de interação entre instrutora-pesquisadora e sujeitos vivenciado na fase experimental envolveu dificuldades, avanços e negociações.

As evidências apontadas, em nossa opinião, nos permitem afirmar que os aprendizes sem acuidade visual, têm tanta condição quanto os videntes para apropriar-se de conceitos ligados a Geometria, desde que o acesso a esses conceitos seja viabilizado através de sua habilidade háptica e das práticas discursivas. A utilização desses dois instrumentos mediadores permitiu a ampliação do nível potencial dos sujeitos que de uma situação particular, criaram a ação que permitiu a apropriação de noções ligadas a transformações geométricas, permitindo a aproximação dos pseudoconceitos, gerados ao longo das atividades, a conceitos matemáticos formalmente mais aceitos.

7.5. A INCLUSÃO: UM DESAFIO

Quanto maiores os obstáculos de aprendizagem, maior o tamanho da aventura entre mestre e aluno, transformados, ambos, em aprendizes. O principal papel de um veículo voltado à educação é estar tão preocupado em informar quanto formar, objetivos indissociáveis. Daí que devemos buscar trazer casos de quem inventa, reinventa e repensa os meios de disseminar conhecimento, para ampliar o instrumental dos professores dentro e fora de sala de aula.

Gilberto Dimenstein

Editorial da Revista Educação (mai. 2003)

A preocupação em garantir que todos participem da aventura que é aprender expressos por Dimenstein, caracteriza também a política atual do Estado, não apenas em relação à cegueira, mas a todo tipo de necessidades especiais.

Ao longo deste projeto, vivenciamos o quanto Lucas e Edson eram capazes de conquistas matemáticas, apesar de viverem num mundo, onde supostamente todos são capazes de ver.

A partir, principalmente, dos anos 70 surgiram inúmeras leis com o intuito de garantir aos portadores de deficiências igualdade de direitos e de oportunidades. Entende-se por igualdade de oportunidades o acesso aos diversos sistemas da sociedade, ao ambiente físico, aos serviços e a informação colocada à disposição de todos. O princípio de igualdade de direito defende que as necessidades de cada pessoa têm igual importância, e que devem constituir a base de uma sociedade justa. Acreditamos que todos os recursos devem ser empregados de modo a garantir que todas as pessoas tenham as mesmas oportunidades de participação social e política.

No entanto, a nosso ver, a estrutura social mostra-se preconceituosa. Se não fosse, as leis, resoluções, pareceres e ementas que o Estado vem implementando, no que se refere aos portadores de deficiências, não seriam necessários. E mais, para que esses instrumentos deixem de ser meras palavras no papel e comecem a atingir a sociedade é preciso que se aprenda a valorizar as peculiaridades de cada indivíduo e a incorporar a diversidade sem nenhum tipo de distinção.

Construir uma *sociedade para todos* implica na conscientização coletiva da diversidade humana (nacionalidade, sexo, religião, sexualidade, cor, idade, raça e deficiência, ou outras) e na estruturação para atender às necessidades de cada cidadão. Certamente a escola tem um papel fundamental nessa construção e a inserção de educandos com necessidades educacionais especiais, no meio escolar, representa uma forma de tornar a sociedade mais democrática (Martins, 2002). Cada vez mais, os educadores têm percebido que as diferenças não devem ser somente aceitas, mas também acolhidas como subsídio para montar (ou completar) o cenário escolar. Não basta somente aceitar a matrícula desses educandos, isso é apenas cumprir as leis. O que se deve entender por inclusão é oferecer serviços complementares, adotar práticas criativas, adaptar o projeto pedagógico, rever posturas e construir uma nova filosofia educativa (Guimarães, 2003).

A inclusão exige mais do que leis. Exige uma atenção adequada. Oferecer informações, salas de recursos que funcionam de maneira deficitária ou equipes especializadas que visitem as escolas eventualmente, não é o bastante. Os problemas surgem no dia-a-dia, em aula, e transcendem esse âmbito reduzido, atingindo a responsabilidade da equipe docente. Não bastam, também, os prometidos apoios institucionais, sem a participação efetiva do aluno, e principalmente, sem o professor.

Na verdade, ainda é difícil encontrar professores que afirmem estar preparados para receber em classe um aluno com necessidades especiais (Cassiano, 2003).

A inclusão é um processo que exige aperfeiçoamento constante, no entanto, em geral, os profissionais que atuam nas escolas hoje não recebem formação para trabalhar com educandos portadores de necessidades especiais, seja em sua formação inicial, ou seja, na formação continuada.

O professor de matemática que se depara, pela primeira vez, com um aluno cego ou com outra deficiência em sua classe, envolve-se num turbilhão de perguntas: O que pode ou não fazer esse aluno? Como o fará? O que devo fazer para que ele siga as atividades no compasso de seus pares? Poderá trabalhar em grupo? Com que tipo de tarefas? De que modo devo usar a lousa? Poderá desenhar? Como?

Os problemas e as questões se multiplicam com a diversificação das atividades nas aulas de Matemática e o crescente destaque dado a uma pedagogia ativa, de ação e participação de todos, onde as estruturas são dinâmicas e se ensinam técnicas de observação, estratégias e sistematizações matemáticas. Como lidar com um aluno cego numa classe de videntes sem modificar substancialmente os objetivos, conteúdos e atividades? Com que ferramenta material de medida, de tabulação e de representação poderá contar esse aluno?

Não há âmbito do domínio da Matemática que seja vetado para os cegos. Basta recordarmos Leonhard Euler, Nicholas Saunderson, Lev Semenovitch Pontryagin, e tantos outros. É preciso, estarmos conscientes que as principais dificuldades então não são necessariamente cognitivas, mas sim de ordem material e técnica, e que frequentemente, condicionam o ritmo de trabalho de um aluno cego na hora de aprender Matemática.

Nossos resultados nos permitem afirmar que a visão subnormal e a cegueira adquirida ou congênita, não precisam ser impeditivas para o desenvolvimento matemático de um indivíduo. Recebendo os estímulos adequados para empregar outros sentidos; como o tato, a fala e a audição; o educando sem acuidade visual

estará apto a aprender como qualquer vidente, desde que se respeite à singularidade de seu desenvolvimento cognitivo.

É por essa razão que talvez devêssemos falar de uma *Didática Especial da Matemática para Cegos*, ou quem sabe de um modo mais geral, de uma *Didática Matemática para Educandos com Necessidades Especiais* – um campo destinado ao estudo das particularidades do processo de aprendizagem matemática destes aprendizes, a fim de preparar os educadores para a seleção e adequação de materiais pedagógicos, para o uso dos instrumentos de trabalho, para conduzir diálogos instrucionais nos quais professor e alunos, ambos como aprendizes, possam compartilhar os mesmos espaços simbólicos e, sobretudo, para o respeito da temporalidade de cada aprendiz, tenha ele necessidades educacionais especiais ou não.

Neste projeto de mestrado, entramos neste campo de investigação, mas acreditamos ser mais importante a passagem da investigação para a ação. O modo de trabalhar Matemática com os cegos pode facilitar a reflexão e busca para outros grupos de educandos com necessidades especiais (guardadas as diferenças) e inclusive para a Didática da Matemática em geral, pois se a metodologia de investigação é análoga, as soluções podem ser indicadoras de direções a seguir em cada caso.

Dentro dessa perspectiva, cada aprendiz é percebido como um aprendiz com necessidades especiais cabendo a Educação Matemática, como a todas outras áreas da Educação, estruturar-se para potencializar suas competências e habilidades, e fazer desaparecer a palavra e o conceito “deficiente”.

Esperamos ter dado um pequeno passo nesta direção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADEVA - **ASSOCIAÇÃO DE DEFICIENTES VISUAIS E AMIGOS**. Disponível em:
<http://www.adeva.org.br> . Acesso em: 10 jul. 2003.

ALVES, S.; GALVÃO, M. E. E. L. **Um estudo geométrico das transformações elementares**. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1996.

ARGYROPOULOS, V. S. Tactual shape perception in relation to the understanding of geometrical concepts by blind students. **The British Journal of Visual Impairment**, Londres, pp. 7-16, jan. 2002.

BARRETO, C. Falta estrutura para deficientes nas escolas. **O Estado de São Paulo**, 16 set. 2001. Geral, p. 15.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim** 5ª a 8ª séries. São Paulo: FTD, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Adaptações Curriculares** / Secretaria de Educação Fundamental. Secretaria de Educação Especial. Brasília: MEC/SEF/SEESP, 1998. 62p.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: SEF, 1998.

CARVALHO, K. M. M. et al. **Visão Subnormal: Orientações ao Professor do Ensino Regular**. 3. ed. Ver. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.

CASSIANO, C. **Com os olhos da alma**. EDUCAÇÃO. São Paulo: Segmento, n. 73, mai. 2003. pp. 40-50.

CHIQUETO, M. J.; PARADA, A. A. **FÍSICA**. Termologia, Óptica, Ondas. São Paulo: Scipione, 1992. v. 2, cap, 10 e 11.

CONDE, A. J. M. **Definindo a Cegueira e a Deficiência Visual**. 2004. Disponível em: <http://www.cesec.org.br/deficiencia/cegueira.htm> . Acesso em 20 mai 2004.

COLE, M.; SCRIBNER, S. Introdução. In: VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Org. Michael Cole, et al. Tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998. pp. 3-19.

COLE, M., & WERTSCH, J.V. **Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotsky**. Human Development, 1996. 39, pp. 250-256.

CONFREY, J. **Student Voice in Examining 'splitting' as and Approach to Ratio, Proportion and Fractions**. PME 19, V. 1 pp. 3-29. Recife. 1995. (esp. Pp. 3-14)

_____. A Theory of Intellectual Development, Part 3 **For the Learning of Mathematics**. V. 15, N. 2, pp 36-45. 1995.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. Resolução CNE/CEB n.2 de 11 de setembro de 2001. Institui as Diretrizes Nacionais para a educação de alunos que apresentem necessidades educacionais especiais, na Educação Básica, em todas as suas etapas e modalidades. Relator: Francisco Aparecido Cordão. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, 11 set. 2001.

- CROZES, Y; GILET, E. **Géométrie**. Masson & C^{ie}: Editeurs, Paris, IV^e, 1963.
- DANTAS, M. S. et al. **As transformações geométricas e o ensino da Geometria**. Salvador: Auto Editorial e Didático da UFBA, 1996.
- DICK, T. P.; BECKER, K. E. **A brief historical overview of tactile and auditory aids for visually impaired mathematics educators and students**. Disponível em: <http://www.rit.edu/~easi/itdv03n1/article2.html>. Acesso em: 06 nov. 2002.
- DUNKELS, A. **Numbers, Shapes, and Statistics —Triad Towards Graphicacy in the Education of Primary School Teachers**. 1999. Disponível em <http://math.unipa.it/~grim/Evol3.PDF>. Acesso em: 01 nov. 2003.
- EDWARDS, L. D. and ZAZKIS, R. Transformation geometry: Naive ideas and formal embodiments. **Journal for computers in mathematics and science teaching**, 12 (2), pp. 121-145 (1993).
- EDUCAÇÃO. **Aprendizes da luz**. São Paulo: Segmento, n. 73, mai. 2003. 82p.
- GIL, M. **Deficiência visual**. Brasília: MEC. Secretaria de Educação a Distância, 2000.
- GOLDIN, G. A. A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A. (Ed.). **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2000. pp. 517-546.
- GOODWIN, C. Action and embodiment within situated human interaction. **Journal of Pragmatics**, 32, 2000. pp. 1489-1522. (2000).

GRENIER, D. Quelques aspects de la symetrie orthogonale pour des élèves de classes de 4ème et 3ème. In: **Petit x**, n 7, pp. 57-69. Grenoble: IREM, 1985.

GUIMARÃES, A. **Inclusão que funciona**. NOVA ESCOLA. São Paulo: Abril, n. 165, set. 2003. pp. 43-47.

HEALY, L. (S). **The interative design and comparison of learning systems for reflection in two dimensions**. Londres, 2002. 404 f. Tese (PhD em Educação) – Institute of Education, University of London.

INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT (IBC). **Um olhar sobre a cegueira**. Disponível em: <http://www.ibcnet.org.br/Texto/index.txt.html>. Acesso em 20 jun 2003.

JACKSON, A. **The Word of Blind Mathematicians**. 2002 Disponível em: <http://www.ams.org/notices/200210/comm-morin.pdf>. Acesso em 01 nov 2003.

KÜCHEMANN, D. **Reflection and rotation**. In Hart K (Ed), Children's understanding of mathematics: 11-16. London: John Murray, 1981. pp. 137-157.

LEHRER, R., JACOBSON, C., THOYRE, G., KEMENY, V., STROM , D., HORVATH, J., GANCE, S., & KOEHLER, M. **Developing understanding of space and geometry in the primary grades**. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.) Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, 1998. pp.169-200.

LERMAM, S. **Getting used to mathematics: alternative ways of speaking about becoming mathematical**. Disponível em: <http://www.it.bton.ac.uk/staff/jt40/EM301/Lerman.pdf>. Acesso em 14 jan. 2003.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

MABUCHI, S. T. **Transformações Geométricas** - A Trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. São Paulo, 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, Cap. 2.

MARTÍN, E.; MARCHESI, A. Desenvolvimento metacognitivo e problemas de aprendizagem. In: COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. (Org.). **Desenvolvimento Psicológico e Educação**: Necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar. Tradução Marcos A. G. Domingues. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. v. 3, Cap. 2.

_____. Da terminologia do distúrbio às necessidades educacionais especiais. COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. (Org.). In: **Desenvolvimento Psicológico e Educação**: Necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar. Tradução Marcos A. G. Domingues. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. v. 3, Cap. 1.

MARTINS, V. **Quem necessita de Educação Especial?** Disponível em: <http://www.deficienteeficiente.com.br/materia01.htm>. Acesso em: 22 set. 2002.

MATH WORDS. **Geoboard**. Disponível em: <http://www.pballew.net/arithm14.html>. Acesso em: 01 nov 2003.

MEIRA, L.; LERMAN, S. **The zone of proximal development as a symbolic space**, Social Science Research Papers, n. 13, pp. 1-40, jun. 2001.

MEIRA, L. Zona de desenvolvimento proximal como campo simbólico-temporal: aproximações de um modelo teórico e aplicações para o ensino da matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I, 2001, Curitiba. **Anais: Simpósio Brasileiro De Psicologia Da Educação Matemática, I**. Curitiba: UTP, 2002. pp. 51 – 57.

_____. **Análise Interacional e Videográfica: Novos caminhos para a Zona de Desenvolvimento proximal**. Pernambuco: UFPE, 2003. 32p. (CNPq. Psicologia Cognitiva). Projeto em andamento.

_____. **Zonas de Desenvolvimento Proximal nas salas de aula de ciências e matemática**. Pernambuco: UFPE, 2003. 12p.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação Matemática**. Campinas, SP: Papyrus, 1997.

NOVA ESCOLA. **Inclusão que dá certo**. São Paulo: Abril, n. 165, set. 2003. 67p.

OCHAITA, E.; ROSA, A. Percepção, ação e conhecimento nas crianças cegas. In: COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. (Org.). **Desenvolvimento Psicológico e Educação: Necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar**. Tradução Marcos A. G. Domingues. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. v. 3, Cap. 12.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico**. São Paulo: Scipione, 2002. pp. 25 – 40.

OZANAM, J. **Recreations in Science and Natural Philosophy**. London: Thomas Tegg, 1844. pp. 11-12.

PIAGET, J. & GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Lisboa: Dom Quixote, 1987. Cap. 3 e 4.

- PIRES, C. M. C. **Geometria – Um pouco da sua história e da história do seu ensino**. São Paulo, 2002. Apostila digitada. 10 f.
- PIRES, C. C.; CURI E.; PIETROPAOLO, R. **Educação Matemática 5ª a 8ª séries**. São Paulo: Atual, 2002.
- PRETTI, E do L. **Transformações Geométricas**: uma experiência na formação de professores utilizando um ambiente informatizado. São Paulo, 2002. 144 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 13ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.
- RENSAW, P. A Sociocultural View of the Mathematics Education of Young Children. In: MANSFIELD, H.; PATEMAN, N. A.; BEDNARZ, N. (Eds.) **Mathematics for tomorrow's young children**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. pp. 59-78.
- ROCHA, I. C. B. Ensino de Matemática: Formação para a Exclusão ou para a Cidadania? **Educação Matemática em revista**, São Paulo, ano 8, n. 9/10, pp. 22-31, abr. 2001.
- SIMETRIA. In: NOVO DICIONÁRIO AURÉLIO da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1986. p. 1586.
- SIQUEIRA, J. E. M.; LIMA, P. F.; GITIRANA, V. **Explorando a simetria de reflexão : uma seqüência didática no Cabri-Géomètre**. Disponível em: http://www.dmat.ufpe.br/~mro/extensao/v_epem/anais/CC03.pdf. Acesso em 03 mai de 2003.

SOUZA, A. C. C. O reencantamento da razão: ou pelos caminhos da teoria histórico-cultural. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. – (Seminários & Debates)

STEFFE, L. P. Social-cultural approaches in early childhood Mathematics Education: A Discussion. In: MANSFIELD, H.; PATEMAN, N. A.; BEDNARZ, N. **Mathematics for tomorrow's young children**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. pp. 79-99.

UNESCO. **Declaração de Salamanca e linha de ação sobre necessidades educativas especiais**. Genebra, 1994.

VAN HIELE, P. M. **Struture and Insight**. New York: Academic Press. 1986.

VEER, R.; van der; VALSINER, J. **Vygotsky - Uma síntese**. Tradução de: Cecília C. Bartalotti. 4. ed. São Paulo: Loyola, 1996.

VERGNAUD, G. **Lev Vygotski – Pédagogue et penseur de notre temps**. 1. ed. Paris:Hachette Éducation, 2000.

_____. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Jounal of Mathematical Behaviour**. V. 17, N.2, pp. 167-181. 1998

_____. The Nature of Mathematical Concepts. In: NUNES, T. & BRYANT, P. (eds). **Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective**, Psychology Press, east Sussex, pp. 5-28. 1997.

VYGOTSKY, L. S. **The collected works of L. S. Vygotsky. Problems of general psychology** (R. Rieber & A. Carton, Eds.). Translation of: Sobraine Sochinenii. New York: Plenum, 1987. v.1.

_____. **Obras escogidas V – Fundamentos da defectología.** Traducción: Julio Guillermo Blank. Madrid: Visor, 1997. (coletânea de artigos publicados originalmente em russo entre os anos de 1924 a 1934).

_____. **A formação social da mente.** Org. Michael Cole, et al. Tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998a. (coletânea de ensaios publicados originalmente em russo entre os anos de 1930 a 1935).

_____. **Pensamento e linguagem.** Tradução Jefferson Luiz Camargo. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998b. (originalmente publicado em russo, em 1934).

_____. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2001. Cap. 5 e 6.

WELLS, G. **Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education.** New York: Cambridge University Press, 1999. Cap. 10.

YORK, J. L.; REYNOLDS, M. C. Special Education and Inclusion. In SIKULA, J.; BUTTERY, T. J.; GUYTON, E. (Ed.). **Handbook of Research on Teacher Education.** 2ª ed. Macmillan LIBRARY Reference USA, 1996. pp. 820-836.

ANEXOS

ANEXO 1

TABELA DE SNELLEN

TABELA SNELLEN PARA CRIANÇAS E ADULTOS NÃO ALFABETIZADOS

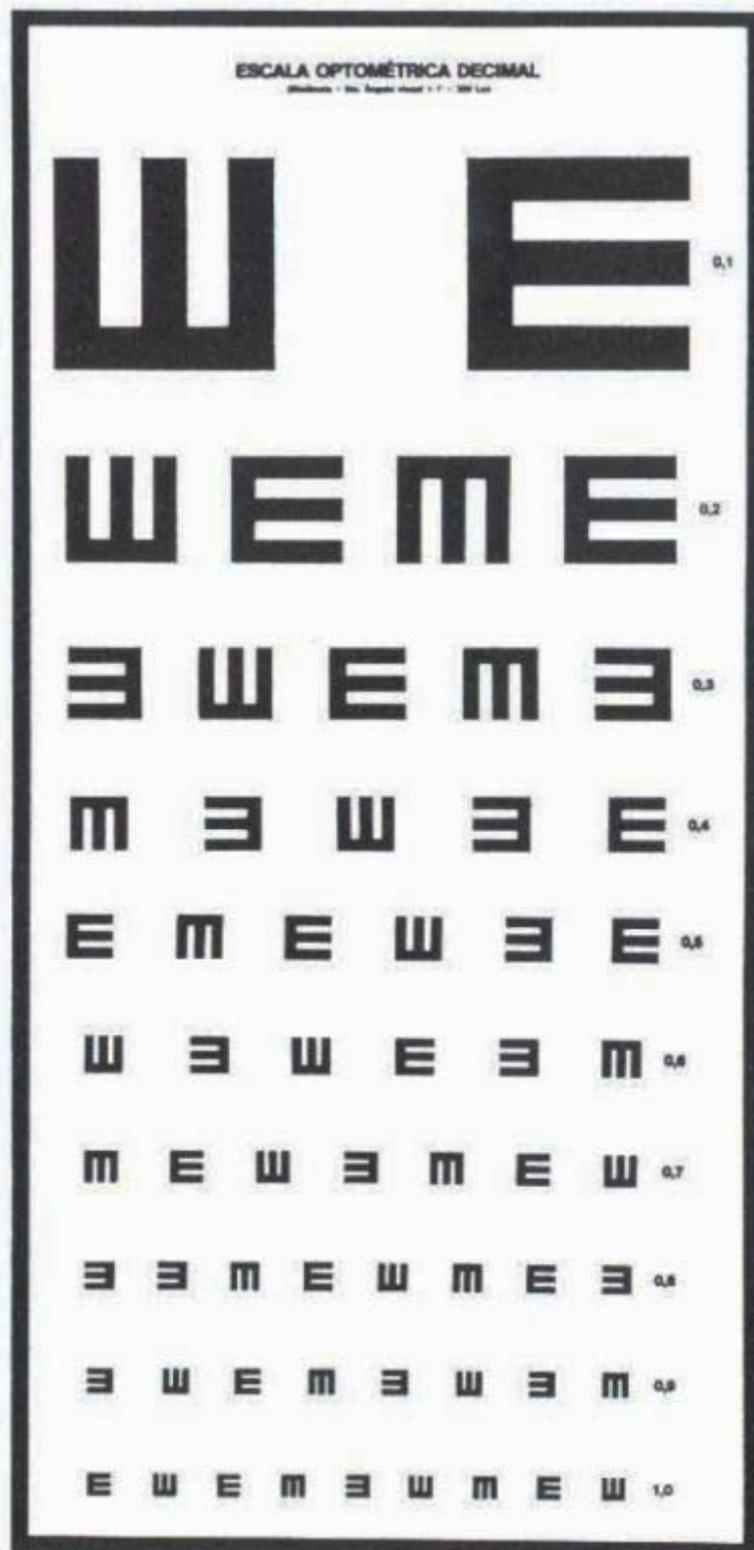


Tabela de Snellen para adultos

K H O R

20/100

O Z N H V C

20/70

R K S C Z H V D

20/50

H O C Z R K D S V N

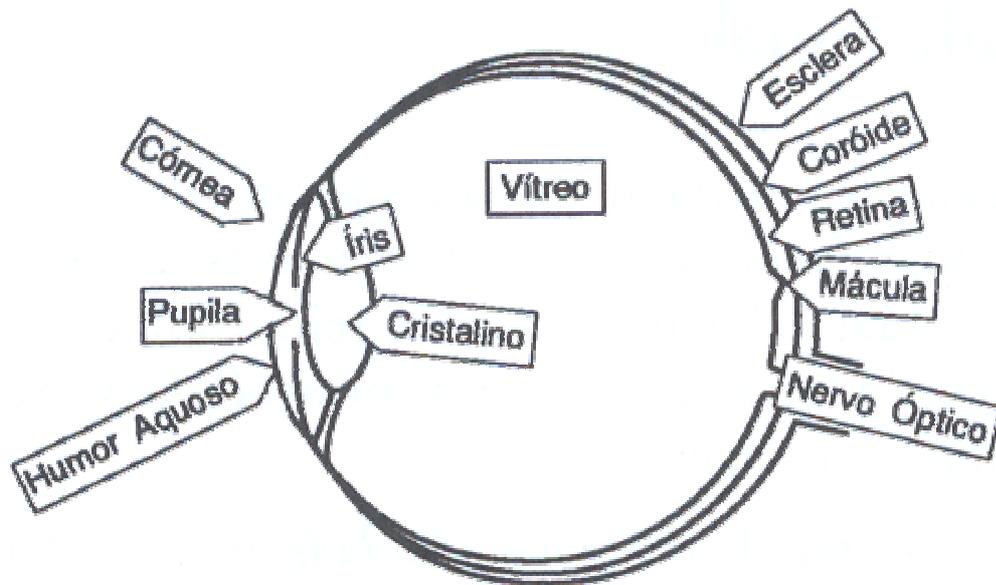
20/30

S D K H O R C V

20/20

ANEXO 2

PARTES DO OLHO



Córnea: parte anterior, transparente e de curvatura acentuada, da esclerótica.

Coróide: membrana fina, vascular, pigmentada, situada entre a esclerótica e a retina.

Cristalino: estrutura biconvexa, transparente, localizada entre a câmara posterior e o corpo vítreo, e que constitui parte do mecanismo de refração ocular.

Esclera ou Esclerótica: Membrana branca e fibrosa que reveste os globos oculares e, em sentido posterior, se continua com a bainha externa de nervo óptico; albugínea ocular; branco do olho.

Humor Aquoso: líquido que ocupa as câmaras anterior e posterior, difundindo-se para o sangue.

Íris: membrana circular, colorida, com orifício central ou pupila, situada entre a córnea e a fase anterior do cristalino e, na qual, as variações do diâmetro da circunferência menor regulam a entrada da luz no olho.

Mácula ou Fóvea: formada somente por cones especializados na detecção de luz e de cor.

Nervo Óptico: constituem os nervos da visão.

Pupila: orifício pelo qual passam os raios luminosos.

Retina: contêm os fotorreceptores (cones e bastonetes), células nervosas responsáveis por detectar a presença da luz e transforma-la em pulsos elétricos que serão conduzidos ao cérebro através do nervo óptico.

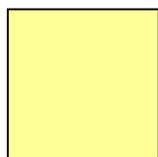
Vítreo ou Humor Vítreo: material de aspecto gelatinoso que preenche o espaço entre o cristalino e a retina.

ANEXO 3

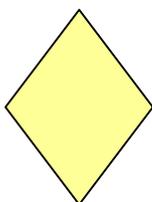
TAREFAS

GRUPO 1 – FIGURAS SIMÉTRICAS

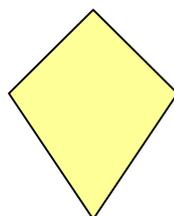
Conjunto 1a



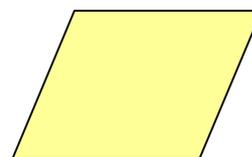
Quadrado



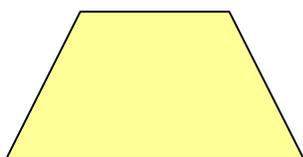
Losango



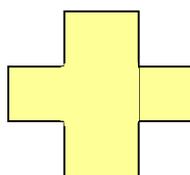
Pipa



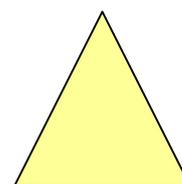
Paralelogramo



Trapézio isósceles

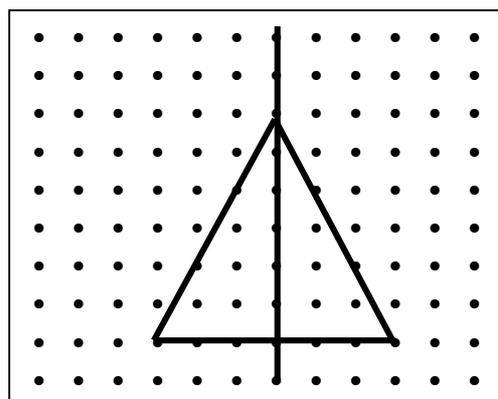
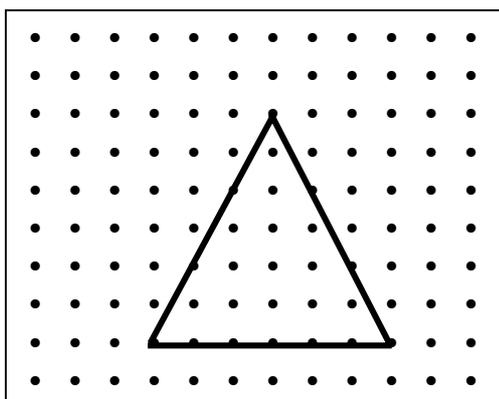


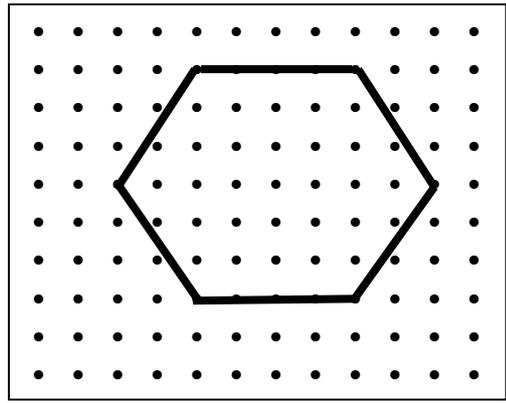
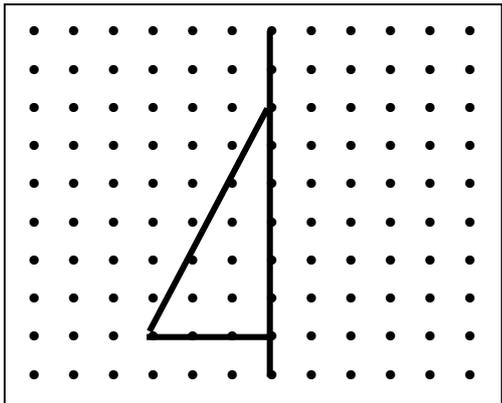
Dodecágono



Triângulo isósceles

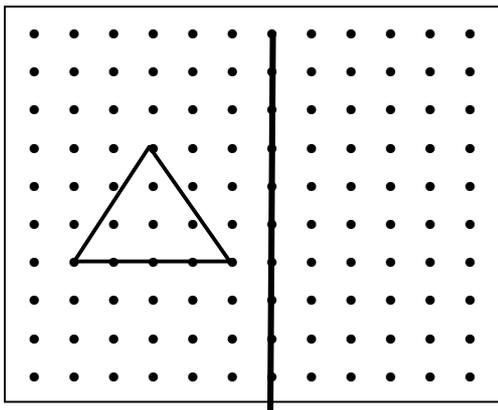
Conjunto 1b



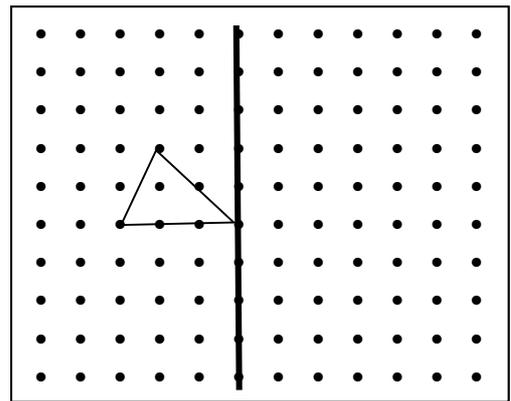


GRUPO 2 – REFLEXÃO

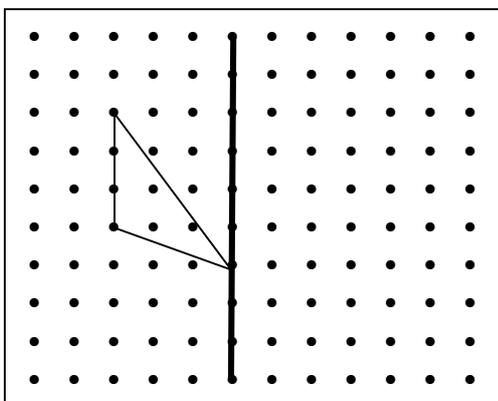
Conjunto 2



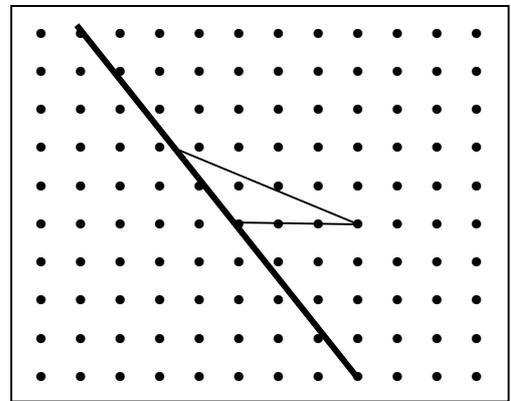
C.2.1



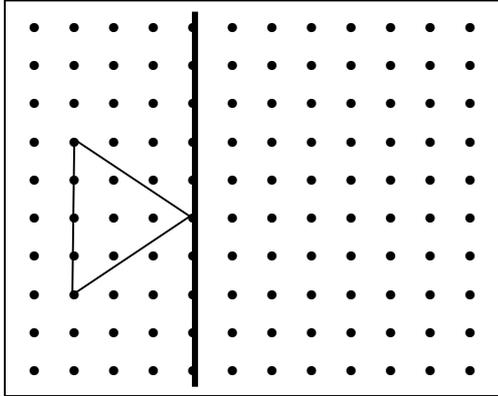
C.2.2



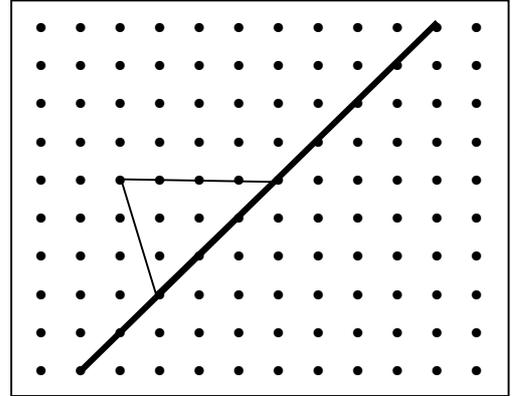
C.2.3



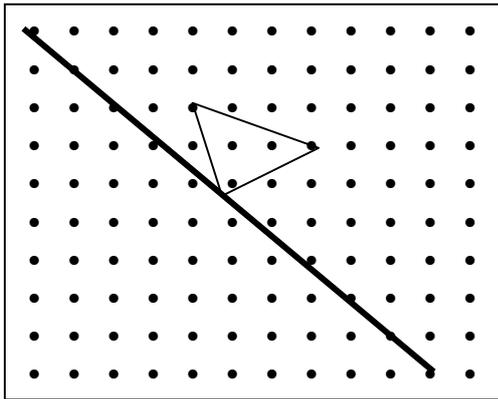
C.2.4



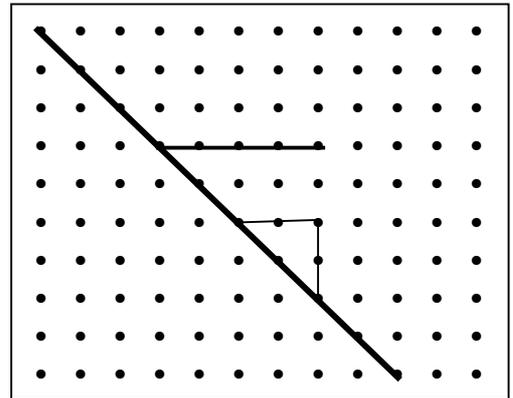
C.2.5



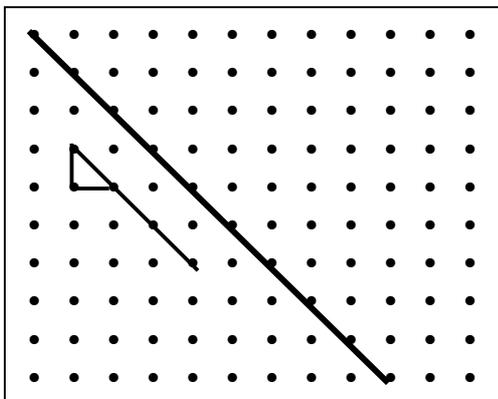
C.2.6



C.2.7

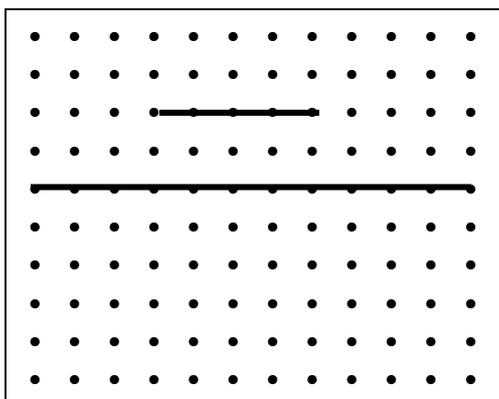


C.2.8

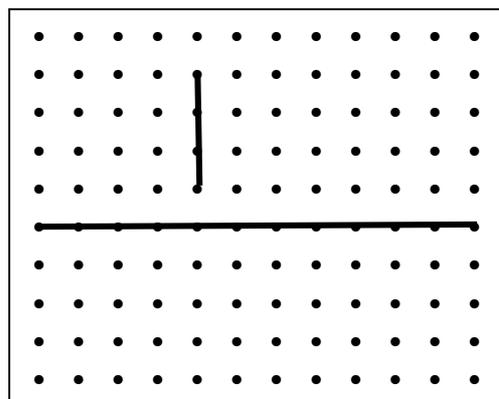


C.2.9

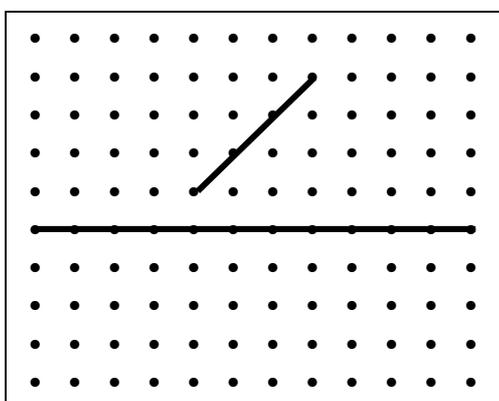
Conjunto 3



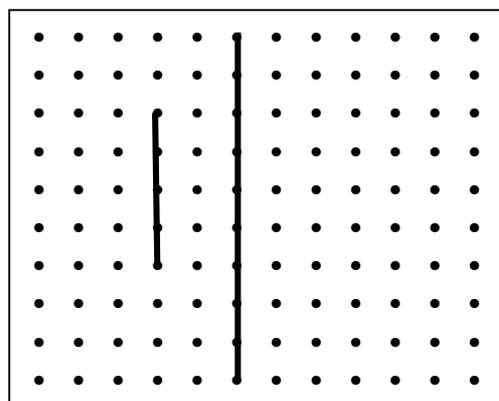
C.3.1



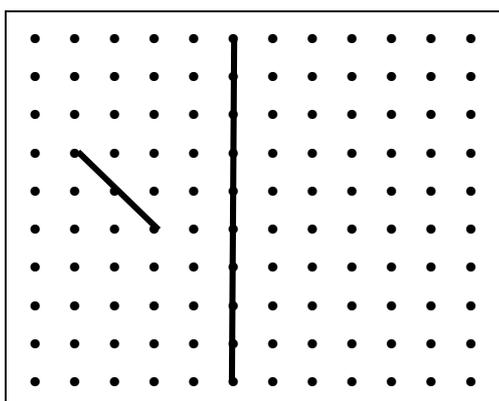
C.3.2



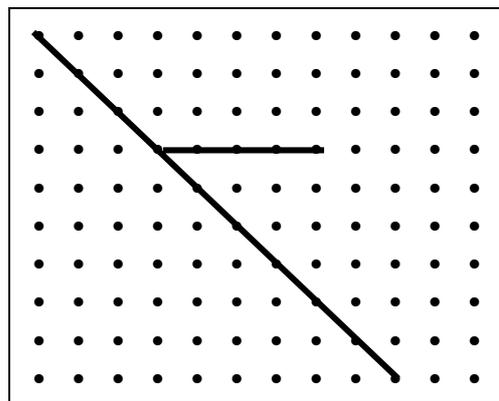
C.3.3



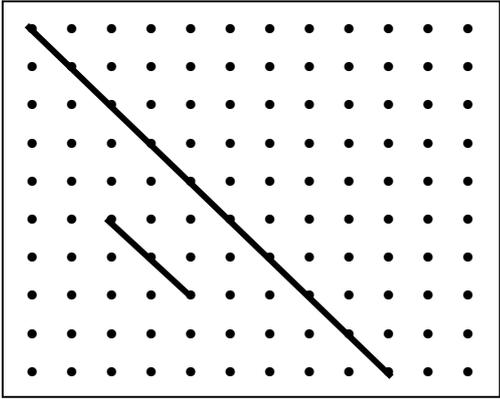
C.3.4



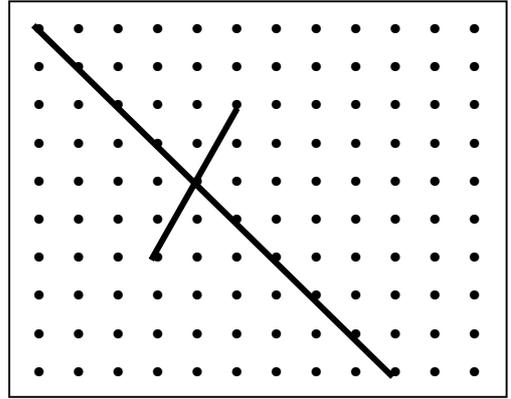
C.3.5



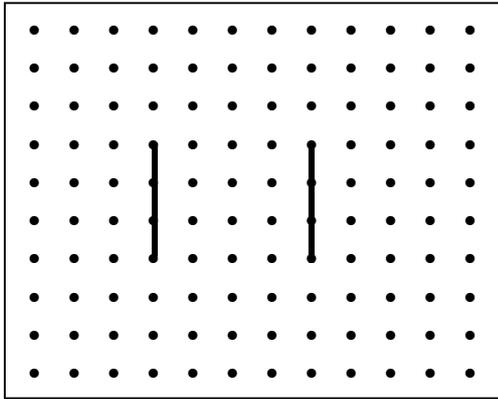
C.3.6



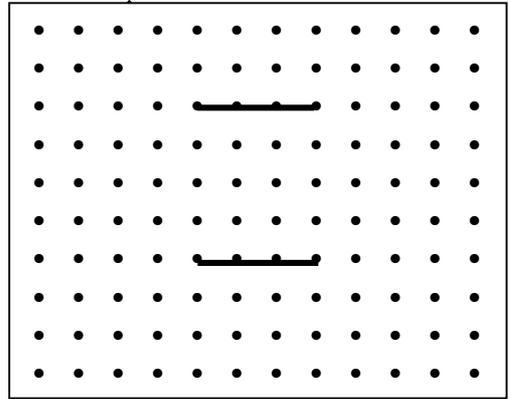
C.3.7



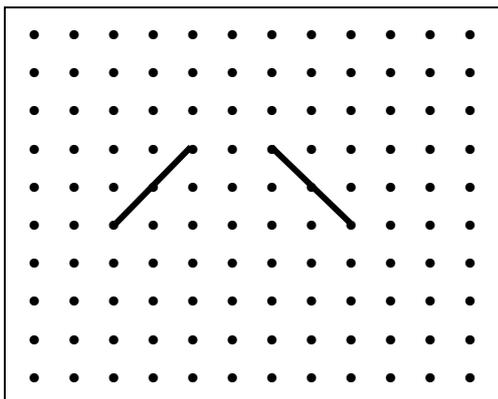
C.3.8



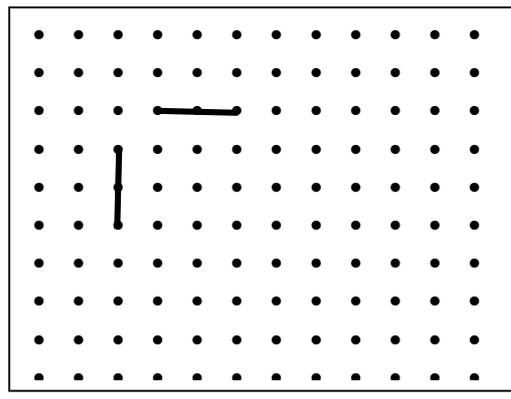
C.3.9



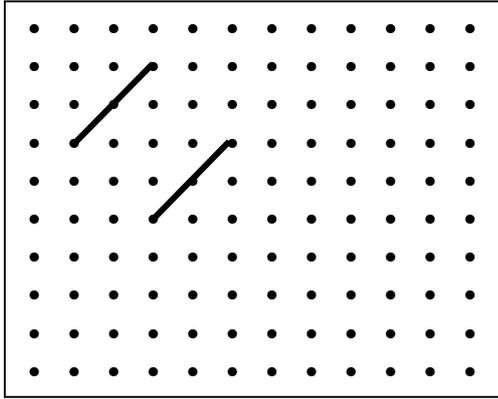
C.3.10



C.3.11

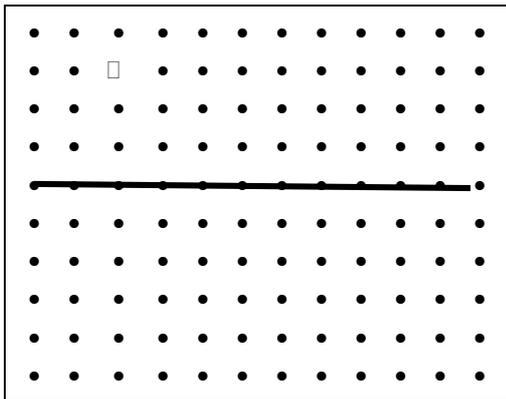


C.3.12

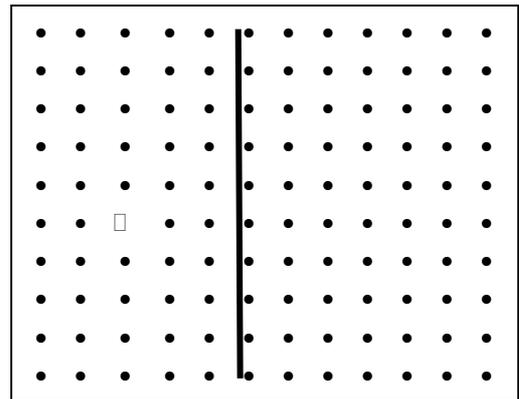


C.3.13

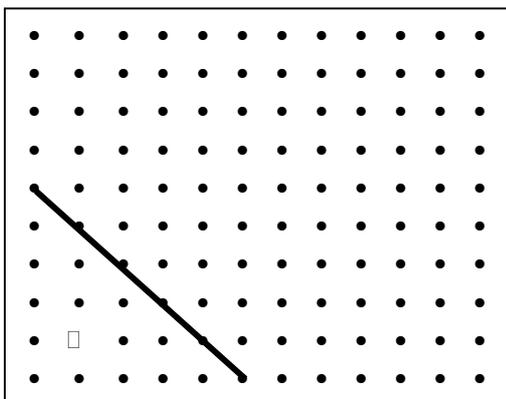
Conjunto 4



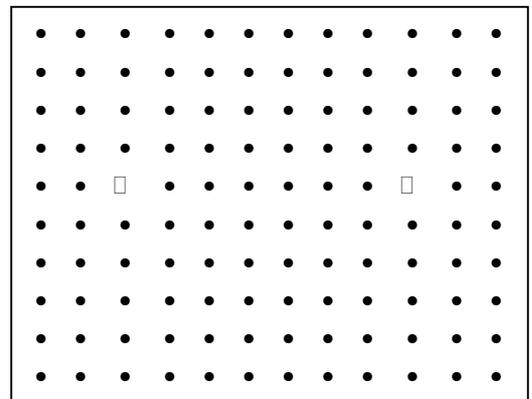
C.4.1



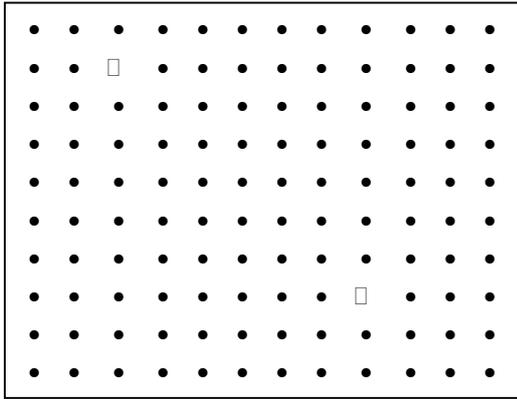
C.4.2



C.4.3



C.4.4



C.4.5

ANEXO 4

TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS

ANEXO 4.A

SUJEITO EDSON

1ª intervenção

Intervenção realizada no dia 28 de maio de 2003.

1	<i>Pes: O que você pode me falar sobre figuras?</i>
2	<i>Edson: Figuras são formas, desenhos.</i>
3	<i>Pes: Como você percebe uma figura nova, que você não conhecia?</i>
4	<i>Edson: Através do tato.</i>
5	<i>Pes: Plano. O que você entende ser um plano?</i>
6	<i>Edson: Meu braço está sobre a mesa que é um plano. O chão é plano ... é reto.</i>
7	<i>Pes: Simetria, já ouviu falar?</i>
8	<i>Edson: Já ouvi falar, mas não sei o que é.</i>
9	<i>Pes: Na escola?</i>
10	<i>Edson Não sei se foi em Geometria, ou Matemática, ou Física.</i>
11	<i>Pes: Você não lembra o que é? Nem em que aula estava?</i>
12	<i>Edson: Não. Mas o que é? É Matemática mesmo?</i>
13	<i>Pes: Matemática também tem.</i>
14	<i>Edson: Ou foi Física?</i>
15	<i>Pes: No seu corpo também tem. O corpo humano, externamente, também é simétrico.</i>
16	<i>Edson: Já vi entra na Biologia. E na química também?</i>
17	<i>Pes: Também, em algumas fórmulas de moléculas por exemplo. E reflexão?</i>
18	<i>Edson: Já.</i>
19	<i>Pes: Já, onde? Me dê um exemplo.</i>
20	<i>Edson: É quando você pensa no que vai fazer. É ficar sozinho com você mesmo.</i>
21	<i>Pes: (A pesquisadora ofereceu a ferramenta para exploração tátil pelo sujeito, que não destacou nenhuma regularidade importante da ferramenta. Iniciamos as tarefas na ferramenta com a representação da Fig.1). Você reconhece essa forma?</i>
22	<i>Edson: É um triângulo.</i>
23	<i>Pes: O que você conhece desse triângulo?</i>
24	<i>Edson: Tem três lados. Tem três lados. Um para direita, um para a esquerda e um para cima.</i>

25	<i>Pes: Vou colocar mais um elástico. (Fig.2)</i>
26	<i>Edson: Achei. (percebe o elástico após exploração tátil)</i>
27	<i>Pes: Você consegue perceber o que esse elástico fez com o triângulo?</i>
28	<i>Edson: Sim. Como se fosse um ponto de referência. Uma reta.</i>
29	<i>Pes: E com a figura, o que ele fez?</i>
30	<i>Edson: Transformou a figura numa seta.</i>
31	<i>Pes: Se eu tirar esse elástico daí?</i>
32	<i>Edson: Volta a ser um triângulo.</i>
33	<i>Pes: Então com a forma do triângulo, com a figura triângulo ... Esse elástico fez alguma coisa com o triângulo além de transformá-lo numa seta?</i>
34	<i>Edson: Com o triângulo? Dividiu.</i>
35	<i>Pes: Como?</i>
36	<i>Edson: Em duas partes. Em dois lados.</i>
37	<i>Pes: Você pode me falar sobre esses dois lados? Comparar esses dois lados?</i>
38	<i>Edson: Não entendi sua colocação.</i>
39	<i>Pes: Você me disse que esse elástico dividiu o triângulo em duas partes. Cada uma dessas partes tem forma conhecida para você?</i>
40	<i>Edson: Tem um lado que é uma pirâmide.</i>
41	<i>Pes: Cada uma dessas partes tem que forma para você?</i>
42	<i>Edson: Forma de uma pirâmide.</i>
43	<i>Pes: E você consegue comparar esses dois lados?</i>
44	<i>Edson: São parecidos, porém de lados opostos</i>
45	<i>Pes: São parecidos como?</i>
46	<i>Edson: Foi dividido no meio. Ficou só coluna para um lado e coluna para o outro lado (Indica as colunas de pinos da ferramenta, fazendo com que a pesquisadora percebesse que ele estava contando a quantidade de pinos que ficaram no interior da figura, e ainda usando as duas mãos mostrava o mesmo número de pinos de um e de outro lado da figura).</i>
47	<i>Pes: Você está querendo dizer mesma medida?</i>
48	<i>Edson: Mesma medida.</i>
49	<i>Pes: Mas está um virado para cada lado.</i>
50	<i>Edson: Isso. Um para cada lado.</i>
51	<i>Pes: Agora é você que vai construir figuras. Tem uma figura na prancha e você vai construir a outra metade dessa figura (Figura 3)</i>

	(A tarefa foi executada com sucesso) <i>Agora me conta como você fez.</i>
52	<p><i>Edson: É só se basear aqui nessa parte que já tá feita.</i></p> <p><i>Contei da direita para a esquerda quantos pinos tinha aqui em baixo (base do triângulo – contou do vértice em direção ao eixo de simetria). Continuei daqui mesmo (eixo de simetria) e contei 1, 2, 3, 4. Subi até a ponta de cima seguindo o referente (eixo de simetria).</i></p> <p><i>Poderia também ter contado 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (Contou os pinos da base até o vértice do triângulo sobre o eixo de simetria). No sete eu colocaria o elástico.</i></p>
53	<i>Pes: Essa referência que você está dizendo foi realmente qual?</i>
54	<i>Edson: A central. Fiz a outra figura considerando essa central (aponta o eixo de simetria).</i>
55	<i>Pes: O nome desse elástico na Matemática é eixo de simetria. Tudo que tem de um lado dele tem do outro também, bem como você percebeu: as distâncias são as mesmas, o tamanho é o mesmo, mas fica tudo invertido.</i>
56	<i>Edson: Sim.</i>
57	<i>Pes: Agora eu vou fazer outra figura para você construir. Fiz uma figura de um lado do eixo de simetria e gostaria que você construísse a parceira dela. (Fig. 4)</i>
58	<i>Edson: É um triângulo. (Inicialmente posiciona a base, mantendo a distância do vértice ao eixo de simetria. Para concluir a figura conta os pontos internos). Pronto.</i>
59	<i>Pes: Me conta como você fez.</i>
60	<i>Edson: Mesmo exemplo.</i>
61	<i>Pes: Então me mostra, me conta o exemplo.</i>
62	<i>Edson: Ok, eu usei a base, contei da direita para a esquerda 1, 2, 3, 4, 5. Contei da mesma forma do outro lado. (Refaz o posicionamento do elástico que só tinha quatro pinos na base). Certo (confere novamente as duas figuras). Eu contei. Como você observou, eu corriji, contei para o centro, para chegar ao meio. Da mesma forma do outro lado (deixando a distância adequada entre as figuras e o eixo de simetria).</i>
63	<i>Pes: O que foi importante para você construir essa figura?</i>
64	<i>Edson: A primeira figura.</i>
65	<i>Pes: Vou fazer outra figura. (O sujeito não verbaliza a relação entre a figura, sua imagem e eixo de simetria, o que fez com a pesquisadora</i>

	<p>adicionasse uma tarefa na seqüência prevista anteriormente – Figura 5). <i>Você pode fazer a parceira dessa?</i> (Num primeiro momento o sujeito não posiciona o elástico no vértice do triângulo posicionado sobre o eixo de simetria e procura manter a distância da tarefa anterior). (Realiza a tarefa com êxito) <i>Como você fez?</i></p>
66	<p><i>Edson: Eu contei os pinos dentro. São três pinos dentro, e eu percebi que não tinha uma seqüência de pinos onde passa o elástico (base). Conte os pinos que estavam dentro deixei os mesmos do outro lado e passei o elástico por baixo. Conte o mesmo como no outro desenho (altura do triângulo) e completei.</i></p>
67	<p><i>Pes: Lembra o primeiro triângulo que eu coloquei na ferramenta ?</i></p>
68	<p><i>Edson: Sim.</i></p>
69	<p><i>Pes: Eu fiz o triângulo com elástico e depois coloquei o segundo elástico que nos chamamos de eixo de simetria. Como aquele da ferramenta, esse de papel também tem eixo de simetria, e eu queria que você identificasse esse eixo.</i></p>
70	<p><i>Edson: O eixo de simetria é sempre o mesmo? Não tem nada para eu por no meio (da figura) ? Aqui?</i></p>
71	<p><i>Pes: Você pode dobrar.</i></p>
72	<p><i>Edson: É esse o eixo de simetria (mostra a dobra que fez).</i></p>
73	<p><i>Pes: O eixo de simetria é esse da dobra. É isso?</i></p>
74	<p><i>Edson: Isso, porque se você me der outro papel eu vou fazer aqui (mostra o outro lado) igual. Ai vai se tornar o eixo de simetria.</i></p>
75	<p><i>Pes: Agora eu vou lhe dar outras duas figuras no papel. Uma tem um eixo de simetria e a outra tem dois eixos de simetria.</i></p>
76	<p><i>Edson: Tira uma dúvida minha. Se eu tivesse dois círculos, um aqui e outro aqui (mostra duas posições distintas sobre a mesa) seria um eixo de simetria?</i></p>
77	<p><i>Pes: Se você colocasse um eixo entre os dois de tal forma que a distância entre cada um deles e o eixo fosse a mesma, você teria um eixo de simetria entre os dois círculos. Nessas figuras uma tem um eixo de simetria e a outra dois eixos de simetria.</i></p>
78	<p><i>Edson: (Explora o polígono com doze lados) Aqui não vai ter como formar um eixo. Vamos ver nessa (trapézio). Não tem como.</i></p>
79	<p><i>Pes: Por quê?</i></p>
80	<p><i>Edson: Hã! Vou ter que dobrar para fazer (tenta fazer várias dobras). Não</i></p>

	<i>tem como fazer aqui.</i>
81	<i>Pes: Você está sentindo falta do que?</i>
82	<i>Edson: É falta de papel para fazer os lados direitinho.</i>
83	<i>Pes: Mas no triângulo o que você percebeu que o eixo faz?</i>
84	<i>Edson: Dividi. Separa.</i>
85	<i>Pes: Separa como?</i>
86	<i>Edson: Do centro para a esquerda e do centro para a direita. Ou então, pelo que eu entendi eu tenho que ter o eixo de simetria e dois triângulos.</i>
87	<i>Pes: Isso dois triângulos, de tal forma que quando você coloca um sobre o outro eles ficam iguais.</i>
88	<i>Edson: Iguais totalmente.</i>
89	<i>Pes: Mas aí tem como você dobrar essa figura para ela ficar duas partes, uma sobre a outra?</i>
90	<i>Edson: Aqui pelo que eu constato não. Com uma tesoura teria como cortar e deixar.</i>
91	<i>Pes: Você não consegue fazer uma dobra para encontrar o eixo de simetria?</i>
92	<i>Edson: Não.</i>
93	<i>Pes: Vou lhe mostrar o triângulo de novo. Esse é o triângulo que você dobrou (explora o triângulo e seu eixo de simetria).</i>
94	<i>Edson: Certo, aí sim. (Passa a tentar encontrar o eixo de simetria a partir de um dos vértices do trapézio, não tem êxito). Bom! Tentei.</i>
95	<i>Pes: Agora vou lhe mostrar o seu triângulo de novo. No seu triângulo, esse lado aqui que a gente chama de base ficou dobrado assim. Quando a gente abre ele volta a medida original. O que o eixo de simetria fez com esse lado?</i>
96	<i>Edson: Separou.</i>
97	<i>Pes: Como?</i>
98	<i>Edson: Deixou só um lado. Precisa do eixo de simetria para ter o outro lado.</i>
99	<i>Pes: Então o eixo de simetria que está aqui dividiu o lado todo em duas partes. É isso?</i>
100	<i>Edson: Isso.</i>
101	<i>Pes: Como são essas duas partes? A medida delas?</i>
102	<i>Edson: Você fala daqui para cá quanto tem? (indica a medida do eixo de simetria até um dos vértices)</i>

103	<i>Pes: Não. Quando você compara essas duas partes. O que você pode me falar das medidas?</i>
104	<i>Edson: São iguais.</i>
105	<i>Pes: Na figura que eu lhe dei você está sempre procurando o vértice, mas pelo que acabamos de discutir não precisamos procurar o eixo de simetria sempre a partir do vértice, podemos procurar dividir também os lados.</i>
106	<i>Edson: É verdade (continua insistindo no vértice). E agora? (entrega a figura para a pesquisadora, mas não teve êxito)</i>
107	<i>Pes: Agora eu vou fazer uma dobra para você (a pesquisadora faz uma dobra no eixo de simetria do trapézio). O que você acha desse?</i>
108	<i>Edson: Ficou!</i>
109	<i>Pes: É eixo de simetria?</i>
110	<i>Edson: Falta o outro lado.</i>
111	<i>Pes: Abre ele.</i>
112	<i>Edson: Ficou, é eixo de simetria sim.</i>
113	<i>Pes: Agora o que você pode fazer com a outra figura? (Marca um eixo de simetria no polígono de doze lados). Só tem esse?</i>
114	<i>Edson: Não, tem outro aqui, certo?</i>
115	<i>Pes: Perfeito. Agora vou lhe dar quatro figuras, uma com quatro eixos de simetria, uma com dois eixos de simetria, uma com um eixo de simetria e outra com nenhum. (Inicia pelo quadrado e marca dois eixos de simetria, ambos relativos aos lados).</i>
116	<i>Edson: Essa tem dois. Está certo?</i>
117	<i>Pes: Tem uma que tem quatro. (começa a tentar dobrar a figura a partir dos vértices).</i>
118	<i>Edson: Ou seja, descobri que essa tem quatro. Inacreditável. Mas é essa mesmo?</i>
119	<i>Pes: É. (Começa a trabalhar com a pipa).</i>
120	<i>Edson: Não tem que estar reto. Tem que combinar (refere-se à sobreposição). Não é isso?</i>
121	<i>Pes: É.</i>
122	<i>Edson: Esse aqui é um eixo.</i>
123	<i>Pes: É.</i>
124	<i>Edson: Esse é dois?</i>

125	<i>Pes: Combinou?</i>
126	<i>Edson: Esse não. Então esse só tem um.</i>
127	<i>Pes: Certo. (Pega o losango e faz as dobras dos dois eixos de simetria).</i>
128	<i>Edson: Esse aqui tem dois. Certo?</i>
129	<i>Pes: Certo.</i>
130	<i>Edson: Então a que sobrou não tem nenhum.</i>
131	<i>Pes: Vamos para a nossa ferramenta mais um pouco. (Figura 6) (Inicialmente continua contando os pontos internos como não consegue executar a tarefa, passa a contar os pinos da base)</i>
132	<i>Edson: Tem que ser junto aqui (aponta o eixo de simetria).</i>
133	<i>Pes: Tem que ser como você fez nas anteriores. Nesse caso esse é o eixo de simetria.</i>
134	<i>Edson: Eu entendi, só que tem alguma coisa errada.</i>
135	<i>Pes: Tem alguma coisa errada. O que está errado aqui? O que você está tentando fazer?</i>
136	<i>Edson: Como está desse lado, mas tem uma quantidade de pinos aqui e aqui parece que não. (Mostra as figuras dos dois lados do eixo de simetria).</i>
137	<i>Pes: Está lembrando que ela tem que ficar como você disse ao contrário?</i>
138	<i>Edson: Eu estou usando muitos pinos. Estou fazendo totalmente errado. Não é reto (a imagem da base). Acho que piorei (modificou sua figura).</i>
139	<i>Pes: Está um pouquinho grande o seu. (Realiza a tarefa com sucesso depois de muitas tentativas)</i>
140	<i>Edson: Não quer dar certo.</i>
141	<i>Pes: O que você acha que está errado?</i>
142	<i>Edson: Esses pontos aqui (mostra a base da figura) estão encostados (nos pinos) esses daqui (imagem da base) não estão. Não quer dar certo.</i>
143	<i>Pes: E em relação ao eixo de simetria as figuras são iguais?</i>
144	<i>Edson: É. Aparentemente eu estou achando, mas eu estou em dúvida.</i>
145	<i>Pes: Em dúvida se está certo ou errado? O que você acha que está errado?</i>
146	<i>Edson: Aqui dentro dessa (indica a figura que construiu) não tem o mesmo número de pontos que aqui.</i>
147	<i>Pes: Você quer a régua para medir?</i>

FIGURAS

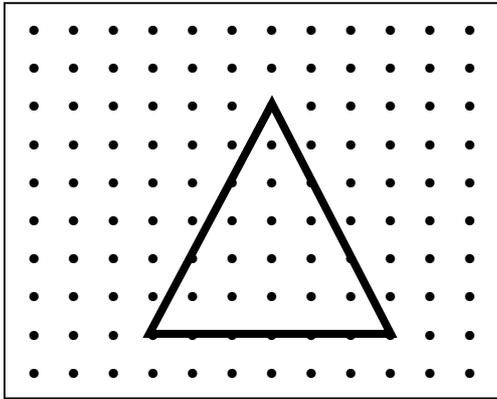


Figura 1

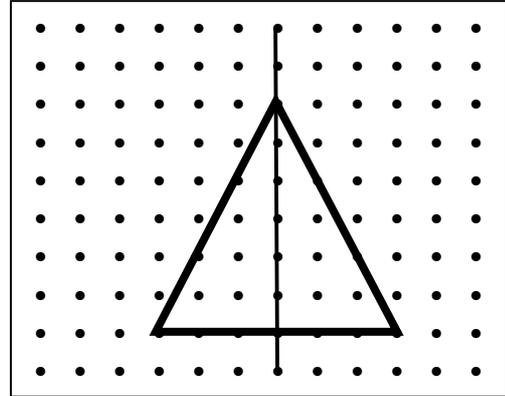


Figura 2

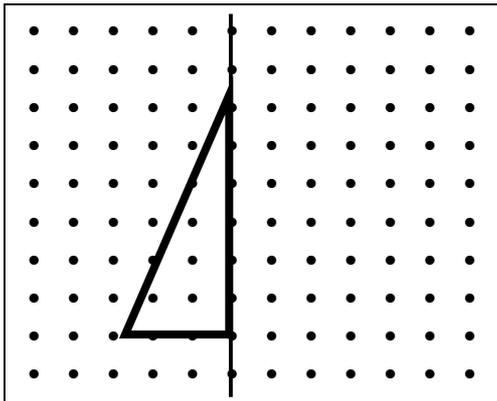


Figura 3

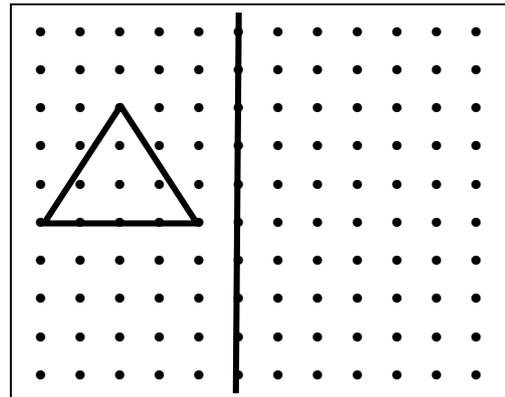


Figura 4

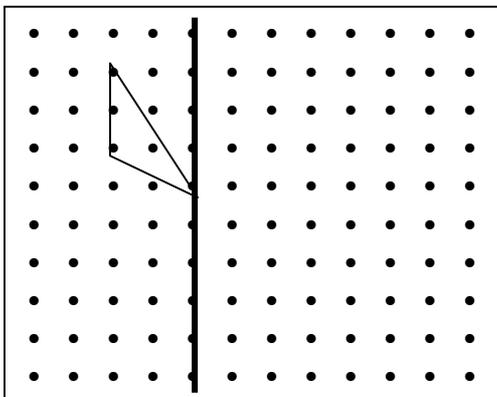


Figura 5

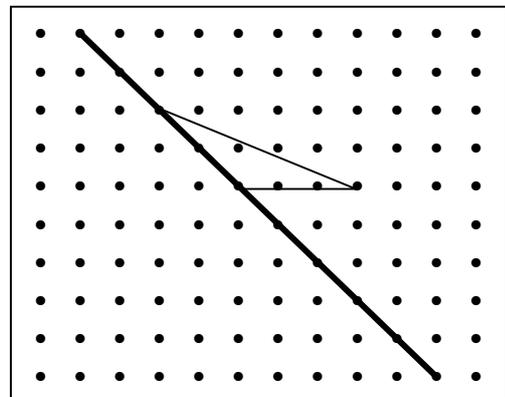
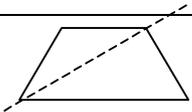


Figura 6

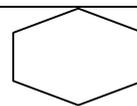
2ª intervenção

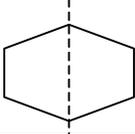
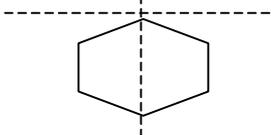
Intervenção realizada no dia 9 de junho de 2003.

1	<i>Pes: Você lembra o que conversamos no nosso último encontro?</i>
2	<i>Edson: Algumas coisas.</i>
3	<i>Pes: O que?</i>
4	<i>Edson: Lembro que você me deu algumas figuras e eu fui fazendo. Você me deu algumas figuras e eu fui falando. Fazendo também o desenho, quantas vezes davam para eu fazer. Você me deu quatro ou cinco figuras. Uma poderia ser feita só uma vez, mas eu não estou me lembrando da figura.</i>
5	<i>Pes: Mas o quê você procurava? Lembra? Como nós chamamos?</i>
6	<i>Edson: Não estou me lembrando.</i>
7	<i>Pes: Esta é uma das figuras. (entrega o triângulo ao sujeito)</i>
8	<i>Edson: Sim.</i>
9	<i>Pes: E essa é a dobra que você fez.</i>
10	<i>Edson Isso.</i>
11	<i>Pes: Você lembra o nome que demos a essa dobra?</i>
12	<i>Edson: Não lembro.</i>
13	<i>Pes: Eixo de simetria.</i>
14	<i>Edson: Isso! Isso!</i>
15	<i>Pes: O que faz o eixo de simetria?</i>
16	<i>Edson: Dividi.</i>
17	<i>Pes: Dividi como?</i>
18	<i>Edson: Em dois. Ao meio.</i>
19	<i>Pes: E como você sabe que esse é o eixo de simetria e não outra dobra?</i>
20	<i>Edson: (Dobra o triângulo no seu eixo de simetria) Assim. É o eixo de simetria porque eles são iguais. (Mostra as duas partes sobrepostas) Ai dá para saber que é o eixo de simetria.</i>
21	<i>Pes: Pelas duas partes iguais.</i>
22	<i>Edson: Isso.</i>
23	<i>Pes: Depois eu lhe entreguei essas outras figuras aqui. Essa (o polígono em forma de cruz) que você achou o eixo de simetria e essa daqui (o trapézio) que eu te ajudei a encontrar o eixo de simetria.</i>
24	<i>Edson: Certo.</i>

25	<i>Pes: Depois eu lhe ofereci outras quatro figuras e você acertou todas. (Permanece com o trapézio nas mãos verificando os vincos)</i>
26	<i>Edson: Essa daqui (o trapézio) eu tenho um pouco de dificuldade.</i>
27	<i>Pes: Você lembra onde é o eixo de simetria dela?</i>
28	<i>Edson: Está aqui dobrado.</i>
	
29	<i>Pes: Ficou igual?</i>
30	<i>Edson: Opa! Está esquisito. Não. Essa é difícil.</i>
31	<i>Pes: Essa é a que eu fiz com você.</i>
32	<i>Edson: Ta difícil!</i>
33	<i>Pes: Mas você está sempre procurando iniciar sua dobra no vértice. No bico. Procura explorar um pouco mais os lados.</i>
34	<i>Edson: Ah é! (Consegue refazer a dobra no eixo de simetria). Consegui.</i>
35	<i>Pes: Então o que o eixo de simetria faz?</i>
36	<i>Edson: Divisão em dois lados iguais.</i>
37	<i>Pes: E a figura?</i>
38	<i>Edson: Fica dividida em duas iguais.</i>
39	<i>Pes: E você lembra de mais alguma coisa que discutimos?</i>
40	<i>Edson: Não.</i>
41	<i>Pes: Bom, essas figuras todas que você encontrou o eixo de simetria, no triângulo onde você encontrou um, nesse que parece uma cruz você encontrou dois. . .</i>
42	<i>Edson: Me dê. (Refaz as dobras feitas na sessão anterior)</i>
43	<i>Pes: Nesse, que estava na sua mão (o trapézio), determinamos um. No quadrado você encontrou quatro (entrega ao sujeito).</i>
44	<i>Edson: Certo (Verificando os vincos feitos na sessão anterior).</i>
45	<i>Pes: As figuras que tem eixo de simetria são chamadas figuras simétricas na Matemática. A figura que você não encontrou eixo de simetria, nessa daqui (entrega o paralelogramo ao sujeito) onde você não conseguiu sobrepor as duas partes não é uma figura simétrica.</i>
46	<i>Edson: Não é simétrica.</i>
47	<i>Pes: Todas as outras que você trabalhou, onde você encontrou pelo menos um eixo de simetria são classificadas como figuras simétricas na Matemática. Então vamos pensar nessa figura aqui: a pipa.</i>
48	<i>Edson: Pipa?</i>
49	<i>Pes: É. A forma dela lembra uma pipa.</i>

	<i>Nessa figura aí cadê o eixo de simetria que você achou?</i>
50	<i>Edson: Tá aqui.</i>
51	<i>Pes: Esse eixo de simetria dividiu a pipa em duas partes iguais. Mas dividiu o quê da figura?</i>
52	<i>Edson: Não entendi a questão.</i>
53	<i>Pes: Nessa figura, além dos lados temos esses “bicos” aqui (indica os vértices). Você lembra o nome desses “bicos”?</i>
54	<i>Edson: Negativo.</i>
55	<i>Pes: Essa ponta – esse bico – que você está percebendo é o vértice. E os lados que se encontram nesse vértice formam um ângulo.</i>
56	<i>Edson: Ângulo. Ah! Sim.</i>
57	<i>Pes: Então o eixo de simetria dividiu esse ângulo como?</i>
58	<i>Edson: Em dois lados. Ao meio.</i>
59	<i>Pes: Dividiu o ângulo ao meio.</i>
60	<i>Edson: Isso.</i>
61	<i>Pes: Você lembra o nome desse segmento que dividi o ângulo ao meio?</i>
62	<i>Edson: Não lembro.</i>
63	<i>Pes: É bissetriz. Já ouviu esse nome?</i>
64	<i>Edson: Acho que sim.</i>
65	<i>Pes: Nessa outra figura, no quadrado, do jeito que você marcou o eixo de simetria está dividindo o quê da figura?</i>
66	<i>Edson: O quadrado normal é assim, né? (abre a figura)</i>
67	<i>Pes: É.</i>
68	<i>Edson: O lado. Está dividindo o lado.</i>
69	<i>Pes: Isso. Em duas partes iguais. O que estamos querendo discutir aqui é que o eixo de simetria pode dividir tanto lados quanto ângulos.</i>
70	<i>Edson: Sim.</i>
71	<i>Pes: Agora vamos voltar a nossa ferramenta. Eu coloquei aqui uma figura.</i>
72	<i>Edson: É a pipa ou não?</i>
73	<i>Pes: Não. Vou lhe dar alguns elásticos que estão aqui do seu lado direito. Você viu que as figuras podem ter nenhum eixo de simetria, um, dois, quatro, ...</i>
74	<i>Edson: Sim.</i>
75	<i>Pes: Eu gostaria que você colocasse aí o eixo ou os eixos de simetria.</i>
76	<i>Edson: Aqui?</i>



77	<i>Pes: É, nessa figura que está na ferramenta.</i>	
78	<i>Edson: Vamos lá.</i>	
79	<i>Pes: O eixo de simetria tem que dividir a figura?</i>	
80	<i>Edson: Ao meio.</i>	
81	<i>Pes: Em duas partes iguais. (Explora as medidas dos lados e os vértices e posiciona o primeiro eixo de simetria).</i>	
82	<i>Edson: Aqui tá um eixo de simetria. Certo?</i>	
83	<i>Pes: Tá.</i>	
84	<i>Edson: Aqui tem mais dois, certo? Tem dois eixos de simetria.</i>	
85	<i>Pes: Dois eixos de simetria. Não tem mais nenhum?</i>	
86	<i>Edson: Eu estou imaginando, fazendo na cabeça. Não dá para fazer mais nenhum.</i>	
87	<i>Pes: Não dá por que?</i>	
88	<i>Edson: Primeiro eu usei o tato para ter noção do desenho. Agora eu estou usando a imagem na minha cabeça, como se eu estivesse dobrando com a mão.</i>	
89	<i>Pes: Você está imaginando a figura?</i>	
90	<i>Edson: Isso, visualmente. Para cá um e para cá dois. (Simula a dobradura da figura) Tem só dois mesmo.</i>	
91	<i>Pes: Ok. Tem só dois mesmo. Vamos conversar um pouco sobre eles. Você posicionou dois eixos de simetria. Quer dizer que se eu tirar um a figura fica dividida em duas partes iguais.</i>	
92	<i>Edson: Sim.</i>	
93	<i>Pes: Se eu tirar o outro, a figura fica dividida em outras duas partes ainda iguais.</i>	
94	<i>Edson: Certo.</i>	
95	<i>Pes: Então um eixo de simetria é absolutamente independente do outro.</i>	
96	<i>Edson: Certo. Isso.</i>	
97	<i>Pes: Então podemos dizer que essa figura é simétrica?</i>	
98	<i>Edson: Simétrica? Quer dizer que tem mais de um eixo de simetria?</i>	
99	<i>Pes: Para que uma figura seja simétrica ter um eixo de simetria já é o bastante.</i>	
100	<i>Edson: Então se ter um é o bastante ela é simétrica.</i>	

101	<p><i>Pes: Nós vamos sair um pouco das figuras simétricas e vamos discutir um outro conceito matemático – o conceito de reflexão.</i></p> <p><i>Quando falamos de reflexão, falamos de uma figura e sua imagem. Se você pensar nessa figura que está na ferramenta, metade dela, a metade que está na sua esquerda é idêntica à metade que está a sua direita. (Aguarda a exploração tátil).</i></p> <p><i>O eixo de simetria atravessa a figura e tudo que você tem a direita tem também na sua esquerda, certo?</i></p>
102	<i>Edson: Certo</i>
103	<i>Pes: Considere esse vértice aqui por exemplo. Cadê a imagem dele?</i>
104	<i>Edson: Tá aqui (realiza a tarefa corretamente e com rapidez).</i>
105	<i>Pes: Me mostra, então, outro ponto e sua imagem (realiza a tarefa corretamente). Isso. O que você pode me falar desses dois pontos.</i>
106	<i>Edson: Hã?</i>
107	<i>Pes: Em relação ao eixo de simetria como eles estão dispostos?</i>
108	<i>Edson: Como eles estão dispostos aqui?</i>
109	<i>Pes: Este é um vértice. Para você chegar ao eixo de simetria você tem que vir até aqui. Esse vértice aqui você indicou como sendo a imagem dele. Para chegar ao eixo de simetria você deve vir até aqui.</i>
110	<i>Edson: Certo. Até o meio.</i>
111	<i>Pes: O que você pode me falar sobre esses dois pontos em relação ao eixo de simetria?</i>
112	<i>Edson: Que eu só consigo identificar se eu for até o meio para ter uma base da divisão entre os dois lados.</i>
113	<i>Pes: Se eu te der uma figura você acredita que consegue fazer a imagem dela?</i>
114	<i>Edson: Provavelmente sim.</i>
115	<i>Pes: Mas antes eu vou lhe dar uma pronta: a figura e a imagem dela (Figura 1). (Aguarda a exploração tátil) Que figura é essa?</i>
116	<i>Edson: Triângulo.</i>
117	<i>Pes: A figura da sua direita é a imagem da figura que está a sua esquerda.</i>
118	<i>Edson: Sim. Certo.</i>
119	<i>Pes: Você percebeu a posição do eixo de simetria?</i>
120	<i>Edson: Sim, ele está no meio. Então realmente o eixo de simetria é o que separa os desenhos em dois desenhos. Desenhos que tem a mesma</i>

	<i>imagem. Que são idênticos.</i>
121	<i>Pes: O que você está considerando como desenho?</i>
122	<i>Edson: O triângulo e o outro lado e no meio o eixo de simetria, ou seja o eixo de simetria dividiu o triângulo em dois.</i>
123	<i>Pes: Mas cadê as duas partes do triângulo?</i>
124	<i>Edson: Tá uma aqui e outra aqui (indica os dois triângulos).</i>
125	<i>Pes: Essas duas partes formam um único triângulo?</i>
126	<i>Edson: Não. Não foi dividido não. Aqui tem dois triângulos.</i>
127	<i>Pes: Tem dois triângulos.</i>
128	<i>Edson: O eixo de simetria está no meio.</i>
129	<i>Pes: Agora o que você pode me falar desses dois triângulos em relação ao eixo de simetria? Se eu te der um triângulo, como você faria para determinar a imagem dele?</i>
130	<i>Edson: Eu faria assim, olha (Figura 2). Aqui tem um lado (completa o triângulo) e aqui tem o outro. É o triângulo.</i>
131	<i>Pes: E o que você levou em conta para fazer isso?</i>
132	<i>Edson: O exemplo. O eixo de simetria. Esse aqui no caso é o eixo de simetria (aponta o eixo). Aqui é o triângulo (aponta os dois triângulos). Ou seja, aqui (posiciona um triângulo na ferramenta como fizemos na tarefa anterior) Temos um eixo de simetria, mas para ficar uma simetria tenho que deixar só uma parte.</i>
133	<i>Pes: Essa idéia que você guardou é perfeita quando falamos de figuras simétricas. Na figura simétrica quando marcamos o eixo de simetria ele divide a figura em duas.</i>
134	<i>Edson: No caso eu estou fazendo o que você me deu no papel aqui na sua ferramenta.</i>
135	<i>Pes: Isso no papel, nas nossas figuras simétricas é verdade, mas aqui nos temos outro caso.</i>
136	<i>Edson: Sim entendi.</i>
137	<i>Pes: Aqui eu tenho um triângulo e na sua esquerda eu fiz a imagem dele.</i>
138	<i>Edson: Entendi. Aí fica o eixo de simetria entre os dois triângulos.</i>
139	<i>Pes: O que você pode me falar desses dois triângulos em relação ao eixo de simetria? (Silêncio). Pensa nesse vértice aqui (posiciona a mão do sujeito) e no parceiro dele do outro lado do eixo de simetria (o sujeito mostra a imagem do ponto). Isso, como eu sei que essa é a imagem daquele vértice?</i>
140	<i>Edson: Observando a forma.</i>

141	<i>Pes: Independente da forma como eu sei que esse ponto é imagem daquele ponto?</i>
142	<i>Edson: Porque é imagem.</i>
143	<i>Pes: E como eu faço para determinar essa imagem? Porque eu poderia ter posto em qualquer outro lugar na ferramenta.</i>
144	<i>Edson: Você observa.</i>
145	<i>Pes: Observa o quê?</i>
146	<i>Edson: Onde está o triângulo para formar o outro lado.</i>
147	<i>Pes: Formar o lado? Como?</i>
148	<i>Edson: O eixo de simetria separa e depois forma. Se baseando no triângulo.</i>
149	<i>Pes: Mas o eixo de simetria já estava aí. A história foi assim: eu tinha o eixo de simetria e o triângulo, aí eu construí a imagem. Como eu sabia onde deveria ficar a imagem? (Silêncio) Faz você.</i>
150	<i>Edson: Sabia porque para ser eixo de simetria tem que ter duas imagens.</i>
151	<i>Pes: Então faz para mim. (Retira um dos triângulos da ferramenta. O sujeito realiza a tarefa com sucesso contando o número de pinos entre cada um dos vértices e o eixo de simetria na perpendicular. Faz a verificação observando o número de pinos nas bases de cada um dos triângulos).</i>
152	<i>Edson: Pronto.</i>
153	<i>Pes: Certo.</i>
154	<i>Edson: Dividi, contei e formei.</i>
155	<i>Pes: O que você contou?</i>
156	<i>Edson: Os lados, aí deu um triângulo aqui.</i>
157	<i>Pes: E por que você escolheu bem esse ponto aqui para ser a imagem desse daqui? (indica dois vértices, um de cada triângulo).</i>
158	<i>Edson: Porque eu contei daqui até aqui e daqui até aqui (distância do vértice ao eixo de simetria e do eixo até o vértice imagem).</i>
159	<i>Pes: Então o que você está mantendo entre as figuras?</i>
160	<i>Edson: Distância.</i>
161	<i>Pes: Distância. Isso mesmo. Agora eu construo uma figura e você a imagem dela (Figura 3).</i>
162	<i>Edson: Certo. (Após a exploração tátil, inicia a construção da imagem pela base. Faz a verificação contando os pinos no interior da figura).</i>
163	<i>Pes: Todas as distâncias estão certinhas?</i>
164	<i>Edson: Tá tudo certinho.</i>
165	<i>Pes: Vamos ver. A imagem desse aqui (indica um dos vértices da base)</i>

	<i>qual é?</i>
166	<i>Edson: É esse (indica a imagem).</i>
167	<i>Pes: Por que?</i>
168	<i>Edson: Porque está na mesma distância. Eu contei os pinos 1, 2, 3 e 4 daqui (eixo de simetria) 1, 2, 3 e 4.</i>
169	<i>Pes: Isso. Então nesse outro vértice para que a distância ao eixo de simetria se mantenha ele e a imagem coincidam.</i>
170	<i>Edson: Isso.</i>
171	<i>Pes: Então só falta um vértice para nos cuidarmos. Esses dois aqui em cima, um é imagem do outro?</i>
172	<i>Edson: Opa! Tem coisa errada aqui (reposiciona o vértice). Agora sim.</i>
173	<i>Pes: Ta certinho agora?</i>
174	<i>Edson: Tá.</i>
175	<i>Pes: Ta certinho. E como podemos ter certeza disso?</i>
176	<i>Edson: Eu contei o mesmo segmento (perpendicular). Um pino livre, o eixo de simetria, outro livre e a imagem. Certo.</i>
177	<i>Pes: Na sua memória visual você tem a sua imagem no espelho?</i>
178	<i>Edson: Sim.</i>
179	<i>Pes: Como é que você via a sua imagem no espelho?</i>
180	<i>Edson: Como assim?</i>
181	<i>Pes: Por exemplo: se você está na frente do espelho e levanta sua mão direita a sua imagem levanta que mão?</i>
182	<i>Edson: Se eu levantar a esquerda levanta a esquerda. Se eu levantar a direita levanta a direita.</i>
183	<i>Pes: Sim é claro. Mas a sua imagem fica de frente para você. Faz de conta que eu sou sua imagem no espelho. Estou de frente para você. Levanta sua mão esquerda. Para eu tocar a sua mão, eu tenho que levantar que mão?</i>
184	<i>Edson: A direita. É mesmo inverte.</i>
185	<i>Pes: Aqui acontece a mesma coisa, é como se a figura estivesse se olhando no espelho. Então todas as distâncias ficam mantidas, mas na semana passada você já havia me dito “fica tudo igual, mas invertido”. Quer dizer as medidas são conservadas, mas a figura aparece invertida, como você no espelho.</i>
186	<i>Edson: Certo.</i>
187	<i>Pes: Tem outra figura na ferramenta, você pode fazer a imagem? (Figura.</i>

	4) (Inicia posicionando o elástico no vértice sobre o eixo de simetria. Alinha os lados sem se preocupar com suas medidas. Determina a posição do lado paralelo ao eixo contando o número de pinos na altura do triângulo. Faz a verificação fazendo a contagem do número de pinos entre os vértices e o eixo de simetria na perpendicular).
188	<i>Edson: Será que eu consegui?</i>
189	<i>Pes: Conseguiu. Me conta tudo. O que foi importante, o que ajudou, o que atrapalhou?</i>
190	<i>Edson: Muita atenção. Uma falha põe tudo a perder.</i>
191	<i>Pes: Até agora falamos de manter a mesma distância.</i>
192	<i>Edson: Sim, que é uma base muito firme para fazer as figuras.</i>
193	<i>Pes: Quando falamos de mesma distância, pensamos sempre na distância do ponto ao eixo de simetria.</i>
194	<i>Edson: Isso.</i>
195	<i>Pes: E sobre ângulos o que você pode me falar? Quando trabalhamos com as figuras de papel nos falamos que o eixo de simetria divide tanto lados quanto ângulos.</i>
196	<i>Edson: Dividi também. Faz a imagem dele.</i>
197	<i>Pes: Qual a imagem desse segmento aqui? (aponta 1)</i>
198	<i>Edson: É esse daqui. (aponta 2)</i>
199	<i>Pes: Esse lado, mas ele (aponta 1) está a mesma distância do eixo de simetria que aquele (aponta 2)?</i>
200	<i>Edson: Não. Tá confuso, mas é como já disse: lados opostos.</i>
201	<i>Pes: Mas então qual é a imagem desse daqui? (aponta 3)</i>
202	<i>Edson: É esse daqui (aponta 2).</i>
203	<i>Pes: E desse então? (aponta 1).</i>
204	<i>Edson: É esse daqui (aponta 4).</i>
205	<i>Pes: Certo. E o que o eixo de simetria fez com esse ângulo formado por esses dois lados? (ângulo formado por 1 e 4).</i>
206	<i>Edson: Dividiu. Separou.</i>
207	<i>Pes: Dividiu como?</i>
208	<i>Edson: Em dois.</i>
209	<i>Pes: Em dois como?</i>
210	<i>Edson: Ao meio.</i>

211	<i>Pes: E a imagem dessa figura? (Figura 5)</i>
212	<i>Edson: Cadê o eixo de simetria?</i>
213	<i>Pes: Taí.</i>
214	<i>Edson: Achei. (Inicia pelo lado sobre o eixo de simetria. Vira a ferramenta para posicionar o eixo de simetria perpendicularmente ao seu corpo). Acho que está certo.</i>
215	<i>Pes: Certinho. O que foi importante para você?</i>
216	<i>Edson: O importante foi ter a noção de dois lados. Envolve muita atenção nos pontinhos, na posição.</i>
217	<i>Pes: E o eixo de simetria, ajuda?</i>
218	<i>Edson: Sem dúvida! O eixo de simetria foi à base.</i>
219	<i>Pes: Por quê?</i>
220	<i>Edson: Porque a gente conta os pontos da direita para a esquerda, de frente para trás, de cima para baixo, tudo partindo do eixo de simetria. É a partir dele que a gente consegue fazer a imagem.</i>
221	<i>Pes: E ele ajuda só para determinar as medidas dos lados?</i>
222	<i>Edson: Para mim ele ajuda em tudo. Para comparar quando termina.</i>
223	<i>Pes: Agora coloquei outra figura aí. (Figura 6)</i>
224	<i>Edson: Esse é o eixo de simetria, certo?</i>
225	<i>Pes: Sim. E a figura?</i>
226	<i>Edson: Tá aqui.</i>
227	<i>Pes: Você consegue fazer a imagem dessa de acordo com esse eixo de simetria?</i>
228	<i>Edson: Aqui tá complicado.</i>
229	<i>Pes: O que está complicado?</i>
230	<i>Edson: A distância aqui. Não tem mais espaço. (contando o número de pinos seguindo o sentido do segmento dado). É para fazer embaixo?</i>
231	<i>Pes: É para fazer a imagem segundo esse eixo de simetria.</i>
232	<i>Edson: Mas pode ser ao lado?</i>
233	<i>Pes: Quantas imagens a gente tem usando um único espelho? Nas tarefas que você fez antes, havia outras figuras além das que você encontrou que eram imagens?</i>
234	<i>Edson: Não, então não pode (explora). Essa não pode ser feita.</i>
235	<i>Pes: Por quê?</i>
236	<i>Edson: Porque a figura tem cinco pinos e na esquerda eu só tenho quatro pinos.</i>

237	<i>Pes: Vou deixar essa figura aí e fazer outra embaixo. Você faz a imagem dela e depois conversamos sobre as duas (Figura. 7). (Insiste em prolongar o lado do triângulo sem cuidar dos ângulos).</i>
238	<i>Edson: Certo?</i>
239	<i>Pes: É a imagem? As figuras têm um lado de mesma medida, mas estão invertidas? (Figura 8). Você está sempre cuidando muito dos lados e esquecendo os ângulos.</i>
240	<i>Edson: É verdade.</i>
241	<i>Pes: Mostra para mim o ângulo formado por esse lado e o eixo de simetria (posiciona a mão do sujeito sobre o ângulo considerado).</i>
242	<i>Edson: Esse aqui.</i>
243	<i>Pes: É igual ao ângulo que você fez?</i>
244	<i>Edson: Não. (Refaz o ângulo). E agora?</i>
245	<i>Pes: O ângulo está certo, agora você tem que cuidar dos lados. (Revê os ângulos e muda a medida dos lados). Tá certo o ângulo agora?</i>
246	<i>Edson: Aparentemente tá, mas as distâncias. (Retoma os lados). E agora?</i>
247	<i>Pes: O que você acha, é a figura e sua imagem?</i>
248	<i>Edson: Aqui tá. (Aponta os lados).</i>
249	<i>Pes: Mas esse ângulo formado com o eixo de simetria é igual a esse formado aqui?</i>
250	<i>Edson: Não tá batendo. E se eu fizer assim (refaz a imagem) está certo?</i>
251	<i>Pes: Agora está certo. O que foi preciso conservar para fazer a imagem?</i>
252	<i>Edson: Os lados.</i>
253	<i>Pes: Só?</i>
254	<i>Edson: E os ângulos.</i>
255	<i>Pes: Agora volta para a figura de cima. Vê se dá para fazer a imagem?</i>
256	<i>Edson: Aí deu. (Figura 9)</i>
257	<i>Pes: Deu? Do que você cuidou para fazer essa?</i>
258	<i>Edson: Dos lados.</i>
259	<i>Pes: Dos lados para ficar com a mesma medida?</i>
260	<i>Edson: É.</i>
261	<i>Pes: E os ângulos estão iguais?</i>
262	<i>Edson: Sim.</i>
263	<i>Pes: O ângulo que a figura forma com o eixo de simetria aqui é igual a esse daqui?</i>
264	<i>Edson: O ângulo que fica depois do eixo de simetria?</i>

265	<i>Pes: É.</i>
266	<i>Edson: A então não. Então não tem como fazer mesmo.</i>
267	<i>Pes: Tem sim.</i>
268	<i>Edson: Como?</i>
269	<i>Pes: O ângulo que está aqui é um ângulo pequeno (ângulo agudo), e tem que ficar igual desse outro lado aqui.</i>
270	<i>Edson: Só se eu fizer embaixo. (Figura 10). Aqui dá. Aqui fica certo?</i>
271	<i>Pes: Quando você tem a imagem no espelho, se você encosta o dedo no espelho a sua imagem encosta o dedo no espelho também, e você tem a impressão que sua imagem encosta o dedo no seu dedo.</i>
272	<i>Edson: Sim.</i>
273	<i>Pes: Aqui o eixo de simetria é como se fosse o espelho e esse ponto aqui (ponto sobre o eixo de simetria) é como se fosse o seu dedo.</i>
274	<i>Edson: Tá errado.</i>
275	<i>Pes: Nesse triângulo aqui embaixo a imagem desse ponto coincide com o próprio ponto. Ele está sobre o eixo de simetria.</i>
276	<i>Edson: Sim.</i>
277	<i>Pes: Nessa figura de cima a imagem dessa extremidade deve coincidir também.</i>
278	<i>Edson: Certo.</i>
279	<i>Pes: Então uma extremidade está sobre o eixo e a outra onde vai ficar?</i>
280	<i>Edson: Assim não pode também, não é? Porque muda o desenho. (Fig. 11)</i>
281	<i>Pes: Muda o quê?</i>
282	<i>Edson: Muda o jeito. A imagem.</i>
283	<i>Pes: Muda a imagem? Mas você não precisa preservar a medida do ângulo e da figura?</i>
284	<i>Edson: O ângulo não fica. A medida fica.</i>
285	<i>Pes: O ângulo não fica? Me mostra.</i>
286	<i>Edson: Certo.</i>
287	<i>Pes: Verifique os ângulos, eles são diferentes?</i>
288	<i>Edson: Sim.</i>
289	<i>Pes: Por quê?</i>
290	<i>Edson: Porque um tá numa reta e o outro tá em outra (referindo-se a direção).</i>
291	<i>Pes: Então vamos discutir isso. Para ser reflexão cada ponto tem que ter sua imagem e a distância do eixo de simetria é a mesma. Certo?</i>

292	<i>Edson: Sim.</i>
293	<i>Pes: Então vamos conferir um por um. Esse ponto aqui ele e sua imagem coincidem.</i>
294	<i>Edson: Certo.</i>
295	<i>Pes: Esse ponto aqui, cadê a imagem dele?</i>
296	<i>Edson: Tá aqui.</i>
297	<i>Pes: A distância até o eixo de simetria é a mesma?</i>
298	<i>Edson: É sim.</i>
299	<i>Pes: O terceiro ponto e a imagem, a distância é a mesma?</i>
300	<i>Edson: Sim também.</i>
301	<i>Pes: E o último ponto e a imagem?</i>
302	<i>Edson: Também.</i>
303	<i>Pes: Então você acertou?</i>
304	<i>Edson: Acertei.</i>
305	<i>Pes: Vou fazer uma última figura. (Figura12)</i>
306	<i>Edson: Parece uma seta. Aqui tá o eixo de simetria. (Posiciona inicialmente o lado paralelo). Aqui tá certo?</i>
307	<i>Pes: Não. Se você me falar o que está tentando fazer eu te ajudo.</i>
308	<i>Edson: Tô tentando fazer esse lado aqui (lado paralelo).</i>
309	<i>Pes: O que você tem que cuidar para fazer a imagem da figura?</i>
310	<i>Edson: Dos lados.</i>
311	<i>Pes: A distância entre a figura e o eixo de simetria tem que ser a mesma não é?</i>
312	<i>Edson: É. (Tenta várias vezes). Essa não vai.</i>
313	<i>Pes: Nem se eu te ajudar?</i>
314	<i>Edson: Se você me ajudar vai.</i>
315	<i>Pes: Então tenta mais um pouquinho.</i>
316	<i>Edson: Aqui está certo? (Mostra os lados paralelos).</i>
317	<i>Pes: Está posicionado a mesma distância do eixo, mas e o tamanho? (Passa a cuidar da parte triangular). Acho que a sua tá muito crescida.</i>
318	<i>Edson: E agora?</i>
319	<i>Pes: Aí! Perfeita. A bandeirinha está perfeita. Você precisa cuidar agora do resto.</i>
320	<i>Edson: Certo? Agora deu né?</i>
321	<i>Pes: Deu certinho? Por que você acha que está certinho?</i>
322	<i>Edson: Porque eu olhei os pontos que você deu dica e consertei. Tá certo?</i>

323	<i>Pes: Certinho. Me fala uma coisa então agora: o que é o eixo de simetria para você?</i>
324	<i>Edson: É o que separa uma figura em duas ou em uma e a imagem.</i>
325	<i>Pes: É a reflexão aqui na nossa Matemática. O que é para você?</i>
326	<i>Edson: Pensar e analisar tudo.</i>
327	<i>Pes: Essa aqui é a figura que lhe dei, e essa é a figura refletida segundo esse eixo. Então o que você fez, foi à imagem da que eu dei por esse eixo. Então me fala da reflexão.</i>
328	<i>Edson: É a imagem da figura, do desenho.</i>
329	<i>Pes: Na sua vida, no dia-a-dia, tem figuras simétricas, eixo de simetria e reflexão? Não com esses nomes, é claro, mas aparecem esses conceitos?</i>
330	<i>Edson: Em objetos sim. Por exemplo: uma flor em cima da minha mesa, outra pessoa pode colocar igual, na mesma mesa, da mesma cor, daí pode ter o eixo de simetria. Panela.</i>
331	<i>Pes: Panela. E se ela tiver um cabo grande?</i>
332	<i>Edson: É só a outra ter também.</i>
333	<i>Pes: Onde mais?</i>
334	<i>Edson: Reflexão são imagens. Duas figuras iguais.</i>
335	<i>Pes: Isso. E suas duas orelhas são simétricas?</i>
336	<i>Edson: É (risos) totalmente.</i>
337	<i>Pes: E cadê o eixo de simetria?</i>
338	<i>Edson: Tá no meu nariz (risos).</i>
339	<i>Pes: E o que mais você tem de simétrico?</i>
340	<i>Edson: Meus braços, minhas pernas . . .</i>
341	<i>Pes: Então. E fora do corpo humano?</i>
342	<i>Edson: Não tem.</i>
343	<i>Pes: Como você dobra suas calças?</i>
344	<i>Edson: Ah tá! Tem eixo de simetria na calça, na camisa, no blusão. . . em tudo tem.</i>
345	<i>Pes: Sai da roupa. Onde mais? Você percebeu quantas coisas estamos conseguindo falar?</i>
346	<i>Edson: Vi, mas acho que agora não tem mais não.</i>
347	<i>Pes: Não? Como você dobra seu cobertor?</i>
348	<i>Edson: Em dois.</i>
349	<i>Pes: Põe ponta com ponta?</i>

FIGURAS

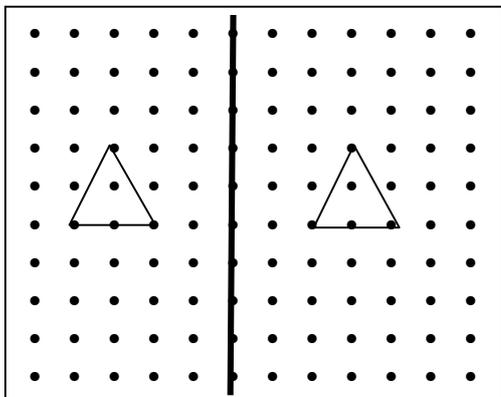


Figura 1

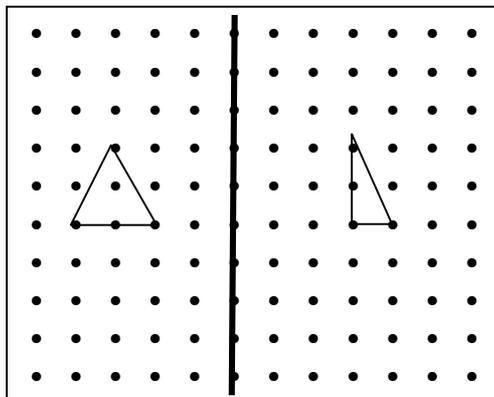


Figura 2

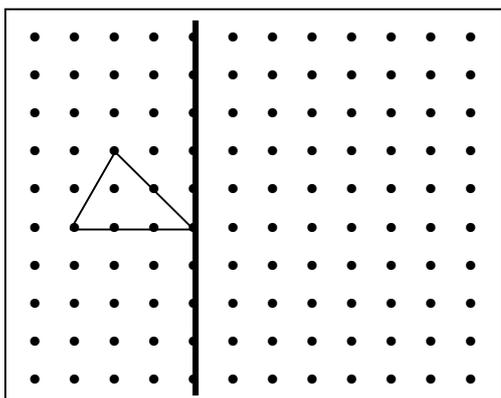


Figura 3

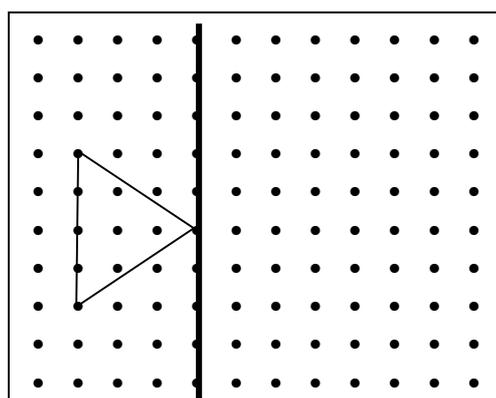


Figura 4

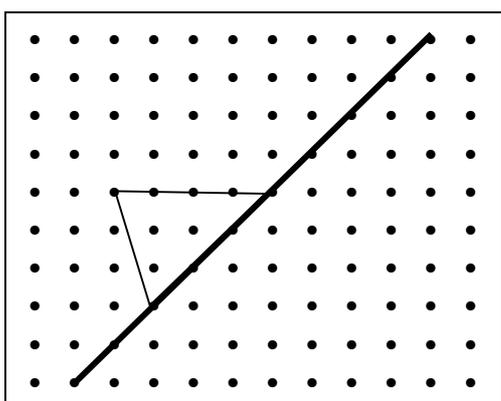


Figura 5

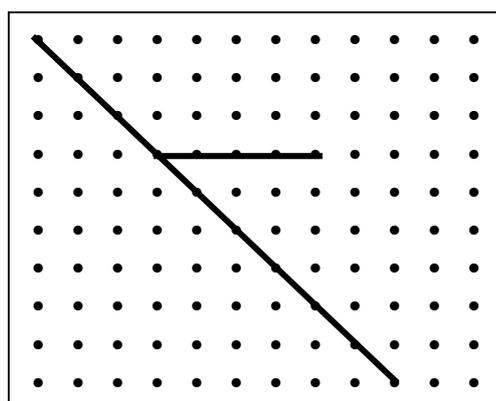


Figura 6

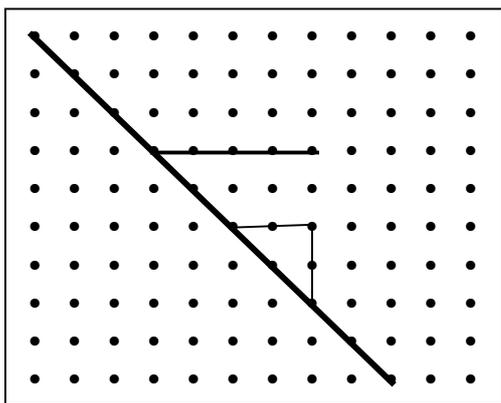


Figura 7

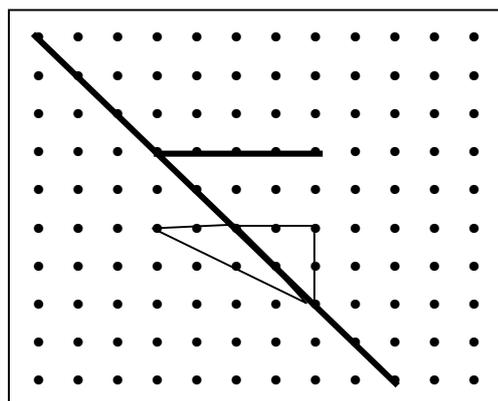


Figura 8

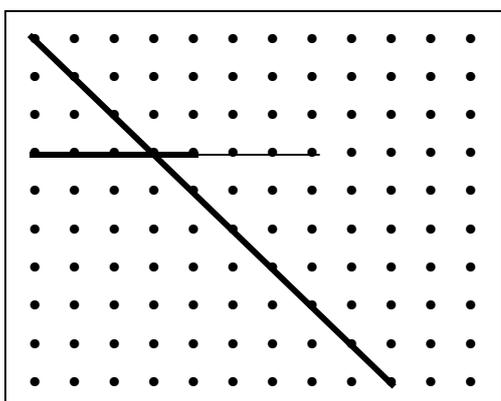


Figura 9

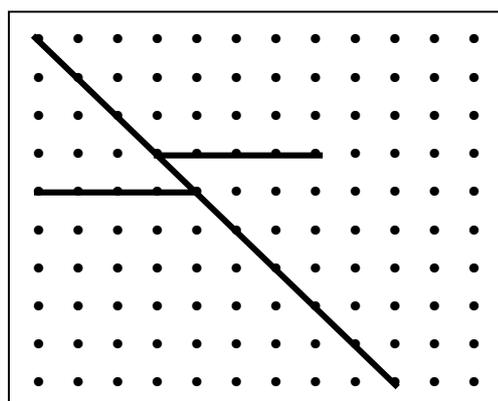


Figura 10

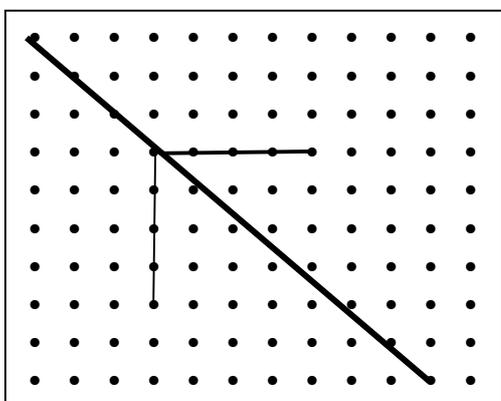


Figura 11

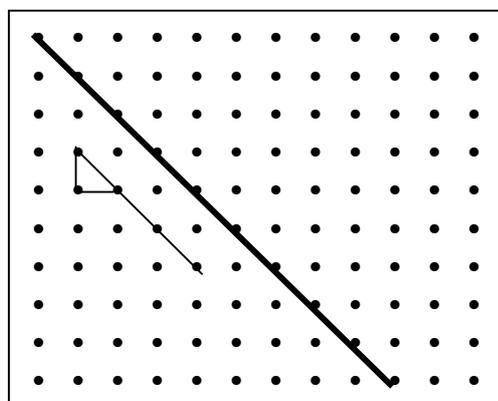


Figura 12

3ª intervenção

Intervenção realizada no dia 3 de julho de 2003.

1	<i>Pes: Você lembra o que estudamos no último encontro?</i>
2	<i>Edson: Um pouco.</i>
3	<i>Pes: Um pouco o que? Palavras?</i>

4	<i>Edson: Palavras eu lembro. E formas que nós fizemos.</i>
5	<i>Pes: E alguma coisa do que a gente discutiu, você lembra?</i>
6	<i>Edson: Nós discutimos como eu estava fazendo as atividades. Você pedia para eu explicar.</i>
7	<i>Pes: Eixo de simetria, por exemplo, lembra?</i>
8	<i>Edson: Sim, foi o que a gente estudou.</i>
9	<i>Pes: Discutimos algumas figuras que tinham eixo de simetria. O que é eixo de simetria então?</i>
10	<i>Edson Eixo de simetria é o que divide em duas figuras idênticas.</i>
11	<i>Pes: Você lembra o que falamos sobre figuras simétricas?</i>
12	<i>Edson: Aquelas no papel que você me deu?</i>
13	<i>Pes: Sim.</i>
14	<i>Edson: Transformar numa simetria.</i>
15	<i>Pes: Quando uma figura é simétrica?</i>
16	<i>Edson: Quando os dois lados são idênticos, ou seja, se eu dobrar a figura fica igual.</i>
17	<i>Pes: E como chama essa dobra?</i>
18	<i>Edson: Eixo de simetria.</i>
19	<i>Pes: Isso. Depois nós falamos de reflexão, lembra? O que é reflexão?</i>
20	<i>Edson: É pensar. É desenhar alguma coisa na cabeça. Imaginar. Como você deu o exemplo do espelho. Eu me olhando no espelho. Eu criei uma imagem de mim.</i>
21	<i>Pes: Hoje nossas figuras serão segmentos. Ai na ferramenta tem um segmento e um eixo de simetria (Fig. 1).</i>
22	<i>Edson: Tá só o eixo e falta o outro lado aqui. (aponta para o semi plano inferior).</i>
23	<i>Pes: Eu coloquei a figura na parte de cima.</i>
24	<i>Edson: Sim.</i>
25	<i>Pes: É só isso a figura, nos vamos trabalhar com segmentos hoje. Esse é o seu segmento, sua figura. O eixo de simetria é como se fosse o espelho e você vai fazer a reflexão desse segmento.</i>
26	<i>Edson: Aqui? (Aponta o semiplano inferior) Vou mostrar pra você. (Coloca um elástico numa das extremidades do segmento de modo que esse elástico fique perpendicular ao eixo de simetria. Conta os pinos – pontos – entre essa extremidade e o eixo de simetria e reproduz a distância a partir do eixo de simetria no semiplano</i>

	inferior. A partir do ponto simétrico determinado reposiciona o elástico para construir o segmento solicitado. Faz a verificação contando os pinos que formam o segmento e a equidistância entre o segmento dado e sua imagem). <i>Pronto.</i>
27	<i>Pes: Então agora você vai me contar tudo. Vou lhe fazer algumas perguntas mais diretas. Como você tem certeza que esse que você construiu é a imagem do que eu dei.</i>
28	<i>Edson: Eu contei 1, 2 (pinos a partir de uma das extremidades do segmento dado até o eixo de simetria), depois eu comparei: um ponto livre depois vem o eixo de simetria. Depois eu usei o elástico (posicionado na perpendicular) deixei um ponto vazio e fiz a mesma comparação aqui (semi plano inferior). Depois do eixo de simetria vem um ponto vazio. Coloquei o elástico e fiz o segmento. Contei três pontos entre o início do segmento e o fim e fiz da mesma forma aqui (imagem).</i>
29	<i>Pes: Mas quando você começou, você usou um elástico para colocar no início do segmento que eu fiz para posicionar o início da imagem. Por que você fez isso?</i>
30	<i>Edson: Para medir.</i>
31	<i>Pes: E por que você pôs tão reto (perpendicular) e não inclinado?</i>
32	<i>Edson: Porque perdia o sentido do segmento.</i>
33	<i>Pes: E como tem que ser então a figura e a imagem dela?</i>
34	<i>Edson: Iguais.</i>
35	<i>Pes: Iguais, mas isso que você usou de alinhar para achar o outro ponto. . .</i>
36	<i>Edson: Eu usei um exemplo meio louco. Eu fiz como se tivesse trabalhando com um espelho, e eu tentei medir a distância, a mesma distância.</i>
37	<i>Pes: Essa reta que você traçou é chamada reta perpendicular.</i>
38	<i>Edson: Perpendicular.</i>
39	<i>Pes: E você tem toda razão. Cada um dos pontos. . . vou te mostrar, cada um dos pontos que estão aqui, esse e esse, esse e esse . . . (posiciona os dedos do sujeito em cada um dos pontos do segmento e seu ponto simétrico) Saindo de um, chegamos ao eixo de simetria e na mesma perpendicular encontramos o outro. À distância entre eles sempre medimos na perpendicular. O que você fez foi perfeito. Vou fazer outra figura então (Fig. 2).</i>

40	<i>Edson: (Faz a exploração tátil e encontra o eixo de simetria e o segmento. Na primeira tentativa posiciona a “imagem” conforme a figura 3. Não satisfeito continua tentando)</i>
41	<i>Pes: O que está te atrapalhando?</i>
42	<i>Edson: Essa distância aqui (entre a extremidade inferior do segmento e o seu simétrico).</i>
43	<i>Pes: Essa está perfeita.</i>
44	<i>Edson: Tá igual a essa.</i>
45	<i>Pes: Ai tá. Agora você tem que pensar nos outros pontos. A distância entre todos os outros pontos também tem que ser a mesma. Esse aqui é o primeiro ponto e você colocou a imagem dele aqui. Tá perfeito. Agora acha a imagem do seguinte. Você lembra quantas vezes você falou no outro encontro que a distância tinha que ser a mesma?</i>
46	<i>Edson: Sim. (Insiste na mesma resposta).</i>
47	<i>Pes: Tá feito?</i>
48	<i>Edson: Sim.</i>
49	<i>Pes: Então vamos falar de imagem. Qual é a imagem desse ponto aqui? (indica a extremidade inferior do segmento)</i>
50	<i>Edson: É esse aqui. (Indica a outra extremidade do segmento dado).</i>
51	<i>Pes: Não. A imagem deve estar do outro lado do eixo de simetria.</i>
52	<i>Edson: É esse aqui.</i>
53	<i>Pes: A imagem desse aqui é esse aqui (mostra o ponto e seu simétrico). O ponto e sua imagem ficam a mesma distância do eixo de simetria.</i>
54	<i>Edson: Sim.</i>
55	<i>Pes: Agora mostra a imagem desse. (segundo ponto do segmento representado na ferramenta a partir da extremidade inferior).</i>
56	<i>Edson: É esse aqui (mostra o segundo ponto da construção que fez).</i>
57	<i>Pes: Mas está a mesma distância do eixo de simetria?</i>
58	<i>Edson: Tá sim (avalia a distância do ponto “imagem” na perpendicular ao eixo de simetria).</i>
59	<i>Pes: Na primeira atividade você colocou um elástico para medir a distância o que eu chamei de perpendicular.</i>
60	<i>Edson: Sim. Desta vez eu achei um pouco fácil e posicionei assim.</i>
61	<i>Pes: Por que você acha que essa é a imagem?</i>
62	<i>Edson: Porque está idêntica (continua a exploração tátil). E se eu falar</i>

	<i>para você que eu errei? (Refaz a atividade com êxito). Agora sim. Tá certo.</i>
63	<i>Pes: E por que está certo?.</i>
64	<i>Edson: Porque é uma reta (refere-se ao segmento dado e imagem estarem na mesma reta).</i>
65	<i>Pes: É, e agora eles são perpendiculares ao eixo de simetria.</i>
66	<i>Edson: Por isso que eu estava achando distante. Eu estava colocando para o lado o segmento. Tava maior, agora tá certo.</i>
67	<i>Pes: E agora você percebe a distância entre cada um dos pontos e o eixo de simetria?</i>
68	<i>Edson: Agora sim.</i>
69	<i>Pes: Agora vou fazer outro (Fig. 4). (Começa a posicionar elásticos perpendicularmente ao eixo de simetria para medir a distância entre cada um dos pontos e seu simétrico. A cada elástico posicionado confere a distância entre os pontos e o eixo de simetria) (Fig.5). Vai me contando o que você está fazendo.</i>
70	<i>Edson: Eu tô contando (os pinos). Eu tô medindo já fazendo de uma vez, por isso que eu estou usando vários elásticos. Quando eu terminar já vou ter a forma feita desse outro lado aqui, sem precisar calcular. Tô procurando um atalho. Tô procurando um caminho mais fácil.</i>
71	<i>Pes: Ficou mais fácil mesmo. Você usou um caminho muito bom. (executa a tarefa com êxito).</i>
72	<i>Edson: Certo.</i>
73	<i>Pes: Certinho. Já que você descobriu uma estratégia boa para fazer as tarefas eu vou mudar a posição do eixo de simetria, mas não vou mudar o tipo de figura.</i>
74	<i>Edson: Esse é um caminho certo?</i>
75	<i>Pes: Muito bom esse caminho. Caminho certo é o que leva a gente a acertar, você sabe. (Risos). Agora eu coloquei a figura a sua esquerda e o eixo de simetria na vertical (Fig.6).</i>
76	<i>Edson: Na vertical.</i>
77	<i>Pes: Isso. (Continua usando a mesma estratégia – elásticos na perpendicular).</i>
78	<i>Edson: Tá na reta aqui, né? (elástico perpendicular ao eixo de simetria e paralelo a base da ferramenta).</i>
79	<i>Pes: Não, tá inclinado. (Refaz).</i>
80	<i>Edson: Agora tá uma reta, certo?</i>

81	<i>Pes: Sim.</i>
82	<i>Edson: Tá me faltando atenção no senso da direção, mas a lógica do negócio tá tudo bem. (O sujeito coloca os elásticos perpendicularmente ao eixo de simetria passando pelas duas extremidades do segmento, mas de uma extremidade a outra da ferramenta. Ao posicionar o “simétrico” do segmento dado preserva a distância de fora para dentro – contando pinos – da ferramenta que por ser retangular não favorece na formação da imagem – fig 7). Tá certo?</i>
83	<i>Pes: você tem que me convencer que está certo. Essa é a imagem do segmento que eu te dei?</i>
84	<i>Edson: Sim.</i>
85	<i>Pes: O que deve ficar preservado?</i>
86	<i>Edson: A distância entre o eixo de simetria e a figura e a imagem e o eixo de simetria e o tamanho da figura.</i>
87	<i>Pes: E está certa a distância aí? Como você determinou a distância?</i>
88	<i>Edson: Vou avaliar. (Conta os pinos e fica confuso com a diferença entre as distâncias: eixo de simetria – figuras e figuras – bordas da ferramenta). Tá estranho.</i>
89	<i>Pes: Como é que você está contando essas distâncias?</i>
90	<i>Edson: Tô fazendo assim: 1, 2, 3, 4 (contando de fora para dentro da ferramenta). Em termos de distância acho que tá certo (das bordas da ferramenta para os segmentos), mas aqui não está (entre os segmentos e o eixo de simetria). Não tem importância ficar diferente aqui? (Distância entre os segmentos e as bordas da ferramenta).</i>
91	<i>Pes: Não. A ferramenta não é quadrada.</i>
92	<i>Edson: Eu não tenho que me basear no quadrado.</i>
93	<i>Pes: Não. A ferramenta é retangular.</i>
94	<i>Edson: Eu me baseei por aqui (dimensões da ferramenta. Refaz com sucesso)</i>
95	<i>Pes: A sua preocupação deve ser a figura e o eixo de simetria.</i>
96	<i>Edson: Tranquilo.</i>
97	<i>Pes: A ferramenta é como se fosse o papel. Você pode desenhar em qualquer lugar do papel, não é?</i>
98	<i>Edson: Certinho. Entendi. Isso era uma dúvida.</i>
99	<i>Pes: Você percebeu que aquela estratégia que você usou quando o eixo de simetria estava na horizontal também serve aqui.</i>

100	<i>Edson: Certo.</i>
101	<i>Pes: A distância entre cada um dos pontos e sua imagem sempre pode ser contada na perpendicular, sempre por uma “linha reta”. Agora vou mudar a posição do eixo de simetria (Fig. 8). Olha como está o seu eixo de simetria.</i>
102	<i>Edson: (Explora) Certo.</i>
103	<i>Pes: E essa é a sua figura. (Fig. 9) (O sujeito usa um elástico auxiliar e a partir de uma das extremidades do segmento dado o posiciona perpendicularmente ao eixo de simetria - Fig. 10 – conservando a distância segmento – eixo de simetria – imagem).</i>
104	<i>Edson: Ou seja, esse é um ponto bom (apontando para o ponto imagem que determinou).</i>
105	<i>Pes: Muito bom. (A partir do ponto imagem da extremidade escolhida conta os pinos – medida do segmento dado – e faz o segmento imagem paralelo ao eixo de simetria).</i>
106	<i>Edson: Pronto. Foi.</i>
107	<i>Pes: Tá certo.</i>
108	<i>Edson: (Retira o elástico auxiliar) Agora tá melhor.</i>
109	<i>Pes: Perfeito. Agora vamos fazer o seguinte. Faz de conta que eu estou conversando com você ao telefone. Eu digo para você: eu estou aqui com aquela ferramenta que nós usamos outro dia, e tem nela um eixo de simetria e uma figura para eu fazer a imagem. Será que você pode me explicar como eu faço essa imagem?</i>
110	<i>Edson: Sim, sim. Eu posso fazer o que eu quiser?</i>
111	<i>Pes: Pode (começa a usar a ferramenta como apoio para orientar o diálogo).</i>
112	<i>Edson: Horizontal é assim né?</i>
113	<i>Pes: É, mas dependendo da posição que a ferramenta está, por exemplo se eu coloco a ferramenta assim (posiciona a ferramenta de modo que o elástico fique na vertical em relação ao sujeito) está na vertical, mas se eu virar assim (gira a ferramenta deixando o elástico na horizontal em relação ao sujeito) tá na horizontal. Você tem que me ensinar um jeito independente da posição do eixo de simetria, na horizontal, vertical, inclinado. . .</i>
114	<i>Edson: Mas qual o padrão do quadrado? É esse?</i>
115	<i>Pes: A ferramenta é essa. Como você me explica para eu fazer a figura</i>

	<i>independente da posição do eixo de simetria e independente da figura. Você usou a mesma estratégia em todas as construções que você fez, independente da posição.</i>
116	<i>Edson: Certo. Então independente da posição vamos colocar o eixo de simetria de baixo para cima, uma reta (simulando na ferramenta).</i>
117	<i>Pes: Não. O eixo de simetria está pronto e a figura também. Você tem que me explicar como eu faço a imagem da figura.</i>
118	<i>Edson: A figura está pronta? Sou eu que vou fazer a figura?</i>
119	<i>Pes: Não. A figura é qualquer, sua explicação tem que valer para qualquer situação.</i>
120	<i>Edson: Ah tá! Eu tenho que lhe explicar como fazer.</i>
121	<i>Pes: É. Como você me explica falando ao telefone para eu ir fazendo?</i>
122	<i>Edson: Ah tá! Você vai contar os pontos do eixo de simetria até o segmento né, a figura (coloca na ferramenta um eixo de simetria e um segmento – Fig. 11).</i>
123	<i>Pes: Então tá bom. Eu conto retinho ou inclinado?</i>
124	<i>Edson: Você se baseia na figura que está feita. Se ela for uma reta. . . um segmento. . . um segmento de reta, de baixo para cima (da ferramenta) você conta os pontos que fazem você chegar ao eixo de simetria. Vamos supor que temos . . . ai. . . (conta os pontos da borda superior da ferramenta ao segmento posicionado).</i>
125	<i>Pes: Tem que valer para qualquer figura.</i>
126	<i>Edson: Certo, mas eu posso me basear nessa?</i>
127	<i>Pes: Pode.</i>
128	<i>Edson: Primeiro eu conto o início da reta (segmento dado) que eu tenho até o fim (do segmento dado) quantos pontinhos tem dentro, que estão livres, que estão . . . que estão dentro. Temos 1, 2, 3 pontos, ou seja, de uma ponta a outra são cinco. Eu vou contar quantos pontinhos eu tenho da reta (segmento dado) ao eixo de simetria. Vamos supor que (usa um elástico auxiliar que posiciona na perpendicular entre uma extremidade do segmento e o eixo de simetria) só exemplo. Vamos supor que temos dois pontinhos dentro (fig 12). Você pega o elástico e mede temos dois pontinhos dentro. . . e . . .</i>
129	<i>Pes: Entre a figura e o eixo de simetria?</i>
130	<i>Edson: Isso, entre a figura e o eixo de simetria. O que vou fazer? Vou me basear nessa distância e vou fazer o outro lado (mantém uma das</i>

	<p>extremidades do elástico auxiliar fixo no eixo de simetria e gira a outra extremidade de modo a posicioná-la também perpendicularmente ao eixo de simetria). <i>Vou contar quantos pontinhos tinha dentro me baseio para fazer à mesma distância e assim tendo essa base eu construo a minha figura mesmo (imagem). (Termina a construção). Se eu estiver achando um pouco complicado, o que posso fazer? Pego outro elástico, vou para o outro lado (outra extremidade do segmento) faço. . . Faço um resultado mais óbvio. Coloco aqui (posiciona outro elástico na perpendicular e atravessando o eixo de simetria e conservando a distância entre a extremidade considerada, o eixo de simetria e a sua imagem - Fig. 13).</i></p>
131	<p><i>Pes: Mas como você vai justificar a posição desse elástico que você está colocando?</i></p>
132	<p><i>Edson: Então eu vou pegar. . . Como eu já contei aqui na figura feita, eu tenho 3 pontinhos dentro tanto pode ser do início como no ponto final, o primeiro ou o último da figura, numa ponta ou na outra. Conto quantos pontinhos temos até o eixo de simetria 1, 2 o terceiro já é o eixo de simetria. Depois do eixo de simetria eu conto 1, 2 vou até o terceiro, solto a ponta da figura feita e vou para o outro lado e faço a figura.</i></p>
133	<p><i>Pes: Sua imagem.</i></p>
134	<p><i>Edson: Ou seja, sua imagem.</i></p>
135	<p><i>Pes: Agora nós vamos fazer uma coisa diferente. Eu vou construir a figura e a imagem e você vai por o eixo de simetria.</i></p>
136	<p><i>Edson: Certo.</i></p>
137	<p><i>Pes: Você entendeu o seu papel?</i></p>
138	<p><i>Edson: Identificar o eixo de simetria e as figuras.</i></p>
139	<p><i>Pes: Isso (Fig. 14).</i></p>
140	<p><i>Edson: (Exploração tátil) Nunca o eixo de simetria pode cruzar as figuras. Tem que ser sempre no meio.</i></p>
141	<p><i>Pes: Temos que ter a figura e a imagem</i></p>
142	<p><i>Edson: Separados.</i></p>
143	<p><i>Pes: Estamos fazendo reflexão (posiciona um elástico de acordo com a figura 15).</i></p>
144	<p><i>Edson: O eixo de simetria tem que ser um pouco maior, menor ou do mesmo tamanho da figura?</i></p>
145	<p><i>Pes: O eixo de simetria é uma reta. O que estamos representando é uma parte dele, não importa o tamanho que você vai colocar. Ai ele pode</i></p>

	<i>ter qualquer tamanho.</i>
146	<i>Edson: Pronto (posiciona o elástico que representa o eixo de simetria com sucesso).</i>
147	<i>Pes: Muito bom. E por que você colocou esse elástico ai no meio?</i>
148	<i>Edson: Esse elástico no meio foi para dividir os pontos que ficam entre uma figura e a outra.</i>
149	<i>Pes: E o que é que você fez então? O que você procurou para determinar o lugar do eixo de simetria?</i>
150	<i>Edson: Identificar os desenhos, a figura e a imagem no caso. E contei, porque pelo que eu percebo ele tem que estar sempre no meio tanto de um lado como do outro, tem que ser iguais, exatos. Assim é a Matemática.</i>
151	<i>Pes: É assim a Matemática (risos).</i>
152	<i>Edson: Então de um lado para o outro tinham 5 pontinhos eu fui até o meio , no 3, o exato, o mais adequado, ou seja 2 para um lado e dois para o outro.</i>
153	<i>Pes: Vou fazer outro. Posso?</i>
154	<i>Edson: Pode.</i>
155	<i>Pes: Vou fazer outra figura e imagem e você vai por o eixo de simetria novamente (Fig. 16).</i>
156	<i>Edson: Hoje eu estou melhor.</i>
157	<i>Pes: Muito melhor.</i>
158	<i>Edson: Probabilidade é fácil?</i>
159	<i>Pes: Eu acho!</i>
160	<i>Edson: Tem que fazer probabilidade aqui?</i>
161	<i>Pes: Não. Por quê? Entre a figura e a imagem tem mais do que um eixo de simetria?</i>
162	<i>Edson: Não.</i>
163	<i>Pes: O eixo de simetria é único, não é?</i>
164	<i>Edson: Sim, tem um eixo de simetria específico.</i>
165	<i>Pes: Você está fazendo reflexão, não é?</i>
166	<i>Edson: Isso. Como você citou as pontas (bordas da ferramenta) não alteram. Isso é bom para a gente perceber que o quadrado em si (ferramenta) não tem nada a ver com as figuras.</i>
167	<i>Pes: Exato.</i>
168	<i>Edson: Não é? Vou te ensinar de um jeito que você pode se basear, mas se você quiser fazer uma prova você pode deixar isso acontecer. Vamos lá.</i>

	<p><i>De uma ponta a outra temos dentro do segmento 1, 2, 3 pontos. Pega os três pontinhos que estão aqui (posiciona um elástico em três dos pontos) e usamos o outro segmento da mesma forma (Fig. 17). Por que estou dizendo que isso não é recomendável fazer, a menos que você realmente esteja disposto a entender? Porque aqui vamos criar o eixo de simetria. Contamos agora a distância entre uma figura e outra, 1, 2, 3, 4, 5, também temos cinco (medida do segmento), interessante isso. É como se fosse rascunho. Agora vamos fazer o principal para identificar o eixo de simetria. Contamos 1, 2 do outro lado da mesma forma 1, 2 (posiciona o elástico) e fazemos uma linha reta. O eixo de simetria é uma reta (executa a tarefa com sucesso). Tira esses daqui (elásticos auxiliares) que eu usei só para me ajudar. Certo.</i></p>
169	<p><i>Pes: Certo. Agora vamos fazer uma coisa diferente. Nós fizemos figuras no encontro anterior, nesse, nós trabalhamos com segmentos e agora vamos trabalhar com pontos, que eu vou representar com massinha escolar. Lembra?</i></p>
170	<p><i>Edson: Lembro.</i></p>
171	<p><i>Pes: Um eu vou colocar, e o outro você vai colocar como imagem. Fiz o eixo de simetria e coloquei o ponto. Dá sua mão, olha aqui o eixo de simetria e o ponto. Vou te dar uma “bolinha” (que representa o ponto) e você vai achar a imagem desse que eu coloquei (Fig. 18).</i></p>
172	<p><i>Edson: Achar a imagem. Vou criar outra.</i></p>
173	<p><i>Pes: Esse é o meu, você vai fazer a imagem desse.</i></p>
174	<p><i>Edson: Da mesma forma né? (conta pontos na perpendicular) Tá certo? (executa com sucesso).</i></p>
175	<p><i>Pes: Tá perfeito. Tá certinho. Foi difícil fazer com ponto?</i></p>
176	<p><i>Edson: Foi legal.</i></p>
177	<p><i>Pes: Agora vou mudar. Aqui está o ponto (coloca a mão do sujeito sobre a “bolinha” que representa o ponto) e aqui tá a “bolinha” para você colocar no lugar da imagem (Fig. 19).</i></p>
178	<p><i>Edson: Certo (executa a tarefa com rapidez contando os pontos na perpendicular).</i></p>
179	<p><i>Pes: Vou mudar de novo. Não vou me preocupar com a dificuldade porque você já sabe tudo (Fig. 20).</i></p>
180	<p><i>Edson: 1, 2, 3, 4 (contando pontos na borda da ferramenta).</i></p>

181	<i>Pes: Olha onde está seu eixo de simetria. Se você for pôr elásticos você vai por esses elásticos onde?</i>
182	<i>Edson: 1, 2, 3 (conta pinos do ponto ao eixo de simetria seguindo uma reta horizontal).</i>
183	<i>Pes: Volta para o elástico como você estava fazendo. Se você tiver que pôr elásticos auxiliares você vai colocar onde? Tem que chegar ao eixo de simetria.</i>
184	<i>Edson: Esse aqui é o eixo de simetria.</i>
185	<i>Pes: Sim (conta o número de pontos ocupados pelo elástico que representa o eixo de simetria).</i>
186	<i>Edson: Nesse daqui a imagem vai ser uma reta, certo?</i>
187	<i>Pes: Não, é um ponto.</i>
188	<i>Edson: Vai ter que ser um ponto?</i>
189	<i>Pes: Você não tem que medir a distância entre o ponto e o eixo de simetria?</i>
190	<i>Edson: Sim. 1, 2, 3 (conta verticalmente do ponto para a borda inferior da ferramenta).</i>
191	<i>Pes: Você falou para mim que não é assim. Senão você pode contar assim, pode contar assim (posicionando a mão do sujeito em diversas direções a partir do ponto considerado), pode contar de qualquer jeito. Como você fez para saber onde está a imagem? Você falou para mim que a imagem é única. (Volta a usar um elástico auxiliar para encontrar a perpendicular ao eixo de simetria. Tem dificuldade para determinar a imagem e a pesquisadora volta a intervir). A perpendicular que você está procurando tem que formar um ângulo de 90° com o eixo de simetria.</i>
192	<i>Edson: Aqui tá uma reta, né? (Fig. 21)</i>
193	<i>Pes: Mas está formando um ângulo de 90° com o eixo de simetria?</i>
194	<i>Edson: Não. (Volta a contar pontos do eixo de simetria).</i>
195	<i>Pes: Você já fez um parecido com esse, com o eixo de simetria inclinado assim. (Posiciona um elástico auxiliar numa perpendicular ao eixo de simetria a partir do ponto considerado).</i>
196	<i>Edson: Aqui tá reto, certo?</i>
197	<i>Pes: Tá (executa a tarefa com sucesso).</i>
198	<i>Edson: Certo.</i>
199	<i>Pes: Perfeito. E agora como você me ensinaria a fazer isso pelo telefone?</i>

200	<i>Edson: Conta os pontos que estão dentro do eixo de simetria, entre uma ponta e outra. São cinco vai ao meio dos cinco certo? E você pega um ponto e conta quantos tem dentro (entre o eixo de simetria e o ponto). Tem um, posiciona então a imagem deixando um também do outro lado.</i>
201	<i>Pes: Agora vou te fazer uma pergunta então. Se ao invés de estar onde estava eu colocar aqui então (Fig. 22) como é que você vai fazer então?</i>
202	<i>Edson: 1, 2, 3, 4, 5 (conta novamente os pontos entre as extremidades do eixo de simetria). Da mesma forma deu 5, né? Vou voltar um pouco para traz e fazer uma reta (perpendicular) no 2. Certo?</i>
203	<i>Pes: Põe ele no lugar.</i>
204	<i>Edson: Pronto. (Executa a tarefa com êxito).</i>
205	<i>Pes: Certo, mas agora não deu certo aquele negócio de contar até o meio do eixo de simetria.</i>
206	<i>Edson: Não, porque esse (ponto) não está no meio (do eixo de simetria).</i>
207	<i>Pes: E nesse que não dá para usar o meio, como é que se faz?</i>
208	<i>Edson: Nesse que não dá para usar o meio eu contei até o 2 e fiz essa reta (perpendicular) para fazer a imagem.</i>
209	<i>Pes: Essa reta que você está sempre procurando é o que chamamos de perpendicular. Quando você vai medir a distância entre duas coisas . . .</i>
210	<i>Edson: Nós procuramos a perpendicular.</i>
211	<i>Pes: Isso. Para medir a distância entre duas coisas sempre procuramos o menor caminho. Vamos fazer mais um de pontos (Fig. 23). Nesse você vai posicionar o eixo de simetria.</i>
212	<i>Edson: (Usa uma reta que passa pelos dois pontos, considera a perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento formado pelos dois pontos). Conteí e posicionei.</i>
213	<i>Pes: Agora ficou muito simples. O que você pode falar para mim agora sobre o eixo de simetria?</i>
214	<i>Edson: No início parecia difícil, mas depois se tornou fácil.</i>
215	<i>Pes: Como você explicaria para outra pessoa o que é o eixo de simetria?</i>
216	<i>Edson: Eixo de simetria é o que fica no meio de duas imagens.</i>
217	<i>Pes: Duas imagens?</i>
218	<i>Edson: Duas figuras, ou seja, eu vou ter uma figura feita e vou ter que fazer a outra figura para que o eixo de simetria seja identificado tendo a mesma distância dos dois lados. Isso me baseando no eixo de simetria.</i>

	<i>Como está aí (mostra a distância preservada na última tarefa executada na ferramenta).</i>
219	<i>Pes: Agora, e reflexão na Matemática, você chegou a alguma conclusão?</i>
220	<i>Edson: Na Matemática. A Matemática é exata.</i>
221	<i>Pes: O que estamos fazendo é reflexão. Estamos determinando a imagem desse ponto segundo esse eixo de simetria (posiciona a mão do sujeito sobre o ponto e o eixo de simetria).</i>
222	<i>Edson: Sim. Isso é reflexão, porque eu tenho que me basear, analisar, . . . quanto eu tenho de distância da figura até o eixo de simetria para depois me basear do eixo de simetria para a figura que vou fazer preservando a distância. Para fazer a perpendicular para fazer a figura.</i>
223	<i>Pes: A imagem?</i>
224	<i>Edson: A imagem. Isso.</i>
225	<i>Pes: Todo esse processo que você descreveu é chamado de reflexão. Então reflexão na Matemática é construir a imagem de uma figura segundo um eixo de simetria. Criar uma duplicata, como a imagem num espelho plano, e por ser imagem num espelho, ela tem que conservar a distância e as medidas da figura. E o que mais você percebeu hoje?</i>
226	<i>Edson: Não é muito fácil, precisa ter bastante atenção.</i>

FIGURAS

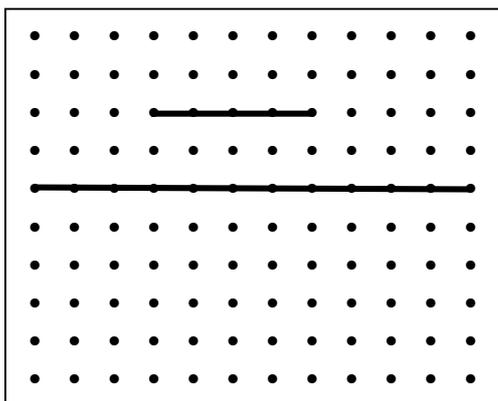


Figura 1

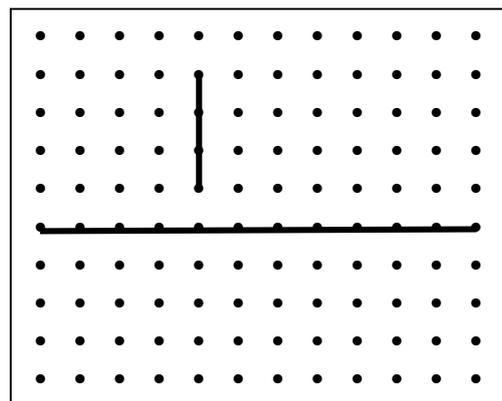


Figura 2

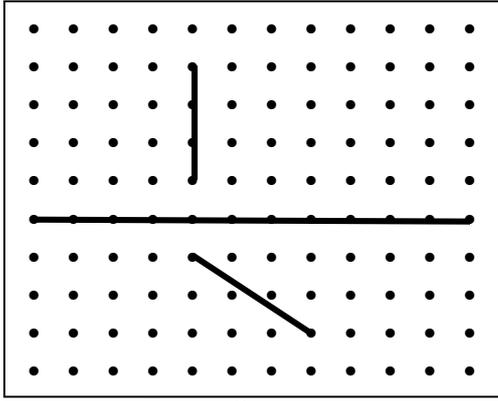


Figura 3

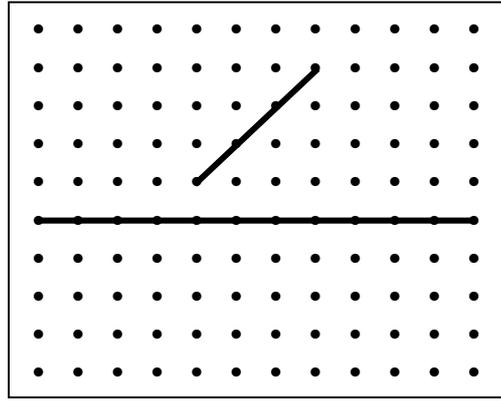


Figura 4

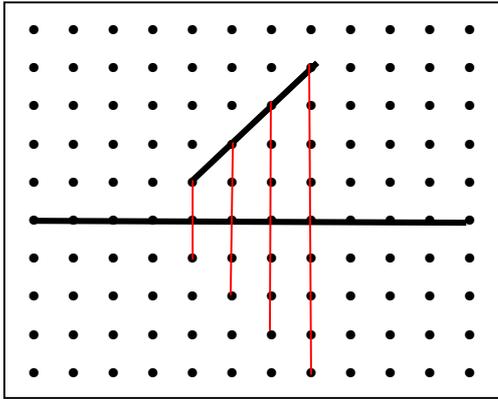


Figura 5

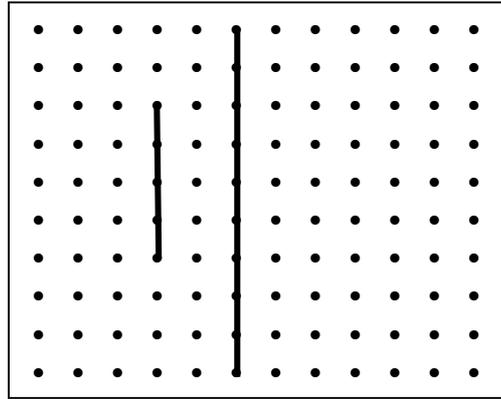


Figura 6

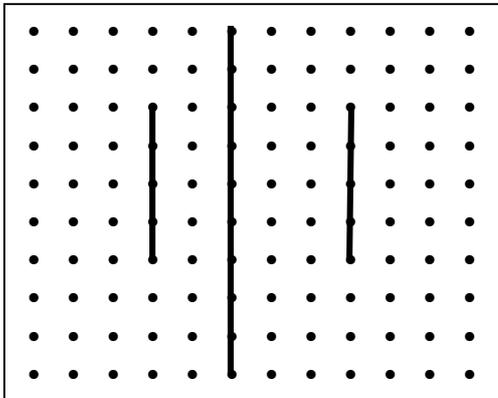


Figura 7

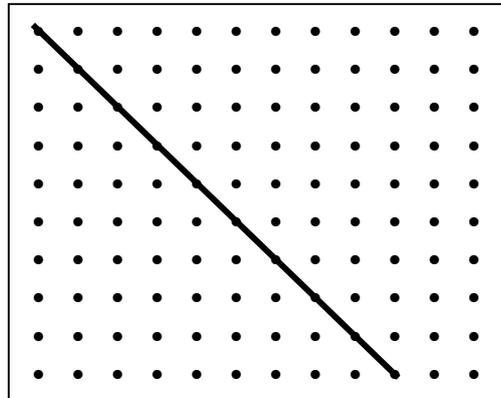


Figura 8

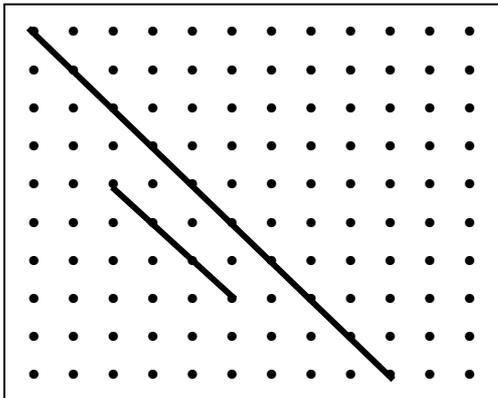


Figura 9

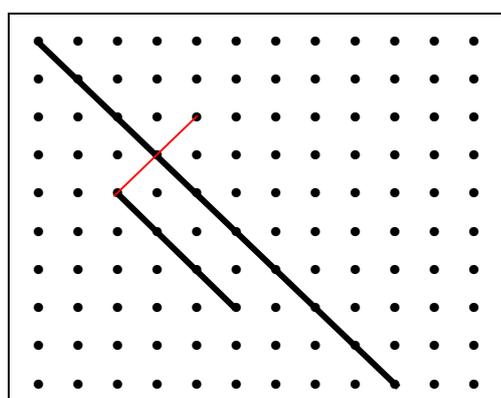


Figura 10

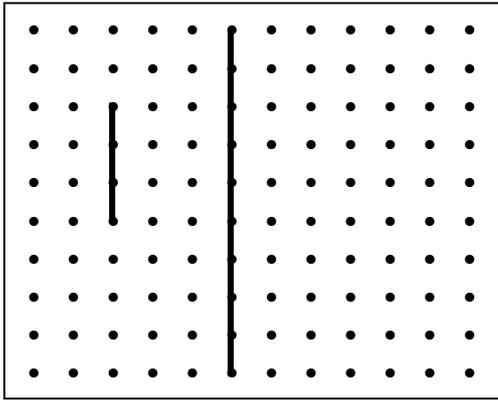


Figura 11

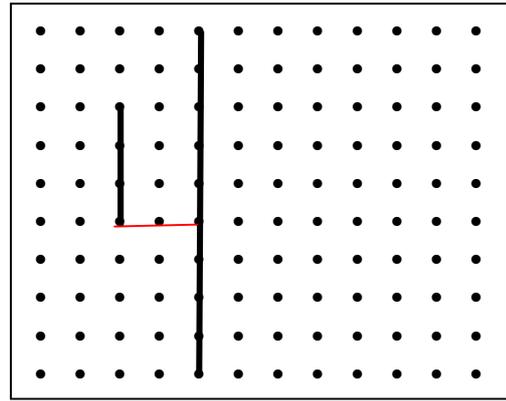


Figura 12

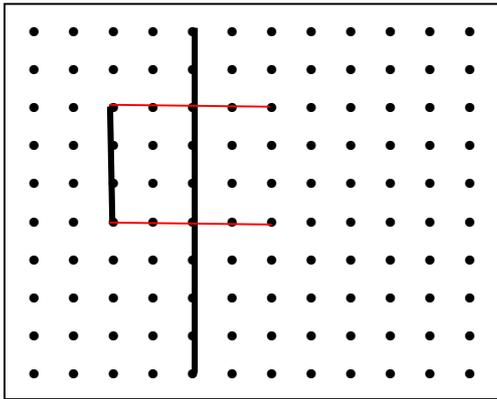


Figura 13

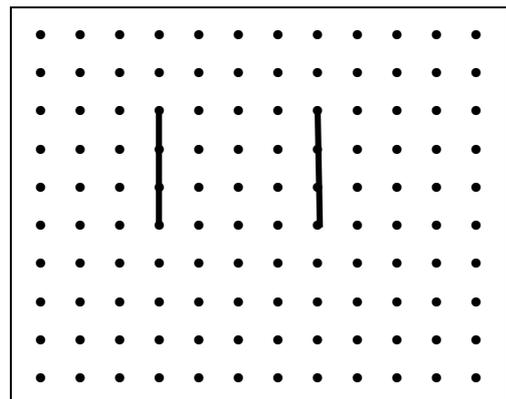


Figura 14

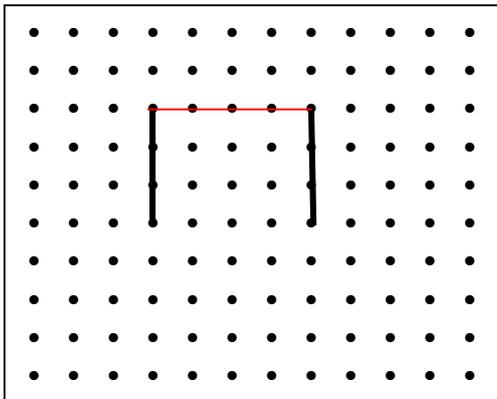


Figura 15

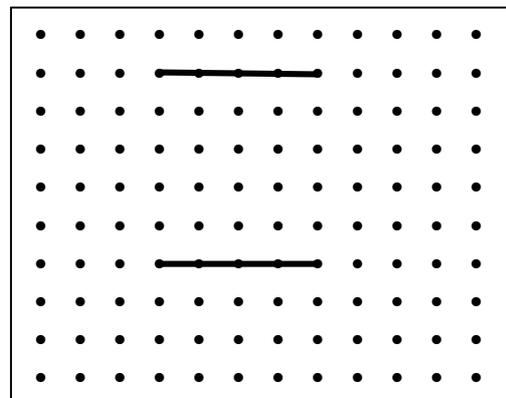


Figura 16

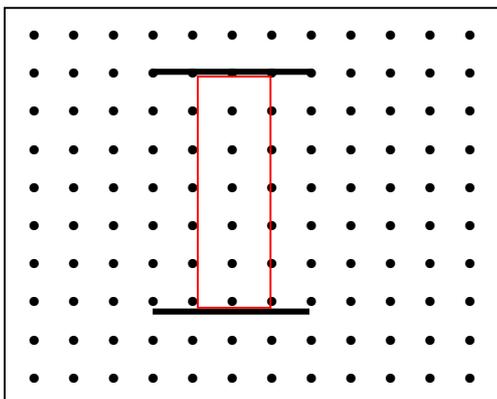


Figura 17

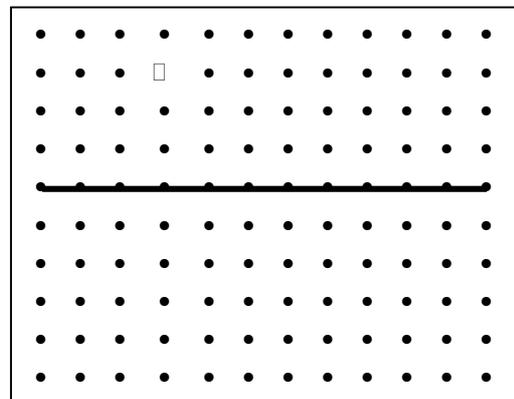


Figura 18

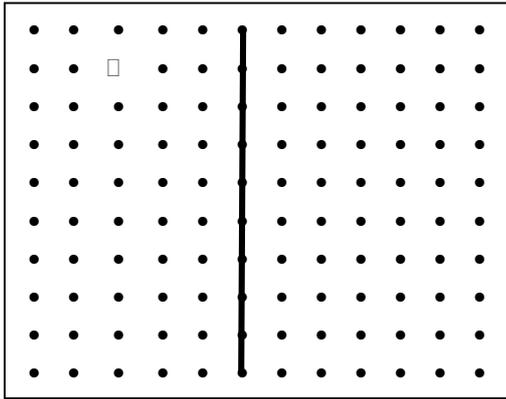


Figura 19

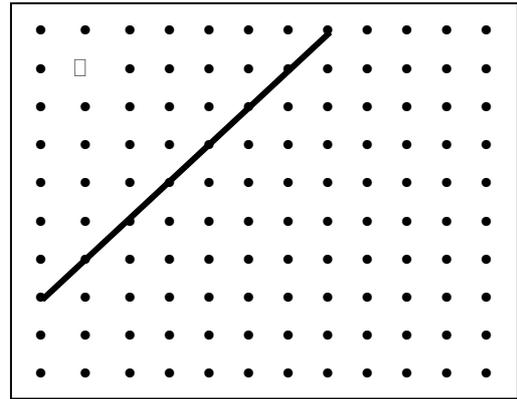


Figura 20

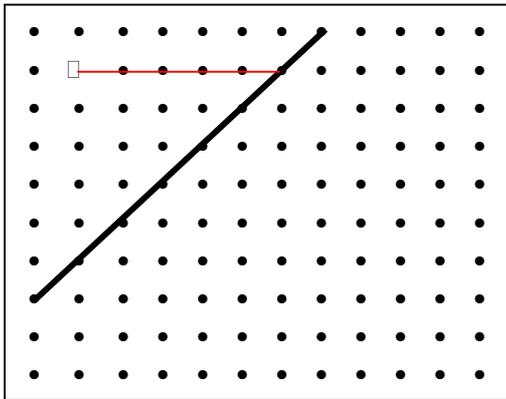


Figura 21

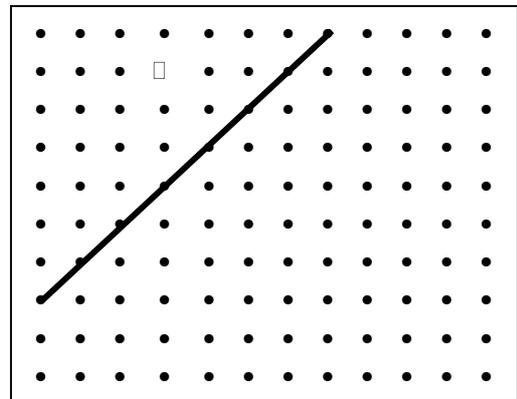


Figura 22

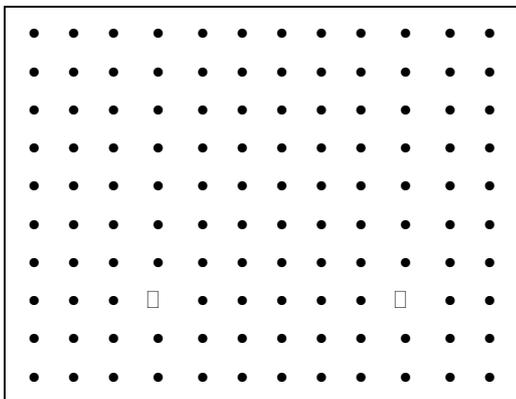


Figura 23

ANEXO 4.B

SUJEITO LUCAS

1ª intervenção

Intervenção realizada no dia 14 de maio de 2003.

1	<i>Pes: Lucas, você é portador de cegueira adquirida ou congênita?</i>
2	<i>Lucas: Minha doença foi congênita. A visão, perdi totalmente aos dois anos de idade.</i>
3	<i>Pes: Então você não tem nenhuma memória visual?</i>
4	<i>Lucas: Não.</i>
5	<i>Pes: Você estudou ou estuda?</i>
6	<i>Lucas: Estudei e estudo. Na escola regular eu tenho o Ensino Médio completo e diversos cursos em algumas áreas, principalmente na área humana e na informática</i>
7	<i>Pes: Até o Ensino Médio você esteve na escola regular?</i>
8	<i>Lucas: Escola regular. Foi para mim um desafio grande. Existia, como ainda existe a Instituição Padre Chico que é uma escola modelo aqui no Estado de São Paulo para deficientes visuais. Ela funciona hoje como semi-internato, mas por várias razões eu estudei em escola regular. Mais na Prefeitura do que no Estado.</i>
9	<i>Pes: Já eram escolas que tinham salas de recursos?</i>
10	<i>Lucas Não, não tinha. O que existia na época que eu estudei, era que o Estado dispunha de um quadro de professores, aliás um quadro muito pequeno de professores especializados, chamados professores itinerantes. Eles iam onde estavam os alunos. Então não dependia de eu ser o único na escola ou ter mais pessoas deficientes, esse professor me acompanhava. E assim meu professor me acompanhou até o primeiro colegial. Desde a preparação, a alfabetização em Braille até o primeiro colegial. Isso mais ou menos dez anos.</i>
11	<i>Pes: Mas você fez a alfabetização em Braille dentro da escola?</i>
12	<i>Lucas: Não. O primeiro acesso que tive a escola foi num parque infantil perto da minha casa, onde me foi cedido uma sala, uma pequena sala, onde no horário de trabalho ficava eu e uma professora e nos horários de recreio eu tinha a integração com as outras crianças.</i>
13	<i>Pes: E que curso você está fazendo aqui?</i>
14	<i>Lucas: Eu concluí um curso na semana passada de montagem de site.</i>

	<i>Então eu tenho uma boa base. Hoje, se precisar montar ou ajudar a montar um site na internet eu estou capacitado.</i>
15	<i>Pes: Profissão?</i>
16	<i>Lucas: Por enquanto estudante. Eu tenho por profissão a área de vendas. Área comercial, que foi o que eu mais fiz em doze ou treze anos de trabalho.</i>
17	<i>Pes: E quando você estava na escola regular, você assistia aulas com seus colegas . . .</i>
18	<i>Lucas: Eu assistia aula normal de tudo. Assistia aula normal, obedecia aos mesmos regulamentos, normas. Eu estava enquadrado no contexto normal da Instituição. O único privilégio que eu tive nisso tudo – eu entendo como um privilégio – foi poder estudar dessa forma, no meio do povo, no meio das pessoas da minha comunidade. Isso para mim foi um privilégio. Agora, fora isso eu não tive privilégio nenhum de passar (de série) e não fazer prova, ou de tirar nota baixa e . . . Eu não tive nenhum privilégio dessa natureza.</i>
19	<i>Pes: Eu falei para você que meu trabalho é na área da Educação Matemática. Nós vamos falar sobre algumas coisas aqui, ligadas a Matemática, mas eu não tenho como te dizer tá certo ou tá errado, é verdadeiro ou não. O que me interessa é como você resolve, o que você me fala sobre as coisas.</i>
20	<i>Lucas: Sim.</i>
21	<i>Pes: Então eu queria que você me falasse alguma coisa sobre figuras.</i>
22	<i>Lucas: Figuras para o deficiente visual que nunca enxergou – como eu perdi a visão com dois anos eu me considero, na verdade, como nunca ter enxergado porque não tenho nenhuma memória, memória visual – Para o deficiente visual que nunca enxergou figura é uma coisa complicada. A gente tem uma idéia da figura depois que a gente tocou essa figura. Sem o toque fica difícil definir uma figura.</i>
23	<i>Pes: Então você conhece as formas pelo toque?</i>
24	<i>Lucas: É. Se eu já tive algum acesso tátil sim, se não, não. A gente tenta fazer uma idéia de acordo com que as pessoas falam.</i>
25	<i>Pes: E planos?</i>
26	<i>Lucas: Do tipo?.</i>
27	<i>Pes: No geral. Dentro da Matemática, fora da Matemática. Como você reconhece um plano?</i>
28	<i>Lucas: Um plano é uma coisa mais fácil de reconhecer. É uma coisa para</i>

	<i>nossa memória mais simples. Se você tocar, quase tudo você pode considerar um plano.</i>
29	<i>Pes: Simetria. (Silêncio) Você estabelece alguma relação, faz alguma idéia, associa a alguma coisa o termo simetria?</i>
30	<i>Lucas: Também dá para fazer. É simples desde que você tenha uma idéia fixa, uma idéia concreta na cabeça. Concreta no sentido de bem definida. É possível se fazer uma simetria sim, com garantia bastante boa de acerto.</i>
31	<i>Pes: Por exemplo?</i>
32	<i>Lucas: Eh! Duas figuras, por exemplo, dois planos com formas diferentes é uma coisa que você consegue fazer uma diferenciação, uma comparação, digo assim.</i>
33	<i>Pes: Ai, você espera um resultado dessa comparação?</i>
34	<i>Lucas: Isso. Acaba gerando um resultado na minha maneira de entender satisfatório.</i>
35	<i>Pes: E reflexão?</i>
36	<i>Lucas: Reflexão é uma coisa que dá para conceituar também. Eu consigo muito bem conviver com o fato da reflexão.</i>
37	<i>Pes: Dá um exemplo.</i>
38	<i>Lucas: Eh! . . .Estatística, por exemplo. Estatística sobre alguns dados, alguns números, por exemplo. Comparação a uma situação diretamente ligada aquela estatística. Dá para fazer uma reflexão bastante segura.</i>
39	<i>Pes: Eu vou te apresentar a ferramenta que a gente tá trabalhando. E para chegar a essa ferramenta a gente errou um bocado. Nós fizemos alguns testes com deficientes visuais e chegamos a alguns erros que corrigimos chegando a essa ferramenta. A sua observação é muito importante para nós. Fala para mim o que você percebe, se ela te incomoda. . . A gente sempre pode mudar.</i>
40	<i>Lucas: (Faz a exploração tátil demoradamente) Você gostaria que eu comentasse sobre essa ferramenta?.</i>
41	<i>Pes: Fique a vontade. (Silêncio) Ela te incomoda?</i>
42	<i>Lucas: Não. Não me incomoda não. Tô achando até interessante. Não sei o propósito dela, mas ela foi bem. . . Mostra que ela foi bem elaborada. Os erros ajudaram nesse sentido.</i>
43	<i>Pes: O que você percebe?</i>
44	<i>Lucas: O que me parece aqui seria uma ferramenta para cálculos. É isso?</i>

45	<i>Pes: Nós não vamos trabalhar com álgebra não, mas acho que talvez até possa ser usada. . .</i>
46	<i>Lucas: Pode ajudar (continua com a exploração tátil).</i>
47	<i>Pes: É. (Silêncio) Nós vamos fazer algumas figuras aí.</i>
48	<i>Lucas: Isso me lembra muito uma planilha eletrônica</i>
49	<i>Pes: Tem regularidades que você consegue perceber?</i>
50	<i>Lucas: Irregularidades?</i>
51	<i>Pes: Regularidades.</i>
52	<i>Lucas: (Explora) Os pontos onde esses pinos estão dispostos estão dentro de uma regularidade. Obedece a um alinhamento.</i>
53	<i>Pes: Eu vou fazer nessa ferramenta uma figura geométrica (Figura 1). Você vai me dizer se reconhece a forma. Se você sabe que figura é. Depois a gente continua falando sobre regularidades.</i>
54	<i>Lucas: Tá certo.</i>
55	<i>Pes: É um elástico que eu estou colocando.</i>
56	<i>Lucas: Pode? (Pergunta se pode iniciar a exploração tátil)</i>
57	<i>Pes: Pode. Aqui tem uma figura.</i>
58	<i>Lucas: A figura é um triângulo.</i>
59	<i>Pes: Isso, um triângulo.</i>
60	<i>Lucas: Um triângulo que a gente chama. . . Deixa eu ver se eu lembro que triângulo é esse. . . (risos)</i>
61	<i>Pes: Vamos ver se você era um bom aluno de Matemática.</i>
62	<i>Lucas: Um triângulo isósceles.</i>
63	<i>Pes: Ah! Muito bom. E por que você está me dizendo que ele é isósceles?</i>
64	<i>Lucas: Porque tem dois lados iguais e um diferente.</i>
65	<i>Pes: Isso.</i>
66	<i>Lucas: A base dele é diferente dos outros dois lados.</i>
67	<i>Pes: Que mais você conhece sobre esse triângulo?</i>
68	<i>Lucas: Eu não vou me lembrar certo agora, mas a angulação, por exemplo. Os (ângulos) da base são iguais. (Faz uma estimativa da medida desse ângulo através do tato). É um ângulo de sessenta graus mais ou menos. O ângulo dos dois lados aqui (lados que formam o vértice) da altura do triângulo, ele é um ângulo mais fechado, um ângulo mais obtuso que esses dois aqui (ângulos da base) deve ter mais ou menos trinta graus. Esse</i>

	<i>cálculo não dá para ser muito preciso, mas é o que me parece.</i>
69	<i>Pes: Eu vou por mais um elástico aí (posiciona o segundo elástico). Eu coloquei um segundo elástico, (Figura 2) e gostaria de ouvir o que você tem a falar sobre isso.</i>
70	<i>Lucas: (Faz a exploração tátil) Esse elástico posso interpretar como uma reta. Eu vou me lembrar o nome dela . . . (Silêncio)</i>
71	<i>Pes: Fica sossegado. Fala com os termos que você lembra.</i>
72	<i>Lucas: Parece muito uma reta ceviana. Ela dividiu o ângulo em dois ângulos. É o que me parece.</i>
73	<i>Pes: E com o triângulo o que esse segundo elástico acabou fazendo?</i>
74	<i>Lucas: Ele acabou formando na verdade dois triângulos escalenos. Triângulos de lados diferentes.</i>
75	<i>Pes: E você consegue estabelecer alguma relação entre esses dois triângulos?</i>
76	<i>Lucas: A medida de um dos lados dos triângulos, das bases dos triângulos, são iguais.</i>
77	<i>Pes: Então o que você pode me dizer sobre as duas extremidades da base do triângulo em relação a esse segundo elástico?</i>
78	<i>Lucas: Essas duas extremidades (aponta os vértices da base do triângulo isósceles) em relação a esse segundo elástico?</i>
79	<i>Pes: Isso.</i>
80	<i>Lucas: Você procurou colocar esse segundo elástico num ponto que a gente chama de ponto médio dessa base. Por exemplo, você calculou o ponto médio e a partir do ponto médio você traçou essa linha mediana.</i>
81	<i>Pes: Na Matemática, dentro do conceito que queremos estudar, esse segundo elástico que colocamos é chamado eixo de simetria.</i>
82	<i>Lucas: Eixo de simetria.</i>
83	<i>Pes: É. E esse eixo de simetria. Tem algumas particularidades em relação à figura. Ele tem algumas propriedades. Será que você consegue enumerar algumas dessas propriedades?</i>
84	<i>Lucas: (Faz demoradamente a exploração tátil) Ele ultrapassa os limites da figura, do triângulo. Não sei se isso é uma propriedade, mas é um detalhe que eu percebi. Ele vai até o topo do nosso quadro (ferramenta de desenho).</i>
85	<i>Pes: Mas esse eixo de simetria é próprio dessa figura.</i>
86	<i>Lucas: (Faz a exploração tátil em silêncio) Acho que eu não estou</i>

	<i>conseguindo perceber nada.</i>
87	<i>Pes: Vou fazer mais uma mudança. Pode ser?</i>
88	<i>Lucas: Pode.</i>
89	<i>Pes: Agora eu vou lhe oferecer uma figura (Figura 3) e você dentro do que conseguiu perceber na tarefa anterior vai construir a outra parte dela em relação a esse eixo de simetria. Para isso você vai usar esse outro elástico e se quiser pode usar uma reprodução que eu tenho aqui daquele primeiro triângulo que você trabalhou em papel canson, (entrega para o sujeito o triângulo de papel) que você pode manipular da maneira que quiser (explora o triângulo de papel). Se você for falando me ajuda.</i>
90	<i>Lucas: Você quer que eu reproduza a mesma figura?</i>
91	<i>Pes: Quero que você aplique o que pode perceber na tarefa anterior.</i>
92	<i>Lucas: (Inicia posicionando o elástico no vértice do triângulo. Puxa-o até a base conta 3 pinos para a direita e termina colocando o elástico no terceiro. Faz a verificação observando a congruência entre os segmentos que formam a base do triângulo) Pronto.</i>
93	<i>Pes: Me conta o que você fez. O que você observou para construir essa figura?</i>
94	<i>Lucas: Eu observei em primeiro lugar . . . O eixo de simetria foi importante para mim. Porque esse lado eu já tinha, era tranquilo para minha observação, então o que eu tomei por base foi exatamente o eixo de simetria. A partir dele e da medida da base do triângulo, desse lado do triângulo (aponta a base) eu usei para construir o complemento dessa figura, ou um outro triângulo. A partir do eixo de simetria (volta a afirmar).</i>
95	<i>Pes: Como você é um aluno muito bom, vou lhe propor outra atividade que não estava no meu roteiro. Agora você vai fazer a imagem dessa figura em relação a esse eixo (Figura 4) (Posiciona uma das mãos do sujeito sobre a figura e depois sobre o eixo).</i>
96	<i>Lucas: (Faz a exploração tátil) Você quer que eu faça a reprodução?</i>
97	<i>Pes: Do outro lado do eixo.</i>
98	<i>Lucas: É. Desse lado de cá (indica o semiplano da direita. Inicia contando o número de pinos de um dos vértices da figura dada até o eixo de simetria. Reproduz a distância do outro lado do eixo e completa o triângulo-imagem Tateando, a fim de certificar-se da congruência, o triângulo dado e sua</i>

	imagem ao mesmo tempo. Faz a verificação observando a congruência entre os dois triângulos) <i>Pronto.</i>
99	<i>Pes: Gostei de trabalhar com essa ferramenta, mas vamos trabalhar agora com outro material. Esse triângulo que você tem aqui (entrega ao sujeito o triângulo isósceles de papel) é um triângulo isósceles, o mesmo que você usou anteriormente. Você pode determinar o eixo de simetria desse triângulo?</i>
100	<i>Lucas: Acredito que sim.</i>
101	<i>Pes: Você pode usar a estratégia que quiser. Fazer o que quiser com o triângulo. Vou colocar a sua disposição também essa régua especial com a qual você deve estar familiarizado (entrega a régua apropriada para o uso de deficientes visuais).</i>
102	<i>Lucas: Ah! Tô sim. (Tenta usar a régua para determinar o eixo de simetria, mas percebe que a espessura da régua o atrapalha na verificação).</i>
103	<i>Pes: Você pode fazer dobraduras. (Posiciona inicialmente, o triângulo isósceles com a base não paralela ao seu corpo o que o fez formular respostas as quais estão representadas na Figura 5).</i>
104	<i>Lucas: Pronto, é esse.</i>
105	<i>Pes: Você pode me explicar por quê esse é o eixo de simetria? (Passa a fazer a exploração tátil de todos os lados do triângulo).</i>
106	<i>Lucas: Não é. Não ficou certo (Figura 6). (Percebe que não houve sobreposição entre os lados do triângulo e tenta novamente). Mas não é esse também (Figura 7).</i>
107	<i>Pes: Você usou só um vértice. Tem mais dois para tentar.</i>
108	<i>Lucas: É mesmo! (Realiza a tarefa com êxito).</i>
109	<i>Pes: Você está recebendo duas figuras (Figura 8), uma delas tem um único eixo de simetria, e a outra, dois. Você pode escolher qual tem um e qual tem dois eixos de simetria?</i>
110	<i>Lucas: Posso.</i>
111	<i>Pes: Você pode usar a régua ou a mesma estratégia que usou ainda pouco.</i>
112	<i>Lucas: Essa tem um (entrega a pesquisadora o trapézio isósceles) e essa tem dois (entrega o polígono de doze lados).</i>
113	<i>Pes: Muito bom! Agora eu vou lhe dar um conjunto de quatro quadriláteros (Figura 9). Um deles tem quatro eixos de simetria, outro dois,</i>

	<p>outro um e outro nenhum eixo de simetria. Você pode analisar as figuras e me entregar dizendo quantos eixos de simetria tem?</p>
114	<p>Lucas: <i>Acredito que sim.</i> (Inicialmente explorou através do tato cada uma das figuras, a seguir passou a fazer as dobras. Sem nenhuma dificuldade o sujeito realizou a tarefa).</p>

FIGURAS

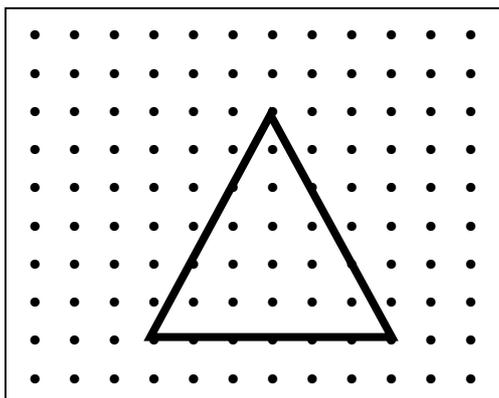


Figura 1

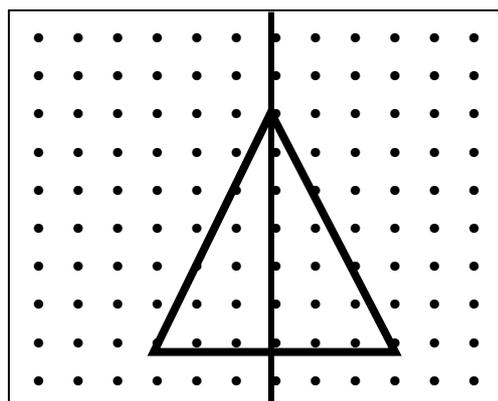


Figura 2

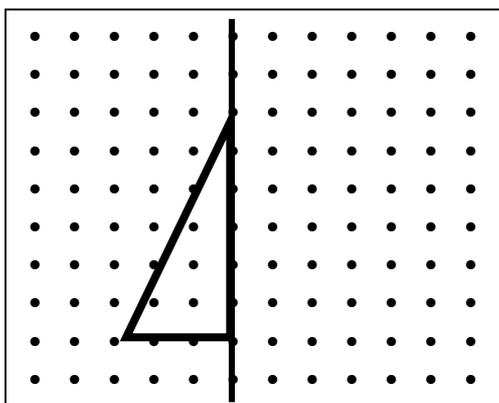


Figura 3

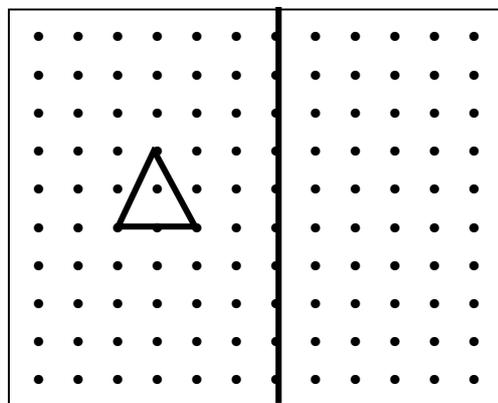
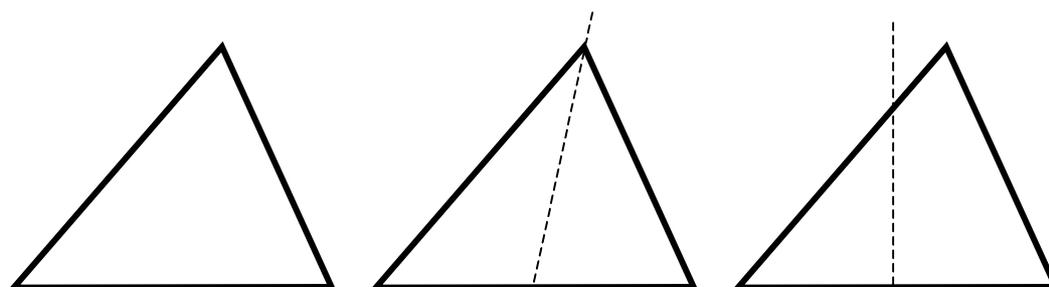


Figura 4



1ª tentativa

2ª tentativa

Figura 5

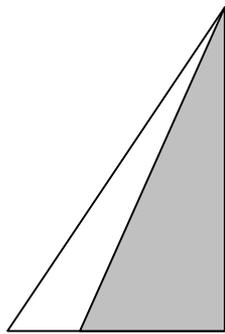


Figura 6

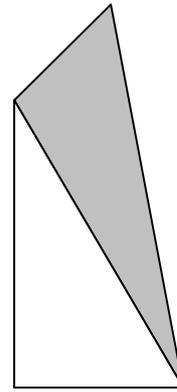


Figura 7

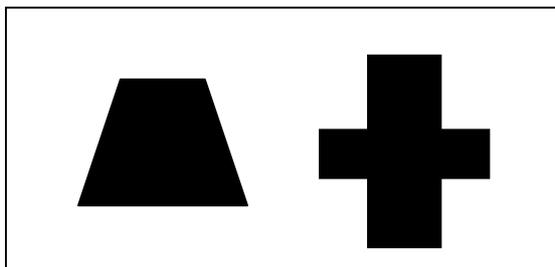


Figura 8

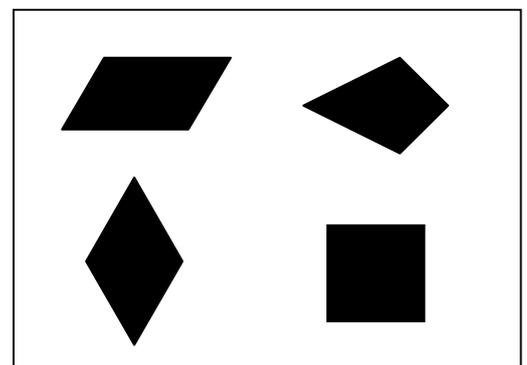


Figura 9

2ª intervenção

Intervenção realizada no dia 28 de maio de 2003.

1	<i>Pes: O que você lembra do nosso último encontro?</i>
2	<i>Lucas: Bom. Nós desenvolvemos vários trabalhos. Mexemos com simetria, eixo de simetria. Depois do nosso encontro encontrei em outros lugares eixo de simetria. Num programa de TV da GNT discutiram simetria.</i>
3	<i>Pes: O que você lembra de eixo de simetria?</i>
4	<i>Lucas: Ele serve para que eu possa fazer uma comparação.</i>
5	<i>Pes: Comparação entre?</i>
6	<i>Lucas: Entre duas figuras, dois planos.</i>
7	<i>Pes: Lembra das figuras que você trabalhou? (a pesquisadora entrega ao sujeito as figuras de papel que ele utilizou na 1ª intervenção) O quadrado, o triângulo, o trapézio, essa parecida com uma cruz, a pipa, o losango e o paralelogramo.</i>

	<i>Nessas figuras você encontrou o eixo de simetria fazendo dobras. Nessas figuras qual o papel do eixo de simetria?</i>
8	<i>Lucas: Ele serviu para dividi-las em duas figuras iguais</i>
9	<i>Pes: Então que propriedade você destaca do eixo de simetria?</i>
10	<i>Lucas Ele dividiu a figura em duas figuras iguais em medidas de lados. Mesma forma.</i>
11	<i>Pes: Que por sobreposição, usando as dobras, você consegue perceber que elas são iguais. As figuras que tem eixo de simetria são chamadas figuras simétricas.</i>
12	<i>Lucas: Figuras simétricas.</i>
13	<i>Pes: Eu gostaria que você considerasse a pipa e o quadrado. Quando você dobrou a pipa encontrou o eixo de simetria ai onde está o vinco. Bem no vértice. Agora vamos pensar em ângulos. Você conhece ângulos?</i>
14	<i>Lucas: Conheço.</i>
15	<i>Pes: O que esse eixo de simetria fez com os ângulos dos vértices onde você fez a dobra?</i>
16	<i>Lucas: Ele dividiu esse ângulo.</i>
17	<i>Pes: Como?</i>
18	<i>Lucas: Em dois ângulos iguais.</i>
19	<i>Pes: Você lembra o nome desse segmento?</i>
20	<i>Lucas: Deixa eu lembrar. . . bissetriz.</i>
21	<i>Pes: Agora no quadrado. No quadrado você achou quatro eixos de simetria. Dois dividem ângulos e os outros dois?</i>
22	<i>Lucas: Um, dois, três ... quatro. (repetindo as dobras na figura)</i>
23	<i>Pes: Os dois primeiros dividiram ângulos. E o terceiro e o quarto?</i>
24	<i>Lucas: Dividiram a figura. Dividiram os lados da figura.</i>
25	<i>Pes: Como?</i>
26	<i>Lucas: Dividiram os lados em dois lados iguais.</i>
27	<i>Pes: Lembra o nome desse segmento?</i>
28	<i>Lucas: Retângulo. Não estou lembrado.</i>
29	<i>Pes: Chama mediatriz.</i>

	<i>Todas as figuras que você trabalhou, com exceção do paralelogramo que você disse que não tem eixo de simetria, são chamadas figuras simétricas. Voltando a nossa ferramenta, eu fiz aqui uma figura e tenho tantos elásticos quantos você precisar para determinar os eixos de simetria. (Figura. 1)</i>
30	<i>Lucas: Sim. Já achei (posicionando o primeiro elástico na horizontal) Se eu colocar mais vai começar a ficar desigual. (Figura 2)</i>
31	<i>Pes: Então você colocou quatro elásticos. Isso quer dizer que tem quatro eixos de simetria?</i>
32	<i>Lucas: É.</i>
33	<i>Pes: Pelo que nós vimos um eixo de simetria não tem relação com outro eixo de simetria. Não é?</i>
34	<i>Lucas: É isso.</i>
35	<i>Pes: Quando você determinou o eixo de simetria das figuras no papel você me mostrou um por vez independente dos outros não é?</i>
36	<i>Lucas: É isso.</i>
37	<i>Pes: Então eu posso tirar três eixos dos que você colocou que o que ficar estará dividindo a figura em duas partes iguais.</i>
38	<i>Lucas: Não. Percebo agora que não Por exemplo, esses dois não servem. Agora sim. Esse eixo (mostra o vertical) dividiu essa figura em duas iguais. E esse também (mostra o eixo horizontal). (Figura 3)</i>
39	<i>Pes: Então nessa figura você encontrou dois eixos de simetria.</i>
40	<i>Lucas: Dois eixos de simetria.</i>
41	<i>Pes: Agora vamos sair da simetria nas figuras e vamos tentar ir para reflexão. Fazer a reflexão de uma figura é encontrar a imagem dessa figura do outro lado do eixo de simetria. Eu vou fazer aqui (na ferramenta) uma figura e sua imagem segundo um eixo de simetria. E você vai explorar. (Figura 4)</i>
42	<i>Lucas: A figura e a imagem dela. (explora as figuras, mas sem perceber as relações com o eixo de simetria)</i>
43	<i>Pes: A figura e sua imagem tem algumas características, algumas propriedades a partir do eixo de simetria. Ou algumas regularidades, algumas coisas em comum a partir do eixo de simetria.</i>

	<i>O que você percebe?</i>
44	<i>Lucas: Em primeiro lugar eu acho que elas estão mais ou menos centradas no eixo de simetria. Na parte central. A distância entre cada uma das figuras e o eixo de simetria são iguais. Foi isso que eu consegui perceber.</i>
45	<i>Pes: Agora eu faço uma figura e você faz a imagem. (Figura 5)</i>
46	<i>Lucas: Tá bom.</i>
47	<i>Pes: O sujeito faz várias tentativas. A princípio ele procura prolongar dois dos lado da figura de modo que o prolongamento fique com a mesma medida do segmento correspondente (Figura 6). Na verificação não fica satisfeito.</i>
48	<i>Lucas: Agora sim. (Figura 7)</i>
49	<i>Pes: Me conta como você fez. O que você estava tentando fazer no primeiro momento?</i>
50	<i>Lucas: Eu estava tentando reproduzir essa figura aqui, mas não estava conseguindo encontrar o alinhamento. Ai, observando melhor eu pude perceber a base do triângulo, o que eu não havia notado ainda. Eu estava me preocupando muito com os lados e não com a base.</i>
51	<i>Pes: Então, essa base em relação ao eixo, como é a posição dela? No que ela te ajudou que os lados inclinados não ajudaram?</i>
52	<i>Lucas: Eu imaginei ela dividindo o eixo de simetria Imaginando um outro eixo de simetria para depois reproduzir esses lados aqui.</i>
53	<i>Pes: Considerando as duas extremidades das bases, essa que eu coloquei e a que você determinou. Dizemos que esse ponto sofreu reflexão em relação a esse eixo de simetria. Você compreende bem essa idéia?</i>
54	<i>Lucas: Compreendo.</i>
55	<i>Pes: Então me explica porque é exatamente esse ponto o reflexo daquele. O que levamos em consideração?</i>
56	<i>Lucas: A distância entre os pontos.</i>
57	<i>Pes: Isso vale para o outro vértice do triângulo também, (conta os pinos desse outro vértice até o eixo de simetria dos dois lados) e ainda para todos os outros pontos que você tem ai na figura.</i>

58	<i>Lucas: Ficaram exatamente iguais, né?</i>
59	<i>Pes: Sim</i>
60	<i>Lucas: Posição, distanciamento entre os pinos (internos) e os lados.</i>
61	<i>Pes: Em relação a esse eixo.</i>
62	<i>Lucas: Em relação ao eixo.</i>
63	<i>Pes: Agora vou fazer outra figura. (Sucesso com rapidez) (Figura 8) Vou mexer de novo. (Figura 9) O que você percebe que eu fiz com o eixo de simetria?</i>
64	<i>Lucas: Você mudou a posição. Ele está inclinado.</i>
65	<i>Pes: É o eixo de simetria é inclinado agora.</i>
66	<i>Lucas: Tenho que fazer essa imagem aqui né? (Vira a ferramenta colocando o eixo de simetria perpendicular ao seu corpo) Pronto. Olha aí. (Verifica os ângulos formados) (Figura 10)</i>
67	<i>Pes: Me conta como você fez.</i>
68	<i>Lucas: Primeiro tomei como base o eixo e esse ponto aqui (mostra um dos vértices da figura posicionado sobre o eixo). Aliás, ele sempre ajuda, porque só fiz a referência dos pinos para que eles me dessem à exata medida da imagem. Depois usei como referência os demais pinos e as suas posições para que eu pudesse terminar a imagem.</i>
69	<i>Pes: Vou fazer outra figura. (Figura 11)</i>
70	<i>Lucas: Aqui vou ter que improvisar porque se eu partir do mesmo ponto não vai ter a mesma medida. (Figura 12)</i>
71	<i>Pes: E se eu fizer assim? (Figura 13)</i>
72	<i>Lucas: Agora sim, porque eu estava comprometendo a medida da maneira como estava.</i>
73	<i>Pes: Bom, Eu vou deixar essa figura ai e vou fazer uma outra mais embaixo, e vou pedir para você fazer a imagem dela. (Figura 14)</i>
74	<i>Lucas: Eu faço desse outro lado aqui né?</i>
75	<i>Pes: Sim.</i>
76	<i>Lucas: Certo. (Vira novamente a ferramenta para posicionar o eixo de simetria perpendicularmente ao seu corpo. Realiza a tarefa com perfeição) (Figura 15).</i>
77	<i>Pes: Analisa a primeira figura que você fez em relação ao eixo de</i>

	<p><i>simetria.</i> (Explora a primeira figura).</p>
78	<p><i>Lucas: O ângulo que a figura que eu fiz forma com o eixo de simetria e o ângulo que a sua forma com o eixo de simetria não ficou o mesmo ângulo.</i> (Vai posicionando o elástico pino a pino e testando os ângulos) <i>Acho que está mais próximo agora. (Figura 16)</i></p>
79	<p><i>Pes: Vamos fazer outra então. (Figura 17)</i> (Move a ferramenta novamente e realiza a tarefa com sucesso). <i>Muito bom! Vou fazer outra. (Figura 18)</i></p>
80	<p><i>Lucas: Agora a referência está fora do eixo de simetria.</i></p>
81	<p><i>Pes: É agora não temos pontos comuns entre a figura e o eixo de simetria.</i></p>
82	<p><i>Lucas: Pronto. (Figura 19)</i></p>
83	<p><i>Pes: O que você teve que considerar para fazer a imagem?</i> (continua fazendo a exploração tátil enquanto a pesquisadora fala)</p>
84	<p><i>Lucas: Pera aí, deixa eu ver se está certo.</i> <i>Às vezes pela disposição da madeira parece que não está. (Vira a ferramenta novamente a fim de deixar o eixo perpendicular a seu corpo).</i> <i>Primeiro eu levei em consideração à distância do eixo de simetria. Comparei os pontos em que eu poderia estar reproduzindo essa imagem em relação ao eixo de simetria e a figura já feita.</i></p>
85	<p><i>Pes: E essas distâncias estão iguais?</i></p>
86	<p><i>Lucas: Eu poderia estar trazendo esse para cá. Estão na mesma altura. Isso daqui para cá.</i> <i>Agora eu acho que está mais certo. (Figura 20)</i></p>
87	<p><i>Pes: As distâncias estão iguais?</i> (Explora as medidas somente das duas figuras).</p>
88	<p><i>Lucas: Só não estão obedecendo o alinhamento.</i> <i>Já achei o x da questão. De novo eu cai no mesmo erro.</i></p>
89	<p><i>Pes: Qual?</i></p>
90	<p><i>Lucas: Do segmento. De novo eu levei em consideração só o eixo de simetria e não a direção do ângulo.</i> <i>Esse ângulo está para fora (aponta para a bandeira) e eu fiz para dentro.</i></p>
91	<p><i>Pes: Sim</i></p>
92	<p><i>Lucas: Agora eu acho que sim.</i></p>

	(Realiza a tarefa com sucesso)
93	<i>Pes: Vou fazer mais uma figura para você. (Figura 21)</i> (Consegue posicionar os ângulos, mas tem dificuldade com a medida do segmento) (Figura 22) <i>Agora posso lhe fazer algumas perguntas?</i>
94	<i>Lucas: Claro.</i>
95	<i>Pes: Estudamos alguns conceitos matemáticos: simetria, figuras simétricas, reflexão. Na sua vida diária você encontra esses conceitos?</i> <i>Há alguma prática na sua vida diária, no seu trabalho que te faz lembrar dessas coisas?</i>
96	<i>Lucas: Há sim, desde dobrar meu cobertor de manhã certinho. Eu tomo por base o eixo de simetria.</i>
97	<i>Pes: E formas simétricas? Na rua, em casa...</i>
98	<i>Lucas: Têm muitas. E antes eu não sabia conceituar nem fazer relações.</i>
99	<i>Pes: Por exemplo?</i>
100	<i>Lucas: Um prato, um copo</i> <i>Meu par de sapatos é um a imagem do outro.</i>

FIGURAS

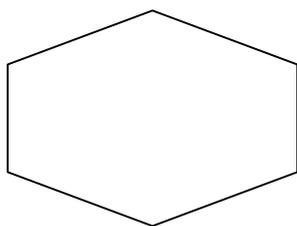


Figura 1

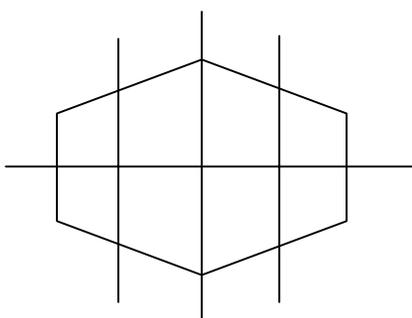


Figura 2

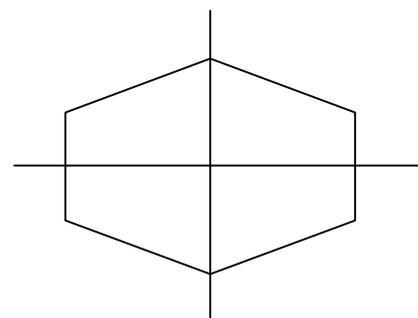


Figura 3

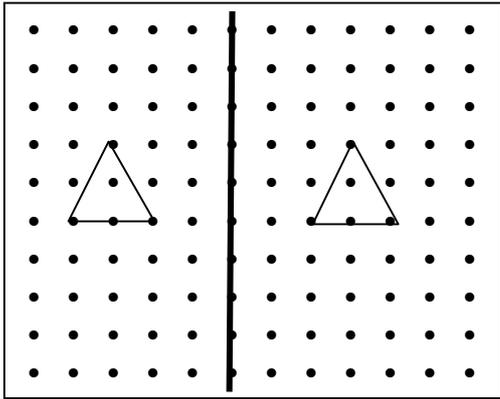


Figura 4

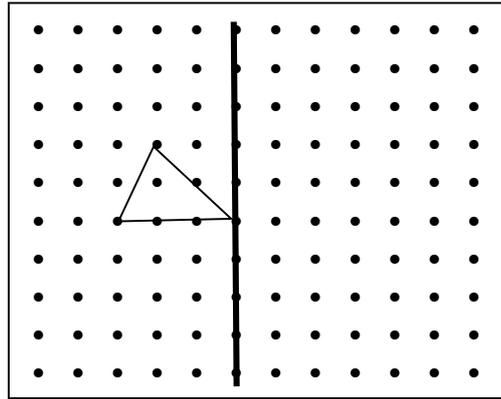


Figura 5

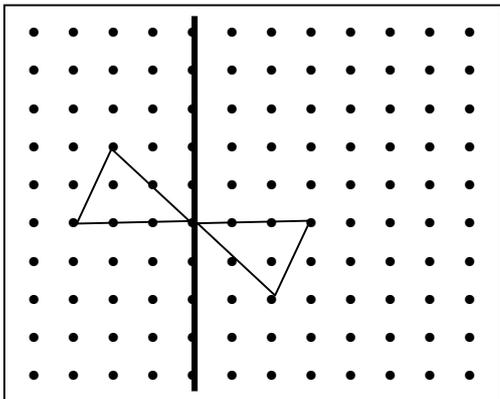


Figura 6

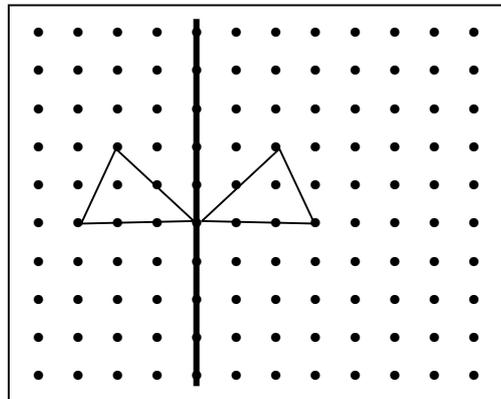


Figura 7

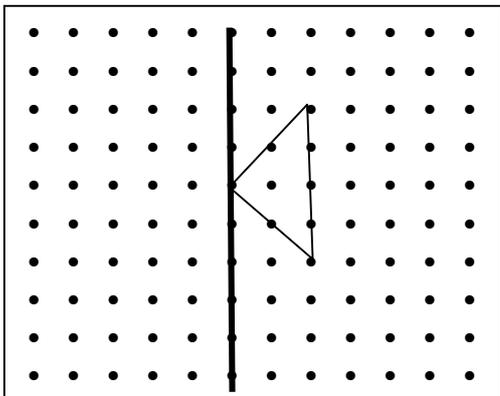


Figura 8

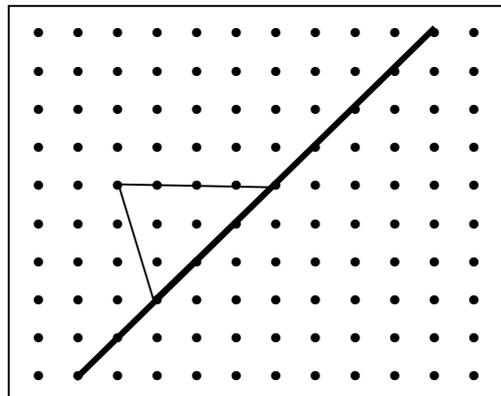


Figura 9

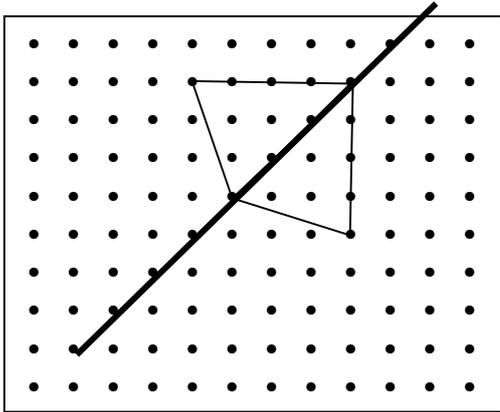


Figura 10

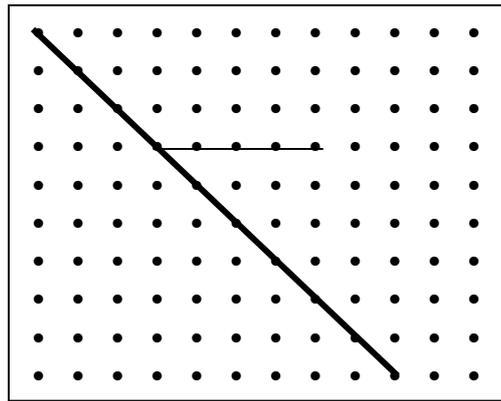


Figura 11

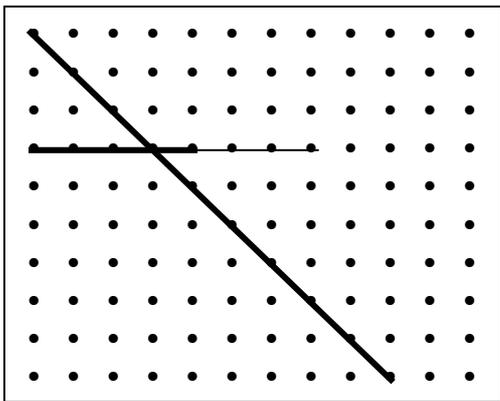


Figura 12

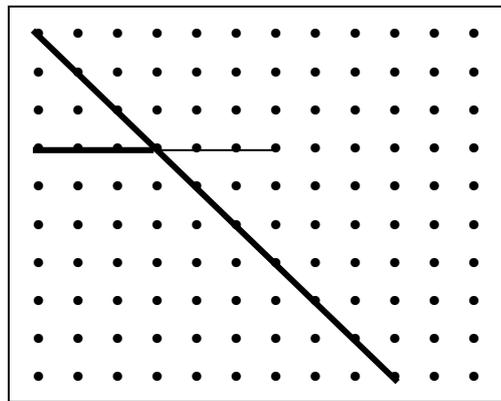


Figura 13

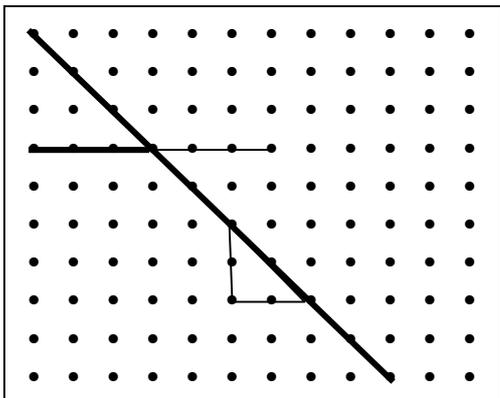


Figura 14

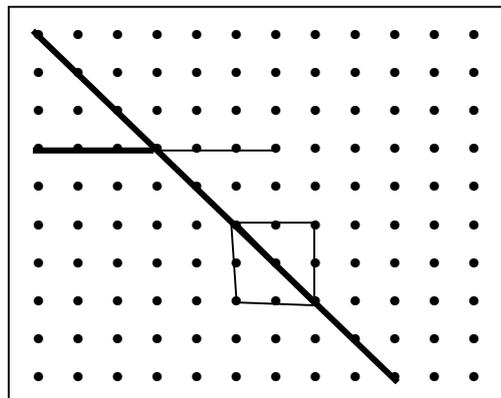


Figura 15

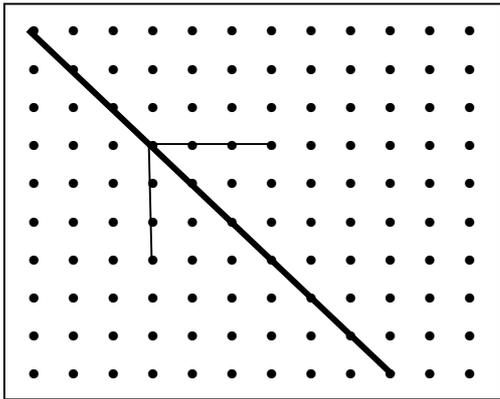


Figura 16

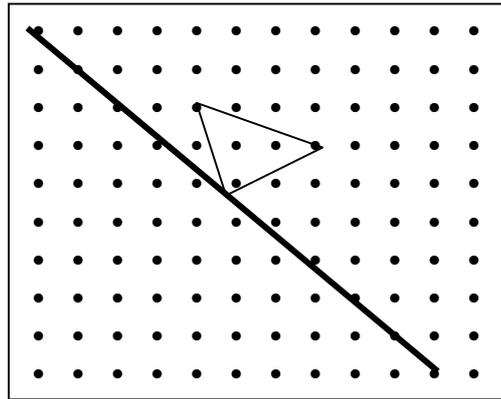


Figura 17

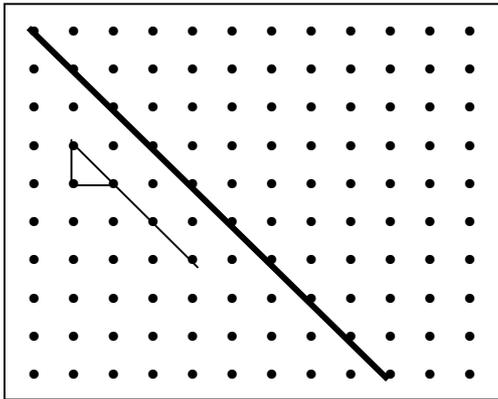


Figura 18

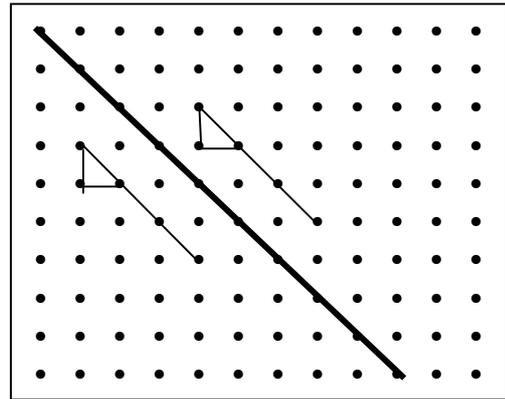


Figura 19

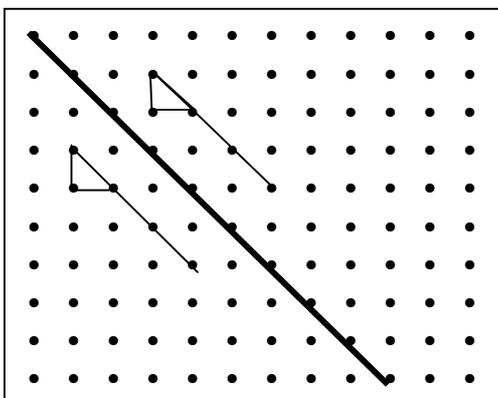


Figura 20

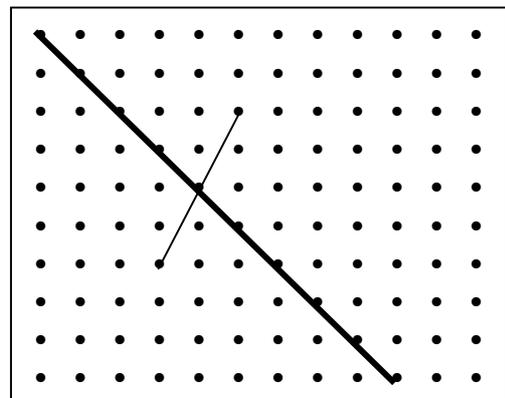


Figura 21

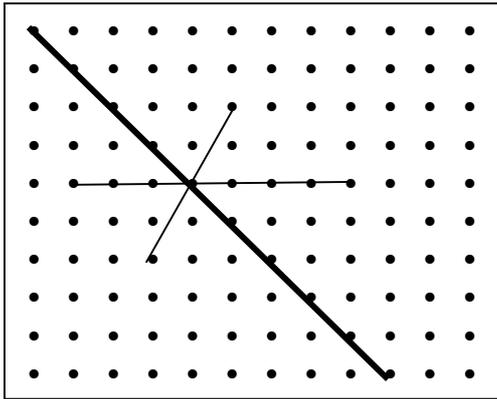


Figura 22

3ª intervenção

Intervenção realizada no dia 5 de julho de 2003.

1	<i>Pes: O que você lembra do nosso último encontro?</i>
2	<i>Lucas: Nós trabalhamos com figuras que tinham eixo de simetria. A partir dele eu construía figuras, ora figuras diretamente ligadas a esse eixo de simetria e ora a imagem de uma figura pré-estabelecida também ligada a esse eixo de simetria. Uma outra figura imagem da primeira.</i>
3	<i>Pes: Foi exatamente isso que a gente fez. O que nós estamos estudando tem o nome de transformações geométricas, mais especificamente nos interessa a reflexão. E duas coisas que nós discutimos são distintas. Na primeira sessão eu pus na ferramenta um triângulo e seu eixo de simetria. Você lembra das propriedades desse eixo?</i>
4	<i>Lucas: Ele tem a propriedade de tornar a figura em duas figuras de iguais dimensões..</i>
5	<i>Pes: Isso. Na Matemática as figuras que tem ao menos um eixo de simetria são chamadas figuras simétricas. Essa foi à primeira situação que nós estudamos. Discutimos figuras simétricas naquelas formas feitas de papel.</i>
6	<i>Lucas: Lembro.</i>
7	<i>Pes: Depois fizemos um segundo estudo. Eu coloquei na ferramenta um eixo de simetria e uma figura. (Figura 1).</i>
8	<i>Lucas: Ai eu construí a figura imagem do lado oposto.</i>

9	<i>Pes: É isso que nós chamamos de reflexão. Começamos com figuras simples e depois fizemos algumas mais difíceis.</i>
10	<i>Lucas Difíceis não. Desafiadoras.</i>
11	<i>Pes: Essa daqui por exemplo (Figura 2). O triângulo da direita é reflexão do triângulo que está à esquerda.</i>
12	<i>Lucas: Eles são iguais.</i>
13	<i>Pes: É as medidas são iguais.</i>
14	<i>Lucas: Mas está tudo invertido.</i>
15	<i>Pes: Esses dois pontos que você está com a mão (vértices da base) são chamados pontos simétricos. Quer dizer esse é o simétrico desse em relação a esse eixo de simetria. Se for simétrico está a mesma distância do eixo, e qualquer par de simétricos que você escolher vai manter essa propriedade.</i>
16	<i>Lucas: Perfeito.</i>
17	<i>Pes: Agora vamos trabalhar com figuras mais simples, mas não menos desafiadoras. Têm, na ferramenta, um eixo de simetria e uma figura que representa um segmento. Você pode fazer a imagem dela? (Figura 3)</i>
18	<i>Lucas: Pronto. (Figura 4) (Não tem êxito na primeira tentativa)</i>
19	<i>Pes: O que foi que você preservou? O que foi que você fez?</i>
20	<i>Lucas: Bom, está preservado a dimensão do segmento e a distância entre o eixo de simetria e a figura.</i>
21	<i>Pes: Reveja isso então. (Refaz a tarefa com sucesso). Por que você posicionou a imagem bem aí, quer dizer para cima ou para baixo você já disse que queria preservar a distância, mas por que não para a esquerda ou para a direita?</i>
22	<i>Lucas: Eu usei como base a direção dos pinos. (Indica a perpendicular).</i>
23	<i>Pes: E por quê exatamente essa direção e não uma inclinada à direita ou à esquerda?</i>
24	<i>Lucas: Porque eu tinha que reproduzir exatamente essa figura. A imagem dela aqui embaixo (indica o semiplano inferior da ferramenta). Se eu fizesse qualquer inclinação eu não estaria fazendo a imagem da figura.</i>
25	<i>Pes: Vou mudar (Figura 5). Realiza a tarefa contando os pinos da ferramenta de fora para dentro. Não emprega propriedades identificadas anteriormente do eixo de simetria. Não</i>

	tem sucesso (Figura 6).
26	<i>Lucas: Pronto.</i>
27	<i>Pes: Então verifica. Além da medida do segmento o que mais você deve verificar?</i>
28	<i>Lucas: Além da medida dos segmentos a distância que eles estão do eixo de simetria. Só que tem um probleminha aqui. (Faz a correção) Agora o tamanho e a distância, estão certos, mas eu não pude manter a relação aqui.(distância do segmento a borda da ferramenta) porque senão não ficaria do mesmo tamanho.</i>
29	<i>Pes: É essa ferramenta não é quadrada.</i>
30	<i>Lucas: Então eu tive que obedecer a distância do eixo de simetria e a medida da imagem.</i>
31	<i>Pes: Isso. E por que a imagem está nessa posição e não nessa que eu vou colocar? (Figura 7) Aqui eu preservei a medida, preservei distância, então essa pode ser uma imagem?</i>
32	<i>Lucas: Eu procurei ser o mais fiel possível a figura.</i>
33	<i>Pes: Está perfeito o que você fez, mas porque a sua construção está perfeita e a minha não?</i>
34	<i>Lucas: Porque eu parto de um princípio lógico. Eu quero reproduzir exatamente a figura. Se bem que aqui está reproduzindo essa figura aqui, só que por querer dar 100% de fidelidade eu fiz na mesma linha.</i>
35	<i>Pes: Vou fazer outra (Figura 8). Realiza a tarefa buscando os pontos equidistantes do eixo de simetria sempre utilizando a perpendicular.</i>
36	<i>Lucas: Pronto.</i>
37	<i>Pes: Isso. Está certinho, mas você está procurando essa linha reta de um ponto ao outro passando pelo eixo de simetria. Essa reta que você está usando, vou colocar a régua aqui para você perceber de que reta estou falando. Não é essa que você está usando?</i>
38	<i>Lucas: É para achar esse ponto aqui (simétrico).</i>
39	<i>Pes: Essa reta que você está usando é uma reta perpendicular ao eixo. Lembra de reta perpendicular?</i>
40	<i>Lucas: Lembro, é uma reta que cruza, coincide com o eixo de simetria..</i>
41	<i>Pes: Ela cruzou o eixo. E cruzou formando um ângulo. . .</i>

42	<i>Lucas: Normalmente a perpendicular forma um ângulo de 90°.</i>
43	<i>Pes: Forma exatamente um ângulo de 90°. E se você perceber a distância desse ponto (uma das extremidades do segmento) até o eixo é desse eixo até esse ponto aqui (simétrico) Que posição ocupa esse eixo de simetria em relação à medida do segmento formado por esses dois pontos? (Figura 9)</i>
44	<i>Lucas: Às vezes você pergunta algumas coisas difíceis de responder.</i>
45	<i>Pes: Essa distância desse ponto (uma das extremidades do segmento) até o eixo é desse eixo até esse ponto aqui (simétrico), como são essas distâncias? (Conta os pinos)</i>
46	<i>Lucas: Tem cinco certinho. As distâncias são iguais.</i>
47	<i>Pes: Então além do eixo de simetria ser perpendicular a essa reta que você está imaginando ele passa bem no “meio” do segmento formado por um ponto da figura e seu simétrico.</i>
48	<i>Lucas: É pelo ponto médio.</i>
49	<i>Pes: Em todos os pontos do segmento não é?</i>
50	<i>Lucas: É se você pegar esses dois pontos aqui (um ponto do segmento e seu simétrico) acontece a mesma coisa.</i>
51	<i>Pes: Agora vou mudar um pouco mais as coisas. (Figura 10) (Procura a perpendicular às extremidades para determinar o ponto simétrico das mesmas).</i>
52	<i>Lucas: Está certinho.</i>
53	<i>Pes: Vou colocar uma mais desafiadora (Figura 11). Inicialmente realiza a tarefa com sucesso, mas fica preocupado com os pinos que sobram de cada lado da ferramenta e ao tentar deixar o mesmo número de pinos não determina a imagem. Está certo?</i>
54	<i>Lucas: Não tá maior (faz a correção). Agora tá.</i>
55	<i>Pes: Vamos para outra (Figura 12) Continua usando a perpendicular.</i>
56	<i>Lucas: Acho que saiu.</i>
57	<i>Pes: Agora nós vamos fazer alguma coisa diferente. Eu faço as duas figuras e você posiciona o eixo de simetria. Entendeu?</i>
58	<i>Lucas: Entendi. Tá certinho.</i>

59	<i>Pes: Vamos lá. (Figura 13)</i>
60	<i>Lucas: Tenho que achar o eixo de simetria, não é?.</i>
61	<i>Pes: É.</i>
62	<i>Lucas: Da forma que eu quiser?</i>
63	<i>Pes: Não sei. O eixo de simetria é único ou tem mais que um?</i>
64	<i>Lucas: Pode ter mais que um.</i>
65	<i>Pes: Mas nesse caso onde temos uma figura e sua imagem. . .</i>
66	<i>Lucas: Vai ser único. (Realiza a tarefa com sucesso) Taí.</i>
67	<i>Pes: Você tem certeza?</i>
68	<i>Lucas: Tem a mesma medida desses dois pontos até o eixo de simetria (indica um ponto do segmento e seu simétrico).</i>
69	<i>Pes: E isso está valendo para todos os outros pontos também?</i>
70	<i>Lucas: Creio que sim.</i>
71	<i>Pes: E nesse caso? (Figura 14)</i>
72	<i>Lucas: Para determinar o eixo de simetria tem que achar o meio. (Usa a extremidade superior para determinar "o meio") Taí.</i>
73	<i>Pes: Vamos passar para outro. (Figura 15) (Usa a extremidade superior para determinar o eixo, o posiciona e verifica contando o número de pinos das extremidades ao eixo). Tá certinho. Outro. (Figura 16)</i>
74	<i>Lucas: Foi fácil.</i>
75	<i>Pes: Outro (Figura 17) (Precisa usar as duas extremidades de cada um dos segmentos para determinar a posição do eixo de simetria).</i>
76	<i>Lucas: Taí.</i>
77	<i>Pes: Certo. Agora vamos fazer uma simulação. Faz de conta que eu estou em casa ao telefone, com uma ferramenta como essa e com um par de elásticos posicionados nela, um é a imagem e outro o objeto, e você conversando comigo ao telefone tem que me ensinar a determinar o eixo de simetria, mas você não tem idéia da posição dos segmentos nem da ferramenta, já comentamos que ela não é quadrada e se mudamos a posição da ferramenta o eixo de simetria vai junto. Então você vai ter que me dar um método, como um método geral que vale para qualquer situação para que eu possa fazer essa tarefa lá na minha casa.</i>

78	<i>Lucas: Toma por base os pontos onde começa e termina as duas figuras que você tem aí, e a distância entre uma e outra você. . .</i>
79	<i>Pes: Eu vou por na ferramenta duas figuras para te ajudar.</i>
80	<i>Lucas: Tá certo. Você toma por base uma das extremidades de cada um dos segmentos.</i>
81	<i>Pes: Uma qualquer?</i>
82	<i>Lucas: As duas extremidades do mesmo lado. Você centraliza o eixo de simetria no ponto médio entre uma extremidade e outra de cada segmento.</i>
83	<i>Pes: E como eu faço para achar o ponto médio?</i>
84	<i>Lucas: Você pode usar uma régua ou mais simples contar os pinos a partir de um dos segmentos até o outro segmento, e localizar o pino que seja o ponto médio dessa distância entre um segmento e outro.</i>
85	<i>Pes: Tá achei, e agora?</i>
86	<i>Lucas: Fixa o elástico aí e traça uma reta sempre obedecendo à distância, ou seja, tanto as duas extremidades dos segmentos como os outros pontos dos segmentos guardam a mesma distância.</i>
87	<i>Pes: Então todos os pontos dos segmentos estão a mesma distância do eixo de simetria?</i>
88	<i>Lucas: Isso mesmo. As extremidades do segmento A, vamos chamar assim, têm que ser a mesma distância do segmento A ao eixo de simetria e do eixo de simetria ao segmento B. Isso nas duas extremidades dos dois segmentos.</i>
89	<i>Pes: Nas sessões anteriores nos trabalhamos com figuras, nessa sessão com segmentos e agora vamos trabalhar com pontos. Vou representar os pontos com massinha de modelar. Eu vou colocar o eixo de simetria e posicionar um ponto e você vai determinar o simétrico desse ponto em relação ao eixo (Figura 18).</i>
90	<i>Lucas: Então não tem figura nenhuma. Você quer que eu faça a imagem desse? (Indica a representação do ponto).</i>
91	<i>Pes: Isso. (Conta o número de pinos do ponto ao eixo de simetria na perpendicular e posiciona o simétrico corretamente)</i>
92	<i>Lucas: Taqui.</i>
93	<i>Pes: Como é que você fez?</i>
94	<i>Lucas: A distância desse para o eixo de simetria é a mesma que eu</i>

	<i>coloquei aqui.</i>
95	<i>Pes: E nesse daqui? (Figura 19)</i> (Usa a mesma estratégia utilizada na tarefa anterior)
96	<i>Lucas: Taqui. Eu procurei guardar a distância daqui (entre o ponto e o eixo de simetria) e não daqui (em relação às bordas da ferramenta).</i>
97	<i>Pes: Isso. E nesse? (Figura 20)</i>
98	<i>Lucas: Tá certo?</i>
99	<i>Pes: Tá. Agora eu posiciono os pontos e você o eixo de simetria. (Figura 21)</i>
100	<i>Lucas: Certo. (Conta os pinos entre os dois pontos na perpendicular). Tá.</i>
101	<i>Pes: Certinho. Tem outro (Figura 22).</i> (Na primeira tentativa não posiciona corretamente o eixo de simetria) (Figura 23). <i>Tá certo?</i> (Revê distância dos pontos até o eixo de simetria).
102	<i>Lucas: Tá.</i>
103	<i>Pes: E aquela sua preocupação de ser o mais fiel possível você a teve aí? (Silêncio)</i> <i>Lembra quando colocamos a régua para ver a reta que você estava imaginando?</i>
104	<i>Lucas: Lembro. O eixo de simetria tem que estar inclinado aqui. Acho que agora está certo. (Figura 24)</i>
105	<i>Pes: A distância entre os pontos e o eixo de simetria deve ser a mesma não é?</i>
106	<i>Lucas: É.</i>
107	<i>Pes: Então verifica. (Usa a régua para ajudar na determinação da perpendicular)</i>
108	<i>Lucas: Não está havendo perpendicular aqui. (Tenta várias vezes sempre usando a régua para determinar a perpendicular).</i> <i>Acho que está.</i>
109	<i>Pes: Agora é perpendicular mas não está passando pelo ponto médio. (Refaz com êxito).</i>
110	<i>Lucas: Acho que agora está certo.</i>
111	<i>Pes: Verifica então (conta o número de pinos entre os pontos e o eixo de simetria).</i>
112	<i>Lucas: Agora chegou.</i>

113	<i>Pes: Então vamos voltar ao telefone, mas antes o que foi mais fácil para você figura, segmentos ou pontos?</i>
114	<i>Lucas: Segmentos.</i>
115	<i>Pes: E o mais chatinho?</i>
116	<i>Lucas: Pontos.</i>
117	<i>Pes: Por quê?</i>
118	<i>Lucas: O ponto é mais chato porque eu não tenho outros parâmetros. Na figura eu tenho vários parâmetros. Eu posso me basear para traçar o eixo de simetria nas extremidades, é mais fácil achar a distância. No segmento da mesma forma o ponto não me dá essa possibilidade eu só tenho um ponto, outro e o eixo de simetria.</i>
119	<i>Pes: Então vamos voltar ao telefone. Na minha casa eu tenho a ferramenta com dois pontos e você da sua casa vai tentar me explicar como posicionar o eixo de simetria.</i>
120	<i>Lucas: Eu acho que a maneira mais simples é medir com a régua a distância entre um ponto e outro e calcular o ponto médio. E fixar o eixo de simetria de forma que se tenha um ângulo de 90° entre o eixo de simetria e o segmento formado pelos dois pontos.</i>
121	<i>Pes: Nesse estudo nós trabalhamos, primeiro com figuras simétricas e depois construímos figuras a partir de uma dada e que mantinha algumas relações com o eixo de simetria e com a figura dada. Essa figura que você construiu que é simétrica a figura dada, que várias vezes você notou, estava do outro lado do eixo, nós chamamos de imagem, o que tem a ver com o nome da transformação geométrica – reflexão. Você não tem memória visual de imagem no espelho, tem?</i>
122	<i>Lucas: Não.</i>
123	<i>Pes: Quando nós nos olhamos no espelho, nossa imagem está a mesma distância que nós do espelho, mas a imagem aparece invertida. É o que acontece aqui, quando você construí a imagem de uma figura você sempre procurou preservar a distância. Vamos ver se você lembra na ferramenta. Por exemplo, essa daqui (Figura 25). Faz ela (realiza com êxito).</i>
124	<i>Lucas: Pronto.</i>
125	<i>Pes: Na Matemática algumas dessas coisas têm nomes especiais. Eixo de simetria (indica), figura dada (indica) e figura imagem (indica).</i>

	<p>Nós dizemos que ocorreu aí uma transformação geométrica, mais exatamente uma reflexão da figura dada em relação a esse eixo.</p> <p>Propriedades dessa imagem? O que você precisa saber para fazer essa imagem?</p>
126	<p>Lucas: O tamanho dela. Primeiro a forma dela, depois o tamanho dela para relacionar ao eixo de simetria, as extremidades, a distância entre as extremidades (vértices) da figura, a distância que essa extremidade guarda até o eixo de simetria. As extremidades da figura dada e da imagem devem estar numa perpendicular.</p> <p>Se é eixo de simetria passa exatamente pelo ponto médio das duas extremidades correspondentes da figura dada e da imagem, imaginando um segmento.</p>
127	<p>Pes: Me fala tudo agora da figura imagem.</p>
128	<p>Lucas: Ela tem as mesmas medidas que a figura dada e está invertida em relação à figura dada.</p>
129	<p>Pes: O que é reflexão então na Matemática?</p>
130	<p>Lucas: É construir uma figura a partir de outra em relação a um eixo de simetria.</p>
131	<p>Pes: E o que precisa acontecer para ser reflexão?</p>
132	<p>Lucas: O tamanho da figura e da imagem devem ser o mesmo e as distâncias entre elas e o eixo de simetria devem ser iguais.</p>
133	<p>Pes: Sobre o conceito matemático vamos até aqui, mas eu gostaria de fazer mais algumas perguntas.</p>
134	<p>Lucas: Pode fazer.</p>
135	<p>Pes: Você tem cegueira congênita. Você não tem memória visual.</p>
136	<p>Lucas: Nenhuma.</p>
137	<p>Pes: É foi muito interessante que quando eu falei de imagem, reflexão com portadores de cegueira adquirida, apareceu à memória visual de espelho, que é a mesma relação que os videntes fazem com esse conceito matemático. E o que eu gostaria de mostrar é que essas relações não são únicas e que é possível chegar ao conceito matemático de reflexão mesmo sem ter “esse referencial”, e que os deficientes visuais são tão capazes quanto, e que, muitas vezes, não estabelecer essa relação com espelhos acaba sendo um facilitador. E você acertou a construção de imagens de figuras que normalmente os videntes erram.</p>

	<i>Agora, como é que você constrói isso na sua cabeça? Porque você tem que estabelecer muito mais relações do quem está vendo.</i>
138	<i>Lucas: Perfeito.</i>
139	<i>Pes: E como é que você faz isso?</i>
140	<i>Lucas: No meu caso, como quando eu era pequeno eu fui muito estimulado pela minha professora de Braille e pela minha família. Eu tenho esses referenciais muito claros em função desse trabalho que foi feito.</i>
141	<i>Pes: Mas que referências? O que você usa?</i>
142	<i>Lucas: Eu uso como base, primeiro os lados das figuras, eu procuro manter o contexto da figura, o formato da figura, a distância entre uma extremidade e outra, se são iguais ou não, tudo isso relacionado em primeiro plano com a forma da figura no contexto geral.</i>
143	<i>Pes: E quando você está fazendo isso você vai criando imagens?</i>
144	<i>Lucas: Mentalmente sim, vou construindo imagens. É perfeitamente possível dependendo evidentemente da figura. Quando uma pessoa me fala da figura ou de alguma coisa dá para ter uma idéia de como é aquela figura, que de repente eu não consigo construir fisicamente, mas na minha cabeça dá para ter uma idéia.</i>
145	<i>Pes: Essas últimas figuras que nós trabalhamos, com eixo inclinado, segundo pesquisas, são figuras que 60, 70% dos videntes não acertam.</i>
146	<i>Lucas: Pode ser que eles têm o conceito de “reta é reta”, não podem imaginar uma “reta torta” – inclinada.</i>
147	<i>Pes: Ou então estão muito presos ao espelho.</i>
148	<i>Lucas: É, às vezes o visual atrapalha, confunde. Porque o visual é uma forma de juízo imediato e nem sempre correto.</i>

FIGURAS

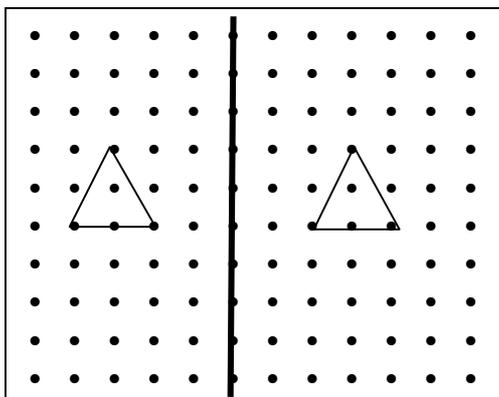


Figura 1

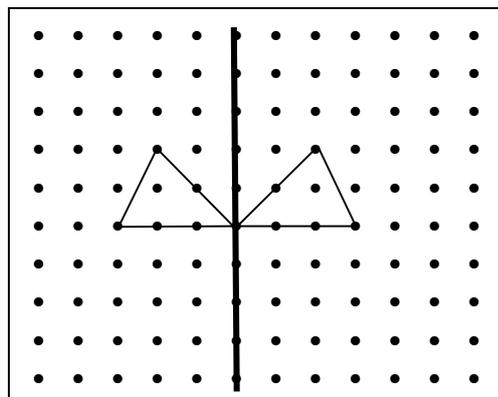


Figura 2

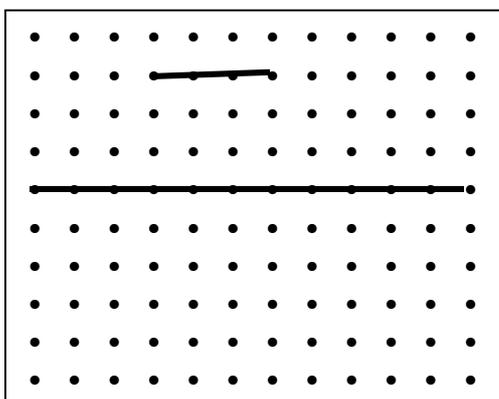


Figura 3

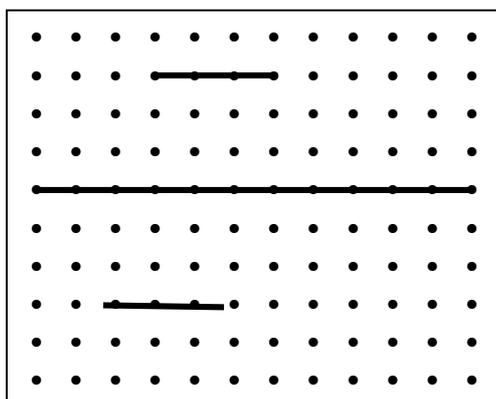


Figura 4

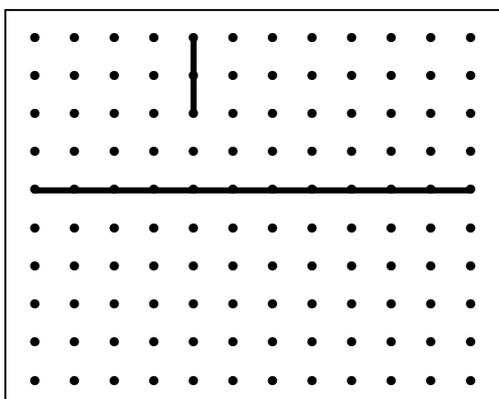


Figura 5

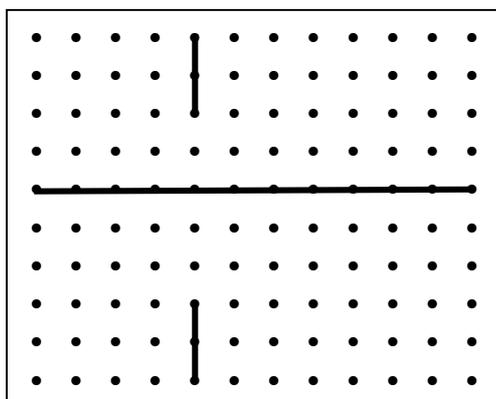


Figura 6

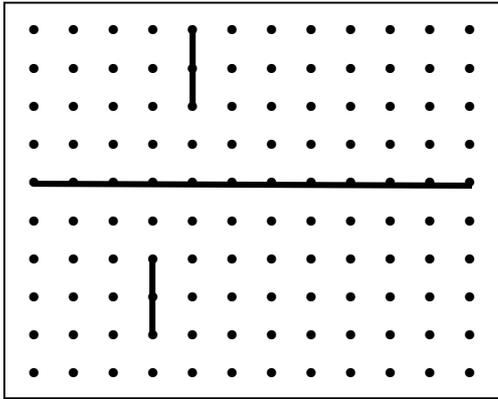


Figura 7

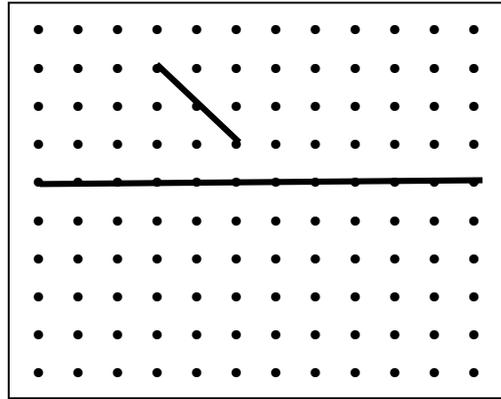


Figura 8

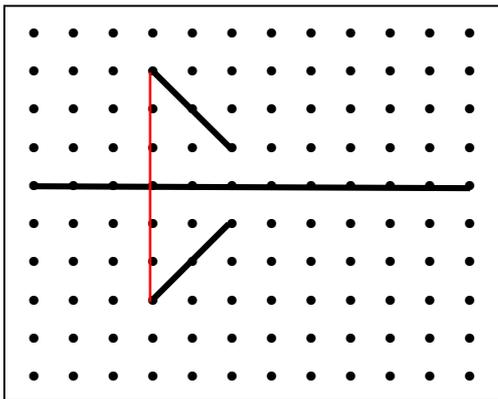


Figura 9

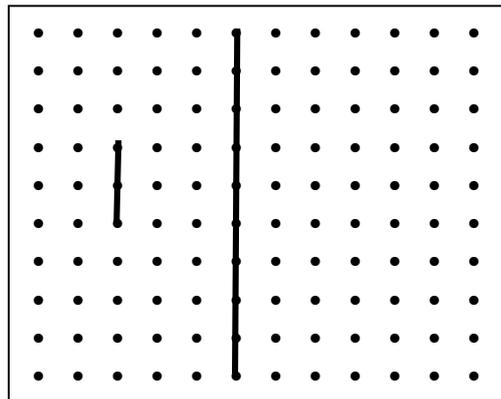


Figura 10

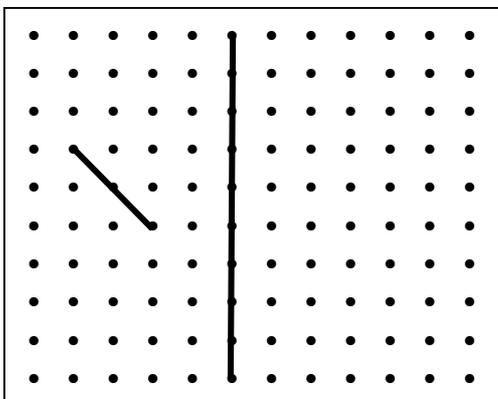


Figura 11

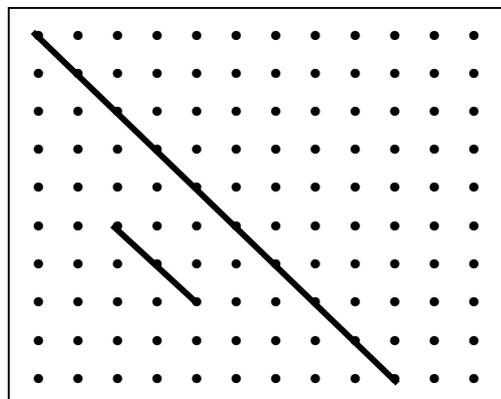


Figura 12

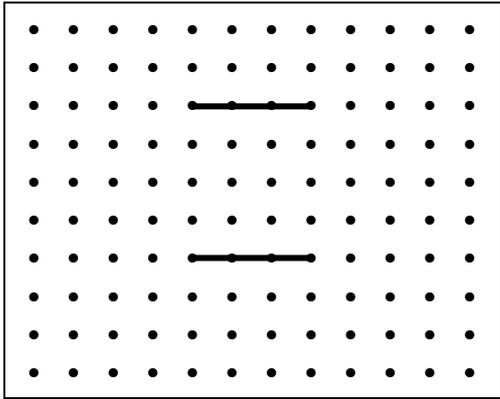


Figura 13

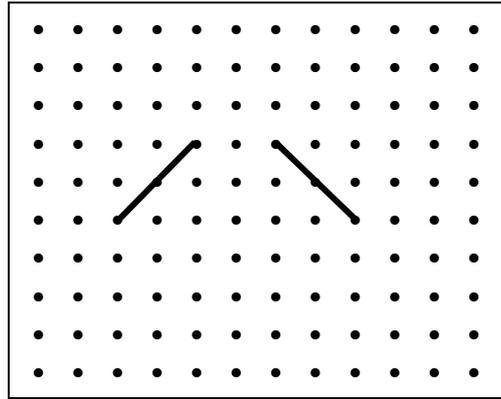


Figura 14

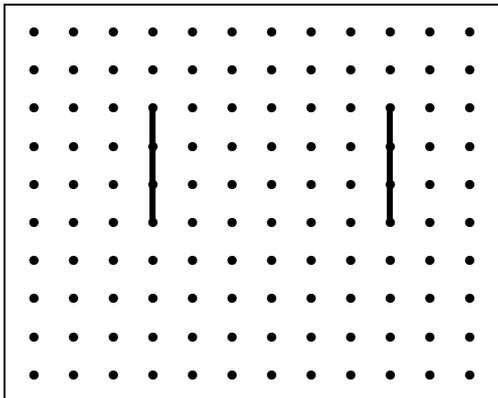


Figura15

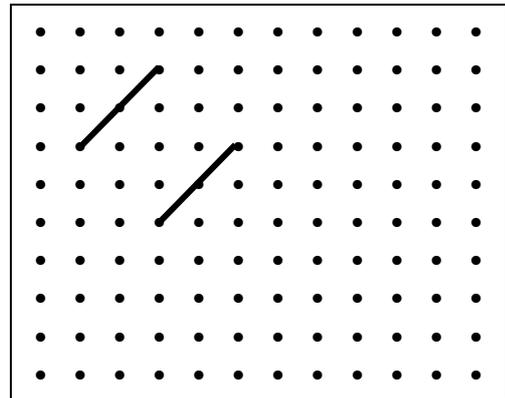


Figura 16

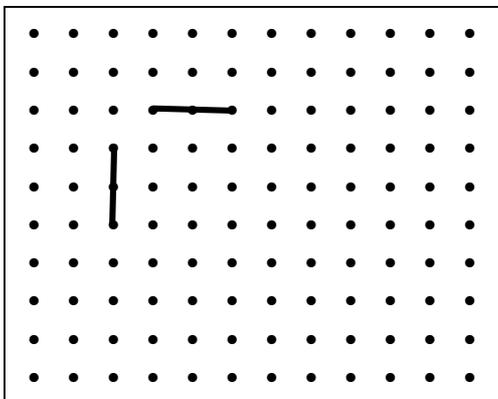


Figura 17

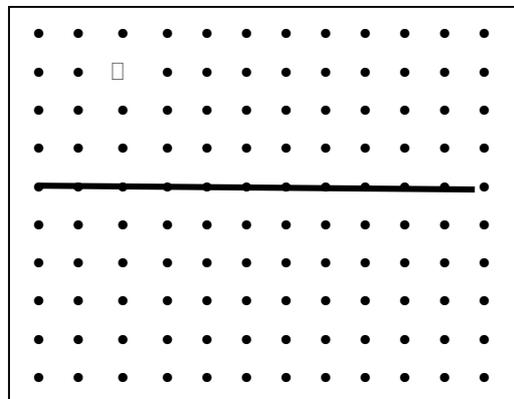


Figura 18

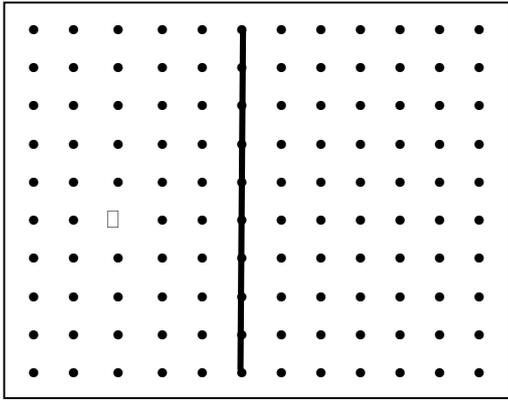


Figura 19

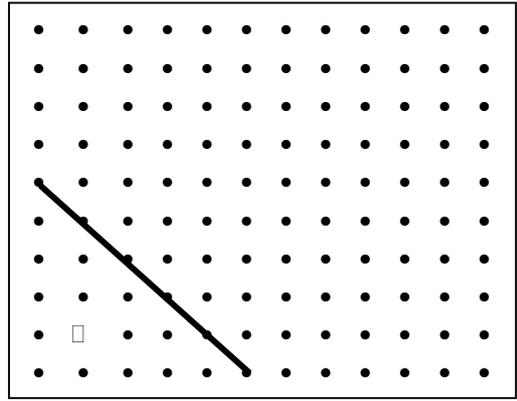


Figura 20

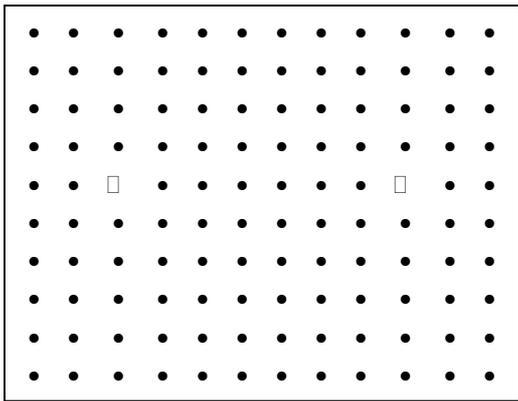


Figura21

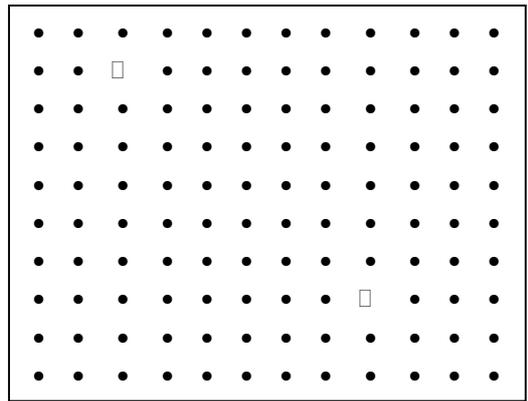


Figura 22

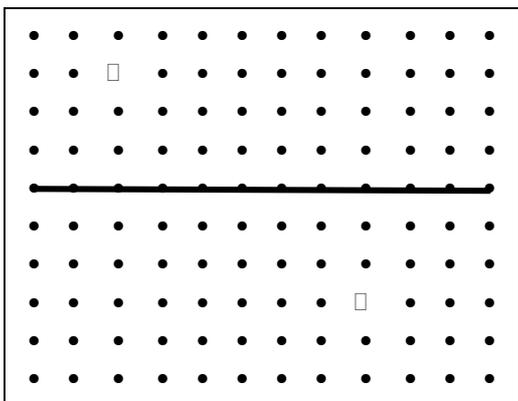


Figura 23

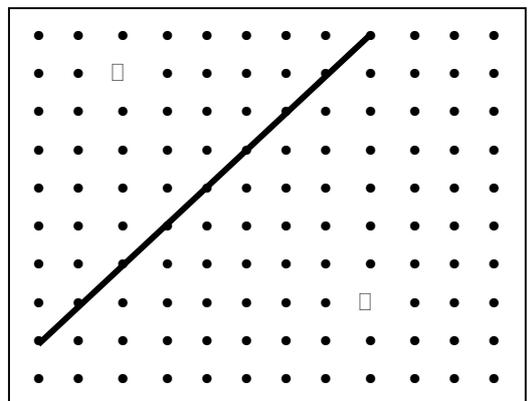


Figura 24

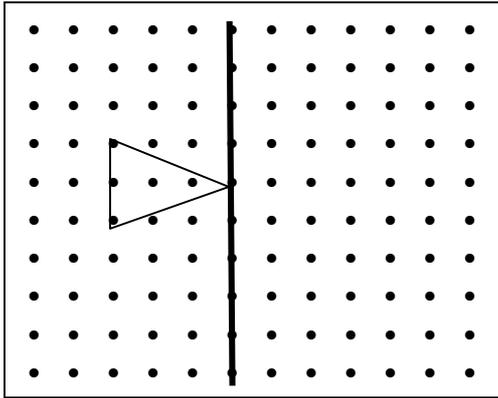


Figura 25