IVANILDO BASÍLIO DE ARAÚJO

UMA ABORDAGEM PARA A PROVA COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E CABRI-GÉOMÈTRE

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
SÃO PAULO
2007

IVANILDO BASÍLIO DE ARAÚJO

UMA ABORDAGEM PARA A PROVA COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E CABRI-GÉOMÈTRE

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação da Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy).

PUC/SP
SÃO PAULO
2007

Banca Examinadora

DEDICATÓRIA

Aos meus pais

Taumaturgo e Tereza (*em memória*)

A Lulu Healy (orientadora)

Por todo o apoio dado e pela competente orientação

Ao professor Vincenzo

Por sua valiosa contribuição na parte histórica deste trabalho

Aos camaradas do Núcleo de Estudos Marxistas da Associação Oeste de Diadema

Por compreenderem os momentos em que estive ausente

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a todos os estudantes e, especialmente, às duplas de alunos (as) da 7ª Série C da Escola Estadual “Vila Santa Maria”, Diadema/SP, que foram parte essencial, tornando possível a realização desta pesquisa.

À Professora Doutora Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy), por sua dedicação constante na orientação e realização deste trabalho.

À Professora Doutora Yuriko Yamamoto Baldin, pelas valiosas contribuições nos aspectos matemáticos deste trabalho.

Ao Professor Doutor Vincenzo Bongiovanni, por sua competente contribuição na parte histórica desta dissertação.

A todos os colegas da turma do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da PUC/SP (2005 a 2007), que direta, ou indiretamente, me ajudaram na elaboração desta pesquisa. Meu sincero respeito e agradecimento a todos.

A todos os participantes do G3-TecMEM (professores, convidados e estudantes), pelas valiosas discussões que muito me ajudaram na elaboração deste trabalho

A todos os professores do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, em especial os professores Saddo Ag Almouloud & Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, disciplina Fundamentos da Didática da Matemática; Wagner Rodrigues Valente, disciplina Metodologia da Pesquisa; Anna Franchi, disciplina Didática da Matemática I; Lulu Healy, disciplina Teorias da Aprendizagem; Maria Célia Leme da Silva, disciplina Estudos Complementares; e Silvia Dias Alcântara Machado & Sônia Barbosa Camargo Igliori, disciplina Didática da Matemática II. Pelas valiosas aulas que nos ministraram, meu muito obrigado a todos.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

RESSUMO

Este trabalho, inserido na temática do uso de tecnologias digitais, discute o ensino e aprendizagem da prova. O objetivo é investigar uma abordagem para a prova em geometria, tomando por objeto de estudo as construções geométricas no ambiente do *Cabri-Géomètre*. A fim de alcançar o objetivo proposto, foi elaborado um experimento de ensino envolvendo estudantes de uma 7ª série da rede pública estadual de São Paulo. Este experimento foi formado por duas fases, o *design* e a análise das atividades. Na fase de *design*, foram criados e aplicados três conjuntos de atividades, sendo um deles fora do ambiente do Cabri. As atividades tinham como uma inspiração a *geometria do compasso* (MASCHERONI, 1980). Para a fase de análise, buscou-se apoio na teoria de Balacheff (1987,1988) sobre as categorias de provas produzidas pelos aprendizes: pragmáticas e conceituais. Por meio das atividades desenvolvidas com o Cabri, além dos aspectos dinâmicos deste *software*, procurou-se explorar os diferentes tipos de ferramentas para a resolução de um mesmo problema proposto. Enfatizou-se, em grande parte das tarefas com construções geométricas, não apenas os aspectos indutivo e dedutivo das provas, mas também possíveis movimentos do primeiro rumo ao segundo. Um dos principais resultados obtidos aponta que o Cabri é bastante sugestivo aos aprendizes no sentido de que tende a facilitar as verificações empíricas de propriedades geométricas nas figuras e, além disso, em grande medida, se centram mais nas tarefas de construções e descrição que nas de justificativas. Outro resultado importante diz respeito às dificuldades dos aprendizes com a noção de construção robusta, indicando que a tela do Cabri é confundida, muitas vezes com o ambiente do lápis e papel.

Palavras-chaves: Argumentação e Prova, Mohr-Mascheroni, Geometria Dinâmica, Cabri-Géomètre

ABSTRACT

This study, inserted in the theme of the use of digital teachnologies within Mathematics Education, discusses the teaching and learning of proof. It aims to investigate an approach to proof in geometry with its basis in geometrical constructions using the software *Cabri-Géomètre.* With this aim in mind, a teaching experiment involving students from the 7th grade of school from the public school system of the state of São Paulo was conducted. The experiment was carried out in two phases: the design phase and the analysis phase. In the design phase, three sets of activities were created and tested, two involved use of the dynamic geometry software, will the thirds was paper and pencil based. The dynamic geometry activities were inspired by Mascheroni´s *geometry of the compass*. During the analysis phase, Balacheff´s notions related to types of proof produced by students (pragmatic and conceptual) were employed (BALACHEFF, 1987, 1988). Through the medium of the dynamic geometry activities, the study sought to explore not only the impact of the dynamism but also how the availability of different tools for the solution of the same problem influenced students´ strategies and thinking. The activities drew from the possibilities associated with geometrical constructions, in terms of aspects inductive and deductive proofs as well as movements between these two poles. Results points to how the use of Cabri encouraged students to at least give attention to empirical verifications of geometrical proprieties within the constructed figures, but may also have contributed to the tendency to focus more on constructions and descriptions than on justifications. Another notable result relates to students´ difficulties with the notion of robust construction, indicating that the screen of Cabri is frequently confused with the paper and pencil environment.

Keywords: Argumentation and proof, Mohr-Mascheroni, Dynamic Geometry, Cabri-géomètre

APRESENTAÇÃO

É muito comum nos planejamentos de Matemática do início de cada ano os professores colocarem, na parte de objetivos gerais, algo como “desenvolver o raciocínio lógico” e até mesmo, às vezes, “desenvolver o raciocínio dedutivo”. O que não ocorre na prática, quase nunca. Ora, desenvolver o raciocínio lógico em matemática sugere uma relação direta com as demonstrações, justificativas de procedimentos, etc. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam o trabalho com atividades que levem o aluno a conjecturar e provar suas próprias conjecturas, ou melhor, atividades que fomentem nos aprendizes a capacidade de argumentar e de explicar, o que poderia ser feito partindo de situações-problema que privilegiem as verificações empíricas de propriedades e relações (MEC,1998). Isso, no ensino de Geometria, seria particularmente muito interessante, pois esta matéria tem sido fortemente negligenciada, principalmente na escola básica. Isso acontece no Brasil e em outros países.

Uma outra sugestão que os PCN enfatizam é que o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes a comunicação efetiva de argumentos matematicamente. O problema é que, de 98 (advento dos PCN) para cá, pouco mudou na prática dos professores de Matemática, notadamente com relação ao ensino de prova e de Geometria, talvez devido à precária formação que obtiveram.

A importância do ensino da prova tem sido enfatizada por inúmeros educadores matemáticos no mundo inteiro, por exemplo, Nasser & Tinoco (2001, 2003), Healy & Hoyles (2000), Vaz (2003) e Balacheff (1987,1988). A maior parte das pesquisas se foca nas dificuldades dos aprendizes em construir argumentos matematicamente válidos. Dito de outra forma, são abordadas as dificuldades dos estudantes em produzir provas matemáticas, seja no campo da álgebra ou da geometria e com o incremento, ou não, do uso do computador. É exatamente nesta perspectiva que trazemos ao leitor a presente pesquisa.

Neste trabalho, apresentamos uma discussão acerca da demonstração em geometria, a partir de uma pesquisa que conduzimos com três duplas de estudantes do nível básico (7ª Série do Ensino Fundamental), numa escola estadual de Diadema, São Paulo. Tratamos, essencialmente, de abordar o tema prova, partindo-se das construções geométricas e Cabri. A opção pelo *software Cabri-Géomètr*e se deve, não somente à sua versatilidade ou ao seu dinamismo, mas também, por que o mesmo se configura como uma via de acesso para a prova.

A história da matemática também é um aspecto relevante enfatizado nesta dissertação. Buscou-se inspiração em fatos relacionados com a história da geometria, como os três problemas clássicos da antiguidade (trissecção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo), mas com especial interesse nas construções geométricas realizadas com o compasso apenas (construções de Mohr-Mascheroni ou Geometria do Compasso). Este aspecto do desenvolvimento histórico da matemática contempla bem aquilo que o foco central deste estudo: as demonstrações em geometria.

Nos próximos parágrafos são destacados os principais pontos discutidos em cada um dos cinco capítulos da presente pesquisa.

No **Capítulo 1** discutimos um pouco de história da matemática focada, especificamente, no contexto da geometria, aproximadamente desde os gregos de 600 a.C. até o século XIX e início do século XX. Procuramos nos concentrar nos aspectos históricos que dizem respeito ao desenvolvimento da matemática pela ótica das demonstrações, particularmente em geometria. Neste capítulo são apresentados também resultados teóricos importantes sobre construções geométricas.

De certa forma, o capítulo sobre história levanta questões importantes, que irão nos levar a uma discussão sobre provas/demonstrações no contexto da Educação Matemática e das novas tecnologias, especialmente os programas ditos de Geometria Dinâmica – O *Cabri-Géomètre*. Este *software* tem se mostrado uma importante ferramenta nas investigações em Educação Matemática, porque é freqüentemente utilizado como recurso no processo de prova.

No Capítulo 2, além dos aspectos citados acima, faremos as devidas considerações teóricas, procurando fundamentar a nossa pesquisa. De um lado, a parte de nossa pesquisa que envolveu a criação das atividades, se fundamenta no trabalho de Mariotti (2001), que enfoca as construções geométricas no Cabri como um campo de experiência para a aprendizagem da prova. De outro lado, para a análise das atividades, nos baseamos nos trabalhos de Balacheff (1987,1988), que versam sobre processos de prova e situações de validação, ou seja, sobre a categorização de provas (empírica e conceitual). Este capítulo também apresenta as *questões de pesquisa* a serem investigadas.

Quanto às questões metodológicas, bem como todo o processo envolvendo o *design* das atividades que compuseram a presente pesquisa, isto será tratado no **Capítulo 3**. Este traz as informações referentes à elaboração, descrição, comentários e resolução das atividades pretendidas para serem aplicadas/realizadas. A metodologia empregada se baseia nos experimentos de ensino, de Kelly e Lesh (2000). Trata-se de um tipo de metodologia baseada em *design*.

A análise de todas as atividades desta pesquisa será objeto de estudo do **Capítulo 4**, no qual lançaremos mão da teoria de Balacheff, sobre classificação de provas, ou seja, serão analisadas as produções matemáticas dos aprendizes: construção, descrição e justificativas. Finalmente, no **Capítulo 5**, apresentaremos os principais resultados obtidos nesta pesquisa, bem como responderemos as duas questões investigadas.

CAPÍTULO 1

Um Panorama da Geometria

1.1 Introdução

Desde o momento em que o homem adquiriu um grau razoável de civilização, eis que começou a interessar-se por problemas de medidas de comprimentos, de áreas etc e, desta forma, se viu obrigado a comparar distâncias e a determinar as dimensões dos corpos que o rodeavam. Conjectura-se que tenha sido isto a origem da geometria. Por exemplo, egípcios, assírios e babilônios já conheciam as principais figuras geométricas, bem como as noções de ângulo que usavam na medição de áreas e na Astronomia. Primeiro, com uma geometria intuitiva, passando em “seguida” a uma geometria científica e desta, para o que temos na atualidade, que é, entre tantas outras, uma geometria demonstrativa.

Discutiremos neste capítulo um pouco de história da matemática. E dentro da história da matemática, focaremos atenção um pouco na forma como a matemática foi sendo construída ao longo dos séculos. Ou melhor, dissertaremos um pouco sobre geometria, raciocínio dedutivo e demonstração em matemática.

1.2 As Etapas da Geometria

Como um dos focos deste trabalho está na história da matemática, se faz necessário desenvolver algumas idéias sobre esta história e, em particular, sobre a história da geometria.

1.2.1 Geometria Subconsciente

Uma das necessidades mais básicas do ser humano é a alimentação e para consegui-la os homens criam, se adaptam a novas situações, se relacionam uns com os outros, etc. Essa busca pela sobrevivência tem sido assim desde os tempos mais remotos.

Desde o início dos tempos, devido às necessidades dos homens na sua caminhada pela sobrevivência, técnicas foram sendo criadas e assim incorporadas ao montante dos conhecimentos já existentes. Por outro lado, pela observação dos fatos e coisas à sua volta, surgia a necessidade de organização e ocupação do espaço físico habitado; concomitante a isto, uma das primeiras noções geométricas que se desenvolveram no homem primitivo foi a de distância.

Todos os povos do mundo desenvolveram e desenvolvem conhecimentos geométricos. Basta lembrarmos das pinturas rupestres nas cavernas, feitas pelos primitivos caçadores da idade da pedra. Esses desenhos nos mostram que já nos homens primitivos as noções de forma, tamanho e proporção estavam presentes (e inter-relacionadas). Portanto, já manifestavam aquilo a que podemos chamar de "geometria **subconsciente**". Para Eves (1992):

> As primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos.(p.1)

Os conhecimentos matemáticos e/ou geométricos vão surgindo como uma necessidade vital de adaptação do homem ao meio em que vive. Por exemplo, da necessidade de demarcar a terra emergiu a noção de figuras geométricas simples (retângulos, quadrados, triângulos); com as construções de casas e muros, teriam surgido as noções de vertical, horizontal, paralela e perpendicular.

Pela observação das formas da natureza, como troncos de árvores, folhas, pétalas de flores, o sol, a lua; certos fenômenos naturais, como o arco-íris e os furacões, tudo isso e muito mais teriam conduzido o homem às primeiras noções de curvas, superfícies e sólidos. As primeiras confecções de cestos, de recipientes de barro ou de cerâmica teriam levado o homem a formar a noção de volume.

O conjunto das artes e das técnicas criadas nos tempos primitivos é o que podemos chamar de "geometria subconsciente" ou primitiva. O que fundamentalmente caracteriza essa etapa da geometria, entre outros fatores, é o fato dela só levar em conta questões concretas, de forma que o saber geométrico era traduzido num montante desconexo de noções geométricas sobre o espaço físico. Mas esse conjunto é que veio a preparar o terreno para uma etapa posterior do conhecimento geométrico.

1.2.2 Geometria Científica

Não se sabe ao certo quando e nem como se deu a passagem da geometria subconsciente a uma forma de geometria superior. Conjectura-se que, mais tarde, após a etapa subconsciente, estava o homem em condições (devido à sua inteligência) de relacionar entre si observações geométricas que, apesar de particulares, tinham em comum propriedades subjacentes. Isto quer dizer, essencialmente, que o homem desse estágio começou a "abstrair" relações dos objetos que observava e, por assim dizer, a tirar conclusões acerca dessas relações.

É nessa etapa da geometria, à qual dar-se o nome de geometria **científica**, que surgem as primeiras elaborações intelectuais de fatos longamente observados, ou seja, vão emergindo pouco a pouco leis geométricas. Por exemplo, a bem conhecida *constante* resultante da razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência pode ter sido percebida (descoberta) a partir de processos envolvendo mensuração prática (processos empíricos).

Domingues (1997) complementa:

> Com isso tinha-se um processo geral para achar o comprimento de qualquer contorno circular, independentemente de o medir diretamente: bastava multiplicar por essa constante o comprimento do diâmetro. Essa questão, em particular, envolve duas outras,a saber, a da natureza dessa constante e a de seu valor, questões essas cuja abordagem requer um grau de sofisticação que somente seria alcançado muitos séculos depois.(p.4)

Caracteriza esse nível mais elevado do desenvolvimento da geometria o fato de os métodos empregados lembrarem o método indutivo moderno, uma vez que indução (observação de casos particulares), ensaio e erro eram os meios de descobertas (EVES, 1992).

Temos nessa época a geometria como um conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório. Esses resultados – uns corretos, outros aproximados ou mesmo errados –, diga-se de passagem, referem-se a áreas, volumes e relações entre várias figuras sugeridas por objetos físicos.

Datam dessa fase as contribuições geométricas dos antigos egípcios e babilônios, de acordo com relatos do historiador grego Heródoto, o qual escreveu que a geometria teria surgido no Egito, a partir de questões envolvendo a medição de terras[1]. Os conhecimentos matemáticos desenvolvidos, tanto pelos egípcios quanto pelos babilônios, constituíam verdades geométricas determinadas por "métodos indutivos", ainda que bastante incipientes. Nessa fase, em geral, não havia preocupação com qualquer justificativa ou demonstração dos resultados obtidos.

1.2.3 Geometria Demonstrativa

Eudemo de Rhodes, que viveu à mesma época de Euclides (séc. III a.C), escreveu "*uma história da geometria grega*", abrangendo desde o seu início até 335 a.C; mas esta se perdeu. O filósofo neoplatônico Proclus (410-485 d.C) teve acesso a essa obra e no seu "*Comentário sobre Euclides, Livro I*" encontramos um breve relato sobre a obra de Eudemo, na verdade um sumário – o chamado "*Sumário eudemiano*". Neste relato Proclus afirma que "a geometria grega parece ter começado essencialmente com o trabalho de Tales de Mileto na primeira metade do século VI a.C" (EVES, 2001, p.7).

Essa geometria grega a que nos referimos deve ser entendida como a precursora da geometria demonstrativa que conhecemos hoje em dia. Além disso, coloca-se Tales como o inaugurador dessa etapa do desenvolvimento geométrico.

Ainda de acordo com Eves (1992):

> Os gregos insistiram em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; as verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório. Em suma, os gregos transformaram a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria 'sistemática' ou 'demonstrativa'. (p.7)

---

[1] Etimologicamente, geometria quer dizer "medida da terra". É claro, entretanto, que esta acepção remonta às origens; a geometria é muito mais que medição de terras.

1.2.4 As Origens do Raciocínio Dedutivo

Há três considerações que devemos fazer acerca das origens da matemática demonstrativa. Em primeiro lugar, e segundo a tradição, é creditado a Tales de Mileto (624 – 548 aC, aprox.), um dos sete sábios da Antigüidade, ter sido o iniciador da geometria demonstrativa. Para Boyer (1996), “Tales foi freqüentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro – originador da organização dedutiva da geometria”. Sendo fato ou lenda, a questão é que a tradição tem sido persistente, e a Tales é atribuída nada menos que a demonstração dos cinco teoremas seguintes: 1) um ângulo inscrito num semicírculo é reto; 2) um círculo é bissectado por um diâmetro; 3) os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; 4) os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais; e 5) se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

Uma segunda consideração sugere que a forma dedutiva tenha surgido mais tarde, pelo início do século V a.C, com a descoberta dos segmentos incomensuráveis[2], o que é defendido por historiadores da matemática como Otto Neugebauer. E por último, uma terceira sugestão é que esse aludido raciocínio dedutivo tenha suas origens fora da matemática, a partir do florescimento, nas cidades-estado gregas, da dialética e da lógica, ramos do saber que tem a ver com convencimento e base racional. Mas, de qualquer forma, é quase unânime a opinião de que a dedução tenha aparecido na Grécia.

Como já fizemos referência a Tales de Mileto, que viveu por volta de 600 a.C, avancemos para cerca de 300 a.C, época em que surge a obra mais marcante das matemáticas, pelas mãos de um grego chamado Euclides de Alexandria.

---

[2] Não se sabe ao certo se foi $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$,ou ainda, o segmento áureo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1.3 Sobre Euclides e seus "Elementos"

Na obra do matemático grego Euclides de Alexandria, escrita por volta de 300 a.C e intitulada *Os Elementos*, encontramos uma compilação de praticamente toda a matemática produzida até então. Mas, é particularmente interessante ressaltar que, como se pensa às vezes, *Os Elementos* não formava um compêndio de todo o conhecimento geométrico; era, sim, um texto que servia de introdução, cobrindo toda a matemática elementar, ou seja:

- ✓ Aritmética – no sentido de "teoria dos números";
- ✓ Geometria sintética – de pontos, retas, planos e esferas; e
- ✓ Álgebra – não no sentido moderno, mas mais em roupagem geométrica.

O conteúdo d'Os Elementos, como apresentado por Euclides, foi o primeiro sistema de idéias desenvolvido pelo homem, a partir do qual umas poucas afirmações simples são admitidas sem demonstração e então utilizadas para se provar outras mais complexas. É o que chamamos de um sistema dedutivo. Este caráter dedutivo, dado com ênfase à geometria, veio a inspirar sábios das mais diversas áreas do conhecimento humano a organizarem suas idéias da mesma forma como está nos Elementos. O "*Principia*", de Newton, em que ele tenta apresentar a física como um sistema dedutivo, e a "*Ética*", de Espinosa, são só alguns exemplos.

Prossigamos dando mais alguns detalhes sobre *Os Elementos*. O que segue é um resumo do conteúdo dos treze livros (ou capítulos) desta obra:

- ✓ Livro I: Construções elementares, teoremas de congruências, áreas de polígonos, teoremas de Pitágoras;
- ✓ Livro II: Álgebra geométrica;
- ✓ Livro III: Geometria do círculo;
- ✓ Livro IV. Construção de certos polígonos regulares;
- ✓ Livro V: A teoria das proporções de Eudoxo;
- ✓ Livro VI: Figuras semelhantes;
- ✓ Livro VII-IX: Teoria dos números;

- ✓ Livro X: Classificação de certos irracionais ou incomensuráveis(Teaetetus);
- ✓ Livro XI: Geometria no espaço, volumes simples;
- ✓ Livro XII: Áreas e volumes achados pelo “método da exaustão” (integração) de Eudoxo; e
- ✓ Livro XIII: Construção dos cinco sólidos regulares (AABOE, 2002).

Como se observa pela descrição anterior, os seis primeiros livros versam sobre geometria plana elementar. A título de exemplo, boa parte das proposições do Livro I nos é apresentada em qualquer curso da escola secundária, como os teoremas “familiares” sobre congruência de triângulos, propriedades das retas paralelas, construções simples com régua e compasso, entre outros. E vale enfatizar ainda que o Livro I termina com a demonstração do teorema de Pitágoras e sua recíproca.

Euclides, de cuja vida pouco sabemos, viveu em Alexandria no final do século III a.C, portanto, pouco antes de Arquimedes (287-212 aC) e de Apolônio (262-190 a.C). Esta monumental obra, composta por 13 livros (ou capítulos), não expõe somente o bê-á-bá das matemáticas; vai muito mais além: “... o principal mérito d’*Os Elementos* é apresentar a totalidade dos conhecimentos segundo uma organização dedutiva e unificada, *axiomática*, como se diz hoje”(BARTHÉLEMY, 1999, p.42.). Além disso, o encadeamento lógico-dedutivo é tão consistente que sua obra permaneceu imune às várias tentativas de mudanças feitas ao longo de vinte séculos de evolução. Mas a partir do século XIX, com as muitas investidas de matemáticos em tentar provar o *quinto postulado* (que sempre causou desconforto aos matemáticos desde a Antiguidade), acabam por surgir as Geometrias Não-Euclidianas : a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica [3](ver adiante).

A obra de Euclides tornou-se um clássico, e não só em seu tempo: Depois da Bíblia, é um dos maiores *best-sellers* de todos os tempos. Mais de 1000 edições desta obra já foram publicadas desde que a imprensa foi inventada. Muito do que estudamos hoje em dia é herança, direta ou indiretamente, d’*Os Elementos.*

---

[3] Na Geometria Hiperbólica, o quinto postulado é substituído pelo que afirma que “por um ponto dado P, fora de uma reta r, existe mais de uma paralela à reta dada”. Já na Geometria Elíptica, postula-se que não existe nenhuma paralela. (COUTINHO, 1989, p.27)

O fato de termos mencionado Euclides e seus Elementos tem uma explicação: a de que Euclides, como professor, fez diversas demonstrações em seu trabalho, como por exemplo, uma demonstração do teorema de Pitágoras, bastante engenhosa, ou então, a de que existem infinitos números primos. Ora, como a maior parte de nossa pesquisa está relacionada com a temática das demonstrações em geometria, o interesse pela obra de Euclides fica justificado. A seguir, daremos uma idéia inicial do que será investigado em nossa pesquisa.

Iniciaremos nossa discussão sobre prova fazendo uma breve retrospectiva do chamado quinto postulado, o postulado das paralelas, por entendermos que este foi uma das alavancas para o desenvolvimento de idéias matemáticas fecundas, que culminaram no aparecimento de novas geometrias, as chamadas geometrias não-euclidianas.

1.4 O Postulado das Paralelas e as Geometrias Não-Euclidianas

Nos tópicos anteriores tratamos de questões relacionadas ao desenvolvimento da geometria, a partir dos *Elementos de Euclides*, que foi o primeiro e o mais influente sistema dedutivo na história da matemática. As sementes plantadas pelo trabalho de Euclides têm influenciado centenas de cientistas e matemáticos desde 2300 anos atrás: as sementes de um sistema axiomático-dedutivo. Isso está de acordo com Greenberg (1997), que enfatiza o método axiomático dos *Elementos* como protótipo do que hoje se chama “matemática pura”, no sentido de “pensamento puro”, ou melhor, sem o uso de experimentos físicos para a sua comprovação, mas apenas através da exatidão do raciocínio utilizado.

Segundo Vaz (2003), se se pretende afirmar que algo é correto usando o método axiomático, duas condições devem ser satisfeitas:

> **1**) Aceitação de certas afirmações chamadas “axiomas” ou “postulados” sem qualquer justificação; e
> **2**) Acordo sobre como e onde uma afirmação “deriva logicamente” de outra, ou seja, um acordo sobre certas regras de raciocínio.” (VAZ, 2003, p.21)

Esta autora ainda nos conta que a pretensão de Euclides nos seus *Elementos* era que toda a sua geometria derivasse de apenas cinco postulados, o que não ocorreu, pois como se percebeu em estudos posteriores, “a primeira proposição do livro primeiro mostra claramente que os axiomas de Euclides não são completos” (AABOE, 2002, p.56). Pede esta proposição que se construa um triângulo eqüilátero com a medida do lado. Uma construção elementar, inclusive que pode ser feita apenas com o compasso. Porém, nada há nos axiomas que nos assegure a existência de um ponto comum entre dois arcos de circunferência, o que mostra a incompletude dos axiomas de Euclides.

Euclides baseou a sua geometria em 10 axiomas separados em dois grupos: cinco foram classificados como “noções comuns” e os outros como “postulados”. A distinção entre eles não é bem clara. As noções comuns parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou a todas as pessoas inteligentes; já os postulados eram considerados como hipóteses características da geometria (BARBOSA, 2001).

Não é possível precisar quais afirmações Euclides assumiu como seus postulados e axiomas nem, muito menos, quantos ele empregou, devido às mudanças e acréscimos em edições posteriores dos Elementos. A maioria dos matemáticos gregos fazia distinção entre postulado e axioma. Na matemática moderna não é feita distinção alguma entre ambos.

1.4.1 Postulados e axiomas na Obra de Euclides

Os cinco axiomas (noções comuns) são:

- A1) Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
- A2) Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.
- A3) Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.
- A4) Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
- A5) O todo é maior do que a parte.

Os cinco postulados são:

- P1) É possível traçar uma reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

- P2) É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.
- P3) É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- P4) Todos os ângulos retos são iguais entre si.
- P5) Se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois retos. Veja a **Fig. 1.1** abaixo.

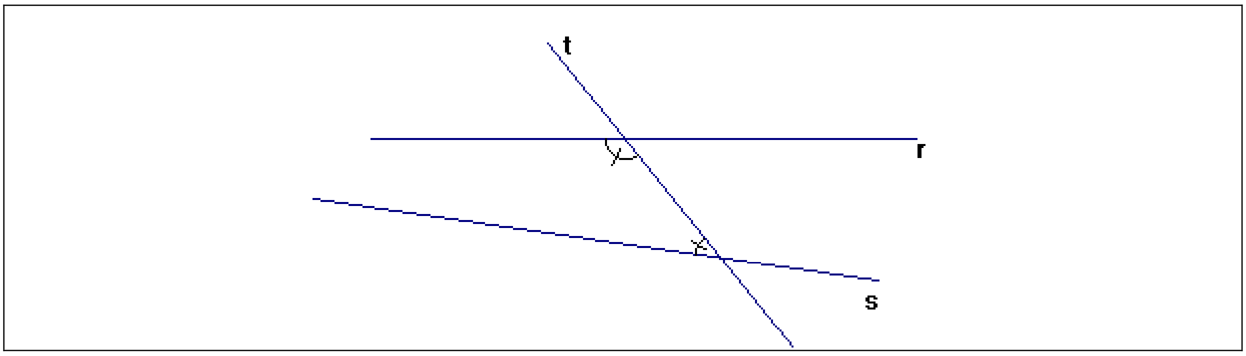


Figura 1.1 - Postulado das paralelas

A questão é que o quinto postulado (acima), desde Euclides, não parecia auto-evidente[4] como os quatro primeiros, procurando-se substitui-lo por um outro equivalente, e das muitas alternativas propostas, a mais comumente utilizada deve-se ao físico e matemático escocês *John Playfair*. Este substituto para o *postulado das paralelas* (como é chamado o quinto postulado), já fora formulado no século V d.C por Proclus. Playfair, que em 1795 publicou seus *Elementos de Geometria,* deu a seguinte faceta ao postulado das paralelas: "Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada" (EVES, 1992).

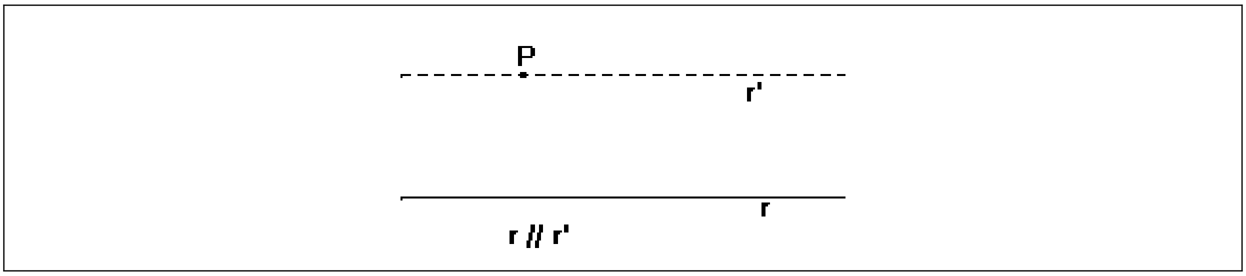


Figura 1.2 - Substituto do Quinto Postulado

[4] Isto quer dizer muitos matemáticos, até o século XIX, tentaram deduzir este postulado como conseqüência dos quatro primeiros.

Muitas descobertas e o surgimento de novas teorias nas matemáticas são particularmente interessantes. Foi o que aconteceu quando matemáticos (especialmente os geômetras) de várias gerações tentaram deduzir como um teorema o *postulado das paralelas* a partir dos quatro primeiros. Muitos foram os esforços e as investigações para "solucionar" este problema, mas muito mais importantes foram os frutos de tais investigações, pois apesar de ter sido provado que o quinto postulado é independente dos demais, essas pesquisas foram o motor propulsor, culminando em alguns dos desenvolvimentos de maior alcance da matemática contemporânea.

Entre os matemáticos mais particularmente importantes que se empenharam em "provar" o 5° postulado, estão G. Saccheri em 1733, J. H. Lambert e Adrien M. Legendre:

> Cada um desses homens tentou instituir uma *reductio ad absurdum*, produzindo uma contradição sob a hipótese de alguma negação de algum equivalente do postulado das paralelas. Embora seus esforços tenham falhado, todos trouxeram à luz várias conseqüências reconhecidas hoje como teoremas importantes de uma geometria não-euclidiana. (EVES, 1992, p.21)

Os próximos matemáticos a se debruçarem sobre o assunto foram, destacadamente, K. F. Gauss (1777-1855), N. I. Lobachevsky (1793-1856) e J. Bolyai (1802-1860), que de fato foram os primeiros a suspeitar e até anunciar a impossibilidade de obter uma contradição sob umas das negações do postulado das paralelas. O que fizeram foi focar atenção na forma de Playfair do postulado das paralelas, analisando três possibilidades: *dada uma reta e um ponto fora dela, pode-se traçar mais que uma reta, exatamente uma ou nenhuma paralela à reta dada*. O terceiro caso é descartado, bastando assumir tacitamente – como o fazia Euclides – a infinitude da reta; a nenhuma contradição se chegou sobre o primeiro caso, apesar de inúmeras investigações; finalmente, cedo ou tarde, cada um deles começou a desconfiar de que contradição alguma poderia haver e também de que a geometria resultante, mesmo que muito distinta da euclidiana, era tão consistente quanto esta. É então que começam a surgir as geometrias não-euclidianas: uma bela criação de matemáticos, como resultado de incansáveis investigações sobre aquelas coisas duvidosas e inalcançáveis.

Somente na segunda metade do séc XIX, de forma definitiva e inquestionável, foram dadas provas da consistência da geometria não-euclidiana e, conseqüentemente, a independência do postulado das paralelas em relação aos outros postulados da geometria euclidiana foi comprovada. Esses feitos monumentais para a matemática devemos principalmente a Beltrami, Klein e Poincaré. E o método consistia, ainda de acordo com Eves, em construir um modelo em que a geometria não-euclidiana tivesse uma interpretação como parte do espaço euclidiano e então, se houvesse uma inconsistência na geometria não-euclidiana, o mesmo ocorreria, correspondentemente, na geometria euclidiana. No próximo tópico exporemos algumas idéias sobre a demonstração na matemática, fazendo antes um breve relato de seus primórdios, desde aproximadamente 600 anos antes de Cristo.

Nosso trabalho tem por preocupação abordar as demonstrações em matemática, particularmente na geometria, onde atacaremos a problemática das construções geométricas e sua fundamentação nas propriedades da geometria euclidiana, ou seja, trataremos o tema prova em torno das justificativas das construções geométricas. Por isso, a nosso ver, é importante que façamos um retrospecto de alguns problemas históricos, com destaque para os três problemas clássicos da antiguidade: o da *quadratura do círculo*, o da *duplicação do cubo* e, em especial, o da *trissecção de um ângulo arbitrário*, porque, como entendemos, tais problemas estão relacionados com as construções geométricas com régua e compasso. E uma outra justificativa é a seguinte: que as investidas de inúmeros matemáticos por tentar solucionar estes problemas (apenas com régua e compasso!) resultaram em muitas descobertas frutíferas, e isso aconteceu porque persistentemente procuraram fazer apenas uma coisa: demonstrações.

1.5 Os Três Famosos Problemas da Antiguidade

Provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado cuja área seja a mesma de um círculo dado. Este problema é o da *quadratura do círculo*. Segundo Eves(2004, p.140), "já em 1800 a.C, os egípcios haviam 'resolvido' o problema, tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado". Como se vê, uma aplicação prática[5] da ciência egípcia. Anaxágoras (c. 499 – c.427 a.C) – primariamente um filósofo da natureza mais que um matemático –, ocupou-se com uma tentativa de quadrar o círculo, mas não se sabe exatamente em que ele contribuiu. Fora o fato de que este problema iria fascinar inúmeros matemáticos por mais de 2000 anos, "não há outros detalhes quanto à natureza do problema ou as regras que o condicionam, sendo que mais tarde ficou entendido que o quadrado procurado, de área exatamente igual à do círculo, deveria ser construído só com régua e compasso" (BOYER, 1996, p.44). Aqui temos um tipo de matemática bem diferente da dos egípcios e babilônios: Não se trata de uma aplicação prática do mundo dos números a uma experiência comum, mas de uma questão teórica que envolve uma diferença clara entre bom grau de aproximação e exatidão de pensamento.

O problema da *duplicação do cubo* – aquele de construir com régua e compasso apenas, a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado – é um dos mais intrigantes de toda a história da matemática, e sua origem está relacionada com lendas mitológicas. Conta-se que por volta de 427 aC (ano da peste, que matou em torno de um quarto da população de Atenas) formou-se uma delegação e que esta foi enviada ao oráculo de Apolo, em Delos[6], para saber como a tal peste poderia ser combatida, ao que o oráculo lhes respondeu que deveriam dobrar o altar cúbico de Apolo. Obedientemente, dobraram as dimensões do altar, com o que conseguiram multiplicar por oito o seu volume, e não duplicá-lo, como pedira o oráculo. A solução[7] é encontrada com o uso de cônicas: a partir de um cubo de aresta x, que tem por volume x^3, se quisermos um novo cubo, de aresta y, que tenha duas vezes o volume do primeiro, basta que façamos $y^3 = 2.x^3$, donde a aresta procurada será $y = x.\sqrt[3]{2}$. Outra forma de duplicar o cubo usa a teoria das proporções de Eudoxo: Parte-se de dois segmentos de reta medindo s e 2s e forma-se a proporção dupla $\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}$, que leva às duas relações

---

[5] Para a área do círculo, os egípcios aplicavam a fórmula $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, o que conduzia a um valor de π de 256/81 = 3,1605 (STRUIK, 1986,p.55). Ou, o que dá no mesmo, $\left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2 = \frac{256}{81} \cdot r^2$.

[6] Daí o problema da duplicação do cubo ser comumente chamado "deliano" ou "délico" .(observação nossa)

[7] A solução não está no uso de nossa notação moderna (como se pensa às vezes), mas sim no uso de cônicas (que não era permitido).

$\frac{s}{x} = \frac{x}{y}$ e $\frac{x}{y} = \frac{y}{2s}$, ou seja, $x^2 = sy$ e $y^2 = 2sx$, donde tirando y na primeira e levando-o à segunda equação, encontramos

$\left(\frac{x^2}{s}\right)^2 = 2sx$, $x^4 = 2s^3x$, $x^3 = 2s^3$ e, portanto, $\boxed{x = s\sqrt[3]{2}}$.

Um terceiro problema começara a circular a esta mesma época em Atenas. Era o problema da *trissecção do ângulo*. Seu enunciado é o seguinte: dado um ângulo arbitrário, pede-se construir com régua (não graduada) e compasso, um outro ângulo igual a um terço do ângulo dado. Sabe-se que Arquimedes tri-seccionava um ângulo arbitrário usando a seguinte construção (ver **Figura 1.3**): dado o ângulo COD = x, traça-se um semicírculo de centro O e raio r que corte em C o lado OC. Marcam-se sobre a régua os pontos A e B, distando r. Agora, desliza-se a régua, mantendo A sobre o prolongamento de OD e B sobre o semicírculo, de maneira que a régua passe por C, obtendo então o ângulo CÂD = y. Exatamente nesta posição tem-se $y = \frac{x}{3}$. Para se chegar a este resultado, primeiro observamos que o triângulo ABO é isósceles, com AB = BO e portanto, m(<BOE) = m(<EAB) = y (propriedade do triângulo isósceles). Agora, observemos que m(<CBO) = y + y = 2y (propriedade do ângulo externo); de forma que o triângulo OBC é isósceles, pois OB = OC = r, o que acarreta m(<OBC) = m(<OCB) = 2y. Finalmente, como x é ângulo externo do triângulo OAC, vem que x = y + 2y, x = 3y e, por conseguinte, $y = \frac{x}{3}$. Observe-se que nesta “construção” é necessário o uso de medidas.

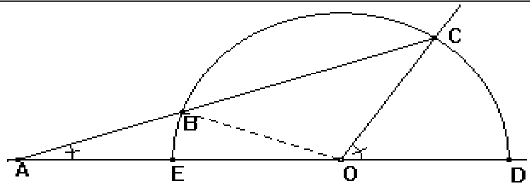


Figura 1.3 – Trissecção de um ângulo arbitrário

Quando a régua não possui escalas, o problema da trissecção é de maneira geral impossível, conforme será mostrado mais adiante.

A importância dos três problemas famosos da antiguidade, os chamados problemas clássicos, está no fato de que muito do esforço dispendido para se resolver esses problemas resultou em muitas descobertas frutíferas, o que veio a influenciar fortemente a geometria grega. Podemos citar as secções cônicas, diversas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes, conforme relatado em Eves (2004, p.134). Boa parte da matemática grega e muito do que apareceu posteriormente em pesquisas matemáticas e até na física, se deveu aos esforços para atingir objetivos inalcançáveis.

No século XIX, portanto mais de 22 séculos depois de os três problemas terem sido concebidos, seria provada a impossibilidade de que os mesmos pudessem ser solucionados apenas com régua (não-graduada) e compasso. Mas a possibilidade de os resolver por métodos aproximados, como exemplificamos acima, grande estímulo deu à matemática, notadamente no tocante à criação de novas teorias. É por isso que os esforços ininterruptos para dar cabo dos três problemas da Antiguidade ilustram o valor heurístico de problemas matemáticos atraentes não resolvidos.

1.6 Os Instrumentos Euclidianos

É muito importante que sejamos claros quanto ao que é permitido fazer com a régua e o compasso. *Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido, passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso, é permitido traçar uma circunferência com centro num ponto dado, passando por um segundo ponto qualquer dado*. O traçado de construções com régua e compasso, encarado como um jogo em que se obedecem às duas regras referidas, provou ser um dos jogos mais fascinantes e absorventes jamais inventados (EVES, 2004, p.134). É de surpreender a gama de construções realmente difíceis que se podem realizar dessa maneira (com esses instrumentos). Portanto, é difícil crer que os três problemas clássicos da antiguidade não possam ser resolvidos por esses meios modernos.

Uma vez que os postulados dos *Elementos* de Euclides limitam o uso da régua e do compasso de acordo com regras dadas acima, esses instrumentos, assim utilizados, ficaram conhecidos como *instrumentos euclidianos*. A limitação diz respeito ao seguinte. A régua não tem escalas[8] (não é graduada) e o compasso de Euclides, também chamado de compasso *dobradiço*[9], difere do compasso moderno, na medida em que com este é permitido traçar um círculo com centro num ponto qualquer e tendo como raio um segmento AB qualquer, ou seja, com o compasso moderno permite-se efetuar o transporte de segmentos.

Poderia se pensar, no entanto, que o compasso moderno é muito mais poderoso que o compasso euclidiano. Mas isso não é o que ocorre. De fato, como será mostrado, toda construção efetuada com o compasso moderno pode também ser efetuada com o compasso euclidiano (eventualmente com um número maior de operações). Dito de outra forma: esses dois instrumentos são equivalentes.

Para provar a equivalência entre compasso moderno e compasso euclidiano usa-se a idéia de transporte de segmentos. A este respeito alguns comentários de Sousa (2005) nos parecem oportunos:

> Ao falarmos em construções com **régua não graduada e compasso** estamos a referir-nos aos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. Estes postulados são a base destas construções, muitas vezes designadas por construções euclidianas. Nos *Elementos* de Euclides não se menciona o compasso ou quaisquer outros instrumentos, Euclides simplesmente assume que linhas rectas podem ser construídas dados dois pontos, e que uma circunferência pode ser construída dado o seu centro e passando por um outro ponto. A régua não tem propriedades métricas e o compasso é de pontas "caídas" (contrariamente ao nosso "compasso moderno" que é de pontas fixas) e assim a possibilidade de transposição de comprimentos é, obrigatoriamente, assegurada por *Elementos* I, 2. (SOUSA, 2005)

A construção[10] – que faz uso de retas e circunferências -- e a prova serão dadas na seqüência.

Dados um ponto A e um segmento BC, construir um ponto F tal que AF = BC.

---

[8] Lembremos que, com uma régua com escalas, é possível trissectar um ângulo.
[9] Com este compasso não é possível transportar segmentos, pois seus braços se fecham logo que uma de suas pontas é tirada do papel.
[10] Em Alves (1991), usa-se o compasso apenas para transportar segmentos. A prova, neste caso, apresenta pequenas variações.

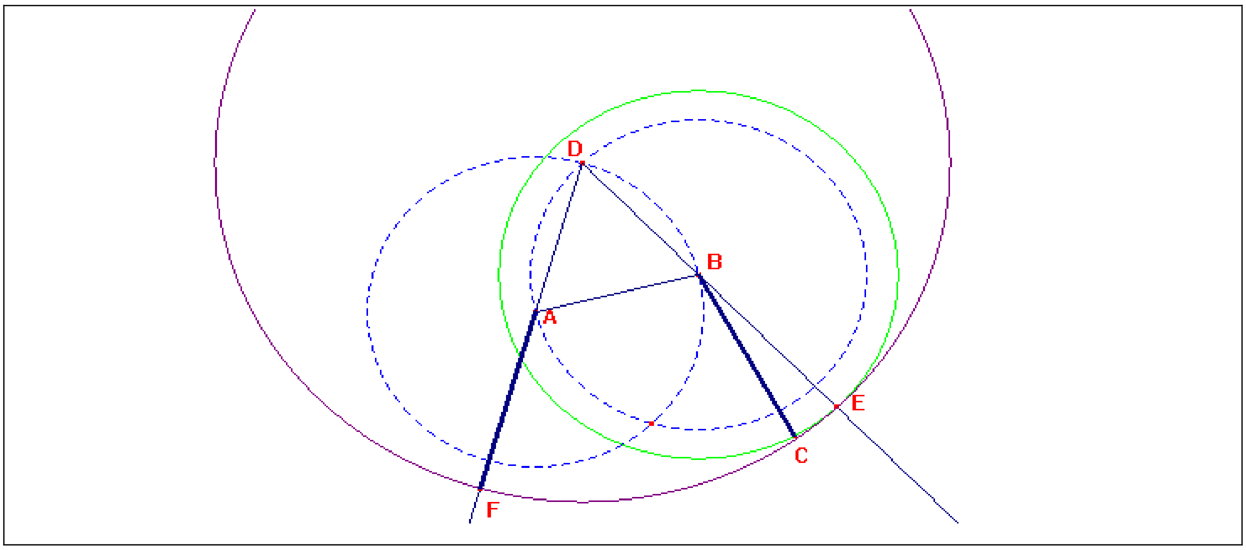


Figura 1.4 Transporte de segmentos (Equivalência de compassos)

Passos da construção:

Dados um ponto A e um segmento BC,

- ✓ Unem-se os pontos A e B (Postulado 1);
- ✓ Construímos o triângulo eqüilátero ABD (Proposição 1[11]), onde D é intersecção das circunferências (A, AB) e (B, BA), de acordo com a figura acima;
- ✓ Construímos a circunferência de centro B e raio BC (Postulado 3);
- ✓ Prolongamos o segmento DB (Postulado 2) até encontrar a circunferência (B, BC) no ponto E;
- ✓ Construímos a circunferência de centro D e raio DE (pelo Postulado 3);
- ✓ Prolongamos DA (Postulado 2), que encontra a circunferência (D, DE) em F.

Então, F é o ponto pretendido.

Prova: Temos que DF = DE (pela definição 15[12]) e que DA = DB (por construção). Daí resulta que AF = BE (pelo Axioma 3). Mas como, pela Definição 15, BC = BE, segue o resultado AF = BC (Axioma 1).

[11] Esta proposição é a que pede para construir um triângulo eqüilátero, dada a medida do lado (segmento de reta).

[12] Esta diz respeito à definição de círculo. Um *círculo* é uma figura plana fechada por uma só linha (a qual se chama periferia ou circunferência), de forma que todos os segmentos conduzidos a ela de um ponto existente dentro da figura são iguais entre si. Este ponto se chama centro do círculo.

Os postulados e os axiomas citados na descrição e prova anterior são aqueles que constam na sessão 1.4.1 (p.9-10).

1.6.1 Construções Euclidianas

O uso da régua não-graduada e do compasso é permitido nas construções geométricas, sendo que as únicas operações possíveis de serem efetuadas com estes dois instrumentos são:

- ✓ Assinalar um ponto, ou arbitrário, ou completamente arbitrário, mas sobre uma figura já desenhada;
- ✓ Traçar uma reta, ou arbitrária, ou completamente arbitrária, mas passando por um ponto conhecido;
- ✓ Traçar a reta que passa por dois pontos conhecidos;
- ✓ Traçar uma circunferência de centro e raio, ou ambos arbitrários, ou um deles conhecido e o outro arbitrário; e
- ✓ Traçar uma circunferência de centro conhecido, conhecendo também ou o seu raio ou um de seus pontos.

Uma construção que possa ser executada com um número finito das operações acima chamar-se-á *construção euclidiana.* Conseqüentemente, nas construções euclidianas os pontos são obtidos de três maneiras, como intersecções de:

- ✓ Duas retas;
- ✓ Duas circunferências; e
- ✓ Uma reta com uma circunferência.

1.6.2 Construções Geométricas

Problemas envolvendo construções geométricas sempre ocuparam lugar de destaque na geometria, além de terem importância teórica fundamental. Passemos a algumas considerações sobre as construções geométricas em seus aspectos gerais. Por uma construção geométrica devemos entender um problema do seguinte tipo: a partir de elementos dados ou prontamente construídos (pontos, retas, círculos, ângulos) outros elementos podem ser derivados, de acordo com as regras seguintes, com base em Breidenbach & Süss (1983; p.198-237):

- ✓ Apenas certos instrumentos bem-definidos podem ser usados em cada caso;
- ✓ Cada um dos instrumentos pode ser usado apenas de uma forma pré-determinada; e
- ✓ A construção deve acabar em um número finito de passos.

Qualquer construção geométrica com régua e compasso obedece a uma seqüência de etapas bem característica e pode envolver ao menos uma das etapas seguintes: (a) unir dois pontos por uma reta; (b) achar o ponto de intersecção de duas retas; (c) desenhar um círculo com um raio dado em torno de um ponto; (d) encontrar os pontos de intersecção entre dois círculos ou entre um círculo e uma reta. Uma construção geométrica consiste, portanto, em encontrar elementos que podem ser pontos, retas ou círculos.

Os esforços de gerações e gerações de matemáticos por resolver os três problemas clássicos da antiguidade resultaram no desenvolvimento de novas idéias, novas teorias e novos procedimentos, a exemplo do que ocorre quando se quer provar a impossibilidade da trissecção de um ângulo arbitrário apenas com régua (sem escalas) e compasso. A questão central aqui é que os matemáticos tiveram que mudar de foco, passando então a considerar a seguinte questão, apontada em Courant & Robbins (2000): “Como é possível provar que certos problemas não podem ser resolvidos?”. Tiveram que concentrar esforços num “casamento” da geometria com a álgebra, na medida em que foi necessário traduzir problemas geométricos para a linguagem da álgebra. Vamos agora dar uma idéia resumida de como este procedimento funciona: um elemento x é procurado a partir de outros elementos a, b, c,... e então o que se tem de fazer é primeiro encontrar uma equação que relacione x com as quantidades a,b,c,... dadas; em seguida, encontramos x resolvendo esta equação para, finalmente determinarmos se esta solução pode ser obtida por processos algébricos que correspondam a processos geométricos.

Para ilustrar o que foi dito acima, consideremos o problema de achar a média geométrica entre a e b. Neste caso, a quantidade x procurada é obtida a partir dos segmentos dados a e b, e devido à semelhança dos triângulos ABE e EBC formamos a equação $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, da qual tiramos $x=\sqrt{a.b}$. De fato, a solução algébrica obtida corresponde à construção geométrica indicada na figura abaixo.

ΔABE~ΔEBC

$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ $\quad x^2 = a.b \quad$ $x=\sqrt{a.b}$

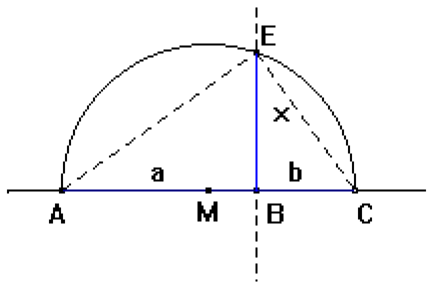


Figura 1.5 – Construção da média geométrica entre *a* e *b*

Nesta situação, o que se vê é um problema algébrico com solução no campo real ser solucionado de forma correspondente no campo geométrico por meio de uma construção com régua e compasso.

Vamos, mais uma vez, nos reportar ao problema da trissecção do ângulo. A prova de que a trissecção do ângulo é de maneira geral impossível usa a idéia simples de considerar um ângulo θ dado por seu co-seno, digamos $\cos\theta$ = g, e desta forma o problema consiste em encontrar o co-seno de $\frac{\theta}{3}$, que como sabemos está relacionado com o de θ pela identidade trigonométrica

$$\cos\theta = g = 4.\cos^3(\frac{\theta}{3}) - 3.\cos(\frac{\theta}{3}),$$

ou seja, o problema de trissectar o ângulo equivale a construir uma solução da equação cúbica

$$4z^3 - 3z - g = 0 \quad (*).$$

O que se tem de demonstrar é que a tri-secção do ângulo não pode ser efetuada por um procedimento válido para todos os ângulos. Para levar a prova a efeito, basta tomar um ângulo que não possa ser trissectado, pois um método geral válido teria que cobrir cada exemplo individual, o que não é possível. De fato, a falta de um método geral será provada se pudermos demonstrar, por exemplo, que o ângulo de 60° não pode ser trissectado apenas com régua e compasso. Agora, do fato de que g = cos 60° = $\frac{1}{2}$ ([13]), a equação (*) pode ser escrita:

$$8z^3 - 6z - 1 = 0,$$

que é uma equação cúbica de coeficientes racionais que não possui qualquer raiz racional[14]. Um teorema importante nos assegura que a raiz desta equação não pode ser construída com régua e compasso: *Se uma equação cúbica de coeficientes racionais não tem raiz racional, nenhuma de suas raízes é construtível a partir do corpo dos racionais*. Pode-se colocar esse resultado de forma mais geral, escrevendo-se o seguinte: *Se um dado número real é construtível, então ele é raiz de um polinômio a uma variável com coeficientes racionais cujo grau é uma potência de 2 (dois)*.

O fato de a equação $8z^3 - 6z - 1 = 0$ ser de grau 3 corresponde à impossibilidade da tri-secção do ângulo. O leitor pode encontrar os detalhes da prova deste fato em Courant & Robbins (2000; p.164-167), que usa a teoria das equações algébricas, em particular a das equações cúbicas. Resumindo, a questão da construtibilidade de um número deve ser enunciada assim: "um número será construtível somente se for algébrico, de grau igual a uma potencia de dois".

---

[13] Se a trissecção não pode ser feita para um certo ângulo, por exemplo, de 60°, então é impossível de maneira geral, exceto, é claro, para os casos de 90° e 180°, que são facilmente trissectados apenas com o compasso.

[14] Se uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_o = 0\ (a_n \neq 0)$ de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional p/q (onde p e q são inteiros primos entre si e $q \neq 0$), então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. No caso da equação $8z^3 - 6z - 1 = 0$, teríamos p∈{1, -1} e q∈{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8}. Assim, se esta equação tiver alguma raiz, ela estará no conjunto $\{1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{8}\}$. Fazendo a verificação para os 8 elementos deste conjunto, constatamos que nenhum deles é raiz da equação dada.

Nossa intenção ao mencionar esses fatos referentes aos problemas clássicos da antiguidade foi basicamente a seguinte: o fato de estarem ligados a problemas de álgebra e teoria dos números, além de, teoricamente, o assunto nos remeter ao campo das construções geométricas com régua e compasso.

Enfim, convém ressaltar que as construções geométricas têm uma importância teórica (e prática) fundamental no ensino e aprendizagem de geometria, além de representarem uma poderosa ferramenta nas investigações matemáticas.

1.6.3 Construções geométricas com restrições: Régua ou compasso apenas?

Que construções são possíveis apenas com a régua? E que construções são exeqüíveis apenas com o compasso? Muitos estudiosos se debruçaram sobre estas questões e é com base no trabalho dessas pessoas que daremos as devidas respostas.

É sabido que o uso conjunto da régua e do compasso amplia consideravelmente a gama de construções que se pode realizar. Mas a restrição a um desses instrumentos constitui um ponto de interesse central nos problemas de construções geométricas, como é o caso do que se pode construir apenas com a régua. Neste caso, a ausência do compasso é uma restrição real e muito significativa, sendo que o estudo sistemático do que é possível fazer usando somente a régua nos leva à Geometria Projetiva (LEITE; 1983). Uma boa referência para este assunto se encontra na obra intitulada *Geometria do compasso ou de geometria de Mascheroni*, de Lisboa (1915).

As construções geométricas com meios limitados dizem respeito às restrições adicionais na escolha dos instrumentos a serem usados e/ou à maneira de acordo com a qual devem ser usados. Certamente, umas dessas restrições que mais interessará ao nosso presente trabalho, *é a de que a régua pode ser dispensada nas construções geométricas*. Ainda de acordo com Leite (1983; p.3), a restrição ao uso da régua teve origem por razões de ordem prática, com a dificuldade de se obter réguas de boa qualidade e em vista disso, desenhistas e construtores dos primórdios do renascimento passaram a usar, sempre que possível, o compasso em detrimento da régua.

A limitação tradicional nos instrumentos usados para as construções geométricas somente pelo compasso e pela régua remonta à antiguidade. De fato, a geometria de Euclides (euclidiana) se fundamentou sobre as construções geométricas cumpridas mediante o compasso e a régua (KOSTOVSKI, 1980, p.8). Além disso, o compasso e a régua eram considerados equivalentes, ou seja, foi completamente indiferente como se realizavam algumas construções separadas – se com a ajuda do compasso e da régua, por meio de um compasso ou de uma régua somente.

Quanto ao uso apenas do compasso nas construções geométricas, pode-se afirmar que esta ferramenta tem sua importância justificada por ser mais precisa que a régua, sendo possível construir, sem recorrer à régua, certas figuras como o hexágono regular (e também o triângulo eqüilátero) e achar o simétrico de um ponto (simetria central e axial). E por ser mais precisa, tinha aplicação imediata na construção de certos instrumentos astronômicos e gravações em placas metálicas finas, que, segundo Kostovski (1980), teria sido [um outro] o motivo que veio a estimular as investigações das construções geométricas somente com o compasso.

Continuemos. Poderíamos indagar: qual o interesse próprio das construções apenas com o compasso? Uma resposta é devida ao professor José Paulo Q. Carneiro:

> Em primeiro lugar, devemos ressaltar que dentro da linha de 'pureza' procurada pelos gregos, o compasso é, sob um certo aspecto, mais nobre que a régua, uma vez que nesta, somos obrigados a utilizar o seu 'fio', que já foge dos dois pontos iniciais que determinam a reta, isto é, os outros pontos da reta são determinados pela régua, 'plagiando um instrumento físico previamente construído, enquanto que o compasso é de fato um instrumento baseado em apenas dois pontos, correspondentes a um centro e um ponto de passagem, ou seja, o compasso acompanha mais de perto a teoria. Por outro lado, deve ser observado que, justamente no final do século XIX, com o uso cada vez maior dos motores de explosão, passou a interessar particularmente aos cientistas o problema de como transformar, mecanicamente, um movimento circular em um movimento retilíneo, o que equivale, geometricamente, a construir retas só com o compasso. Neste sentido, é particularmente interessante uma obra de 1877, intitulada '*Como desenhar uma linha reta*: *uma lição sobre engrenagens*', do inglês A. B. Kempke. (CARNEIRO, 2000, p.107)

1.6.4 As Construções de Mohr-Mascheroni

As construções que fazem uso apenas de um compasso foram descobertas por G. Mohr (1640-1697), um matemático dinamarquês que em 1672 publicou um livro intitulado *Euclides danicus*[15]*,* no qual mostrou que **toda construção ponto a ponto que possa se realizar com régua e compasso pode ser realizada apenas com o compasso** (BOYER,1996). Mas, ainda segundo este autor, assim como Lahire (1640-1718), Mohr não foi um matemático reconhecido em sua época. Tanto é assim que só em 1928 um exemplar de seu livro foi encontrado numa livraria de Copenhagem (Dinamarca) pelo também dinamarquês Guelmslev e o que sabemos hoje ser a geometria do compasso é devida, não a Mohr, mas ao geômetra e poeta italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), um professor da Universidade de Pavia, que em 1797 publicou sua *Geometria del compasso*. Neste livro, segundo Eves (2004), Mascheroni fez a fantástica descoberta de que todas as construções euclidianas, na medida em que os elementos dados e procurados são pontos, podem ser feitas apenas com o compasso, demonstrando assim a superfluidade da régua. Mas entenda-se que não é possível traçar (construir) uma reta com o compasso; deve-se ter em mente uma reta como sendo determinada por dois de seus pontos. Hoje em dia a geometria do compasso recebe o nome de geometria de Mohr-Mascheroni e mais adiante daremos uma demonstração dos resultados (teorema) de Mohr-Mascheroni.

Com relação às construções utilizando-se apenas a régua, sabe-se que em 1822, *Poncelet*, inspirado pelo trabalho de *Mascheroni*, sugeriu que todas as construções euclidianas planas podem ser efetuadas com uma régua desde que seja dada uma única circunferência e seu centro.

Este teorema foi provado em 1833 por *Steiner* e é conhecido hoje por Teorema de *Poncelet-Steiner*. Em outras palavras, o teorema diz que não se pode na geometria euclidiana, dispensar totalmente o compasso, mas tendo usado este para traçar uma circunferência e o seu centro, pode-se daí por diante dispensá-lo e utilizar somente a régua. Em 1904, o italiano F. Severi foi muito mais além,

[15] Euclides dinamarquês

mostrando que é suficiente dispor de um arco de circunferência (por menor que seja) e seu centro, a fim de cumprir todas as construções euclidianas com a régua apenas.

A seguir enunciaremos o teorema que nos garante que a régua é supérflua nas construções euclidianas.

1.7 Teorema de Mohr - Mascheroni

O enunciado do Teorema de Mohr-Mascheroni é o seguinte:

Todo ponto do plano obtido através de uma construção euclidiana pode ser obtido por uma construção utilizando apenas o compasso.

A demonstração do teorema acima será dada mostrando, primeiro, que é possível, apenas com o compasso, encontrar o ponto de intersecção de duas retas (não paralelas). Segundo, mostrando que o(s) ponto(s) de intersecção de uma reta com uma circunferência (quando existirem) podem ser obtidos somente com o compasso. O que será feito demonstrando-se os lemas abaixo enunciados:

1.7.1 Lema 1

Sejam A, B, C e D pontos distintos do plano tais que as retas AB e CD concorrem no ponto X. Nestas condições, é possível obter-se o ponto X por uma construção usando-se apenas o compasso.

1.7.2 Lema 2

Seja C uma circunferência de centro O e raio R e A e B dois pontos do plano de C tais que a reta AB intercepta a circunferência C. É possível nestas condições determinar os pontos M e N de intersecção de C com a reta AB, utilizando-se apenas o compasso.

Passaremos, agora, à demonstração dos lemas.

1.7.3 Prova do Teorema

A prova dos lemas anteriormente enunciados será feita através da resolução de 8 problemas e, assim, de maneira construtiva, ao final deles teremos demonstrado o Teorema de Mohr-Mascheroni (FERREIRA[16], 2000; MASCHERONI, 1980; KOSTOVSKI, 1980).

Problema 1: Dados três pontos A, B e C não alinhados, achar o simétrico de C em relação à reta AB .

Antes de solucionarmos este problema, vamos definir "ponto médio" e "simetria axial".

Definição 1) **Ponto Médio**: Dados os pontos A e B, chama-se ponto médio do segmento AB o ponto M, colinear com A e B, tal que AM = MB.

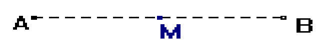


Figura extra 1 – ponto médio

Definição 2) Ponto Simétrico (Simetria Axial): Dadas uma reta r e ponto P,define-se **simetria axial** de eixo r como uma aplicação que faz corresponder:

- a cada ponto da reta r esse mesmo ponto P;
- a cada ponto P não pertencente à reta r, um ponto P', tal que r seja perpendicular ao segmento PP' pelo seu ponto médio. A reta r chama-se eixo de simetria.

[16] A principal referência para a demonstração deste resultado se baseia no trabalho de Shirley Ferreira (Trabalho de Conclusão de Curso, sob orientação do professor Sérgio Alves)

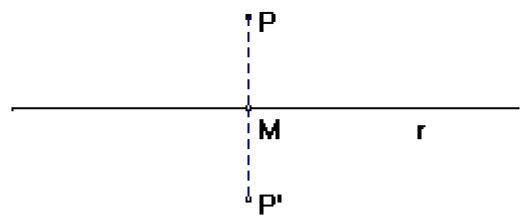


Figura extra 2 – simetria axial

Passos da Construção:

- ✓ construa a circunferência C_1 de centro no ponto A passando pelo ponto C;
- ✓ construa a circunferência C_2 de centro no ponto B passando pelo ponto C;
- ✓ tome C' pertencente à intersecção de C_1 e C_2 e tal que C≠C' ;

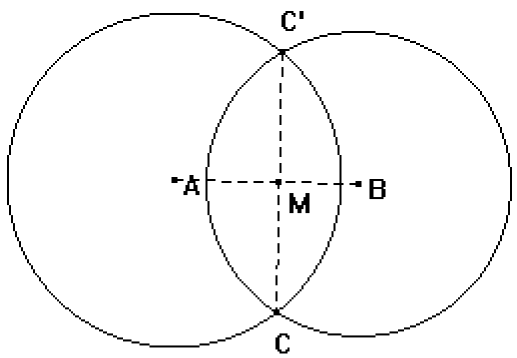


Figura 1.6 – Construção do simétrico de um ponto; simetria axial.

Justificativa:

Sabemos, por construção, que AC=AC' e que BC=BC'. Como AB é lado comum aos triângulos ABC e ABC', podemos dizer que eles são congruentes (pelo caso LLL). Agora, seja $M = \overline{AB} \cap \overline{CC'}$. Os triângulos ACM e AC'M são congruentes pelo caso LAL, pois

AC = AC' (raio) (**L**)
$\angle$ CÂM $\equiv$ $\angle$ C'ÂM (por causa da congruência dos triângulos ABC e ABC') (**A**)
AM = AM (lado comum) (**L**).

Conseqüentemente, temos CM = C'M e $\angle C\hat{M}A \equiv \angle C'\hat{M}A$ (devido à congruência LAL acima). Além disso, como $C\hat{M}A + C'\hat{M}A = 180^o$, podemos concluir que $C\hat{M}A = C'\hat{M}A = 90^o$ (pois se dois ângulos são congruentes e a soma de suas medidas é igual a dois ângulos retos, então cada um deles mede 90º). Como provamos que os triângulos AMC e AMC' são congruentes e com ângulos retos nos vértices em M, concluímos que C' é o simétrico de C em relação à reta AB.

Problema 2[17]: Dados os pontos A e B, achar o ponto C da reta AB tal que B seja ponto médio do segmento AC . Generalize o exercício para obter um ponto C de tal forma que AC=mAB, m∈ℕ.

Passos da Construção:

- ✓ construa um triângulo eqüilátero ABD de base AB
- ✓ construa outro triângulo eqüilátero BDE com E≠A
- ✓ com base BE construa o triângulo eqüilátero BEC tal que C≠D

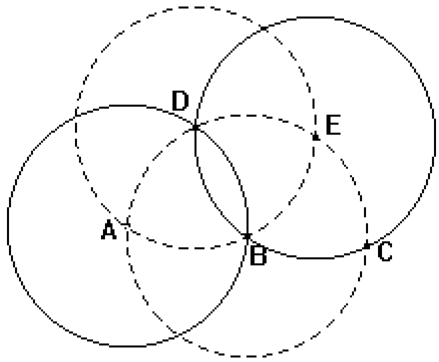


Figura 1.7 – Construção do simétrico de um ponto (simetria central).

Justificativa:

Sabemos que os triângulos ABD e BDE são eqüiláteros, assim, AB=BD, BD=BE e m(∠ABD) = 60°= m(∠DBE). Da mesma forma, o ΔBEC é eqüilátero e, assim, BE=BC=AB e m(∠EBC) = 60°. Ou seja, como a soma dos 3 ângulos no vértice B é igual a dois ângulos retos (ângulo raso), os pontos A, B e C são colineares e como AB = BC = raio (por construção), temos que B é ponto médio do segmento AC, o que implica AC = 2.AB. Repetindo-se o processo para os pontos B e C, ou seja, dobrando o segmento BC, teremos triplicado AB, o que se faz

[17] Este problema é equivalente àquele de multiplicar de duplicar, triplicar, etc, um segmento de reta.

encontrando um ponto F na reta AB tal que AF=3AB. E assim por diante, de forma análoga, conseguimos encontrar um ponto P na reta AB tal que AP=m.AB, para m natural.

Problema 3: Dados três pontos A, B e C, verifique se estes são colineares. Justifique a resposta.

Passos da construção:

- ✓ traçar a circunferência de centro em A e raio AC;
- ✓ trace outra circunferência de centro C e raio AC;
- ✓ encontre os pontos D e E de intersecção destas circunferências
- ✓ se BD=BE então os pontos A, B e C são colineares.

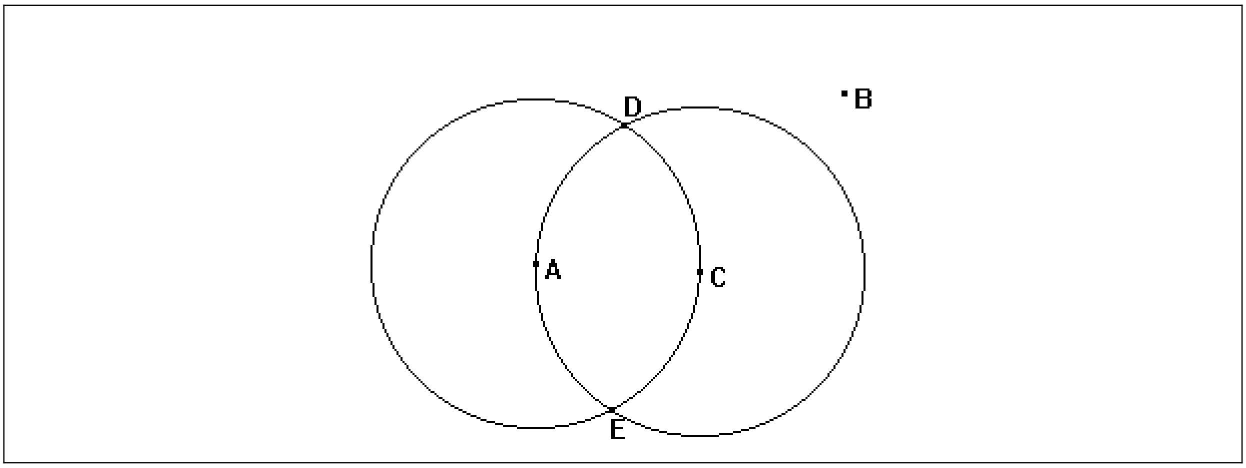


Figura 1.8 - Verificação de colinearidade de pontos.

Antes de passarmos à justificativa, precisamos definir mediatriz e demonstrar dois resultados importantes relativos a este conceito.

Mediatriz: Chama-se mediatriz de um segmento de reta a reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio. A reta mediatriz tem a **propriedade** de que todos os seus pontos (e somente eles) são eqüidistantes dos extremos do segmento (A mediatriz é o que se chama de um Lugar Geométrico). Esta propriedade é o

Teorema. Se P pertence à mediatriz do segmento de reta AB, então P é eqüidistante de A e B.

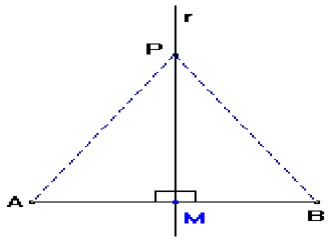


Figura extra 3 – mediatriz

Por hipótese, P pertence à mediatriz de AB. Temos que provar que P é eqüidistante de A e B, ou seja, que PA = PB.

Hipótese: A reta r é mediatriz de AB

Tese: PA = PB

Demonstração. Primeiramente é preciso lembrar que, por definição, a mediatriz é perpendicular a AB e passa pelo seu ponto médio. A partir disso, vamos provar que os triângulos PMA e PMB são congruentes. Vejamos:

MA = MB (pois por hipótese, M é ponto médio de AB) (**L**)

$\angle AMP \equiv \angle BMP$ (por hipótese, ambos são retos) (**A**)

PM = PM (lado comum) (**L**).

Pelo critério LAL, os triângulos PMA e PMB são congruentes e dessa congruência concluímos que PA = PB.

Recíproco. Dado o segmento AB e o ponto P tal que PA = PB, então o ponto P pertence à mediatriz de AB (ou seja, ele existe na perpendicular ao meio do segmento AB).

Demonstração. Primeiro, une-se o ponto A com M, o qual divide ao meio o segmento AB (M é o ponto médio de AB). Temos então que os triângulos PMA e PMB são congruentes pelo caso LLL, visto que

PA = PB (por hipótese) (**L**)

AM = BM (pois M é ponto médio) (**L**)

PM = PM (lado comum) (**L**)

Logo, os ângulos PMA e PMB são congruentes e como eles são suplementares, concluímos que cada um deles é igual a um ângulo reto, ou seja, $m(\angle PMA) = m(\angle PMB) = 90^\circ$.

Portanto, as retas por AB e PM são perpendiculares, o que prova que o ponto P pertence à perpendicular pelo ponto médio do segmento AB (P pertence à mediatriz de AB).

Na verdade provamos que P pertence à mediatriz de AB se, e somente se, PA = PB.

Justificativa:

Os triângulos AEC e ADC são congruentes, pelo caso LLL. Assim, D e E são simétricos em relação à reta AC (conforme **Problema 1**).

Da construção acima, temos que CD = CE, ou seja, P pertence à mediatriz do segmento DE; da mesma forma, AD = AE e então, A pertence à mediatriz de DE. Para verificar se os pontos A, B e C são colineares basta comparar com o compasso os segmentos BD e BE. Se BD=BE, tem-se que B pertence à mediatriz do segmento DE e, portanto, os pontos A, B e C são colineares; caso contrário, B não pertence à reta AC e, assim, os pontos A, B e C não serão colineares.

Problema 4: Dados dois pontos A e B, achar o ponto médio do segmento AB .

Passos da construção:

- ✓ construa o ponto C tal que B é ponto médio do segmento AC (problema 2)
- ✓ construa a circunferência C_1 de centro A passando pelo ponto B
- ✓ construa outra circunferência C_2 de centro C e de raio AC
- ✓ faça a intersecção de C_1 e C_2 encontrando os pontos X e Y
- ✓ construa a circunferência C_3 de centro X passando pelo ponto A
- ✓ construa a circunferência C_4 de centro Y passando pelo ponto A

- ✓ tome M pertencente à intersecção de C_3 e C_4, com M≠A (M será o ponto procurado)

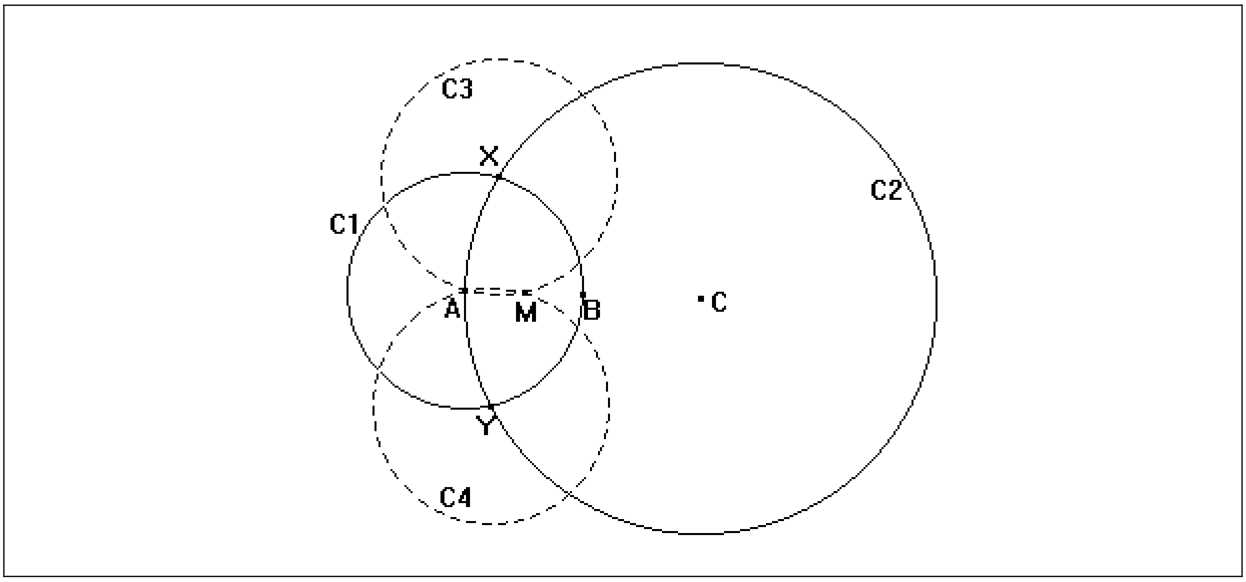


Figura 1.9 - Construção do ponto médio.

Justificativa:

Pela construção do ponto C sabemos que B está entre os pontos A e C; como C pertence à mediatriz do segmento XY (pois, por construção, CX = CY) e como também B pertence à mediatriz de XY (pois, por construção, BX = BY), tem-se que C é colinear com A e B. Agora, observando que as circunferências C_3 e C_4 têm o mesmo raio (por construção), o ponto M é tal que MX = MY e, portanto, M pertence à mediatriz de XY, donde se conclui que A, M e C são colineares, como o são também A, M e B. Além disso, os triângulos AXM e ACX são semelhantes já que são isósceles e possuem os ângulos da base congruentes ao ângulo XÂC. Logo, $\frac{AM}{AX} = \frac{AX}{AC} \Rightarrow AM = \frac{(AX)^2}{AC}$. Mas, por construção, sabe-se que AC = 2.AB e AX = AB, donde se segue que $AM = \frac{(AB)^2}{2.AB} = \frac{AB}{2}$.

Como provamos que os pontos A, M e B são colineares e que AB = 2.AM, disso resulta que M é ponto médio de AB.

Problema 5: Dado um arco AB em uma circunferência de centro O e raio R, achar a bissetriz deste arco.

Passos da Construção

- ✓ construa a circunferência C_1 de centro no ponto O e raio AB;
- ✓ construa a circunferência C_2 de centro no ponto A e raio R;
- ✓ construa a circunferência C_3 de centro no ponto B e raio R;
- ✓ seja C o ponto tal que $C \in C_2 \cap C_1$ e ABOC seja um quadrilátero;
- ✓ seja o D ponto tal que $D \in C_3 \cap C_1$ e ABDO seja um quadrilátero;
- ✓ construa a circunferência C_4 de centro no ponto C e raio CB;
- ✓ construa a circunferência C_5 de centro no ponto D e raio DA;
- ✓ ache um ponto E tal que $E \in C_4 \cap C_5$;
- ✓ trace a circunferência C_6 de centro C e raio OE;
- ✓ trace a circunferência C_7 de centro D e raio OE;
- ✓ Encontre os pontos X e X_1 na intersecção de C_6 e C_7.

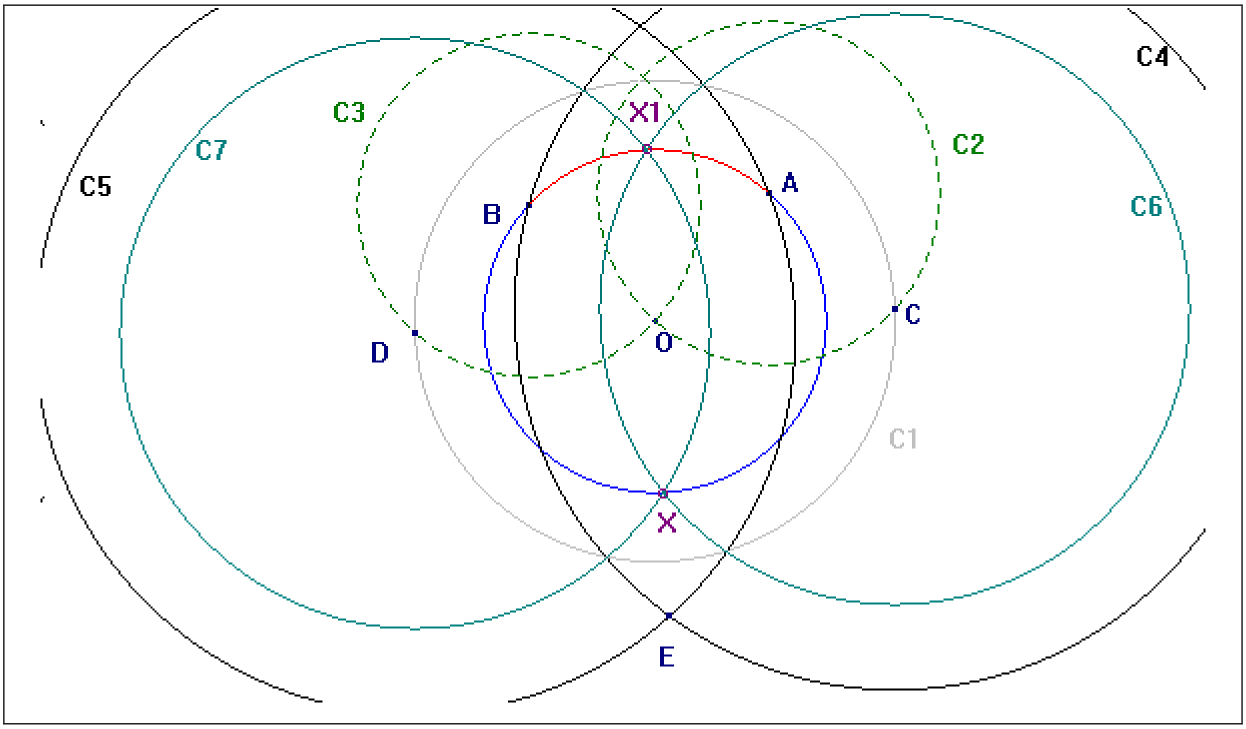


Figura 1.10 - Bissecção de arco

Justificativa:

O quadrilátero ABDO é um paralelogramo, pois os pares de lados opostos AB e OD, e AO e BD são congruentes, ou seja, AB=OD e AO=BD. Analogamente, ABOC também é paralelogramo. Assim, os pontos C, O e D são colineares, pois CO//AB e OD//AB. Devido ao fato dos triângulos CED e CXD serem isósceles, temos m($\angle$COE) = m($\angle$COX) = 90° (pois CO=OD). Deste modo, a reta OX é perpendicular à corda AB.

Vamos provar, primeiro, que OX é a bissetriz do arco AB e, em seguida, que OX=R (ou seja, que ponto X pertence à circunferência dada, de centro O e raio R). Vamos à prova?

1ª Parte: Vamos provar que OX bissecta o arco AB, o que se faz provando que CX =DX.

ΔOCX	ΔODX	Justificativa	Critério
OC =	OD	Pois O é ponto médio	**L**ado
$\angle$CÔX $\equiv$	$\angle$DÔX	Ângulo reto, 90º	**Â**ngulo
OX =	OX	Lado comum	**L**ado

Logo, pelo caso LAL, os dois triângulos OCX e ODX são congruentes. Conseqüentemente (devido a essa congruência), podemos concluir que CX= DX e, portanto, CX bissecta de fato o arco AB.

2ª Parte: Prova de que OX = R.

O quadrilátero ABOC é paralelogramo e daí temos:

OC = AB, AC = OB, m($O\hat{C}A$) = α e m($C\hat{O}B$)= $180^o - \alpha$.

Aplicando a lei dos co-senos, respectivamente, aos triângulos AOC e BOC, teremos:

- No triângulo AOC,

$AO^2 = OC^2 + OB^2 - 2.OC.OB.\cos(\alpha)$ (**I**)

- No triângulo BOC,

$BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2.OC.OB.\cos(180^o - \alpha)$; mas como $\cos(180^o - \alpha) = -\cos(\alpha)$, esta igualdade se transforma em

$BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2.OC.OB.\mathbf{(} -\cos(\alpha)\mathbf{)}$, ou melhor:

$BC^2 = OC^2 + OB^2 + 2.OC.OB.\cos(\alpha)$ (**II**)

Da figura, pode-se observar que:
AB = OC,
CX = OE e
CE = BC

Adicionando, membro a membro, as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$AO^2 + BC^2 = 20B^2 + 2AB^2$$

$$R^2 + BC^2 = 2R^2 + 2AB^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 2AB^2 + R^2$$

Além disso, o triângulo COE é retângulo e, portanto,

$$CE^2 = BC^2 = 0C^2 + OE^2 \Rightarrow 2AB^2 + R^2 = AB^2 + OE^2$$

$$\Rightarrow OE^2 = AB^2 + R^2$$

Finalmente, notando que o triângulo COX também é retângulo, obtemos

$$OX = \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2}$$
$$= \sqrt{AB^2 + R^2 - AB^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Ou seja, OX = R.

Assim, o ponto X pertence à circunferência de centro O e raio R dada e bissecta o arco AB.

Note que a solução do problema de bissectar um dado ângulo arbitrário AÔB, é conseqüência imediata deste, pois basta traçarmos uma circunferência C com centro em O e raio R arbitrário e bissectarmos o arco correspondente.

Observação: Este resultado pode ser usado para encontrar o ponto de intersecção entre uma reta e uma circunferência, no caso em que a reta passa pelo centro da circunferência.

Problema 6: Determinar, quando possível, os pontos de intersecção de uma reta dada pelos pontos A e B com uma circunferência C de centro O e raio R.

CASO 1: O não pertence à reta AB

Passos da Construção:

- ✓ ache O' simétrico de O em relação à reta AB (problema1)
- ✓ construa a circunferência C1 com centro em O' e raio R
- ✓ encontre os pontos D e E na intersecção de C com C1 (estes são os pontos procurados)

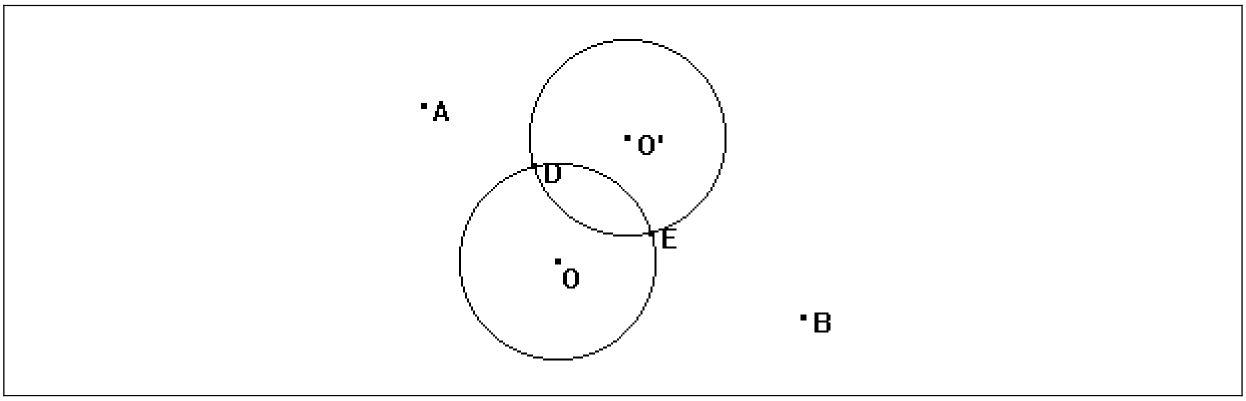


Figura 1.11 - Intersecção de reta com circunferência (1)

Justificativa:

O ponto O' é simétrico de O em relação à reta AB, ou seja, a reta é a mediatriz do segmento OO'. Pela construção, OD=O'D=R e OE=O'E=R. Assim, $D \in AB$ e $E \in AB$. Como, pela construção, já sabíamos que D e E pertencem à circunferência C,temos que, $D \in AB \cap C$ e $E \in AB \cap C$.

CASO 2: O pertence à reta AB

Passos da Construção:

- ✓ trace uma circunferência C1 de centro no ponto A e raio adequado
- ✓ ache os pontos E e D na intersecção de C_1 e C.
- ✓ encontre a bissetriz do arco ED na circunferência C (problema5)
- ✓ os pontos X e Y que definem a bissetriz acima são os pontos procurados

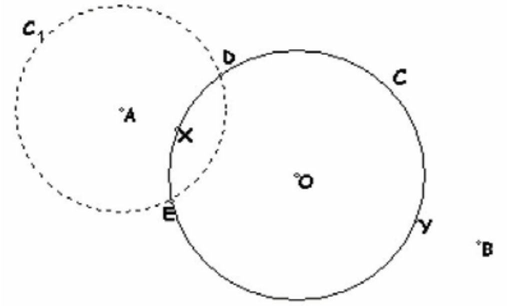


Figura 1.12 - Intersecção de reta com circunferência (2)

Justificativa:

Como, por construção, OE = OD e AE = AD, então a reta AO é mediatriz do segmento ED. Como X e Y pertencem à bissetriz do arco então X e Y pertencem à mediatriz de ED , isto é, X e Y pertencem à reta AB .

Problema 7: Dados os segmentos de comprimentos a, b e c, tais que a>c/2, construir um segmento de comprimento x tal a/b =c/x.

Passos da Construção:

- ✓ sejam R e S os pontos extremos do segmento de comprimento c
- ✓ construa a circunferência C_1 de centro R e raio a
- ✓ construa a circunferência C_2 de centro S e raio a
- ✓ faça a intersecção de C_1 com C_2 obtendo os pontos X e Y
- ✓ construa a circunferência C3 de centro X e raio b
- ✓ ache os pontos D_1, D_3, D_2, D_4 na intersecção de C_3 com C_1 e C_2, respectivamente
- ✓ tome dois destes pontos do mesmo lado da reta XY(na figura, os pontos D_1 e D_4 ou D_2 e D_3)
- ✓ o segmento que une esses dois pontos é a solução

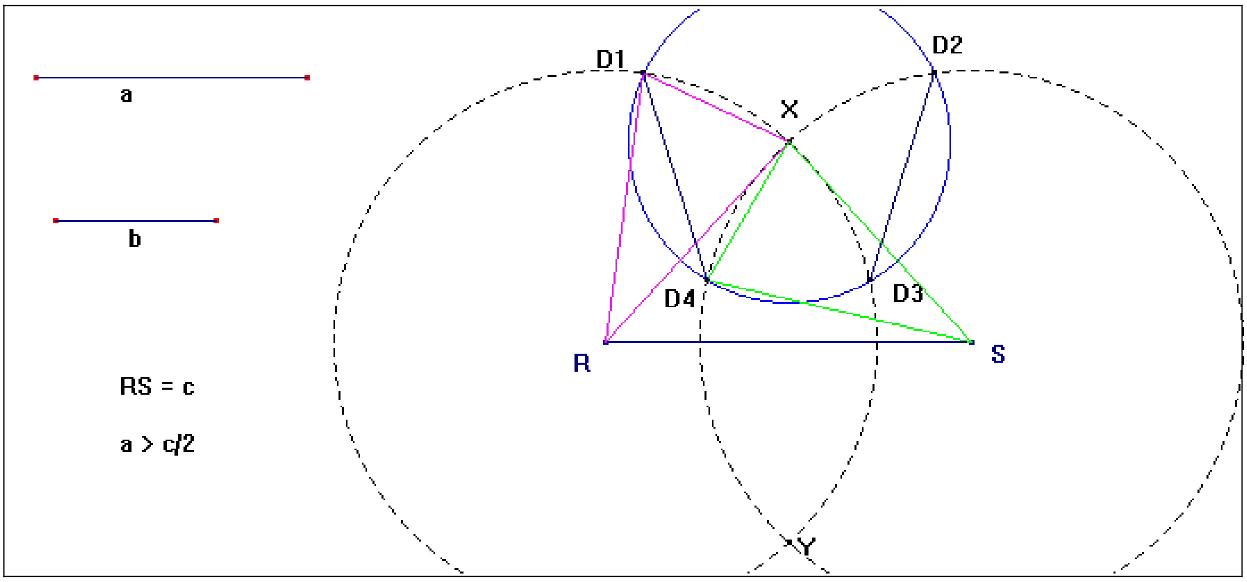


Figura 1.13 – Construção da quarta proporcional

Justificativa:

Os triângulos SXD_4 e RXD_1 são congruentes pelo caso LLL, pois

SX=RX=a (**L**ado)

$SD4=RD_1=a$ (**L**ado) e

$XD_2=XD_1=b$ (**L**ado).

Logo m($\angle RXD_1$) = m($\angle SXD_4$) e assim, m($\angle RXS$) =m ($\angle D1XD_4$). Como os triângulos RXS e D_1XD_4 são isósceles com ângulos congruentes no vértice X, e, portanto, estes triângulos são semelhantes pelo caso LAL. Desta forma, temos que:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{D_1D_4}$$

Chamando D_1D_4 de x vem o resultado $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, como queríamos.

Dizemos que x é a quarta proporcional entre a, b e c.

Problema 8: Dados os pontos A, B, C e D, determinar os pontos de intersecção das retas AB e CD .

Passos da Construção:

- ✓ vamos supor, sem perda de generalidade, que C e D estão em lados opostos

- ✓ construa os simétricos C' e D' dos pontos C e D, respectivamente, em relação à reta por A e B
- ✓ construa a circunferência C_1 de centro D' e raio CC'
- ✓ construa a circunferência C_2 de centro C e raio CD
- ✓ tome o ponto E na intersecção de C_1 e C_2 de modo que CC'D'E seja um
- ✓ quadrilátero
- ✓ construa o segmento de comprimento x tal que $\frac{DE}{DD'} = \frac{CD}{x}$ (como no prob. 7)
- ✓ construa a circunferência C_3 de centro D e raio x
- ✓ construa a circunferência C_4 de centro D' e raio x
- ✓ ache o ponto $P \in C_3 \cap C_4$ tal que P e C estão do mesmo lado da reta DD'.

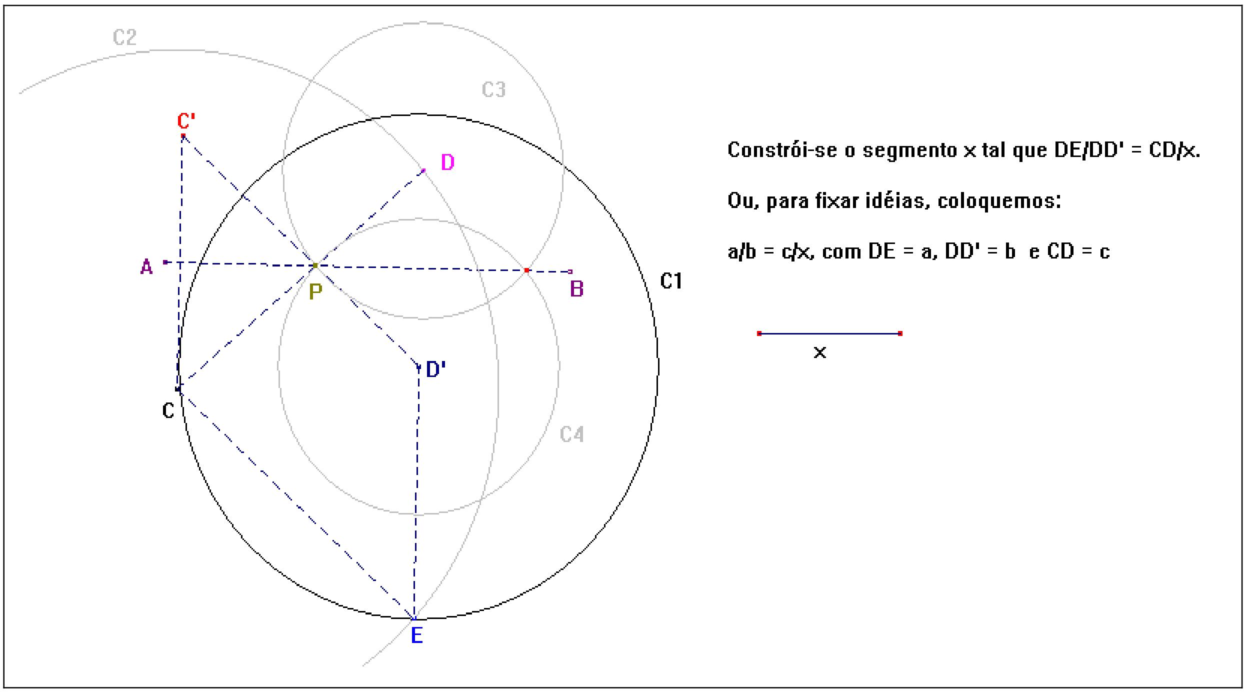


Figura extra 4 – intersecção de 2 retas

Justificativa:

Observamos inicialmente que a intersecção de AB com CD é dada pela intersecção das retas CD e C'D'. Mostraremos que P é o ponto de intersecção. O quadrilátero CC'D'E é um paralelogramo, pois, D'E=CC' e CE=CD=C'D'. Assim, os pontos D, D' e E pertencem à mesma reta, já que DE//CC' e DD'//CC'. Sendo Y o ponto de intersecção das retas CD e C'D', segue que $\frac{DE}{DD'} = \frac{DC}{DY}$ e conseqüentemente, DY = x pela construção de x. Logo, $Y \in C_3$ e como o triângulo CDE é isósceles, concluímos que YD' = YD = x, ou seja, $Y \in C_4$. Portanto, Y=P.

Como nos problemas 6 e 8 mostramos que é possível encontrar os pontos de intersecção, sempre que existirem, de duas retas ou de uma reta com uma circunferência, utilizando-se apenas do compasso, fica assim demonstrado o Teorema de Mohr-Mascheroni.

1.8 Inversão: Construções Geométricas com Pontos Inversos

As construções geométricas realizadas com o compasso apenas, segundo o método de Mohr-Mascheroni, têm notável relevância teórica para a geometria. Existe, entretanto, um outro método, mais simples, para realizar construções geométricas com o compasso apenas (e, portanto, para demonstrar o Teorema em questão). É o método de inversão de pontos, que abordaremos sucintamente na seqüência.

Uma inversão é um tipo de transformação geométrica do plano.Tais transformações são às vezes chamadas de reflexões circulares, pois com uma certa aproximação elas representam a relação entre o objeto e sua imagem por uma reflexão em um espelho circular (COURANT & ROBBINS, 2000).

De acordo com estes autores, apresentamos a seguinte definição de inversão: **Em um plano fixo, seja C um círculo de centro O (chamado círculo de inversão) e raio r. A imagem de um ponto P é definida como sendo o ponto P' pertencente à semi-reta OP de origem O**, tal que

$$OP.\ OP' = r^2.$$

Os pontos P e P' são ditos pontos inversos com respeito a C. Observemos desta definição que, se P' é o inverso de P, então P é o inverso de P'. Além disso, uma inversão permuta as partes interna e externa do círculo C, uma vez que para OP < r temos OP’ > r (e vice-versa). Os únicos pontos do plano que permanecem fixos sob inversão são os pontos do próprio circulo C.

A propriedade mais importante de uma inversão é a de ela transforma retas e círculos em retas e círculos. Mais precisamente, após uma inversão:

- ✓ uma reta que passa por O torna-se uma reta por O;
- ✓ uma reta que não passa por O torna-se um círculo que passa por O;
- ✓ um círculo que passa por O torna-se uma reta que não passa por O; e
- ✓ um círculo que não passa por O torna-se um círculo que não passa por O.

Sobre a prova dessas proposições e mais detalhes, ver pp.172-177 da mesma obra de Courant & Robbins.

A construção geométrica de pontos inversos é, desta maneira, bastante útil e assegurada pelo seguinte teorema: **“O ponto P’ inverso de um ponto P com respeito a um círculo C pode ser construído geometricamente com o uso apenas do compasso”.**

Vejamos. Tomando OP como raio e P como centro, descrevemos um arco cruzando C nos pontos R e S. Tendo estes dois pontos como centros, descrevemos arcos com raio r que se cortem em O e em um ponto P’ sobre a reta OP.

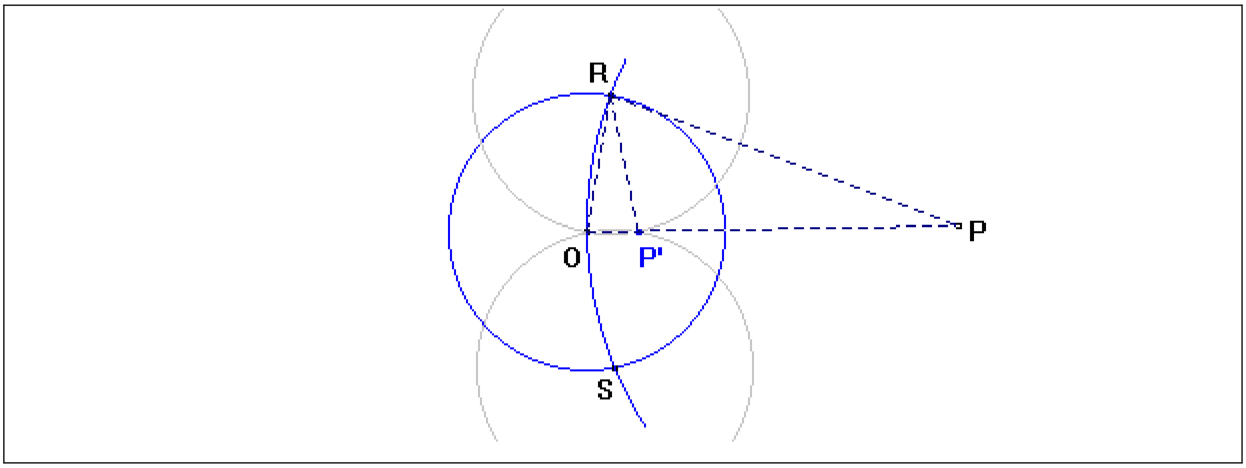


Figura 1.14 – Construção de pontos inversos.

Prova: Nos triângulos isósceles ORP e ORP’, tem-se

$$\angle ORP = \angle POR = \angle OP'R \,,$$

de modo que estes triângulos são semelhantes, e portanto

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OR}{OP'},$$

ou seja, OP.OP' = OR.OR= r.r = r^2.

Desta forma, P' é o inverso procurado de P, que deveria ser construído.

Se o ponto P estiver contido no interior de C, a mesma construção e prova serão válidas, desde que o círculo de raio OP em torno de P corte C em dois pontos. Se não for este o caso, pode-se reduzir a construção do ponto inverso P' com o seguinte artifício simples. Encontramos o ponto R sobre a reta OP cuja distância de O seja um inteiro múltiplo de OP e que esteja no exterior de C, isto é,

$$OR = n.OP$$

Fazemos isto medindo sucessivamente a distância com o compasso até que se vá para a região externa de C. Feito isso, encontramos o ponto R' inverso a R como na construção anteriormente dada. Então

$$r^2 = \quad OR'.OR = OR'.(n.OP) = (n.OR').OP.$$

Portanto, o ponto P' para o qual OP' = n.OR' é o inverso desejado.

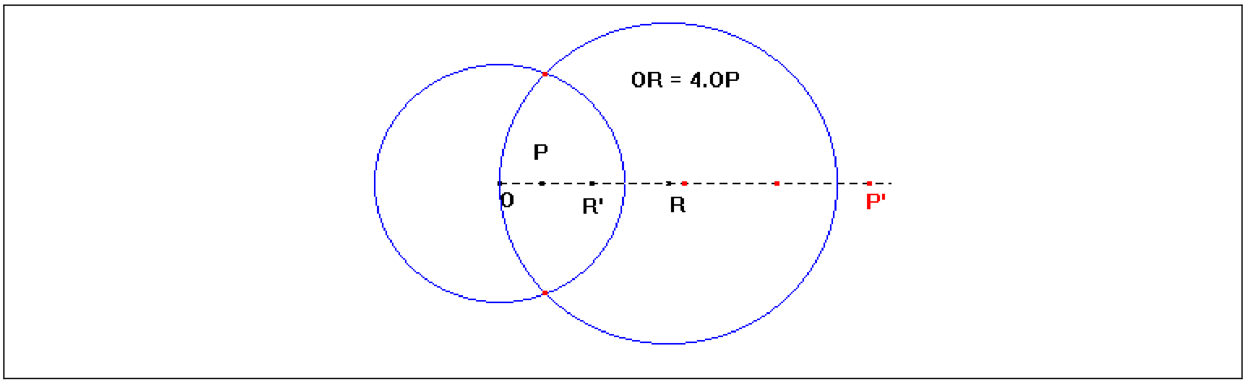


Figura 1.15 - Inverso de um ponto no interior de C.

Problemas como o de recuperar o centro (perdido) de uma circunferência ou o de encontrar o ponto médio de um segmento de reta são “facilmente” resolvidos sob o método de inversão (em comparação com a Geometria de Mohr-Mascheroni).

1.9 Sumário do Capítulo

Neste capítulo, traçamos um breve panorama da geometria desde suas origens. Mas não fizemos isso em ordem cronológica e nem abordamos todos os tópicos que entendemos fazer parte da geometria. Vimos que a história da geometria se confunde um pouco com a história da evolução do homem na Terra (pelo menos a partir de um certo momento)

Abordamos um pouco da origem e evolução da matemática demonstrativa, desde Tales de Mileto, por volta do século VI antes da era cristã, culminando com os feitos de Euclides, cerca de 300 anos mais tarde.

Focamos a atenção em questões mais internas à matemática, como “os três problemas clássicos da antiguidade” (trissecção do ângulo, quadratura do círculo e duplicação do cubo), além da temática das geometrias não-euclidianas, que se originaram na negação do “postulado das paralelas”. Essas matérias foram e são de grande importância para o desenvolvimento da matemática no sentido de que fustigaram o intelecto humano durante séculos, produzindo novas teorias e descobertas frutíferas para o edifico matemático. Estas duas linhas de discussão apresentadas foram acompanhadas pelo que podemos chamar o “pilar” deste edifício matemático: as demonstrações.

Toda a temática histórica de que tratamos está vinculada às demonstrações. E nesse sentido que abordamos as construções geométricas como ponto partida para o estudo e a aprendizagem da prova, salientando assim a importância teórica que tem uma construção e sua validação.

Explicitamos as diferenças entre compasso moderno e compasso euclidiano e mostramos esses instrumentos são equivalentes.

Mostramos que toda construção geométrica realizável com régua e compasso pode ser cumprida com o compasso apenas, ou melhor, demonstramos o **Teorema de Mohr-Mascheroni**. A demonstração desse teorema consiste basicamente em: **encontrar, com o compasso apenas, os pontos de intersecção entre duas retas, entre uma reta e uma circunferência, e entre duas circunferências.**

No próximo capítulo, continuaremos a nossa discussão sobre prova, mas tomando como foco as construções geométricas num ambiente de Geometria Dinâmica – o *Cabri-Géomètre II*.

CAPÍTULO 2

Argumentação, Provas e Educação Matemática

> "A matemática, como um todo, pode ser encarada como uma sistematização exatamente daqueles problemas que foram atacados com sucesso".(DAVIS & HERSH, 1986, p.181)

2.1 Introdução

Faremos, neste capítulo, uma singela e não muito pretensiosa discussão sobre prova e demonstração em matemática e, sobretudo, na Educação Matemática. Nosso foco será a Geometria Euclidiana, em particular as construções geométricas, seguindo-se as suas justificativas, ou seja, o tema prova será abordado partindo da fundamentação das construções geométricas na Geometria Euclidiana Plana. Muitas já foram as pesquisas desenvolvidas abordando o tema prova, com especial interesse nas dificuldades dos alunos em construir provas matemáticas. Apresentaremos também a base teórica, bem como as questões de pesquisa a serem investigadas.

2.2 Importância e Papel da Demonstração

Comecemos com algumas perguntas: Quantas pessoas conhecemos que conseguem estruturar de maneira organizada (lógica) algo que devem expor em público, por exemplo? Quantas pessoas dominam algum assunto da Matemática Escolar, como as equações do primeiro grau? Quantos professores de Matemática saberiam demonstrar a fórmula de *Heron* para o cálculo da área de um triângulo? E quanto ao Teorema de Pitágoras? São apenas alguns exemplos. Conjecturamos que não muitos professores conseguiriam tais feitos. E menos ainda as pessoas em geral. E isso não é de estranhar, pois estamos falando de organização lógica das idéias, numa palavra, de raciocínio formal-dedutivo; aquilo que os matemáticos praticam: as linguagens formais[18].

Quando se tem de demonstrar um teorema matemático usam-se noções ou fatos já estabelecidos para mostrar, por meio de um raciocínio lógico-dedutivo, que a afirmativa contida no teorema é realmente verídica, ou seja, que tem sentido matematicamente. Em outras palavras, demonstrar envolve um processo complexo, que vai desde a hipótese (aquilo que é dado), passando por certos raciocínios e fazendo referência a fatos estabelecidos, até chegar à tese (a conclusão). Realmente, a maior parte das pessoas tem muita dificuldade em compreender um raciocínio desse tipo, o que sugere que “o ser humano tem uma aversão insuperável às linguagens formais; o mesmo já não ocorre com os computadores – eles se dão muito bem com elas” (DAVIS & HERSH, 1986). Mas o grau de formalidade que consegue atingir o ser humano, mesmo os matemáticos de talento, sequer chega aos pés daquele atingido pelo computador; em verdade, até mesmo os matemáticos, no máximo o que conseguem é um misto de linguagem natural e linguagem formal. Entretanto, é interessante notar que embora as linguagens formais sejam “ideais” para os computadores, eles não conseguem demonstrar efetivamente nenhuma espécie de teorema matemático. Ao que nos consta, parece ser este o papel das demonstrações: o de estruturar o discurso matemático. Já quanto à importância das demonstrações, só o que podemos dizer é que são o “pilar” das matemáticas.

De muita importância para a matemática são as conjecturas, a exemplo da “conjectura de *Goldbach*”[19] (ainda por demonstrar) e do já demonstrado “O Último Teorema de *Fermat*”[20]. Relativamente a isto, e de acordo com de Villiers (1999), o que é realmente importante numa conjectura não é o fato de a mesma ser verdadeira ou falsa; isso, a maior parte das vezes, não tem a menor importância em matemática. O que conta, isto sim, é que as tentativas por demonstrar certas

---

[18] Ver mais detalhes sobre formalismo em “O Sonho de Descartes”, de Davis & Hesh (1986b, p.290-313).
[19] A esse respeito, ver o livro “Tio Petros e a Conjectura de Goldbach”, de Doxiadis (2001).
[20] Ver Singh (1998),sobre a história das tentativas de demonstração de “O Ultimo Teorema de Fermat”.

conjecturas resultam em novas descobertas e novas teorias. De forma semelhante, *são as demonstrações* e *não os teoremas* que formam a estrutura do conhecimento matemático. O teorema, em si, é como uma etiqueta.

Podemos nos perguntar agora: por que demonstrar? Ou ainda: por que ensinar a demonstrar? Não são questões simples, mas na perspectiva de de Villiers, de que demonstrar vai muito mais além de meramente verificar o resultado, entendemos que a razão de demonstrar (e a de também ensinar a demonstrar,) contribui deliberadamente para a construção da matemática. É demonstrando que se faz matemática!

Todos os comentários acima têm apenas como objetivo corroborar "a afirmação de que a matemática fica caracterizada, de maneira única, por algo conhecido como *demonstrações*" (DAVIS & HERSH, 1986, p.178).

Por um lado, as demonstrações no campo formal são preocupações quase que exclusivamente de matemáticos e, por outro, há inúmeros pesquisadores em Educação Matemática que também se detêm nas demonstrações, porém mais preocupados em estudos sobre as dificuldades de aprendizes, desde o ensino básico ao nível superior, na aquisição de provas matemáticas. Eis aqui um ponto com o qual nosso trabalho se identifica: as produções matemáticas dos estudantes.

2.2.1 Provas e Educação Matemática

Uma das dificuldades relacionadas com o ensino e aprendizagem da prova está relacionada com características bem definidas da instrução e cultura escolar.

De fato, as demonstrações não têm sido assunto recorrente na sala de aula de Matemática: não se ensina a demonstrar criando atividades que instiguem os aprendizes a exercitar o raciocínio dedutivo-formal, mesmo que seja a partir da formulação de conjecturas e verificação de casos particulares; no máximo, o que se faz é propor exercícios em que se pede para simplesmente fazer a demonstração – isto quando se chega a fazê-lo. Melhor dizendo, executam-se demonstrações mecânicas. Por exemplo, ao se propor que o aluno prove que "a soma das medidas dos ângulos internos de triângulo é 180°", poderia se começar pedindo que os aprendizes efetuem medições, recortem e façam dobraduras, para depois, gradativamente, passarem à etapa formal, que é a escrita da prova – a qual envolve um misto de linguagem algébrica com linguagem natural (respectivamente, registro algébrico e registro na língua materna).

Com relação ao exemplo visto no parágrafo anterior, o problema é que em geral os aprendizes não vão além da "mostração". Vaz (2003), se referindo ao trabalho de Chazan (1993), salienta que as dificuldades dos aprendizes na construção de uma prova provêm do fato deles preferirem argumentos empíricos e não os argumentos dedutivos, além de não saberem diferenciar um do outro (p.23). Talvez isto aconteça pela aversão que a maioria das pessoas tem às linguagens formais.

O que irá contribuir para que uma proposição ou afirmação seja provada de forma aceitável é uma boa coordenação entre os raciocínios indutivo e dedutivo e a forma como se deve passar do primeiro ao segundo. No entanto, não devemos nos esquecer de que, às vezes, o raciocínio que se deve empregar numa prova matemática é puramente (ou quase) dedutivo, e aí a dificuldade é ainda maior. É só citarmos a demonstração/dedução do *teorema de Pitágoras* com o recurso de semelhança de triângulos. Outras vezes, o raciocínio é tão-somente visual e heurístico, como é o caso de algumas demonstrações do mesmo teorema de Pitágoras usando figuras.

Segundo Nasser & Tinoco (2003), podem ser atribuídas diversas funções à prova ou demonstração, sendo que a mais usada é a de validar um resultado, ou seja, comprovar que é verdadeiro. Mas existe outra função da prova, que é a de explicar ou elucidar, ou melhor, mostrar por que o resultado é verdadeiro. "Algumas provas são perfeitamente aceitas, mas não dão nenhum indício do motivo pelo qual a afirmativa vale. Por exemplo, as provas por absurdo, ou as provas por indução" (p.3). As autoras ainda citam de Villiers (1991) no seguinte sentido:

> "...em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de **verificação**, a função mais fundamental da prova como meio de **explicação** deve ser explorada, a

fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos." (de Villiers, 1991, apud Nasser & Tinoco, 2003, p.3)

Nosso trabalho consiste basicamente em analisar a produção de provas por alunos de uma turma de 7ª série de uma escola pública de Diadema, São Paulo, num ambiente informatizado e com o *software Cabri-Géomètre* II. As construções geométricas com régua e compasso serão nosso objeto matemático de estudo. Pretendemos fazer uma abordagem da prova em geometria, partindo das justificativas das construções geométricas. Salientamos que a abordagem não será formal, e sim conforme a idéia sustentada por alguns educadores matemáticos, a exemplo de Bell (1976, apud NASSER & TINOCO, 2003), o qual afirma que a função da prova é sistematizar", isto é, preparar para o processo dedutivo. É nessa perspectiva que atacaremos a problemática das construções geométricas (bem como as suas provas). Portanto, tentar-se-á fazer uma abordagem da prova em seu aspecto heurístico, levando em conta suas funções (destacadas por Bell) de **descoberta** (de novos resultados) e de **comunicação** (a transmissão de conhecimento matemático).

Uma exposição mais detalhada sobre as funções da demonstração é destacada por de Villiers (2002):

- **Explicação**: proporcionar compreensão sobre porque é verdade;
- **Descoberta**: a descoberta ou a invenção de novos resultados
- **Comunicação**: a negociação do significado;
- **Desafio intelectual**: a realização/satisfação pessoal por se fazer uma demonstração;
- **Sistematização**: a organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Esse mesmo autor ainda ressalta um outro aspecto da demonstração, ou seja, traz à luz a idéia de *demonstração como meio de* verificação (justificação). Para o propósito do nosso trabalho, que é o de abordar a problemática das construções geométricas no ambiente do *Cabri-Géomètre*, essa faceta da demonstração pode constituir um dos pontos de partida para introduzir os aprendizes (principiantes) ao pensamento indutivo, uma espécie de preparação para o raciocínio dedutivo. Mas não devemos nos esquecer do papel que devem ter as atividades elaboradas para esses aprendizes: devem despertar nos aprendizes a prática da descoberta e da invenção (principalmente em problemas de geometria); devem, enfim, explorar ao máximo as conjecturas. Além disso, é preciso que a forma com que as atividades sejam propostas incite nos aprendizes o hábito de duvidar.

A bem do que foi exposto no parágrafo precedente, gostaríamos de enfatizar as posições de dois pesquisadores (HANNA, 1990; BALACHEFF, 1988, apud NASSER & TINOCO, 2003), que defendem aquilo a que se chama **prova ingênua**, no sentido de que a argumentação seja plausível, aceitável, prova essa que pode ter vários níveis de rigor em função da idade ou do nível de escolaridade dos aprendizes.

Em nossa pesquisa, procurar-se-á, enquanto pesquisador-professor, dar oportunidade e condições para que os sujeitos desenvolvam suas capacidades de justificar os resultados (que julguem ser verdadeiros ou falsos), bem como de comunicar suas idéias, verbalmente e por escrito. Ou seja, trataremos essencialmente de justificativas informais em geometria, mas sempre que possível incentivando os aprendizes a dar um salto qualitativo rumo ao processo dedutivo, o que deve ser feito com atividades planejadas que propiciem o uso da linguagem corrente e, com o tempo, levem os alunos a aprimorar sua forma de se expressar, para enfim introduzir rudimentos de linguagem algébrica.

A seguir, apresentaremos algumas idéias sobre provas matemáticas no contexto da Geometria Dinâmica do *Cabri-Géomètre*.

2.2.2 Provas e Geometria Dinâmica: O *Cabri-Géomètre*

Muitos problemas das ciências em geral e das matemáticas, em particular, não são completamente resolvidos em uma determinada época, simplesmente pelo fato de que os conhecimentos apropriados (ferramentas) ainda não estão suficientemente avançados para solucioná-los (por exemplo, "O Último Teorema de *Fermat*"). Os computadores invadiram quase todos os ramos profissionais. Mesmo o inquestionável método dedutivo-axiomático não conseguiu resolver tudo. Nem a matemática pode tudo. Apesar do formalismo na matemática, convém acrescentar que o uso do computador tem exercido razoável influência nas provas matemáticas, a despeito dos mais puristas. O computador também não pode tudo, mas a experiência tem mostrado que é melhor tê-lo como aliado que como inimigo. Nesse sentido, Ruy César Pietropaolo é categórico:

> Ainda que muitos relutem em aceitar o uso de computadores para as provas matemáticas, não há como negar que os métodos matemáticos não podem tudo, mesmo contando com intenso trabalho, forte intuição e grande talento das pessoas voltadas à construção e ampliação do edifício matemático. Para responder às muitas questões que advêm dessa própria área do conhecimento – e de outras áreas –, os matemáticos precisarão utilizar, muitas vezes, métodos mais amplos, como o auxílio da informática, para a busca da verdade. (PIETROPAULO, 2005, p. 67)

Nossa intenção é abordar as demonstrações em geometria, usando, para isto, o software *Cabri-Géomètre* como recurso no processo de prova. Focaremos atenção na problemática das construções geométricas.

São inegáveis a capacidade e versatilidade que tem o software Cabri. Entretanto, isto não significa que certas tarefas de construção neste software sejam mais fáceis de executar (se comparadas com o ambiente do lápis e papel). Podemos citar como exemplo a construção de um quadrado, primeiro com régua e compasso e depois, com o Cabri. Se comparada com o ambiente do lápis e papel, a tarefa de construir o quadrado no Cabri pode até se tornar mais difícil (por que depende de certos conceitos geométricos e do manuseio técnico do próprio software). A vantagem de uma construção no Cabri sobre a sua equivalente com lápis e papel talvez se deva aos aspectos dinâmicos deste programa: desde que a construção seja robusta, pode-se alterar o tamanho, mas não a forma da figura, preservando, portanto, suas propriedades básicas.

A questão do dinamismo do Cabri, um dos focos de interesse do presente trabalho, pode ser vista como meio facilitador para que o aluno se convença de certas propriedades geométricas e é neste sentido que atividades tencionando introduzir os aprendizes à “prova” no Cabri devem ser elaboradas de forma que permitam realizar ensaios e verificações empíricas (valendo-se do dinamismo) quando não estiverem (os aprendizes) convencidos da validade de uma afirmação.

Já a questão de se abordar propriamente a demonstração a partir de tarefas de construção no Cabri é controversa e tem suscitado muitos debates, notadamente entre educadores matemáticos. O fato de o Cabri servir como um meio de acesso à prova, não é garantia de que os alunos consigam explicitar e formalizar (matematicamente) as propriedades de uma figura. É uma tarefa que foge ao controle do estudante. Mesmo em ambientes computacionais como o do *Cabri-Géomètre*, “os estudantes preferem mais as argumentações narrativas que aquelas baseadas em propriedades matemáticas, ou seja, preferem descrever os raciocínios utilizados valendo-se quase que exclusivamente da língua materna” (HEALY & HOYLES, 2000).

A discussão sobre Geometria Dinâmica, em particular o caso do *Cabri-Géomètre*, tem considerável relevância nos círculos de Educação Matemática no Brasil e em muitos países do exterior e deve ser, a nosso ver, pauta de discussão, também, de matemáticos.

As considerações que temos feito até o momento – principalmente as que tratam dos aspectos dinâmicos do Cabri – estão, ainda, muito distantes do âmbito escolar (escola básica) e, mais ainda, distantes da grande maioria dos professores. É um tema interessante para futuras pesquisas, tanto na área educacional como para matemáticos: o impacto de novas tecnologias associadas com o ensino e aprendizagem de Matemática/Geometria. Citamos, por exemplo, King & Schattschneider (1997, apud Santos & Martinez, 2000), que apontam os principais benefícios e aplicações do Cabri:

- a **precisão** e a capacidade de **visualização** das relações geométricas,
- a possibilidade de **exploração** das construções e **descoberta** de relações e propriedades geométricas,
- a **prova de teoremas**, de forma experimental;
- a geração de **transformações** e **lugares geométricos,** e

- a possibilidade de **simulação** e de construção de **micromundos** com características próprias.

"Provar" uma proposição de forma experimental pode ser muito empolgante para o aprendiz, além de abrir caminho para a prova de teoremas de modo mais reflexivo, isto é, com mais abstração, podendo ser uma via para uma abordagem teórica. Por exemplo, provar "que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°" usando lápis e papel exige muito mais abstração do aluno (pois requer que o mesmo mobilize vários conhecimentos anteriores a fim de demonstrar o teorema) que quando se usa um ambiente de GD, como o *Cabri-Géomètre*. É claro que neste último caso, a prova é mais experimental, empírica, mas o importante é que pode conduzir o aprendiz rumo a um pensamento lógico-matemático mais estruturado, à abstração (reflexiva) propriamente dita e, desta maneira, talvez, à compreensão do que vem a ser uma demonstração.

Num ambiente de Geometria Dinâmica, como o *Cabri-Géomètre*, atividades envolvendo construções geométricas têm um novo enfoque sob o recurso *clicar e arrastar*. Este recurso, junto com os recursos de medição/verificação, além da calculadora que existe no próprio software, constituem o ponto de partida para que o aprendiz possa formular suas próprias conjecturas, principalmente com respeito às propriedades das figuras. Conseqüentemente, podem levar o aluno a elaborar suas primeiras "provas" matemáticas.

Há até mesmo pesquisadores como Laborde, conforme nos relata a autora Amaral (2002), que afirmam que um quadrilátero com quatro ângulos iguais e quatro lados iguais só é considerado um quadrado num software de Geometria Dinâmica se passar pela 'prova do arrastar', ou melhor, se ao movimentar um vértice pela tela, suas propriedades são preservadas. Quais são essas propriedades? Algumas delas são: ortogonalidade, perpendicularidade, proporção de segmentos e ângulos. Abaixo, construímos a Figura 2.1 com a ferramenta "polígono", ao passo que usamos as ferramentas "circunferência" e "polígono regular" para a execução da Figura 2.2 . A segunda construção é *robusta* (mantém as propriedades: ângulos, paralelismo etc, mas não lados), como se pode observar; já a primeira é *mole*, pois ao arrastar um vértice pela tela, obtemos uma figura com forma (e tamanho) diferente da anterior.

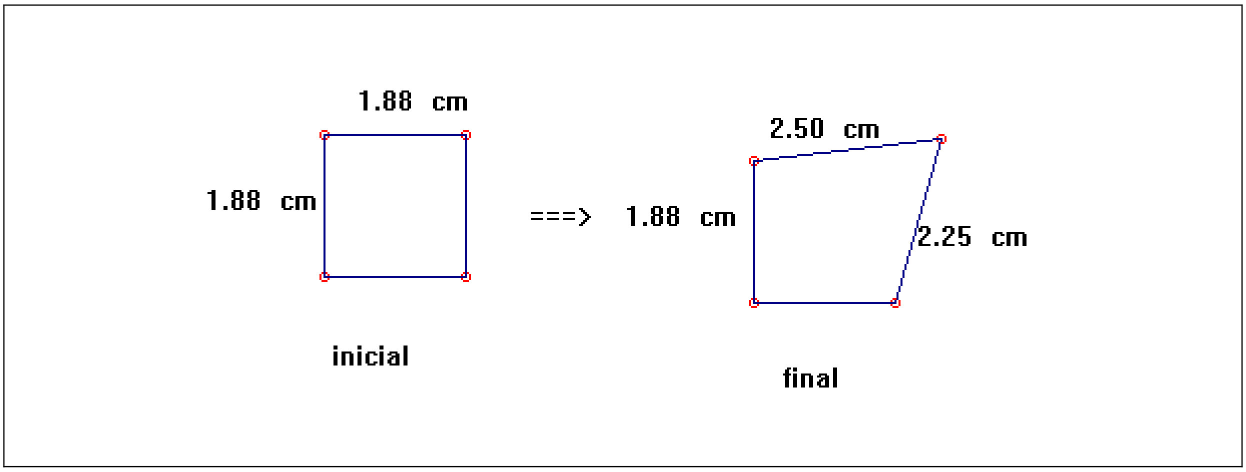


Figura 2.1: Construção mole

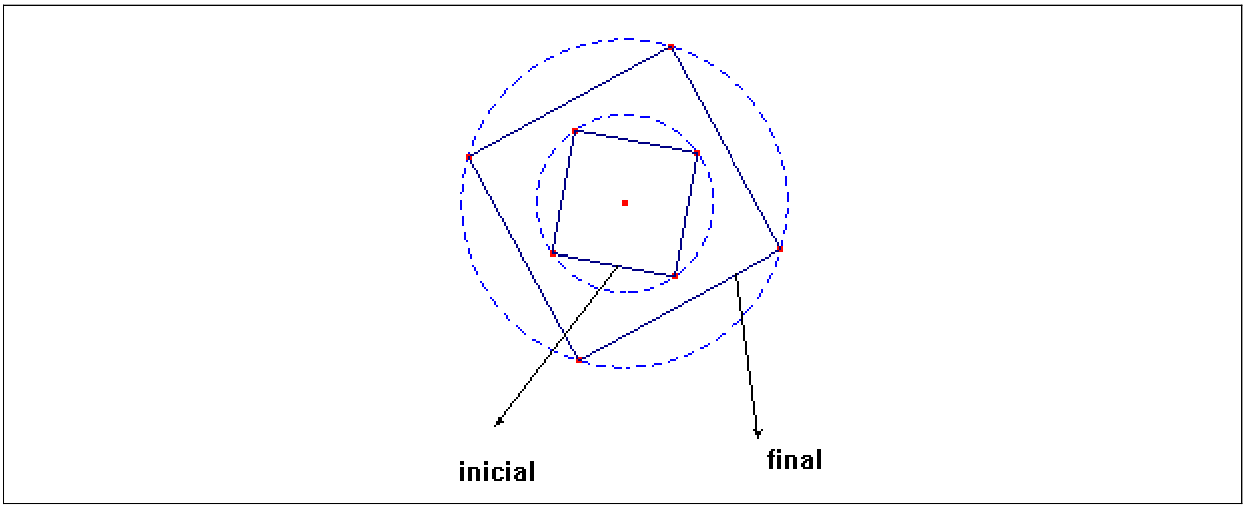


Figura 2.2 – Construção robusta

O exemplo acima serve para mostrar que a idéia por traz de uma demonstração é a de explicar e convencer, mesmo sendo por meio de figuras não-consistentes, construções moles. A partir de questões como esta, pode-se propor aos estudantes questões mais gerais do tipo: “o que é demonstrar?” ou “qual seu papel?”.

Eis um ponto chave: As figuras ajudam na compreensão de uma prova? Em que sentido? Segundo Almouloud & Mello (2000), as figuras exercem o papel de âncora dos entes matemáticos nas hipóteses, ou seja, ao analisar-se uma figura, passa-se à invenção e à descoberta de novos elementos e relações entre elementos – passa-se, por fim, a novas configurações. Além do mais, é importante que se associe, notadamente nos problemas de construções geométricas [sempre que possível], a figura com um teorema [e vice-versa]. Estas considerações, no nosso entender, conferem à figura um papel heurístico, de muita importância, aliás, para explicar logicamente as propriedades geométricas.

Atividades envolvendo construções geométricas num ambiente de Geometria Dinâmica precisam ser organizadas e direcionadas, num primeiro momento, de modo a exigir que os alunos *expliquem* o que fizeram e em seguida passem à *verificação* e *validação* dos resultados. Num segundo momento, deve-se fomentar nos aprendizes a constante busca pela formulação de *conjecturas* e por fim, a *sistematização* dos resultados que obtêm, podendo neste momento ser concomitante o de ‘uso de lápis e papel’ e do computador. Deve ficar claro que em todos os momentos o professor-mediador deve-se fazer presente.

Na próxima sessão discutiremos os aspectos teóricos que fundamentam este trabalho.

2.3 Considerações Teóricas

Como base teórica para o nosso trabalho, será abordada a teoria de Balacheff (1987, 1988), que trata das classificações de prova e dos processos de validação, e a pesquisa de Mariotti (2001), que versa sobre construções geométricas e *Cabri*. Enfatizamos que o trabalho de Mariotti é particularmente interessante aos nossos propósitos, pois faz uma ligação entre uma **construção** e o **teorema** que a valida.

Começaremos este tópico apresentando as concepções sobre prova de Balacheff.

2.3.1 Classificando Provas

Com relação às concepções de provas dos alunos, tomaremos como referencial teórico as classificações de prova de Balacheff (1987, 1988), como já mencionamos acima. Este referencial também servirá para fazer a análise das atividades.

Resumidamente, faremos um relato dos tipos de provas classificados por Balacheff. Mas antes, uma citação de Vaz (2003):

> As provas produzidas por alunos podem ser analisadas através da lógica nela envolvida ou através das práticas matemáticas dos estudantes. A abordagem presente neste estudo contemplará a segunda concepção explorada com ênfase por Balacheff (1988). Segundo este autor, a abordagem experimental envolve o processo de busca da solução de um problema por parte dos alunos, analisando como os estudantes se convencem da validade de suas respostas.(Vaz, 2003, p.26)

No estudo de Balacheff (1988) são relatados dois tipos de provas, quais sejam, **as pragmáticas e as conceituais.** As do primeiro tipo se valem de recursos de ação, a exemplo dos desenhos, movimentação de objetos na tela, etc; já as do segundo tipo não envolvem ações, mas formulações de propriedades intrínsecas em questão e as relações estabelecidas entre estas propriedades (VAZ, 2003).

A idéia central contida no tipo de prova conceitual é a utilização da linguagem, não como um meio de comunicação e sim como ferramenta para deduções lógicas, o que é característico do processo dedutivo.

A classificação de Balacheff nos parece bem apropriada, portanto nos sendo útil no que diz respeito à passagem das provas pragmáticas às conceituais; quer no estágio pragmático ou no conceitual, interessa-nos que o conhecimento adquirido pelos estudantes seja objeto constante de reflexão. Balacheff fala de características hierárquicas, dependendo da qualidade das generalizações das provas, assim como da contextualização do conhecimento envolvido.

Gravina (2001) destaca que “a ascensão de categorias depende da concomitante evolução nas formas de ação, formulação e validação” (p.66). Balacheff (1987) identifica quatro diferentes formas de validação solidárias ao processo de ascensão:

- ✓ O **empirismo ingênuo**. Tem um caráter mais indutivo. Verificam-se vários casos e então se conclui a validade de todos aceitando o fato como verdadeiro. É um processo insuficiente e uma primeira abordagem das formas de validação/generalização.
- ✓ **Experimento crucial**. Constitui um salto em relação à etapa precedente. O experimento crucial é um método de validação em que é proposto, de forma explícita, o problema da generalização. Objetiva verificar uma propriedade em um caso particular, porém sem considerá-lo tão particular. Por outras palavras, escolhe-se um exemplo com determinadas características com a intenção de verificar sua validade para este caso específico; se por acaso for confirmado, conclui-se o seu caráter geral.
- ✓ **Exemplo genérico**, que consiste na explicação das razões que validam uma propriedade (fase do discurso e das argumentações, ainda cruas), com base na escolha de um objeto representativo de uma classe, ou seja, um tal objeto que possua propriedades características e estrutura representativa desta classe.
- ✓ A **experiência mental**. Recorre-se à ação por meio da superação de qualquer caso específico e sua internalização; não envolve situações particulares. É a etapa das construções cognitivas mais complexas, com estruturação do discurso e encadeamento do raciocínio.

No que diz respeito ao *movimento de passagem* das provas pragmáticas às conceituais, terminamos nossa reflexão citando Gravina (2001), que esclarece:

> Ainda segundo Balacheff, o nível experiência mental marca claramente a transição da prova pragmática à intelectual. Nesse nível, ações interiorizadas dirigem-se à generalidade, desprendidas de concretização particular, em gênesis cognitiva da demonstração. O nível exemplo genérico é uma fase intermediária, ora na categoria de prova pragmática, ora na categoria de prova intelectual, dependendo da natureza efetiva da ação sobre o exemplo – ou ação ainda dependente de concretização particular, ou ação que usa a concretização apenas como suporte para expressar raciocínio generalizador. Já a experiência mental converge para explicação caracterizada como **demonstração matemática**, e nesta se transforma quando considera os princípios de organização do modelo teórico (...) (negrito nosso).(GRAVINA, 2001, p.67)

No próximo tópico, continuamos a discussão sobre o nosso referencial teórico, de acordo com a pesquisa de Mariotti (2001), que trata basicamente do campo de experiência em que se inserem as construções geométricas.

2.3.2 Construções Geométricas como Campo de Experiência para o Estudo de Provas

As construções geométricas sempre tiveram relevância teórica para a matemática, em especial para a Geometria Euclidiana; também é inegável sua importância prática em diversas áreas afins, como a arquitetura e engenharia. Com o advento dos sistemas de Geometria Dinâmica, este campo de estudo se ampliou ainda mais, despertando o interesse de muitos pesquisadores em Educação Matemática, com especial interesse nos resultados obtidos por estudantes a partir de certas tarefas de construção em ambientes computacionais como o *Cabri-Géomètre*. Desde a criação deste software[21] muitas pesquisas e publicações em geral já foram feitas, muitas das quais abordando o tema prova com base em tarefas de construções geométricas. Nesta dissertação, tomaremos como referência o trabalho da pesquisadora italiana Maria Alessandra Mariotti, cujo enfoque são as provas e construções geométricas com Cabri.

Mariotti (2001) trabalhou com uma pesquisa conduzida na forma de um experimento de ensino de longa duração, situado no paradigma de 'pesquisa de inovação'[22]. Um dos objetivos principais era investigar uma abordagem para o ensino centrada no uso do micromundo *Cabri-Géomètre* com a intenção de desenvolver o pensamento teórico em geometria. A hipótese era que o processo de ensino-aprendizagem associado com este desenvolvimento pode ser esperado como gradual; assim o experimento resultante envolveu estudantes com dois anos de estudo ininterruptos, correspondendo ao 9º e 10º ano de escolaridade. O estudo de Mariotti teve por alvo clarificar o papel do ambiente do Cabri nos processos de ensino-aprendizagem: a análise dos protocolos de sua pesquisa mostra a possível

[21] O Cabri-Géomètre foi desenvolvido por um grupo de pesquisa coordenado por Jean Marie Laborde, na Universidade Joseph Fourier, Grenoble, França. A primeira mostra do programa se deu no VI Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Budapeste, Hungria, em 1988.

[22] Este modelo de pesquisa está relacionado com metodologias que se baseiam em *design*.

evolução em uma prova, mas ao mesmo tempo indica que esta evolução não pode ser esperada como simples nem espontânea.

Além disso, a pesquisa foi conduzida com a estrita colaboração entre pesquisadores e professores (da escola) e o experimento organizado na base de uma seqüência de atividades projetadas para todo o grupo, atividades estas realizadas na classe e pelo professor, com a aula de Matemática transcorrendo naturalmente. O conteúdo de Geometria não sofreu alterações, mas a abordagem geral mudou dramaticamente. A abordagem desenvolvida envolveu a integração do software *Cabri-Géomètre* na atividade em classe, não somente como um suporte didático, mas como parte essencial do processo de ensino-aprendizagem. O experimento de ensino conduzido por Mariotti se focou no uso do *Cabri-Géomètre* como um mediador da idéia de prova matemática. Segundo ela, o Cabri foi escolhido por muitas razões diferentes, mas especialmente por causa de sua flexibilidade.

No tocante a um sistema teórico, os principais objetivos que caracterizam o experimento são os seguintes:

> ✓ As atividades de sala de aula são organizadas dentro do 'campo de experiência' (Boero et al., 1995) das construções geométricas no ambiente do Cabri.
> ✓ A evolução do campo de experiência é realizada através das atividades sociais da sala de aula, visadas para a construção social do conhecimento. As 'discussões matemáticas' formam o coração das atividades sociais (Bartolini Bussi, 1996). (Mariotti, 2001, p.259)

No caso da construção de uma teoria, quando um sistema dedutivo é relacionado, há dois aspectos combinados entre si: a idéia de prova e a idéia de sistema teórico (ambas as teorizações, local e global, podem ser consideradas). Mariotti se refere a um teorema matemático como a unidade de uma afirmação, uma prova e uma teoria de referência; algo que envolve a introdução da idéia de validação e as regras que sustentam tal validação.

No momento em que os estudantes começam a trabalhar no Cabri, eles entram num sistema geométrico com regras específicas e seus significados. Quando todo o menu do Cabri é usado, toda a Geometria Euclidiana fica disponível; assim, o sistema teórico se torna altamente complexo. Realmente, devido à riqueza das ferramentas geométricas disponíveis, não é fácil saber o que é dado (se axiomas ou velhos teoremas) e o que deve ser provado (os novos teoremas). É possível que a riqueza deste tipo de ambiente (Cabri) possa enfatizar a ambigüidade sobre fatos intuitivos e teoremas, podendo constituir um obstáculo na escolha dos elementos corretos da cadeia dedutiva de uma prova. Em outras palavras, existe o risco de os alunos não serem capazes de controlar a relação entre o que é dado e o que deve ser deduzido (MARIOTTI, 2001, p. 263).

A autora ainda esclarece que, por esta razão, em seu experimento de ensino decidiu tirar proveito da flexibilidade do micromundo Cabri e também ajustar o menu aos seus objetivos educacionais específicos. Ou seja, no começo do experimento apresenta-se o Cabri com o menu vazio e a escolha dos comandos é, então, discutida de acordo com afirmações específicas selecionadas como axiomas. Desta forma, um duplo processo é iniciado, dizendo respeito, de um lado, ao aumento do menu e de outro, ao aumento do sistema teórico. Novas construções são realizadas no micromundo e, paralelamente, os teoremas correspondentes se juntam à teoria (novos elementos são introduzidos pelos teoremas e definições, novos comandos são introduzidos no menu).

2.3.2.1 Construções Geométricas e Cabri: Aspectos Teóricos e Dinâmicos

Desde a antiguidade, as construções geométricas têm tido uma importância teórica fundamental, claramente ilustrada pela história dos problemas clássicos impossíveis que tanto intrigaram os geômetras gregos (HEATH, 1956, 124; HENRY, 1994; apud MARIOTTI, 2001, p.259).

Nessa perspectiva, objetivando possíveis movimentos do empírico ao conceitual, as tarefas de construção podem envolver desde noções geométricas simples até aquelas que permitam introduzi-los à noção de prova, e assumindo como hipótese, que o ambiente do Cabri (MARIOTTI, 2001, p.261) “pode servir como uma chave de acesso para o significado da prova”. Basicamente, as tarefas de construção pedidas aos estudantes são:

- ✓ 1. Um procedimento visado para obter um desenho/figura específico (figura no Cabri);
- ✓ 2. Uma justificativa de um semelhante procedimento, explicando as razões para sua exatidão (explicar por quê a construção é correta).

A duas tarefas correspondem a duas partes distintas no que se espera das respostas escritas esperadas.

Há uma questão interessante a ser ressaltada. É que no ambiente do Cabri uma atividade envolvendo uma construção está intimamente associada, integrada com a *função arrastar* e, neste caso, a necessidade de justificar a solução advém da necessidade de validação da própria construção, a ponto de explicar porque funciona ou prever que vai funcionar. Sem dúvida, a operação de arrastar a figura pode ser suficiente para convencer alguém da exatidão da solução, mas neste ponto a segunda componente das atividades de ensino-aprendizagem se envolve num jogo. Os problemas de construção também se tornam parte de uma troca social, onde soluções diferentes são relacionadas e comparadas. Para Mariotti (2001):

> A presença do modo arrastar introduz um critério específico de validação para a solução de problemas de construção: uma solução é válida se, e somente se, a figura é estável sob o teste do arrastar. Porque o sistema dinâmico de figuras-Cabri[23] expressa um sistema de relações, consistente no sistema amplo de uma teoria geométrica, solucionar problemas de construção no Cabri significa não apenas aceitar todas as facilidades do software, mas também um sistema lógico para suportar estas facilidades. (p. 260)

Na ótica da geometria clássica, as ferramentas de desenho podem ser concebidas como ferramentas teóricas definindo um tipo particular de geometria. Neste sentido, tradicionalmente, tem havido referência à Geometria Euclidiana como a *Geometria-da-régua-e-do-compasso,* deste modo fazendo menção simultaneamente à origem e limitações de seus objetos.

Realmente, o significado teórico das construções geométricas, ou seja, a ligação entre a construção e o teorema que a valida, é por demais complexo e, por conseguinte, não é imediato para os estudantes. Já o significado prático, relacionado

[23] Figuras executadas na tela do Cabri (observação nossa).

com as possibilidades de realização concreta de um desenho pode interferir criticamente com a adoção de uma perspectiva teórica. De fato, qualquer construção geométrica pode ser utilizada para obter um desenho com uma certa garantia de eficiência, mas também é verdade que construções 'impossíveis', a despeito de suas impossibilidades teóricas, podem ser realizadas com uma precisão escolhida arbitrariamente (MARIOTTI, 2001, p. 259).

Em termos de teoria *vygotskiana*, e ainda de acordo com Mariotti, as figuras e comandos do Cabri podem ser pensados como signos externos da teoria de geometria, e como tais, podem se tornar instrumentos de *mediação semiótica* (VYGOTSKY, 1978, apud MARIOTTI, 2001, p.262).

A geometria é a ciência das formas, tanto planas como espaciais, mas também das idéias, da abstração e da demonstração. Na tela do Cabri, interessa-nos o aspecto dinâmico que estas formas planas (desenho/figura) possam tomar. Aqui, estamos pensando no conjunto formado pelas ferramentas/comandos do Cabri, bem como as construções que nele possamos efetuar, *como um meio de acesso à teoria geométrica*. Acreditamos que algumas atividades, desenvolvidas alternativamente, envolvendo construção de tarefas, bem como outras com discussões coletivas podem introduzir os aprendizes ao pensamento teórico, o que pode privilegiar a *mediação semiótica* a que nos referimos.

Muito embora na maior parte das vezes a elaboração intelectual independa do desenho (ou figura), se faz necessário, por vezes, partir de um desenho para poder generalizar algum resultado. Ora, como a figura-desenho serve de base ao pensamento (no sentido de ser suporte de idéias), acreditamos que o movimento do empírico ao conceitual possa ser facilitado, partindo da figura como meio de acesso à abstração.

2.3.2.2 Considerações sobre a Nossa Pesquisa

Como já mencionamos, a pesquisa de Mariotti trata de um experimento de ensino de longa duração. Em seu *design*, a seqüência de atividades foi desenvolvida de uma maneira estruturada, com atividades dentro do micromundo (tarefas de construção) alternando com atividades de discussões coletivas[24]. A idéia era que, sob orientação do professor, os estudantes construiriam um paralelo entre as construções no ambiente Cabri e a geometria como um sistema teórico. Ainda, na pesquisa de Mariotti, primeiro aconteceram as sessões com Cabri e, depois disso, as discussões coletivas em sala de aula.

A nossa pesquisa contempla a primeira das abordagens acima (experimentos com Cabri) e se fundamenta na base de um *design* de atividades desenhadas para o ambiente do Cabri. Pelo fato de ser uma pesquisa introdutória, o experimento de ensino é de curta duração. Além disso, as discussões coletivas que farão parte desta pesquisa serão as resultantes das interações do professor-pesquisador com os estudantes. A seguir, algumas considerações sobre o uso do menu do Cabri.

Em primeiro lugar, não foi feito nenhum tipo de discussão com os estudantes sobre que ferramentas do menu do Cabri deveriam ser utilizadas. É permitido o uso de todas as ferramentas nas tarefas de construção. Entretanto, levando em conta que um mesmo problema (construção) pode ser resolvido com diferentes ferramentas, optou-se por trabalhar com todas as ferramentas disponíveis, solicitando-se aos estudantes que cumprissem certas tarefas usando todas essas ferramentas (exceto algumas bem específicas, como “cônicas” e “rotação”). Em segundo lugar, motivados pela *Geometria do Compasso, ou de Mohr-Mascheroni*, proibiu-se[25] o uso da ferramenta “reta” (e outras correlatas), de modo que aos aprendizes serão pedidas tarefas de construção quase que exclusivamente com as ferramentas “ponto” e ”circunferência” (ou “compasso”).

O desenvolvimento das atividades sempre cumprirá a seguinte ordem: primeiro utilizam-se todas as ferramentas disponíveis para, depois, usar o menu restrito.

[24] “Discursos”, diálogos dos aprendizes.
[25] Mais no sentido de uma sugestão...

2.3.2.3 Inspiração

As construções geométricas têm sido importante objeto de estudo nas matemáticas desde a antiguidade, notadamente com os gregos. É sabido que a régua que usavam nas construções não tinha escalas e que o compasso era de abertura fixa, dito compasso "enferrujado"[26].

Um dos elementos importantes para o desenvolvimento da geometria está relacionado aos instrumentos associados com os sistemas de referência, ou, por outras palavras, aos instrumentos euclidianos (da Geometria Euclidiana): a régua e o compasso. Nas construções da Geometria Euclidiana, tradicionalmente a régua e o compasso são sempre usados, mas ao longo dos séculos outros métodos foram sendo inventados, sendo um dos mais famosos o que ficou conhecido como *Geometria do Compasso*, descoberto de forma independente, pelos matemáticos *Mohr* e *Mascheron*i. Eles mostraram que tais construções podem ser executadas apenas com um desses instrumentos: *o compasso*. A principal inspiração para este trabalho surgiu a partir do contato que tivemos com esta Geometria do Compasso, na qual as construções euclidianas, na medida em que os elementos procurados são pontos, *podem ser cumpridas somente com o compasso*, sendo a régua dispensável. Na Geometria do Compasso, ou de *Mohr*-*Mascheroni*, a reta de fato "não existe", não é traçada (já que uma reta fica perfeitamente determinada por dois de seus pontos) e o ponto é obtido pela intersecção de duas circunferências. Pode-se também assinalar ponto sobre objeto.

2.3.2.4 Questões a Serem Investigadas

Na seqüência apresentamos as (duas) questões de pesquisa que pretendemos investigar. Nosso tema é a geometria; o tópico, as construções geométricas e suas fundamentações nas propriedades da Geometria Euclidiana Plana (construção e validação); nosso foco central de investigação consiste em usar o software de Geometria Dinâmica, o Cabri-Géomètre, como recurso para a

[26] Ao que sabemos, devido a questões de ordem prática (provavelmente), hoje em dia e desde há muito, o que se firmou foi a régua graduada e compasso sem restrição alguma.

elaboração de provas matemáticas – mesmo que sejam informais – a partir das construções geométricas, conforme será discutido mais adiante.

Sabemos das várias possibilidades de construções que nos fornecem as ferramentas disponíveis no menu do Cabri. O que pretendemos investigar em nossa pesquisa é:

- 1. Em que medida as ferramentas do Cabri, disponíveis para a resolução de problemas, influenciam as provas produzidas pelos alunos?
- 2. Qual o impacto da mudança nas ferramentas na compreensão das provas pelos alunos?

Esclarecemos que, especificamente em relação à pergunta de pesquisa nº 2 acima, proporemos aos alunos aprendizes que façam uso apenas das ferramentas “circunferência” (ou “compasso”) e “ponto”, ou seja, procuraremos tratar um pouco da *Geometria do Compasso*, e ressaltamos que fomos impelidos a esta abordagem baseando-se nos resultados de Mohr-Mascheroni (Teorema de Mohr-Mascheroni). Os resultados, como já comentamos (Capítulo 1) se devem, primeiro a G. Mohr e depois, a L. Mascheroni, que em seu livro “Geometria del compasso”, de 1797, afirma : “*J’appelle Géomètrie du compas, celle qui, par le moyen du compas seulement, et sans le secours de la règle, dètermine la position des points*” [27](MASCHERONI, 1980, p.1). Um ponto aqui entendido como a intersecção de duas curvas.

Entendemos que estas questões não são fáceis de responder, mas tentaremos fazê-lo, desenvolvendo atividades simples, permitindo que usem todos os recursos disponíveis do Cabri: medição, clicar e arrastar, animação, rastro, etc. Gradativamente, iremos mudando as ferramentas disponíveis, por exemplo, usar somente a ferramenta “circunferência” e “ponto”, que remetem às construções apenas com o compasso.

---

[27] ”Chamo de Geometria do Compasso aquela que, fazendo uso apenas do compasso, e sem o auxílio da régua, determina a posição dos pontos.” (tradução nossa, do francês).

2.4 Comentários Adicionais

Evidentemente, a Geometria Dinâmica não pode provar teoremas de nenhum tipo, *no sentido estrito de provar*. Mas vale ressaltar que um software como o *Cabri-Géomètre* remete os aprendizes à experimentação de hipóteses, formulação de conjecturas e estratégias de resolução de problemas, o que pode motivar sobremaneira a busca pela demonstração. Ou melhor, através de um processo de indução a fim de chegar à validade de um resultado, um ambiente de GD pode sugerir caminhos para provar teoremas. O uso do *Cabri-Géomètre*, se bem conduzido pelo educador, pode servir muito bem a este propósito.

As demonstrações em geometria, como na matemática em geral, são regidas pelo formalismo; as demonstrações em geometria, a partir de um ambiente de GD, são uma via para se alcançar esta formalização, apenas uma via, cabendo ao estudante dar continuidade ao processo. A aquisição de conceitos científicos é sempre demorada, principalmente se envolvem conceitos matemáticos, mas num ambiente de GD este processo pode se tornar menos lento.

As construções geométricas podem constituir uma boa maneira para iniciar o aluno a algum conhecimento formal, notadamente se são organizadas atividades bem planejadas com seqüências didáticas específicas. Nessa perspectiva, trabalhar com um software de GD pode se constituir em um meio expressivo de sistematizar fatos observados.

Os softwares de Geometria Dinâmica podem se constituir em excelentes ferramentas para visualizações de propriedades das figuras, bem como para a formulação de conjecturas. Com o uso de programas como o *Cabri-Géomètre*, é possível tornar muito mais recreativas (mas nem por isso mais fáceis!) as construções geométricas.

As atividades devem levar à formação do pensamento geométrico, aquele que vai do raciocínio intuitivo e visual ao raciocínio dedutivo. E lembremos que a intuição é aquilo que é *latente* e precisa ser provocada para vir à tona. É, portanto, desta maneira, que o pensamento geométrico se desenvolve.

Uma última consideração: de um lado, é sabido desde há muito do descaso para com o ensino de GEOMETRIA – do abandono da geometria nos currículos escolares (ver Pavanello, 1993). Este fato está de acordo e tem sido referido em nossas reflexões sobre ensino e aprendizagem de Matemática. De outro lado, os softwares de GD vieram, em certa medida, para "revolucionar" a Geometria Plana e mesmo a Espacial. E então, o que se espera é que as pesquisas em Educação Matemática centrem boa parte de suas forças (intelectuais) em questões de ensino/aprendizagem de geometria, com vistas a recolocar esta nobre área das matemáticas no seu devido lugar: no centro das atenções, em todos os sentidos.

2.5 Sumário do Capítulo

Os principais pontos que abordamos neste capítulo foram:

- ✓ Algumas questões sobre prova no cenário da Matemática e da Educação Matemática;
- ✓ O papel do computador como ferramenta para investigação em matemática;
- ✓ A importância dos softwares de Geometria Dinâmica para o ensino-aprendizagem de Geometria (o caso do Cabri-Géomètre);
- ✓ Uma discussão sobre os diferentes papéis/funções da demonstração para a matemática e para Educação Matemática em particular;
- ✓ A importância teórica (e histórica) das construções geométricas para o trabalho com provas;
- ✓ Os aspectos teóricos que fundamentam a nossa pesquisa, em duas direções: Primeiramente Mariotti, que abrange as tarefas de construção e validação no Cabri e, em segundo lugar, Balacheff, que nos servirá de suporte teórico para a análise das atividades (contempladas no Capítulo 4); e
- ✓ Os elementos centrais de nossa pesquisa bem como as perguntas a serem respondidas.

O próximo capítulo estará reservado à base metodológica escolhida para esta dissertação e também para a apresentação e descrição das atividades que formam o coração desta pesquisa.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a nossa opção metodológica, a qual embasará a presente pesquisa. Vamos discutir e explicitar todo o processo envolvido na elaboração das atividades e os parâmetros que permitirão analisar os dados coletados.

A seguir, faremos algumas considerações gerais sobre a metodologia baseada em *design*, que culminará na exposição da metodologia empregada neste trabalho: experimentos de ensino.

3.2 Iteração e *Design*

Como veremos mais adiante, as atividades que compuseram a presente pesquisa foram desenvolvidas mediante um processo iterativo de *design* ou um *design* de iteração. Não existe, em português, uma tradução explícita para o termo *design*. De acordo com Drisostes (2005), seu significado é bastante amplo, devendo ser compreendido como projeto, padrão, plano, desenho, modelo, propósito, além de expressar ações como planejar, projetar, produzir, esboçar, esquematizar, inventar, criar e executar (p.38).

O que está por trás de atividades envolvendo *design* não é apenas a criação de objetos físicos, mas também a elaboração teórica, que se compõe de planejamento, organização e estratégias. Nesse sentido, as elaborações teóricas ou construções intelectuais são imprescindíveis ao pesquisador durante um processo de *design*, principalmente em ambientes de ensino-aprendizagem. Atividades de *design*, portanto, envolvem a criação de artefatos ou objetos, que são deliberadamente produtos da mão-de-obra humana e “que podem ser concretos ou abstratos” (DRISOSTES, 2005, p.38).

Por iteração deve-se entender um processo de solução de um certo problema (uma equação, por exemplo) por meio de uma seqüência finita de operações em que o resultado de cada etapa (a partir da segunda) utiliza os resultados da etapa imediatamente anterior. As noções de iteração e de *design*, juntas, nos conduzem à noção de *design* iterativo.

Num processo de *design* iterativo, uma atividade (inicial) é criada e aplicada; num segundo momento, de acordo com as informações obtidas em etapas anteriores, esta atividade pode ser redesenhada (alterada). Assim, num processo de *design* iterativo, os pesquisadores interagem no sistema, dotando-o de uma característica cíclica.

O *design* iterativo constitui elemento essencial para metodologias de pesquisa que investigam áreas educacionais, especialmente seus cenários de ensino e aprendizagem em contextos escolares, sendo também uma característica marcante de metodologias de pesquisa baseada em design, como os “design experiments”. A nossa opção metodológica, que será explicada a seguir, baseia-se na noção de “experimentos de ensino”, de Kelly e Lesh (2000). Queremos ressaltar que esta metodologia é uma versão mais singular de “*design* experiments”, a qual constitui um paradigma de pesquisa mais abrangente, principalmente em ambientes educacionais.

3.3 Design Experiments[28]

O objetivo da metodologia baseada em *design* é estudar a aprendizagem em um ambiente escolar natural. Os *design* experiments constituem uma abordagem interdisciplinar que reconhece a natureza fundamental da pesquisa educacional, sendo que nesta abordagem pesquisadores trabalham em parceria com professores

---

[28] Neste trabalho, manteremos a designação original, em inglês.

a fim de desenvolver e refinar teorias educacionais inovadoras. Para Drisostes (2005),

> A pesquisa baseada em design visa ir além de meramente projetar e testar intervenções particulares. As intervenções incorporam reivindicações teóricas específicas sobre ensinar e aprender, refletem um compromisso de compreender os relacionamentos entre a teoria, artefatos projetados e a prática. Ao mesmo tempo, a pesquisa sobre intervenções específicas pode dar contribuição às teorias de aprendizagem e de ensino (p.42).

Cobb et al (2003) identificaram cinco características transversais que caracterizam a metodologia dos *Design* Experiments:

- ✓ Primeiramente, a finalidade de um experimento de design é desenvolver uma classe de teorias acerca, tanto do processo de aprendizagem como sobre os significados que são desenhados para dar suporte à aprendizagem, sendo que "estes últimos vinculados aos artefatos materiais, às práticas de ensino e de aprendizagem, à negociação de normas e outras formas de mediação" (KARRER, 2006, p.199).
- ✓ Em segundo lugar, é uma metodologia altamente intervencionista, procurando sempre a inovação. Design experiments tem como meta representar bases iniciais para futuras inovações e isto significa que a intenção deste tipo de metodologia é inquirir sobre as possibilidades de novas formas de aprendizagem, visando mudanças educacionais.
- ✓ A terceira característica envolve seus aspectos prospectivo e reflexivo. No primeiro deles, o design é implementado como um processo de aprendizagem baseado por hipóteses. Já no segundo aspecto, conjecturas são realizadas com vários níveis de análise. O design ou projeto inicial é uma conjectura sobre os significados que darão suporte a uma forma particular de aprendizagem, que por sua vez será testada. Na condução do experimento, são realizadas e testadas conjecturas mais especializadas, e se uma conjectura inicial é refutada, podem ser geradas e testadas novas conjecturas alternativas.
- ✓ Juntos, os aspectos prospectivo e reflexivo, resultam numa quarta característica, o *design* iterativo. Como conjecturas são geradas e talvez refutadas, novas conjecturas são desenvolvidas e sujeitas a teste. Esta

característica se foca nos ciclos de intervenção e revisão necessários para desenvolver a pesquisa.

- ✓ A quinta e última característica está relacionada com suas raízes pragmáticas, reivindicando que a teoria usada deve fazer “trabalho real”. As teorias desenvolvidas durante o processo de experimentação são humildes, modestas, não apenas no sentido de que estão relacionadas a um domínio específico do processo de aprendizagem, mas também porque são responsáveis pela atividade de *design* (pelo fato de desempenharem um trabalho real).

Uma metodologia baseada em *design* pode ser conduzida em diferentes cenários educacionais, dentre os quais destacamos os experimentos de sala de aula (onde professores e pesquisadores colaboram) e os experimentos desenvolvidos com pequenos grupos de estudantes – que é o caso da nossa pesquisa –, em que as seqüências ou sessões de ensino são conduzidas com professor-pesquisador e estudante. Segundo Cobb et al (2003), “o objetivo é criar uma versão em pequena escala de uma ecologia de aprendizagem que possa ser estudada em profundidade e detalhe”(p. 9).

A metáfora “ecologia de aprendizagem” é usada no sentido de representar um sistema complexo e interativo, envolvendo, além disso, múltiplos fatores de diferentes tipos e níveis. Isto é possibilitado por meio da modelagem de seus elementos, bem como da antecipação de como tais elementos funcionam em conjunto, para suportar a aprendizagem.

A metodologia dos *design experiments* representa um tipo de experimento de ensino voltado para pesquisas em Educação Matemática. Teve origem nos Estados Unidos, por volta de 1970. Experimentos de ensino nem sempre foram um método aceito de fazer pesquisa em Educação Matemática.

3.3.1 Experimentos de Ensino

Um traço marcante desta metodologia – e que a diferencia das demais – é o fato de que os papéis de professor e pesquisador são insolúveis, mas por vezes, durante um experimento, há uma reconfiguração desses papéis, de modo a permitir a atuação do pesquisador como professor ou mesmo como co-aprendiz (KELLY & LESH, 2000). No caso específico da nossa pesquisa, desenvolvida com dois pequenos grupos de estudantes, exerceremos o papel de professor (devido às interações com os estudantes) e de pesquisador (levando em consideração as responsabilidades na criação, aplicação e análise das atividades envolvidas no processo de *design*).

Na condução do nosso experimento de ensino queremos enfatizar a ocorrência de algumas variáveis. Primeiro, quase que o total desconhecimento do objeto de estudo tratado no experimento, neste caso, as construções geométricas (com ou sem o computador). Segundo, a deficiência ou a falta de artefatos materiais, principalmente computadores, na escola onde se deu o experimento, além de só dois dos estudantes possuírem computador em suas casas. E por fim, longos intervalos de tempo entre uma sessão e outra (Nas sessões de familiarização com o Cabri esse intervalo de tempo foi, em média, de oito dias).

Em geral, um experimento de ensino pode apresentar diferentes focos. Para Vaz (2003), alguns destes focos compreendem:

- ✓ O ambiente, que deve permitir aos estudantes participação ativa nas atividades propostas;
- ✓ A atividade do professor e dos alunos; e
- ✓ A seqüência de atividades elaboradas por meio de um processo cíclico, envolvendo teoria e prática, e chamado processo de design.

Nesta dissertação, focaremos atenção nas produções matemáticas dos estudantes (produção de provas) a partir de atividades desenhadas no contexto das construções geométricas no ambiente computacional de Geometria Dinâmica, o Cabri-Géomètre.

Um experimento de ensino, segundo Steffe & Thompson (2000), envolve uma seqüência de episódios de ensino. Um episódio de ensino inclui um agente de ensino, um ou mais estudantes, uma evidência dos episódios de ensino, e um método de gravação para capturar todas interações durante o episódio. Estas gravações são usadas para preparar os episódios subseqüentes e, desta forma, para a condução de uma análise conceitual retrospectiva do experimento de ensino.

Um dos principais objetivos de um experimento de ensino é a criação de modelos explanatórios a fim de permitir interpretar os processos de aprendizagem dos alunos. Daí, a questão a ser colocada é se os modelos construídos com base em um determinado experimento de ensino poderão ser aplicados à compreensão do comportamento de outros aprendizes sob condições semelhantes. Steffe & Thompson (2000), esclarecem a esse respeito que o objetivo de um experimento de ensino é estabelecer um modelo vivo da atividade matemática dos aprendizes em diferentes ambientes de aprendizagem.

Ao se conduzir um experimento de ensino, deve-se constantemente testar e revisar conjecturas, analisar o raciocínio dos estudantes e a influência do ambiente de aprendizagem. Neste tipo de metodologia, é expressivo o fato de que a compreensão do fenômeno em investigação ocorre enquanto o experimento se desenvolve. É isso que confere um caráter de dinamismo à metodologia baseada em experimentos de ensino.

3.4 O Papel do Professor

Desenvolvemos as atividades com a expectativa de que os aprendizes pudessem expressar suas descrições e/ou justificativas com um certo nível de autonomia, mas nos deparamos com algumas possibilidades inesperadas no decorrer do *design*. Isto porque o que é esperado e o que pode ser de fato realizado num experimento de ensino são questões que devem estar na linha de frente das preocupações do professor-pesquisador.

Antes de qualquer coisa, a questão das dificuldades[29] dos aprendizes na linguagem materna, e tanto mais ainda na linguagem matemática, tem implicação direta na forma de intervenção e interação do professor, enquanto conduz as sessões de um experimento de ensino.

[29] Nos referimos, aqui, às dificuldades naturais na língua escrita e falada, tendo em vista o nível escolar dos aprendizes (7ª Série do Ensino Fundamental).

As ações do professor, neste tipo de metodologia, se dão em um contexto de constante interação com os estudantes. As formas de agir e de indagar são questões que representam o foco central ao se conduzir um experimento de ensino.

Cientes de que este tipo de metodologia se foca na análise do raciocínio oferecido pelo aluno, e interessados em suas produções matemáticas, nosso papel é auxiliar os estudantes no sentido de que possam organizar seus raciocínios, rumo a uma linguagem matemática mais apropriada, mas, talvez, nem sempre mais precisa.

O objetivo principal do professor-pesquisador é estabelecer modelos vivos da atividade matemática dos estudantes, ou melhor, é criar meios de interação que possam encorajar mudanças nos pensamentos atuais dos estudantes. O que se dá através de uma atenção especial no *design* e *redesign* das atividades desenvolvidas durante o experimento.

3.5 Considerações Adicionais

Entendemos que o nosso estudo se desenvolveu nas bases de um *design* iterativo, caracterizado por ciclos de revisão e atualização, o que define a relação do presente estudo com este tipo de metodologia. Nossa hipótese inicial de pesquisa é que o Cabri-Géomètre irá contribuir com as produções matemáticas (as “provas”) dos estudantes a partir do objeto de estudo *construções geométricas*.

3.6 Sujeitos de Pesquisa e Procedimento Inicial para Coleta de Dados

Os nossos sujeitos de pesquisa são alunos da 7ª Série[30] (Ensino Fundamental) de uma escola da rede estadual de Diadema, São Paulo. No início do ano letivo de 2006, explicamos aos alunos desta classe que haveria uma pesquisa a ser desenvolvida e que esta trataria das construções geométricas com o uso do computador. Esclarecemos que seria usado um programa de computador chamado *Cabri-Géomètre* para executar as construções.

[30] Fizemos a opção de trabalhar com nossos próprios alunos.

O próximo passo foi convidá-los a participar do projeto de pesquisa. Tivemos de imediato cerca de 20 (vinte) interessados, dos quais somente 6 participaram da pesquisa do início ao fim. Deixamos claro que o projeto seria desenvolvido fora do horário de aula. Depois disso, começamos a fase de familiarização dos aprendizes com o *Cabri-Géomètre*, concomitantemente ao uso do computador. (Veja-se a próxima sessão)

Um dos primeiros problemas que vivenciamos nesta classe é que estes alunos não tinham tido aulas de Geometria[31], menos ainda de construções geométricas. É claro, também, que como se trata de uma comunidade de baixa renda, o acesso ao computador é muito restrito. Além do mais, os computadores da escola estavam com problemas, com exceção de um. Uma primeira preocupação que tivemos foi com respeito ao conteúdo de geometria a ser ensinado, o qual foi abordado no planejamento da escola. Providenciamos em seguida dois computadores para serem usados no desenvolvimento das atividades.

Como os nossos aprendizes não tinham acesso ao computador, tivemos necessariamente que fazer várias sessões de familiarização com o software *Cabri-Géomètre*. (Quanto ao uso do computador propriamente dito – ligar, desligar, teclado, mouse; abrir e fechar programas; salvar arquivos e até jogar – essas tarefas não apresentaram dificuldades para os aprendizes)

3.6.1 Sobre a Seleção dos Alunos

Não adotamos critério algum e nem aplicamos qualquer tipo de teste escrito para escolha dos alunos, não havendo, portanto, nenhum tipo de seleção. Da lista geral de vinte interessados do início do ano (de 2006), sobressaíram dois grupos que, junto com o professor-pesquisador, constituíram dois sistemas de aprendizagem. O Sistema de Aprendizagem A, com duas duplas de alunos, e o Sistema de Aprendizagem B, com uma dupla – sendo que esta dupla só manifestou

[31] Cabe a observação de que, apesar desses alunos não terem tido aulas de Geometria (não de forma planejada), deve ficar claro que detêm algum conhecimento (noção) sobre conceitos básicos, como retas, ângulos, e figuras planas, como triângulos e quadrados.

interesse em participar do projeto cerca de dois meses após termos concluído parte da coleta de dados (nos experimentos de ensino com Cabri) com as duas duplas do Sistema de Apendizagem A.

3.6.2 Os Materiais e o Ambiente de Trabalho

O ambiente de trabalho onde se deu o experimento de ensino é uma escola da rede estadual de ensino, em Diadema. Ressalte-se que a sala de aula de informática desta escola está praticamente desativada, uma vez que apenas um computador está em condições de uso. Apesar disso, foi esse o espaço que utilizamos.

Utilizamos, nos experimentos, dois computadores, um deles tendo sido providenciado com os nossos próprios recursos. Em cada um dos computadores instalamos o software *Cabri-Géomètre II*, que foi usado para a execução das atividades. Participaram do experimento 3 duplas ao todo, sendo que num primeiro momento tivemos as duplas Augusto/Cristina e Bruno/Gisele (compondo o Sistema de Aprendizagem A) e, num segundo momento, apenas a dupla Bárbara/Suzane (Sistema de Aprendizagem B). Esclarecemos que só depois de ter terminado os trabalhos com as duplas Augusto/Cristina e Bruno/Gisele é que começamos a trabalhar com a dupla Bárbara/Suzane.

Depois de cada etapa do experimento de ensino com Cabri, utilizamos, também, cartões contendo escritas de provas matemáticas (ou explicações). Em cada cartão escrevemos um passo da prova (esta etapa compreende o chamado “jogo” de Prova com cartões mais os pós-teste, discutidos mais adiante). A tarefa dos aprendizes era “montar a prova”, colocando em ordem os cartões de acordo com o raciocínio correto empregado na demonstração.

Todas as sessões foram registradas em áudio e vídeo. Para isso, providenciamos gravadores (“K-7” e “mp3-players”) e uma filmadora. As imagens foram gravadas por uma outra pessoa, o que facilitou nossa atuação como professor. Além disso, por vezes, para uma melhor interação com os estudantes, lançamos mão da lousa como recurso didático.

As escritas dos aprendizes foram registradas na própria tela principal do *software*, e devidamente salvas numa pasta do computador.

3.6.3 Familiarização com o *Cabri-Géomètre*

Nossa preocupação inicial foi fazer com que os alunos envolvidos na pesquisa tomassem conhecimento do software *Cabri-Géomètre* da forma mais familiar possível. Para tanto, foi necessária nossa interação constante com os alunos nas várias sessões[32] de familiarização, onde agimos essencialmente como professor-mediador.

O software *Cabri-Géomètre*, apesar de estar disponível nas escolas estaduais há cerca de dez anos, é muito pouco conhecido e utilizado pelos professores. E se pensarmos no Cabri como uma possibilidade didática (para ser usado na sala de aula), seu uso pelos alunos se reduz quase a zero.

Pelo motivo exposto acima tivemos que introduzir os alunos ao treinamento técnico do Cabri no que diz respeito ao menu e às ferramentas disponíveis para construção. Esse treinamento aconteceu ao mesmo tempo em que foram sendo executadas as primeiras construções na tela do programa. A maioria dos recursos disponíveis no menu do Cabri foi sendo apresentada no decorrer do desenvolvimento das atividades. Por exemplo, para construção da mediatriz de um segmento de reta, introduzimos as ferramentas “mediatriz” e “ponto médio”, além da ferramenta “compasso” (e também a “circunferência”).

Fizemos uma apresentação sucinta das principais características do software: tela principal, menus e comandos. Um aspecto geral do Cabri é apresentado na figura abaixo.

[32] Cerca de quatro a cinco sessões para cada Sistema de Aprendizagem.

Figura 3.1 – tela principal, de abertura do *Cabri-Géomètre II*

Explicamos aos aprendizes a maneira de utilizar os comandos (os principais, para os nossos objetivos). Começamos explicando como se constrói uma figura (um ponto, uma reta, uma curva, etc), dizendo que deveriam clicar com o mouse numa das janelas da barra de ferramentas do Cabri e depois voltar com o cursor para a tela, efetuando a construção desejada. Citamos a construção de uma circunferência de raio arbitrário, em que o aluno tem que clicar na 4ª janela (da esquerda para a direita), quando retorna à tela, dá um clique, solta e arrasta para a posição pretendida, dando um clique final. E pronto.

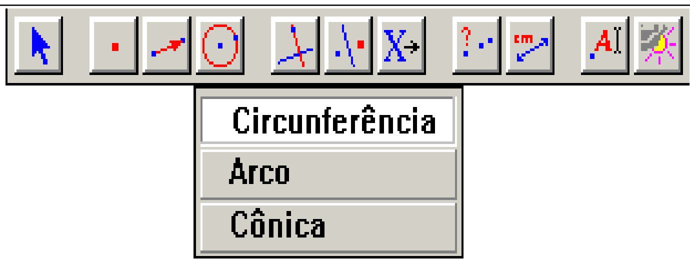


Figura 3.2 – destaque da 4ª janela, que permite construir circunferência, arco e cônica

Fizemos em torno de quatro a cinco sessões, sempre aos sábados, com o objetivo de familiarizar os alunos com o uso do computador, com o software, ao mesmo tempo em que treinamos as principais construções geométricas: ponto, reta, segmento, circunferência, ponto médio, mediatriz, retas paralelas e perpendiculares etc. A postura do professor-pesquisador foi de constante interação com os aprendizes. Ressaltamos que não houve nenhuma forma de registro nessas sessões de familiarização (áudio ou vídeo), pois os aprendizes não estavam bem à vontade para tal.

3.7 As Atividades

As atividades que integram a presente pesquisa se dividem em três conjuntos, aplicados a dois sistemas de aprendizagem. O Sistema de Aprendizagem A é composto por duas duplas e o Sistema de Aprendizagem B, por uma dupla. Os dois sistemas serão descritos em detalhes quando for feita a análise das atividades no Capítulo 4. No que segue, apresentamos um resumo dos três conjuntos de atividades.

- ***Conjunto* 0**, composto pelas *Atividades Preparatórias*, e contendo sete questões.

Foi aplicado com o objetivo de introduzir os aprendizes à noção de construções geométricas num ambiente de Geometria Dinâmica e prepará-los para a etapa seguinte – a coleta de dados propriamente dita. Houve apenas registro de voz, mas pedimos que escrevessem na tela a descrição da construção e que salvassem num diretório do HD (Hard Disk). Tais respostas estão em anexo no fim deste trabalho. Vale lembrar que as questões abordadas neste conjunto de atividades já vinham sendo desenvolvidas nas sessões com Cabri e na sala de aula de Matemática.

- **Conjunto 1**, com seis questões assim distribuídas:
  Conjunto 1.1: Introduzindo construções geométricas no Cabri;
  Conjunto 1.2: Introdução à prova;
  Conjunto 1.3: Caixas-pretas;
  Conjunto 1.4: Episódio de Ensino; e
  Conjunto 1.5: Construções de Mohr-Mascheroni (ponto simétrico)

- **Conjunto 2**, composto por um total de 5 atividades. Neste conjunto, apresentamos as provas de certas proposições geométricas confeccionadas em cartões, da seguinte maneira: num certo cartão, colocamos o enunciado do teorema, bem como figuras, diagramas, dicas etc e as etapas da prova eram apresentadas de forma “solta” em alguns outros cartões. A isto vamos chamar de **“jogo” de prova**, de modo que cada dupla de aprendizes “ganha” o jogo quando conseguir organizar as etapas da prova na ordem correta. Este conjunto abrangeu também a realização de um pós-teste, em que a prova tinha que ser elaborada por escrito (com lápis e papel).

Abaixo, organizamos um quadro-resumo do Sistema de Aprendizagem A.

<table>
<tr><th colspan="5">Sistema de Aprendizagem A</th></tr>
<tr><td>Conjunto</td><td>Descrição</td><td>Número de sessões</td><td colspan="2">Duplas/sujeitos</td></tr>
<tr><td>Conjunto 0</td><td>Atividades Preparatórias</td><td>1</td><td colspan="2">• Augusto/Cristina
• Bruno</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conjunto 1</td><td rowspan="3">Introdução à prova e às construções geométricas no Cabri</td><td rowspan="3">2</td><td>1ª sessão</td><td>• Augusto/Cristina
• Bruno/Gisele</td></tr>
<tr><td>2ª sessão</td><td>• Augusto/Cristina
• Bruno/Gisele</td></tr>
<tr><td colspan="2">Redesenhadas na Sessão 2</td></tr>
<tr><td>Conjunto 2</td><td>“Jogo” de prova com cartões +Pós-teste</td><td>1</td><td colspan="2">• Augusto/Cristina
• Bruno/Gisele</td></tr>
</table>

Tabela 3.1 – Resumo do Sistema de Aprendizagem A

O Sistema de Aprendizagem B é formado apenas por uma dupla, Bárbara/Suzane, e segue resumido abaixo.

Sistema de Aprendizagem B			
Conjunto	*Descrição*	*Número de Sessões*	*Duplas/sujeitos*
Conjunto **0**	Atividades Preparatórias	---	---
Conjunto **1**	Introdução à prova e às construções geométricas no Cabri	3	Bárbara/Suzane
Conjunto **2**	"Jogo" de prova com cartões+Pós-teste	1	Bárbara/Suzane

Tabela 3.2 – Resumo do Sistema de Aprendizagem B

3.7.1 As Atividades: Objetivos, Resoluções e Comentários

3.7.1.1 Conjunto 0 (Atividades Preparatórias)

Este conjunto de atividades foi desenvolvido para ser aplicado a duas duplas – Augusto/Cristina e Bruno/Gisele –, mas no dia marcado, um sábado, a aluna Gisele faltou. Com isso, o teste se realizou com a dupla Augusto/Cristina num computador e com o aluno Bruno sozinho num outro computador.

Não pedimos aos aprendizes que apresentassem as justificativas das construções feitas; mas tiveram que fazer suas primeiras tentativas de descrever os passos da construção. A opção da não justificativa das construções foi feita por entendermos ser uma etapa inicial do processo de design, em que os aprendizes ainda estavam tentando dominar as construções básicas. Inclusive, enquanto professor-pesquisador, interagimos com os aprendizes na maior parte das atividades.

Seguem as atividade do **C*onjunto 0*** no quadro abaixo:

1) Construa um segmento de reta AB. Trace a mediatriz deste segmento. Como se chama o ponto de intersecção da reta mediatriz com o segmento? 2) Construir uma circunferência e um diâmetro. 3) Marque dois pontos A e B e construa o simétrico de A com relação a B. 4) Desenhe uma reta r e um ponto P fora dela. Construa o simétrico de P com relação à reta r. 5) Dividir uma circunferência: a) em duas partes iguais; b) em seis partes iguais c) em três partes iguais 6) Construa um ângulo de 180°. 7) Construa 3 pontos colineares (que estão na mesma reta). Faça a verificação!

Quadro 3.1 – Conjunto zero (Atividades Preparatórias)

Para cada uma dessas questões, esperamos certos tipos de soluções (da construção) dadas pelos aprendizes. As possíveis soluções apresentadas por nós para este primeiro conjunto de atividades se encontram no Anexo 2 no fim deste trabalho.

3.7.1.2 Sumário sobre as Atividades do Conjunto 0

Nas atividades do ***Conjunto 0***, nossa intenção foi iniciar os aprendizes no processo de design, uma espécie de preparação para a etapa seguinte do experimento. Reforçamos que foi solicitado aos aprendizes que descrevessem suas construções na própria tela do Cabri, mas de forma alguma foram dadas quaisquer justificativas (provas) de suas construções. Além disso, só houve gravação de voz.

Apesar de todas as questões requererem um certo nível de prova, isso não foi feito pelos aprendizes, como salientamos acima. Podemos dizer que foram atividades exploratórias, no sentido de que os alunos visualizaram propriedades, exploraram conjecturas e até "provaram" teoremas de forma experimental. Para tanto, fizeram uso dos diversos recursos que oferece o Cabri, como as ferramentas “distância e comprimento”, “medida de ângulo”, “colinear?”, “simetria central”, “simetria axial”, “perpendicular”, etc.

Apresentaremos, na próxima sessão, o conjunto de atividades que compôs a etapa seguinte da coleta de dados, que vamos denominar de **Conjunto 1**.

3.7.2 Conjunto 1

Este conjunto, composto por sete questões, foi planejado para ser aplicado às duplas Augusto/Cristina e Bruno/Gisele. Imaginávamos também ser possível aplicar essas atividades em apenas uma sessão, mas isso não foi possível, pois há uma distância significativa entre o que é previsto e o que pode ser de fato realizado, executado, num processo de design. Resultado: este conjunto foi aplicado em duas sessões e enfatizamos que foram sessões de longa duração (em torno de 2,5 a 3 horas cada sessão). Nesta etapa pedimos aos alunos que justificassem suas construções, ou seja, que escrevessem a prova na tela do Cabri. Vale ressaltar que, como houve gravação de vídeo (além de um gravador para cada dupla), isso deixou os estudantes pouco à vontade diante da câmera, pelo menos nos primeiros momentos.

3.7.2.1 Conjunto 1.1: Introduzindo construções geométricas no Cabri

Atividade 1[33]

Construa uma circunferência qualquer e marque um ponto **P** sobre a mesma. Use a ferramenta “animação” para fazer com que o ponto **P** se movimente sobre a circunferência. Marque um outro ponto, **A**, sobre a circunferência, e repita a operação. O que você pode observar?

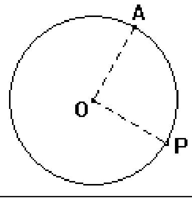


Figura 3.3 – Atividade 1

[33] Esta atividade teve como objetivo levar os alunos a indagar que propriedade geométrica caracteriza o ponto A (ponto P...).

Esta questão teve por objetivo mostrar aos aprendizes que todos os pontos de uma circunferência são eqüidistantes do seu centro. A conclusão a que deveriam chegar era que OA = OP = raio. Para isso, deveriam se valer do dinamismo do Cabri.

Atividade 2[34]

Na circunferência abaixo, os segmentos OA, OB, OC e OD têm a mesma medida. Comente a afirmação.

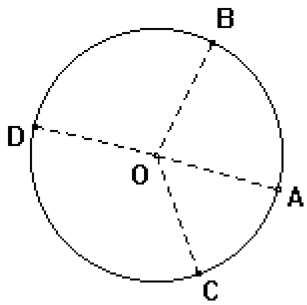


Figura 3.4 – Atividade 2

Colocamos esta questão na forma de uma afirmação, explicando aos aprendizes que em matemática, quando se faz uma afirmação, há duas possibilidades: quando a afirmativa é verdadeira, procura-se provar, explicar o porquê; quando é falsa, apresenta-se um contra-exemplo e com isso a afirmação fica verificada.

Entendemos que esta questão reforça a anterior, sendo uma extensão da mesma. Um dos objetivos era que os aprendizes enunciassem a propriedade: “qualquer segmento que ligue um ponto da circunferência ao seu centro tem sempre o mesmo tamanho (raio)”. O outro objetivo visado era, também, que verificassem a afirmação usando os recursos dinâmicos do software.

[34] O objetivo principal é que, numa atividade como esta, os alunos comentem a veracidade (ou não) de uma afirmação; um segundo objetivo é que usem os recursos dinâmicos do Cabri.

Atividade 3

Por quê o círculo C_1 tem o mesmo tamanho que o círculo C_2?

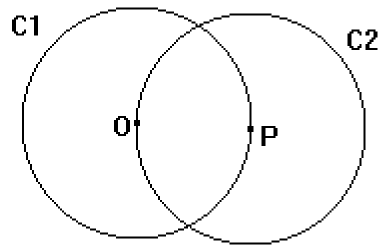


Figura 3.5 – Atividade 3

Esta questão foi apresentada aos alunos a fim de que dessem os primeiros passos na compreensão entre uma construção e a explicação que a valida. Observemos ainda que na pergunta está implícito que as circunferências têm o mesmo tamanho.

A resposta esperada era: por que têm o mesmo raio; ou ainda, por que foram construídas com o mesmo raio (por construção). Os aspectos dinâmicos do Cabri poderiam ser usados para responder à pergunta.

Atividade 4

Construir uma reta que divide uma circunferência um duas partes iguais.

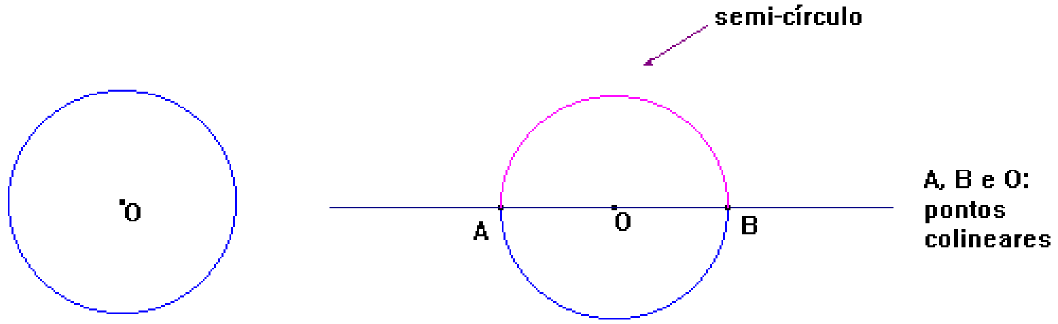


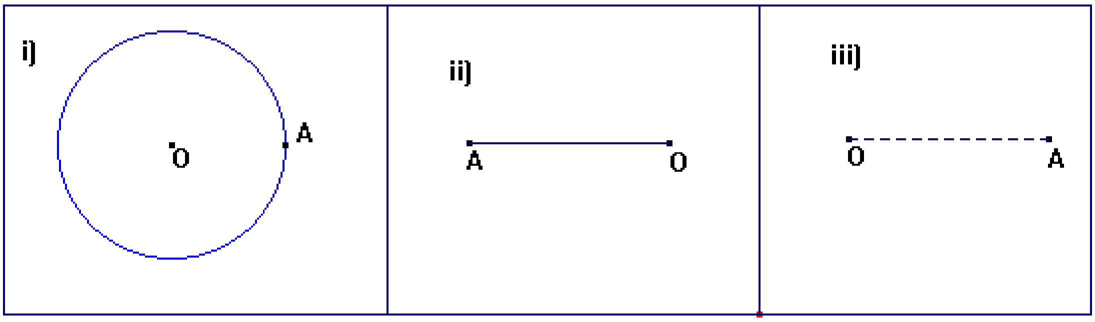
Figura 3.6 – Atividade 4

Nesta atividade, os alunos deveriam primeiro construir uma circunferência com qualquer centro e raio. O próximo passo da construção seria traçar uma reta passando pelo centro da circunferência. Esperávamos, nesta questão, que os alunos (além de traçar a reta pelo centro), marcassem os pontos de intersecção da reta com a circunferência e percebessem a relação entre *pontos colineares e um ângulo raso* e que uma *reta que passa pelo centro* determina, na circunferência, um *diâmetro*.

3.7.2.2 Conjunto 1.2: Introdução à prova

Atividade 5

Dobrar o segmento de reta AO. Faça a construção (**a**) sando todas as ferramentas disponíveis do Cabri e (**b**) usando apenas o compasso (a ferramenta “circunferência”)



E a prova, vem quando?

Figura 3.7 – Atividade 5

Esta atividade teve como alvo introduzir os estudantes à prova (no redesign para a segunda Sessão, o item (ii) foi excluído, uma vez que os aprendizes não perceberam diferenças entre este e os demais).

Nossa intervenção foi no sentido de que os aprendizes fossem abandonando gradualmente as diversas ferramentas disponíveis no Cabri e só ficassem com a circunferência. A seguir, ofereceremos algumas possibilidades de resolução para esta questão.

Iremos resolver as atividades (i) e (ii) conjuntamente, por simetria central ou usando retas e circunferências.

1ª resolução: por simetria central

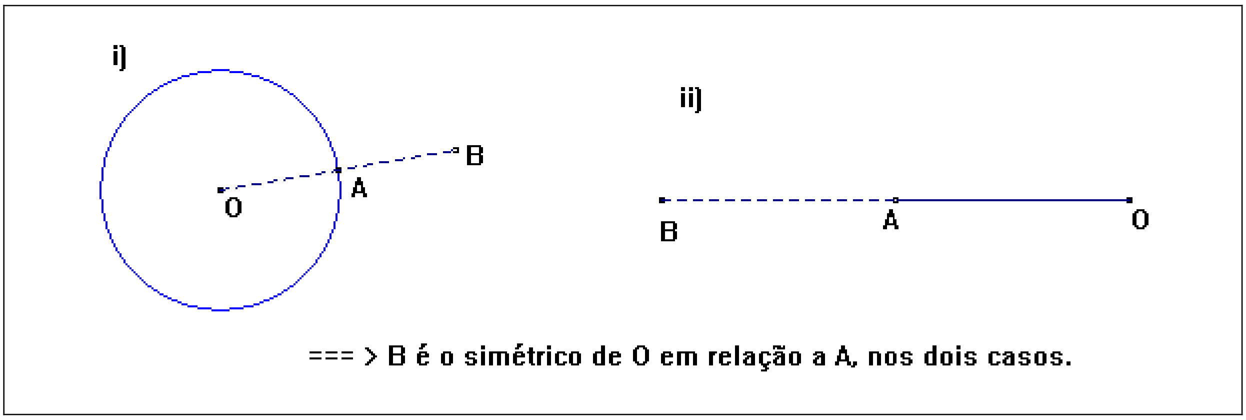


Figura 3.8 - 1ª possível resolução da Ativ.5

Passos da construção

1) Clicamos na ferramenta "simetria central";
2) Levamos o cursor até a tela, clicamos em O e depois em A, quando aparece um outro ponto, B, que será o simétrico de O em relação a A. Com as ferramentas "*colinear*" e "*distância e comprimento*", facilmente verifica-se que OB = 2.OA.

2ª resolução – item (i): usando retas e circunferências

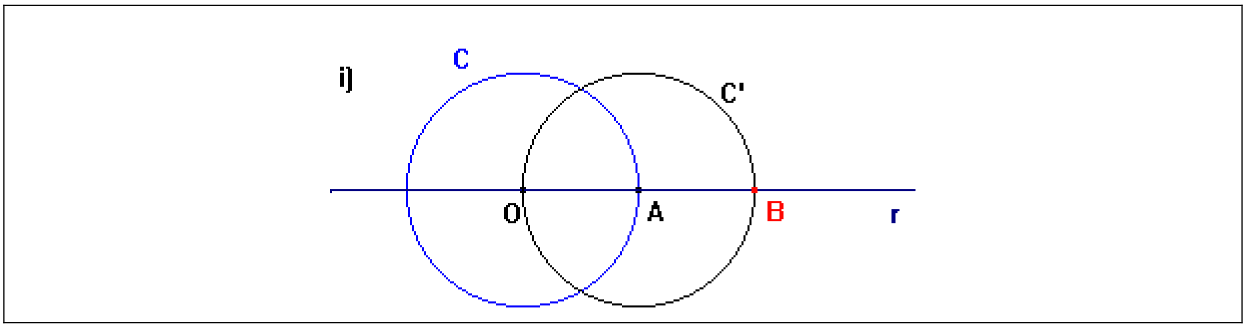


Figura 3.9 – 2ª possível resolução da Ativ.5 (i)

1) Traçamos uma reta r, passando por O e A;
2) Traçamos uma circunferência C' de centro A e raio OA;
3) Tomamos o ponto B, intersecção da circunferência C' com a reta r.

Prova: O segmento OB é de fato o dobro de AO, visto que AO = AB = raio e B é colinear com O e A (pois B é intersecção de C' e r).

3ª resolução - item (ii): reta e circunferência

Passos da construção

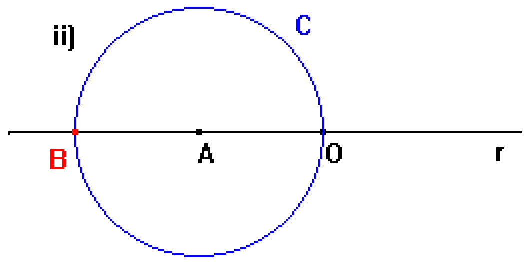


Figura 3.10 – 3ª possível solução da Ativ.5 (ii)

1) Traçamos a reta r, que passa por O e A (assim, o segmento estará contido em r);
2) Construímos a circunferência C, de centro A e raio OA;
3) Toma-se o ponto B, B = C $\cap$ r.

Prova: O ponto B é colinear com A e O e como A é ponto médio de OB, segue que AO = AB =raio. Portanto, OB = 2.OA = 2.(raio).

Resolução do item (iii).

Aqui usaremos apenas circunferências.

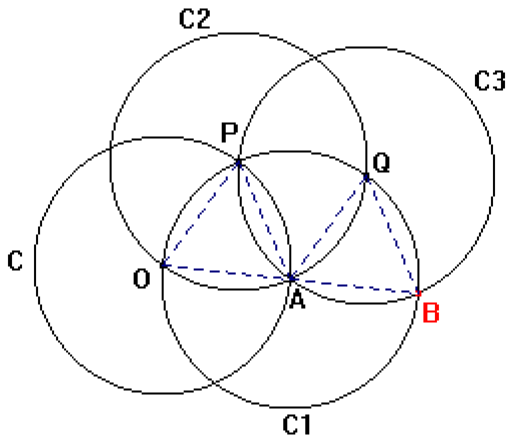


Figura 3.11 – Ativ.5

Passos da construção:

1) Traçamos as circunferências **C**, de centro O, e **C_1**, de centro A (ambas de mesmo raio OA)
2) Tomamos P na intersecção de C e C_1;
3) Traçamos a circunferência C_2, de centro P e raio OA;
4) Tomamos Q na intersecção de C_1 e C_2;
5) Traçamos a circunferência C_3, de centro Q e raio OA;
6) Tomamos o ponto B, intersecção de C_1 e C_3.

Prova: Precisamos provar que OB = 2.OA.

Vamos usar o **teorema auxiliar** seguinte: Se $\alpha = \beta$, então r // s.

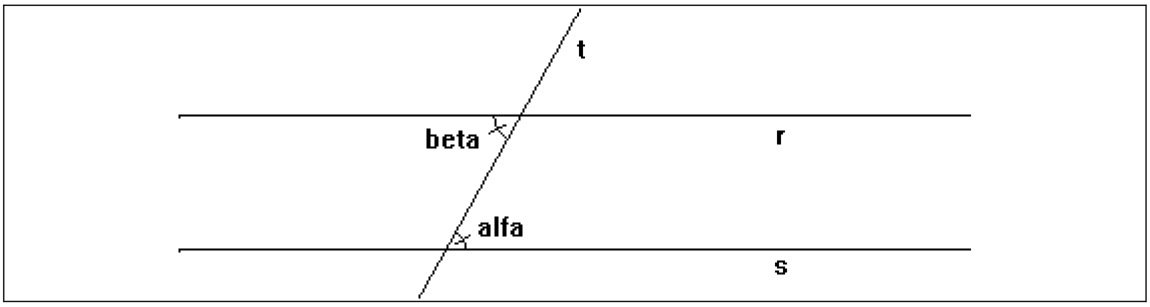


Figura 3.12 – Duas paralelas cortadas por uma transversal

Como OA = AB = raio, para concluir que OB = 2.OA, temos que provar que os pontos O, A e B são colineares. O que é feito provando-se que as retas OB e PQ são paralelas (usando o teorema enunciado acima).

Por construção, cada um dos 3 ângulos no vértice A mede 60º (pois os triângulos OAP, PAQ e QAB são eqüiláteros, todos com o vértice A em comum). Logo, a ângulo OÂB é raso e, portanto, os pontos O, A e B são colineares.

Eis a prova:

Como $P\hat{A}O \equiv A\hat{P}Q$, pela congruência dos triângulos OAP e PAQ, tem-se que PQ // AO (**1**);

Da mesma forma, temos a congruência dos triângulos PAQ e QAB, donde $B\hat{A}Q \equiv A\hat{Q}P$, e então PQ // AB (**2**).

Logo, por (**1**) e (**2**), temos que AB // AO e sendo AO e AB dois segmentos (iguais) com o ponto A em comum, concluímos que os pontos O, A e B são colineares. Caso contrário, teríamos pelo ponto B duas paralelas à reta PQ, o que contraria o 5º postulado de Euclides.

3.7.2.3 Conjunto 1.3: “Caixas pretas”:

O principal objetivo das atividades tipo “caixas-pretas” foi procurar fazer com que os alunos se utilizassem certas noções ou propriedades já adquiridas ou parcialmente adquiridas, ou que fizessem novas descobertas a partir da figura dada, principalmente fazendo uso do dinamismo do software Cabri-Géomètre. E vale lembrar que as figuras correspondentes a esta questão foram preparadas pelo professor-pesquisador e prontamente salvas em uma pasta do computador.

O termo “cópia exata”, como foi explicado no experimento, significa construir uma figura com as mesmas propriedades que a figura dada. Além disso, não foi pedida qualquer justificativa da construção.

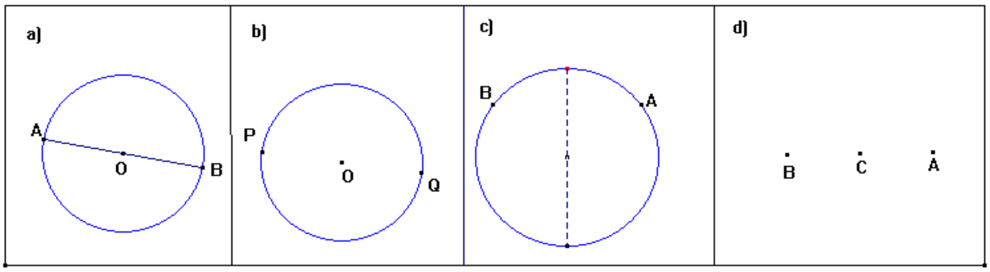
Lembramos que na segunda Sessão, para o Sistema de Aprendizagem A, esta questão teve o enunciado modificado. A explicação é que na primeira sessão uma das duplas usou o conceito de simetria para “copiar” a figura (no caso, item (a) e (b)), momento em que houve interferência do professor-pesquisador, esclarecendo que este método não era apropriado para resolver a questão, uma vez que a ferramenta “simetria” apenas executa a “imagem” e, portanto, não mantém o mesmo comportamento da figura original. Vejamos a versão inicial e a versão final desta questão:

- ✓ Versão inicial “*Procure fazer uma “cópia exata” de cada figura a seguir. Mas antes, procure movimentar a figura ou partes da mesm*a.”
- ✓ Versão final (redesenho) : “*Reproduzir uma figura que tenha o mesmo comportamento que a figura abaixo. Mas antes, procure movimentar a figura ou partes da mesm*a.” Segue a atividade.

Atividade 6

O principal objetivo desta atividade era enfatizar a noção de construção robusta. Nossa interação com os aprendizes se deu no sentido de esclarecer que uma construção é robusta se pudermos movimentar partes da mesma e ela mantiver as propriedades originais (pode mudar a forma).

Procure fazer uma "cópia exata" de cada figura a seguir:



Mas antes, procure movimentar a figura ou partes da mesma.

Figura 3.13 – Todos os itens da Ativ.6

Esta atividade trata exclusivamente dos dois tipos de simetria: central e axial. O objetivo era enfatizar a noção de construção robusta/mole e, para isto, os alunos deveriam explorar a fundo cada figura, a fim de encontrar as pistas para a solução correta. Esperávamos, por exemplo, que medissem distâncias, verificassem a colinearidade de pontos, perpendicularismo, que medissem ângulos e assim por diante.

Nesta questão, primeiro pedimos aos aprendizes que abrissem o arquivo contendo cada figura. Auxiliamos os aprendizes mostrando que nem todos pontos das figuras poderiam ser movimentados (ver ilustração abaixo).

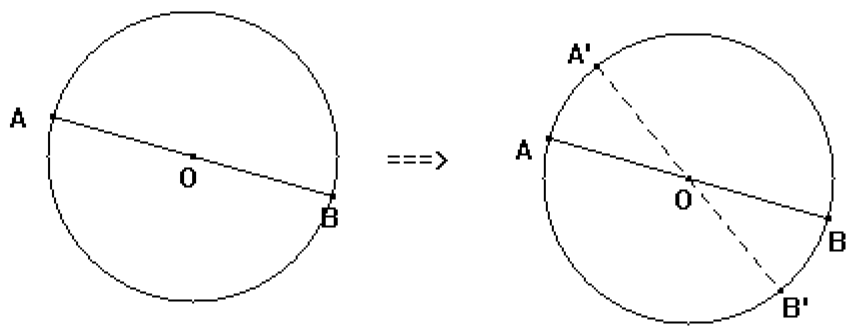


Figura 3.14 (Ilustração). Movimentação do ponto B.

Os alunos deveriam perceber em primeiro lugar que somente o ponto B poderia ser movimentado. Foram instruídos a fazer verificações utilizando as ferramentas do Cabri: "distância e comprimento" e "colinear?".

Resolução: de (a)

1)Traçamos uma circunferência com centro O em qualquer lugar da tela do Cabri, mas com o mesmo raio da circunferência dada,usando a ferramenta “compasso”;

2) marcamos um ponto B sobre a mesma e encontramos o seu simétrico A relativamente ao centro O;

3) Unimos os pontos B e A, o que resolve a questão.

Resolução: de (b)

Uma vez que foi permitido manipulações de partes da figura, bem como verificações (das distâncias, alinhamento dos pontos), esta questão se resolve da mesma maneira que a anterior, sendo apenas uma pequena variação da mesma (deixamos de traçar o diâmetro e mudamos os rótulos dos pontos).

Resolução: de c)

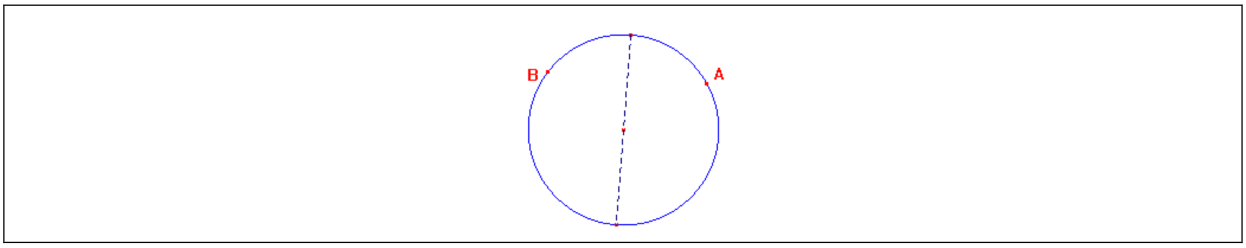


Figura 3.15 – Atividade 6

Nesta atividade, o diâmetro é fixo e o ponto A é móvel. Trata-se de simetria na circunferência. O ponto B é o simétrico de A em relação ao diâmetro Tracejado.

Possibilidades de resolução

1ª) Esta atividade pode ser resolvida de modo mais prático por “simetria axial” ou por perpendicularidade (ferramenta “*reta perpendicular*”).

1) Por simetria, basta clicar na ferramenta “simetria axial”, levar o cursor à tela, clicar no ponto A e depois no diâmetro. O ponto B, simétrico de A, aparece sobre a circunferência, do outro lado do diâmetro. Ver a figura abaixo:

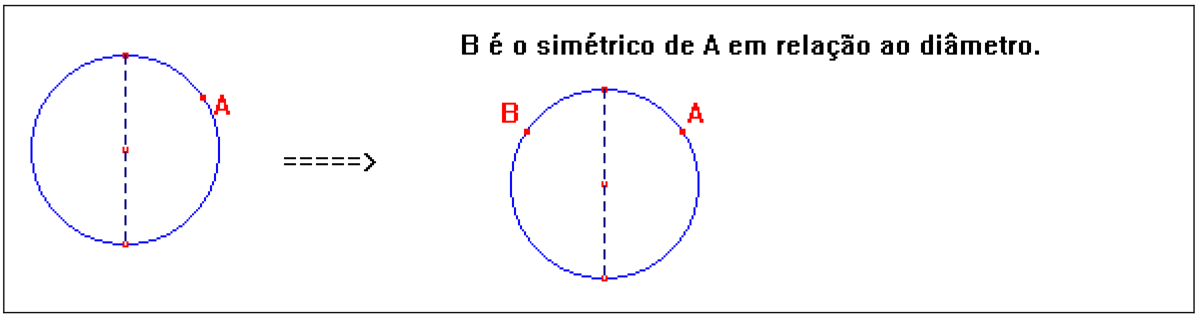


Figura 3.16 – resolução da Ativ.6

2) Usando a ferramenta "*reta perpendicular*", clicamos no ponto A e em seguida no diâmetro. O ponto B aparece como intersecção da circunferência com a reta. Ver a figura abaixo:

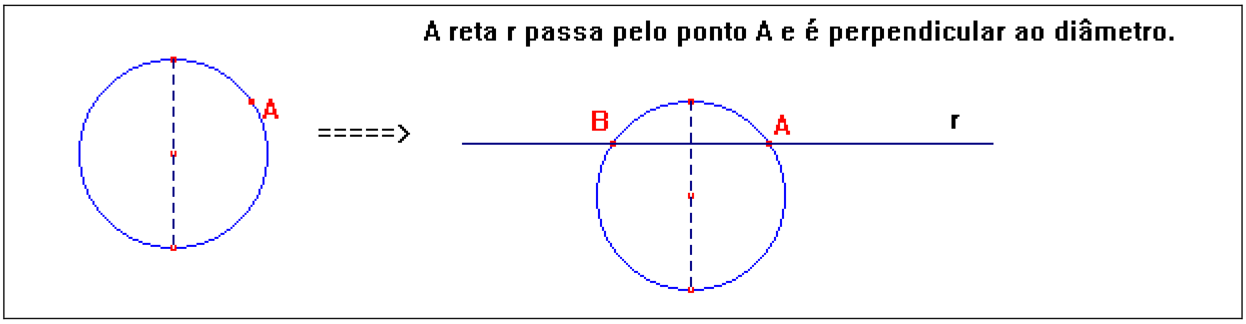


Figura 3.17 – Resolução da Ativ.6

2ª) Também podemos resolver esta atividade usando apenas circunferências, como segue:

1ª) Basta que tracemos uma circunferência C' numa das extremidades do diâmetro e passando por A. A outra intersecção de C e C' é exatamente o ponto B, simétrico de A em relação ao diâmetro.

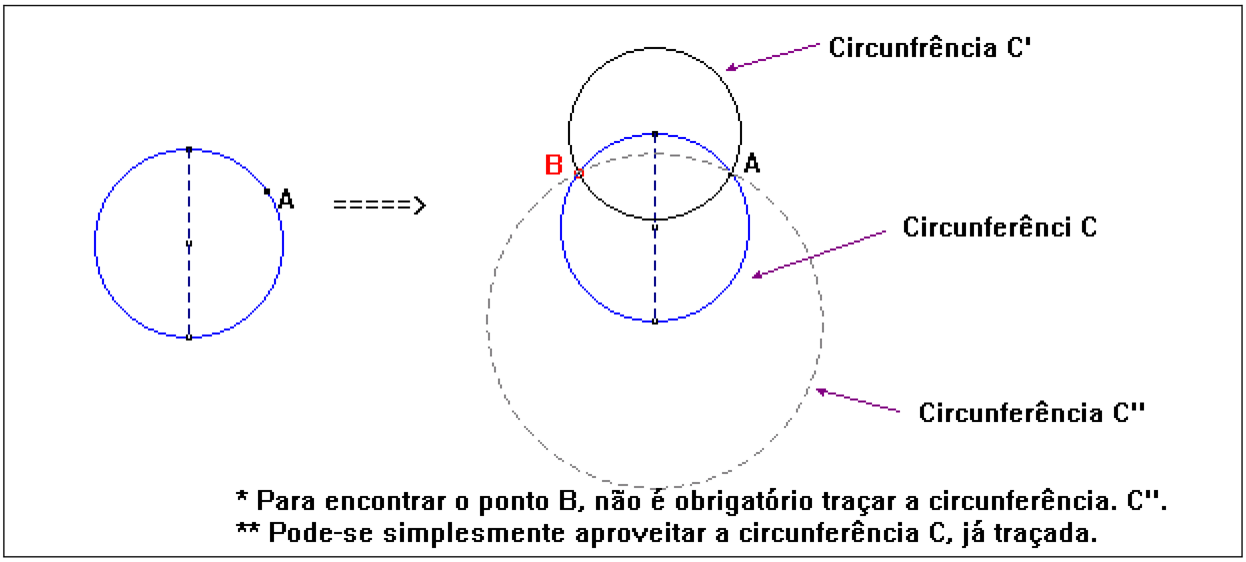


Figura 3.18 – Resolução da Ativ.6

[d]

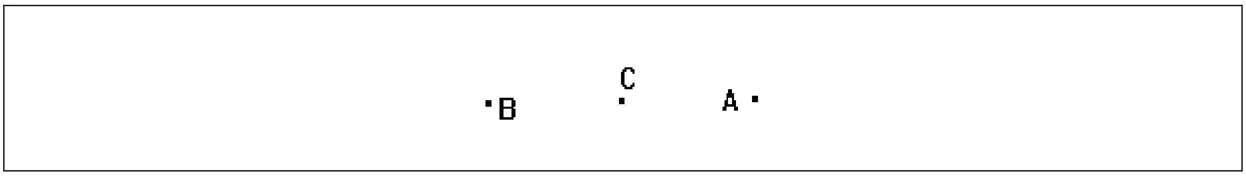


Figura 3.19 – Ativ.6 (d)

Nesta atividade, que trata de simetria central, apenas dois pontos são "clicáveis" (ou seja, podem ser movidos): A e C. A resolução desta já foi contemplada anteriormente nas questões de encontrar o simétrico, dobrar o segmento de reta etc. A intenção era que os aprendizes (a exemplo de outras atividades) explorassem o dinamismo do Cabri.

3.7.2.4 Conjunto 1.4: Episódio de ensino – Introduzir as congruências.

Esta parte do experimento de ensino foi desenvolvida com a ajuda de materiais concretos: cartolinas e folhas transparentes, assim como material de apoio escrito (os critérios de congruência). Teve como objetivo tratar as noções e casos de congruência de triângulos pela sobreposição de figuras. No final da exposição explicamos aos aprendizes como se prova uma proposição envolvendo congruência de triângulos. Basicamente, apresentamos a prova do seguinte problema: "*Se um ponto P pertence à mediatriz de um segmento de reta AB, então PA = PB.*"

- ✓ Explicamos aos alunos que a idéia de sobreposição é que está por traz do conceito de congruência, mas que só a idéia não é suficiente e por isso não podemos comparar triângulos dessa maneira afim de verificar se eles são ou não congruentes. Podemos, sim, "formar uma imagem mental da sobreposição", tentando descobrir visualmente quais vértices devem coincidir para que os triângulos fiquem sobrepostos.
- ✓ Explicamos que para estabelecermos uma congruência, é necessário que se faça uma associação (ou uma correspondência) entre os vértices dos dois triângulos e que essa associação é que mostra a correspondência entre os vértices do dois triângulos para que estes se sobreponham.
- ✓ Explicamos 3 dos 4 casos de congruência (**LLL**, **LAL** e **ALA**)[35].
- ✓ Provamos o teorema da mediatriz usando congruências (caso **LAL**).

A congruência de triângulos constitui um importantíssimo recurso nas demonstrações de teoremas em geometria. Sem este recurso, não se faz muita coisa em Geometria, em particular com relação às propriedades de triângulos.

3.7.2.5. Conjunto 1.5 : Construções de Mohr-*Mascheroni* (Ponto simétrico)

Atividade 7

(a) Construir o simétrico de P em relação à reta AB;

(b) Construir o simétrico de P em relação ao diâmetro da circunferência.

[35] Não foi necessário explicar o 4º caso de congruência – LAA_0 (Lado, Ângulo, Ângulo oposto) –, pois as demonstrações que procuramos trabalhar com os aprendizes não chegaram a exigir tal nível de raciocínio. Observe-se que é possível provar que a situação LAA_0 cai no caso ALA. Entretanto, a situação LAA_0 aparece freqüentemente em demonstrações e, para não termos o trabalho de faze-la recair no caso ALA sempre que ela aparecer, daí resulta que esta situação (LAA_0) é elevada a critério de congruência de triângulos. Os detalhes da prova a que nos referimos podem ser encontrados em Putnoki (1991).

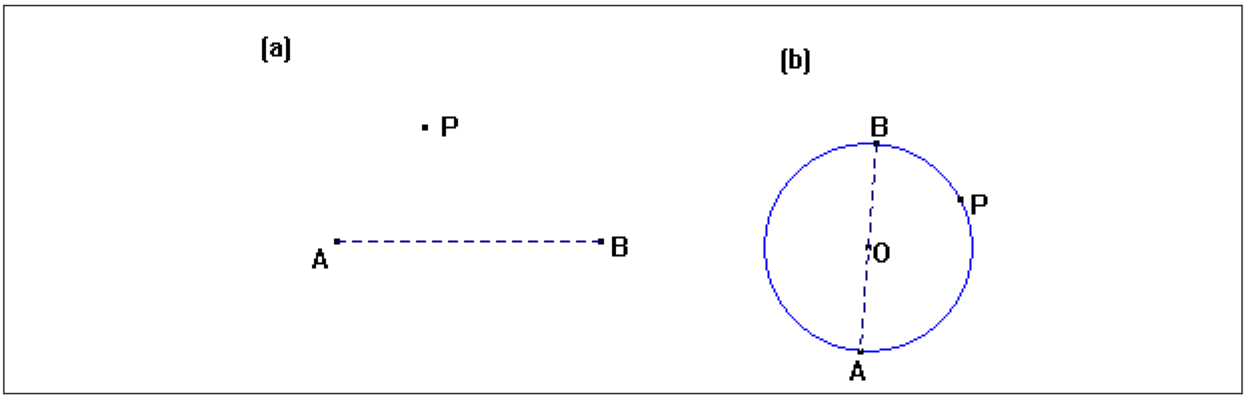


Figura 3.20 – Atividade 7

Possibilidades de solução

Primeiro observemos que se a reta (ou o segmento) não estiver pontilhada, esta atividade não pode ser resolvida com a ferramenta “simetria axial”. As soluções com retas e circunferências já foram abordadas Conjunto 0. Daremos as respectivas soluções com o compasso apenas.

Resolução do item (a)

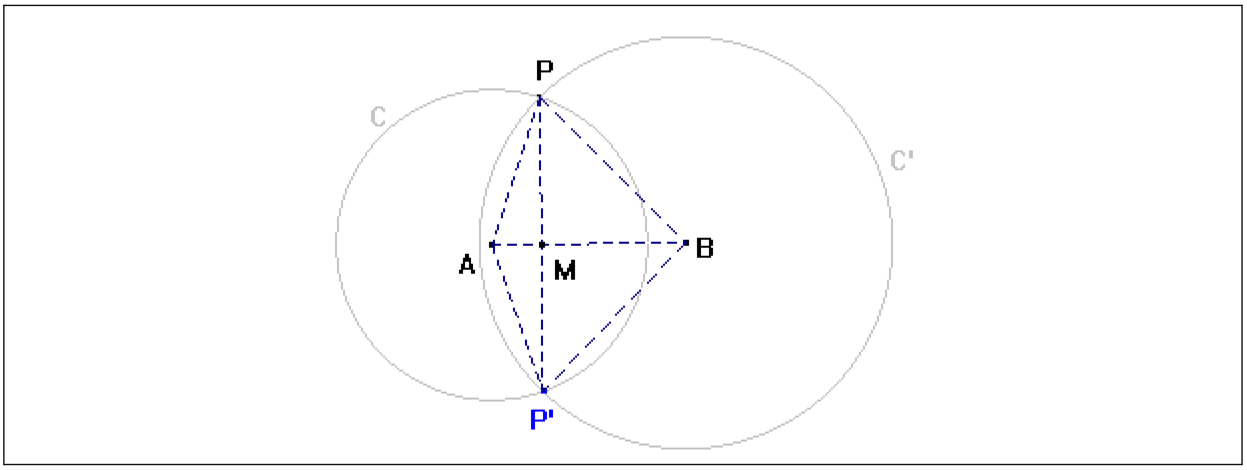


Figura 3.21 – Resolução da Ativ.7 (a)

1) Traçam-se duas circunferências C e C’: a primeira de centro A passando por P e a segunda de centro B passando também por P;
2) O outro ponto de intersecção entre C e C’ é P’.
3) P’ é o simétrico de P em relação à reta AB. De fato, a reta que passa por A e B é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$ assim obtido. Logo, M é ponto médio de $\overline{PP'}$, o que garante que P’ é o simétrico de P.

Prova: Sabemos, por construção, que AP = AP' e BP = BP'. Sabemos também que AB é lado comum aos triângulos ABP e ABP'. Podemos dizer então que os triângulos ABP e ABP' são congruentes, pelo caso LLL.

Sendo M o ponto de intersecção de $\overline{PP'}$ com a reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos que os triângulos AMP e AMP' são também congruentes com ângulos retos em M. Logo, P' é o simétrico de P em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Resolução do item (b)

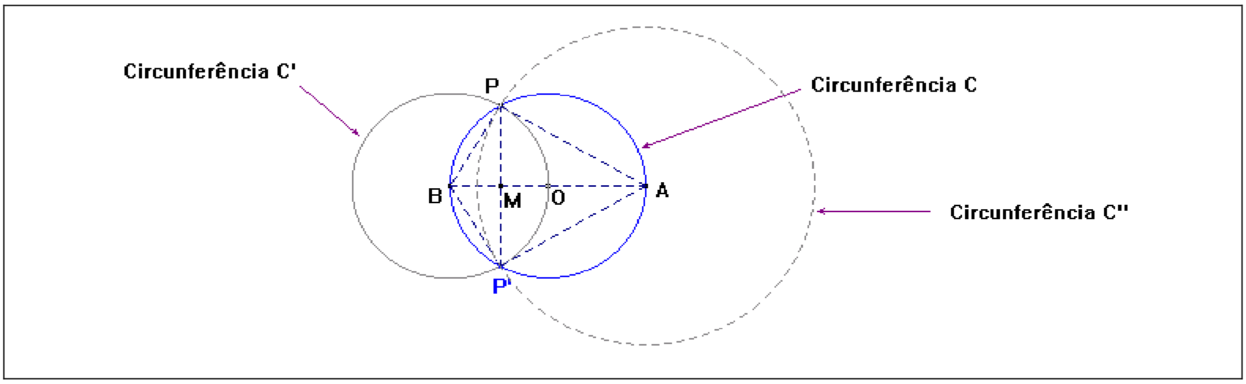


Figura 3.22 – Resolução da Ativ.7 (b)

Passos da construção:

1) Traçamos uma circunferência C' de centro B, passando por P;
2) Tomamos o ponto P', intersecção de C e C'. O ponto P' será o simétrico de P em relação ao diâmetro da circunferência.

Prova: Esta prova não tem diferença em relação à apresentada no item (a). Observemos que não foi necessário considerar, na construção, a circunferência C'' (que deixamos tracejada), de modo que simplesmente aproveitamos a circunferência C (que já estava desenhada).

3.7.3 Sobre as Atividades Previstas e as Realizadas (Conjunto 1)

Na Sessão 1, realizada numa segunda-feira, as duas duplas só conseguiram chegar até o exercício 6 (Caixas-pretas) e ainda assim, não terminaram os itens c) e d). Por isso, após uma análise preliminar, estas atividades foram revisadas. Não reaplicamos as questões de 1 a 4 (pois já haviam sido feitas na primeira Sessão);

excluímos o item (2) da questão 5 e o item (c) da questão 6(sobre Caixas-pretas), além de alterarmos seu enunciado.

Na Sessão 2, realizada numa sexta-feira, iniciamos com o ***Episódio de Ensino***, ou seja, com uma "aula" sobre congruência de triângulos (ver mais adiante). Em seguida, continuamos a aplicação das atividades.

3.7.4 Sumário sobre as Atividades do Conjunto 1

As Atividades desenvolvidas no Conjunto 1 foram divididas em 5 partes. Com exceção do **Conjunto 1.4**, no qual abordamos as congruências de triângulos, todas exigiram algum tipo de prova por parte dos aprendizes. Ressaltamos que neste conjunto sobre congruências, iremos levar em conta as possíveis interações dos alunos com o professor-pesquisador, quando da análise das atividades no próximo capítulo.

No **Conjunto 1.1**, o objetivo foi levar os aprendizes a explicar seus raciocínios, principalmente explorando os aspectos dinâmicos do software Cabri-Géomètre. Esperávamos que dessem mais explicações e menos provas (formais) sobre o que entenderam.

No **Conjunto 1.2**, até mesmo as construções tinham que obedecer a uma certa ordem: Primeiro efetuavam a construção usando todas as ferramentas disponíveis no Cabri; e por último, tinham que resolver com o uso apenas do compasso (ou seja, com o uso apenas das ferramentas "compasso" e/ou "circunferência"). Nesta etapa, os aprendizes tinham que justificar suas construções e para isso deveriam usar não somente linguagem matemática, mas também, linguagem natural.

Com relação ao **Conjunto 1.3**, sobre caixas-pretas, o principal objetivo foi levar os aprendizes à descoberta de propriedades e, possivelmente, de relações nas figuras dadas para serem "copiadas". Não era, portanto, para apresentar as justificativas das construções. A relevância deste conjunto para o nosso estudo está relacionada com a distinção entre construção mole e construção robusta.

Nas duas únicas atividades do **Conjunto 1.5** foi abordado especificamente o conceito de simetria axial. Neste grupo foi dada uma maior ênfase ao método das construções geométricas realizadas apenas com o compasso (construções de Mohr-Mascheroni). Isto porque as resoluções de tais questões por outros meios (principalmente aquele que utiliza a reta nas construções) já tinham sido estudadas em diversas outras ocasiões, como por exemplo, no Conjunto 0. Estas atividades foram aplicadas com o objetivo de que os alunos elaborassem suas justificativas (provas matemáticas), valendo-se das congruências de triângulos.

Infelizmente, ao que tudo indica, a análise global das atividades ficará um tanto prejudicada, pois os aprendizes não conseguiram concluí-las (as do Conjunto 1.5) satisfatoriamente.

3.8 Conjunto 2 (“Jogo” de prova com cartões e Pós-teste)

Este conjunto, formado por quatro atividades, foi aplicado aos dois sistemas de aprendizagem, **A** e **B**. Desta vez, as provas foram apresentas aos aprendizes na forma acabada. Esta atitude foi tomada em face das dificuldades enfrentadas (pelos alunos) nas sessões do experimento de ensino, conduzidas com o Cabri-Géomètre.

Freqüentemente, vamos nos referir a este conjunto como “jogo” de prova. Como serão as regras deste “jogo”?

Em primeiro lugar, não deve haver disputas entre duplas (caso o experimento seja conduzido com mais de uma dupla, ao mesmo tempo).Cada dupla de alunos terá que “jogar” quatro partidas, sendo que cada partida corresponderá a colocar em ordem um certo número de cartões contendo provas matemáticas (no âmbito da Geometria Euclidiana Plana).

Em seguida às atividades do “jogo” de prova, os aprendizes farão um pós-teste. O pós-teste consiste em que os aprendizes terão que contar a historinha da prova, mas desta vez, com uma produção escrita, semelhante à forma que fizemos nos cartões.

Às duas duplas do Sistema de Aprendizagem A não foi permitido que consultassem os cartões do "jogo" de prova. Já para a dupla do Sistema de Aprendizagem B, após uma análise retrospectiva, tomamos a decisão de permitir, além do uso dos cartões, a consulta aos casos de congruência de triângulos, com o objetivo de que, talvez, pudessem tomar como base o raciocínio empregado em alguma prova já feita.

A seguir, apresentaremos a atividades deste conjunto. Ressaltemos que as mesmas já se encontram resolvidas, ou melhor, o enunciado e os passos da prova foram devidamente organizados em cartões.

3.8.1 Atividades: "Jogo" de prova[36]

Atividade 1

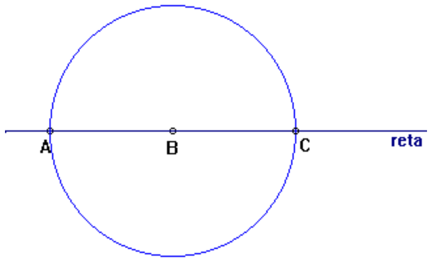
Para esta atividade, além do enunciado e da construção, descrevemos também os passos da construção. Trata-se de uma atividade que envolve basicamente uma prova explicativa, a qual os aprendizes podem realizar observando a construção (e a descrição). A prova foi organizada em três passos (como se pode ver a seguir).

Dados os pontos A e B, construir um ponto C pertencente à reta $\overleftrightarrow{AB}$, de maneira que B seja ponto médio do segmento $\overline{AC}$.

Passo da construção:

1] Traçamos uma reta passando por A e B;
2] Construímos uma circunferência com centro em B e raio AB;
3] Marcamos o ponto C, intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a circunferência.

[36] Estas atividades, tais como são apresentadas neste capítulo, foram aplicadas ao Sistema de Aprendizagem A. Para o Sistema de Aprendizagem B, forma revisadas/redesenhadas as atividades 1 e 4. Colocaremos a segunda versão de forma resumida, sem os "cartões".



O ponto C intersecção da reta com a circunferência, é a resposta. Explique isso!

Passo 1

Os pontos **A, B e C** são **colineares**, pois o ponto C é ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a circunferência.

Passo 2

Como, por construção, eu sei que: AB = BC = **raio**

Passo 3 (conclusão)

Posso, **assim**, concluir que o ponto C é o ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que **B é ponto médio de** $\overline{AC}$ **.**

Comentários: Para a dupla do Sistema de Aprendizagem B, os passos da prova tiveram que ser refeitos/reorganizados. O passo 1 apresentava incorreção teórica, por isso foi reformulado; o passo 2 é uma conseqüência da construção, por isso ao invés de "eu **sei** que..." escrevemos "eu **tenho** que..."; e por fim o passo 3 (conclusão) foi simplificado. Segue os passos da prova com as devidas alterações.

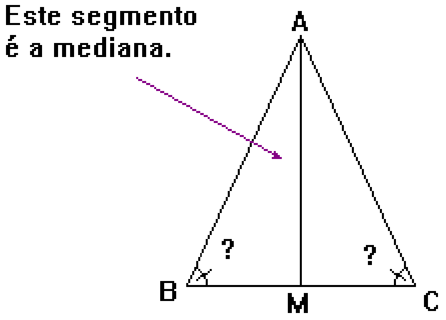
- ✓ **1 -** Os pontos A, B e C são **colineares**, pois C é ponto da reta AB;
- ✓ **2** – Por construção, eu tenho que: AB = BC = **raio**;
- ✓ **3** – Portanto, **B é ponto médio de AC.**

Atividade 2

Esta atividade tem como objetivo verificar os entendimentos dos alunos sobre congruência de triângulos, partindo de uma proposição referente ao triângulo isósceles. Explora termos geométricos mais elaborados como mediana, ponto médio, ângulos da base e congruência de lados e ângulos.

A prova compõe-se de quatro passos, sendo que o primeiro explica o que é a hipótese e o que é a tese da proposição (que é a seguinte: *provar que num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais*). Além disso, em alguns passos da prova foram dadas dicas e explicações adicionais. Segue a atividade.

A figura abaixo é um triângulo isósceles. Veja!



Mediana? O que é mesmo uma mediana?
Em qualquer triângulo, é um segmento que vai de um vértice até o ponto medio do lado oposto.

$$\begin{cases} AB = AC \\ M \text{ é ponto médio de } \overline{BC} \end{cases}$$

Você deve tentar provar que $\hat{B} \equiv \hat{C}$. Para isso, organize os cartões na ordem correta do raciocínio usado na prova.

Passo 1:

Temos:	Queremos provar que:
ΔABC $AB \equiv AC$ **Hipótese** (O que é dado)	$\hat{B} \equiv \hat{C}$ **Tese** (Conclusão)

Passo 2:

Eu sei que nos dois triângulos, AMB e AMC, temos:

Ah! Então posso imaginar um triângulo se sobrepondo ao outro. E daí?...

$$AB = AC$$
$$AM = AM$$
$$BM = CM$$

do ΔAMB do ΔAMC

Passo 3:

O critério LLL (Lado, Lado, Lado) nos garante que

$$\Delta AMB \equiv \Delta AMC$$

(Os dois triângulos são congruentes)

Passo 4 (conclusão):

O fato de os triângulos AMB e AMC serem congruentes quer dizer que eles têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Têm lados ordenadamente iguais; logo, os demais elementos (**os ângulos**) serão ordenadamente iguais.

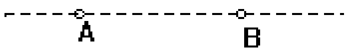
Conseqüentemente,

$$\hat{B} \equiv \hat{C}$$

Atividade 3

Nesta atividade damos o enunciado e a construção, mas não a descrição. Do mesmo modo que a atividade anterior, colocamos algumas caixas explicativas, do tipo caixas de diálogos. É uma atividade que tenta explorar duas noções sutis e interligadas, a nosso ver: a noção de colinearidade e a de ângulo raso. Em comparação com a Atividade 1, sua prova exige um pouco mais de empenho intelectual dos aprendizes. Observemos, também, que para esta atividade não se faz necessário explicitar a hipótese e a tese. Podemos notar que esta questão é praticamente igual àquela de dobrar um segmento de reta – a menos do enunciado, claro.

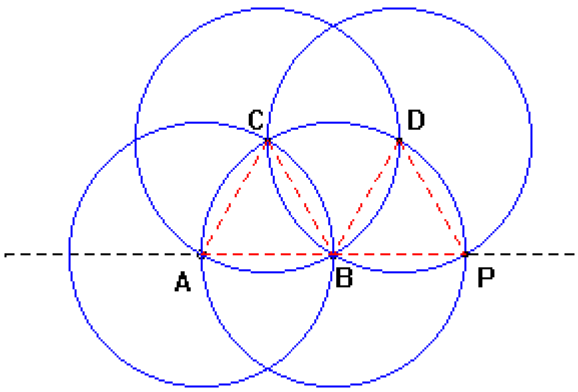
Construir um ponto P na reta $\overleftrightarrow{AB}$, de forma que B seja ponto médio do segmento $\overline{AP}$.



➔Como é mesmo esta construção? Vou traçando circunferências com o mesmo raio AB, até…encontrar o ponto P.

Nesta construção não usamos retas, apenas o compasso.

Construção:



➔As partes pontilhadas são para ajudar a "ver" as retas.

Passo 1:

Eu sei que

os triângulos **ABC, CBD e DBP**

são eqüiláteros (pois foram construídos com a mesma medida AB).

Logo, todos os três ângulos no vértice B medem 60° (60 graus), ou seja:

Passo 2:

$\angle A\hat{B}C = \angle C\hat{B}D = \angle D\hat{B}P$ =60º

Com este resultado, posso concluir que os três pontos A, B e P são colineares.

Passo 3:

Logo, somando esses três ângulos vem o resultado:

$$\angle A\hat{B}C + \angle C\hat{B}D + \angle D\hat{B}P =$$
$$60° \quad + \quad 60° \quad + \quad 60° \quad = 180°$$

(A soma dos 3 ângulos no vértice B é 180 graus.)

Passo 4 (conclusão):

E como AB = BP (= raio), chegamos à conclusão de que:

B é ponto médio de AB

Comentários: Em termos teóricos, esta atividade deveria ter sido redesenhada para ser aplicada ao Sistema B, pois, como se observa acima, utiliza-se *medida* para justificar as afirmações. Mas isto não foi possível, uma vez que só elaboramos uma outra prova (sem utilizar medida) bem depois de aplicar as atividades a todos os aprendizes. E esta prova foi feita com base em um teorema sobre paralelismo, quando comentamos a Atividade 5.

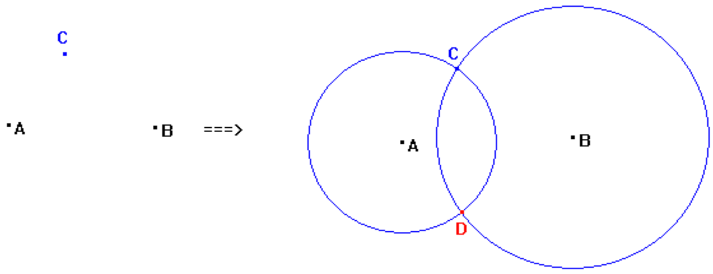
Atividade 4

Nesta atividade, foi necessário efetuarmos a construção, a descrição e, além disso, tivemos que construir uma nova figura onde os triângulos envolvidos aparecem com mais destaque.

De todas as atividades do “jogo” de prova, consideramos esta a mais difícil. Em primeiro lugar, porque usa dois casos de congruência de triângulos e em segundo, porque a prova foi apresenta em oito passos. Como forma de proporcionar uma melhor compreensão aos aprendizes foram colocadas notas explicativas e diagramas para ajudar na prova. O principal objetivo era que os estudantes ao menos percebessem os possíveis casos de congruência de triângulos, observando os detalhes da figura e que, a partir daí, pudessem se concentrar nos passos iniciais da prova. Relembramos que a construção foi executada com o compasso apenas (construção de Mohr-Mascheroni), sendo que as linhas pontilhadas foram traçadas para visualizar os triângulos e como dados auxiliares à elaboração da prova. Vejamos a atividade na seqüência.

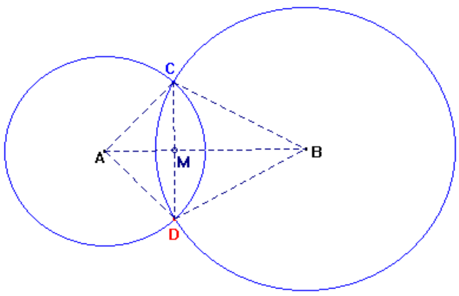
Dados os pontos A, B e C, construir o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Nesta construção não usamos retas, apenas o compasso.



Passos da construção:

1] Construímos uma circunferência de centro B e raio BC;
2] Construímos outra circunferência, de centro A e raio AC
3] Marcamos o ponto D, que intersecção das duas circunferências traçadas. E pronto!

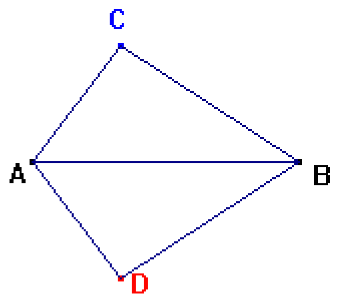


As partes tracejadas são apenas para ajudar a “ver” as retas!

Então, o ponto D é a resposta procurada. Como vou mostrar agora que a construção está correta?

Passo 1:

Podemos desenhar dois triângulos, ABC e ABD:



Será que sobrepondo…

Passo 2:

Por construção, eu sei que:

AC = AD (mesmo raio) $\to$ **L**

BC = BD (mesmo raio) $\to$ **L**

AB = AB (lado comum aos 2 triângulos) $\to$ **L**

E posso dizer então que…

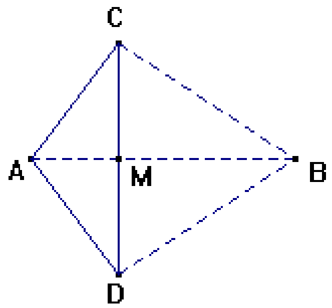
Passo 3:

O triângulo **ABC** é congruente ao triângulo **ABD**,

pelo caso **LLL**

Passo 4:

Podemos desenhar dois triângulos, ACM e ADM. Seja $M = \overline{AB} \cap \overline{CD}$.



Passo 5:

Sabemos que:

AC = AD (raio)

CÂB = DÂB (Por causa da congruência dos triângulos ABC e ABD).

AM = AM (lado comum)

Passo 6:

Então, pelo critério LAL

$\Delta ACM \equiv \Delta ADM$

Daí, isso me leva ao seguinte:

Qual é mesmo a conseqüência desses dois triângulos serem congruentes? **Hum!** A resposta me ajudaria bastante!

Passo 7:

CM = DM

$\angle C\hat{M}A = \angle D\hat{M}A$

E além disso, como $C\hat{M}A + D\hat{M}A = 180°$,

podemos concluir que:

$C\hat{M}A = D\hat{M}A = 90°$ (ângulos retos)

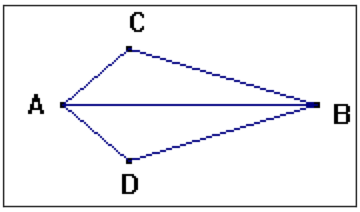
➔Se dois ângulos são iguais e têm soma 180 graus, então cada um mede 90 graus.

Passo 8(conclusão):

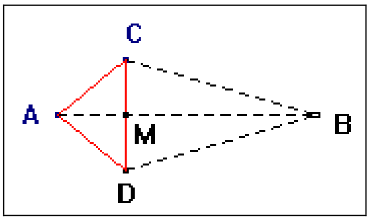
Logo, **D** é o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$

Comentários: Pelo fato de que nesta prova também utilizamos *medida* para justificar algumas afirmações, foi necessário redesenhá-la para aplicar ao Sistema B. Eis a “nova” atividade:

- ✓ **1** – Podemos desenhar dois triângulos: ABC e ABD;



- ✓ **2** – Por construção, eu sei que AC = AD (**L**), BC = BD (**L**) e AB = AB (**L**). E posso então dizer que...
- ✓ **3** – O triângulo ABC é congruente ao triângulo ABD, pelo caso **LLL**.
- ✓ **4** – Seja M o ponto de intersecção dos segmentos CD e AB. Podemos, assim, desenhar dois triângulos: ACM e ADM;



- ✓ **5** – Sabemos que AC = AD (raio), CÂB = DÂB (porque $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$) e AM = AM (lado comum);
- ✓ **6** – Então, pelo critério LAL, $\Delta ACM \equiv \Delta ADM$ (o triângulo ACM é congruente ao triângulo ADM);
- ✓ **7** – Conseqüentemente (pela congruência dos dois triângulos), chegamos à igualdade **CM = DM**;
- ✓ **8** – Portanto, D é o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$

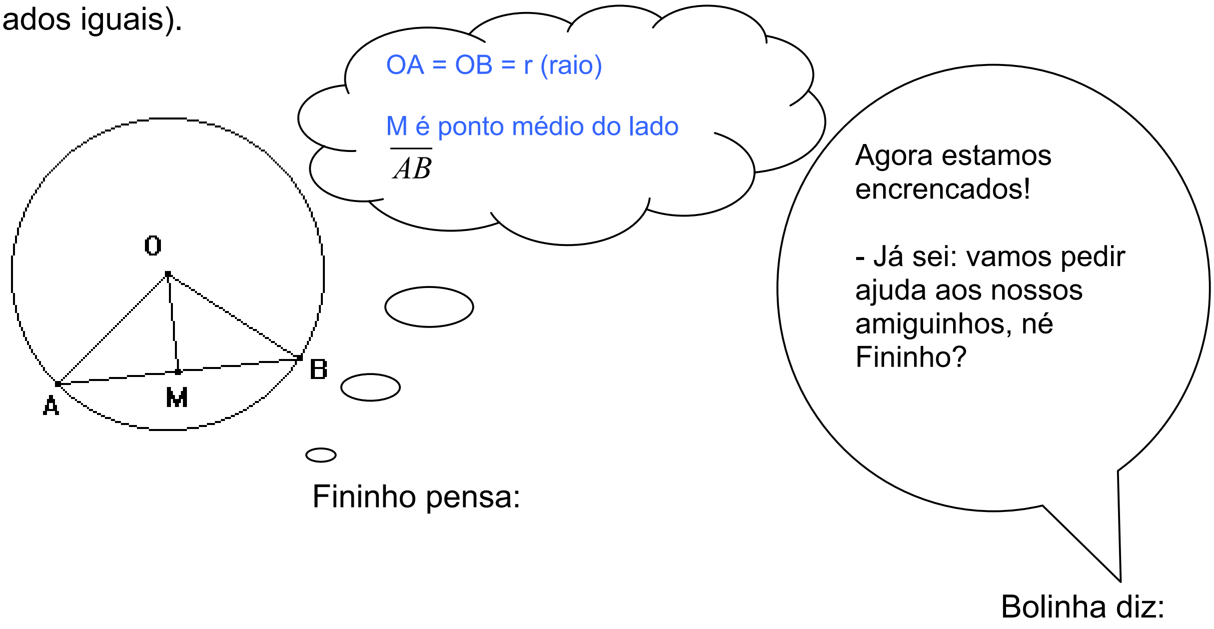
3.8.2 – O Pós-teste

Esta atividade trata, mais uma vez, do caso do triângulo isósceles. Os aprendizes deveriam escrever a prova lançando mão de congruência de triângulos. Observe-se que o triângulo foi construído com um vértice no centro e os outros dois sobre a circunferência. Só foram dadas duas dicas: de que os lados OA e OB são iguais ao raio e de que M é ponto médio de AB.

O objetivo visado era que os estudantes primeiramente identificassem a hipótese da proposição; em segundo lugar, fazendo referência às propriedades da figura (ao ponto médio, por exemplo), que descobrissem um caso de congruência (caso LLL) para assim chegar a conclusão de que ângulos da base são congruentes (tese). Ou, ao menos, nossa pretensão era que, nas suas produções escritas (tentativas de provar), apontassem elementos indicativos da hipótese e de alguma propriedade matemática que levasse aa tese. Vem na seqüência a questão do pós-teste.

Atividade 5 (Pós-teste)

Na figura, O é o centro da circunferência e o triângulo OAB é isósceles (que tem dois lados iguais).



Ajude *Bolinha e Fininho* a provar "*que num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes*".

3.8.3. Sumário sobre as Atividades do Conjunto 2

Para este conjunto de atividades, os alunos não tiveram qualquer contato com o computador. Além disso, não registraram nada por escrito nos cartões, exceto para o pós-teste.

Em todos os casos colocamos o enunciado das questões, seguindo-se a construção da(s) figura(s), além de comentários e ilustrações. Também, nos passos da prova, optamos por colocar diagramas e algumas dicas de como encontrar os cartões corretos para pô-los em ordem.

3.9 Fase de Experimentação e Coleta de Dados

Neste tópico relataremos as questões referentes à coleta de dados, bem como daremos as pistas para o processo de análise das atividades, a qual será feita no próximo capítulo.

A coleta de dados da presente pesquisa foi feita de duas formas. Uma delas, com experimentos de ensino no ambiente computacional de Geometria Dinâmica (Cabri) e a outra, com experimentos de ensino sem o computador.

Nas sessões com Cabri foram registradas as “produções computacionais” dos aprendizes. Por “produções computacionais”, devem ser entendidas as respostas[37] dos aprendizes registradas na tela do computador, bem como as discussões que daí emergiram. Já nas sessões sem o computador (sem Cabri) só foram usados cartões com provas matemáticas escritas (previamente preparadas pelo professor-pesquisador). Neste caso, os aprendizes foram envolvidos naquilo a que já chamamos de “jogo” de prova e os registros que consideraremos para análise serão as discussões, gestos e atitudes frente a cada situação do “jogo”, haja visto não terem registrado nada por escrito.

---

[37] Faz parte das respostas as construções efetuadas, as descrições e as justificativas destas construções.

3.9.1 Procedimentos para a Análise dos Dados

Em primeiro lugar, como procedimento inicial para análise dos dados, será feita uma síntese das produções computacionais (registradas nas sessões com Cabri) e dos resultados do "jogo" de prova (e pós-teste), abrangendo os dois sistemas de aprendizagem envolvidos no experimento.

Num segundo momento, procederemos à categorização das produções dos estudantes, levando em consideração: que métodos foram usados, se houve descrição e justificativas (provas), e se foram usados argumentos em linguagem matemática (ou não) para justificar as construções realizadas. Além disso, para cada atividade realizada, procuraremos identificar:

- ✓ se os aprendizes valeram-se de propriedades geométricas vistas anteriormente (se for o caso);
- ✓ se exploraram os aspectos dinâmicos do Cabri no processo de construção e validação; e
- ✓ qual foi a natureza dos argumentos matemáticos em cada "prova" produzida.

Num ambiente computacional como o *Cabri-Géomètre*, um mesmo problema (uma construção, por exemplo) pode ser solucionado com diversas ferramentas simultaneamente ou com apenas uma ferramenta. São clássicos os casos da simetria central e simetria axial. Portanto, um terceiro momento da análise envolverá a comparação entre os argumentos utilizados na execução de uma mesma construção, mas com ferramentas diferentes.

No próximo capítulo nos deteremos na análise das atividades desenvolvidas com os dois sistemas de aprendizagem: Sistema de Aprendizagem A, composto pelas duplas Augusto/Cristina e Bruno/Gisele e Sistema de Aprendizagem B, pela dupla Bárbara/Suzane. Enfatizamos que tal análise abrangerá a primeira e a segunda fase do experimento de ensino, sendo a primeira composta pelas sessões com Cabri e a segunda, pelo "jogo" de prova (ou seja, conjuntos 0, 1 e 2).

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DOS ESTUDANTES

4.1 Apresentação

Este capítulo tem por objetivo apresentar os resultados e as respectivas análises das atividades dos alunos (sistemas de aprendizagem A e B).

Iniciamos a análise pelas atividades do **Conjunto Zero**, que contém as atividades preparatórias. Como já enfatizamos no Capítulo 3, este conjunto de atividades foi aplicado após as sessões de familiarização com o Cabri[38]. Nossa preocupação foi abordar questões envolvendo conceitos geométricos relevantes no contexto da Geometria Euclidiana Plana, ao nível do Ensino Fundamental.

Como já vínhamos fazendo nas sessões de familiarização com Cabri, procuramos, com as atividades, fazer com que os aprendizes se focassem no uso de diferentes ferramentas[39] (disponíveis no Cabri) para a resolução de um mesmo problema proposto. Esta preocupação, aliás, se manteve para o próximo conjunto de atividades.

4.2 Sessão com Cabri-Géomètre

Inicialmente, planejamos uma sessão com uma hora de duração. No entanto, talvez devido à quantidade de questões (sete ao todo) e principalmente, devido às dificuldades dos aprendizes em executar algumas construções, esta sessão durou cerca de três horas.

---

[38] O **Conjunto 0** não foi aplicado à dupla Bárbara/Suzane (Sistema de Aprendizagem B).
[39] Citamos, por exemplo, a divisão de uma circunferência em duas partes iguais, questão que pode ser resolvida (a construção) de várias maneiras (por exemplo, usando a ferramenta “simetria central” ou circunferências apenas).

4.3 Introdução à Análise das Atividades do Conjunto 0

Sistema de Aprendizagem A

Neste primeiro encontro, a interação do professor-pesquisador com os aprendizes do Sistema de Aprendizagem A (Augusto/Cristina e Bruno) ocorreu de forma a sugerir o uso de diferentes ferramentas (para realizar as construções) em cada problema proposto. O objetivo era que os aprendizes percebessem algumas sutilezas referentes ao menu de ferramentas do Cabri, nomeadamente, os comandos de construção e os comandos de criação.

Pudemos observar algumas desconexões nítidas entre alguns conceitos de geometria trabalhados na sala de aula de Matemática e esses mesmos conceitos abordados neste primeiro experimento de ensino com Cabri. Por exemplo, a noção de raio, que pode ser usada para construir a mediatriz de um segmento de reta.

As anotações sobre as construções realizadas foram feitas na própria tela do Cabri. Nesta tarefa, foi necessária a nossa interação com os aprendizes, em função de suas dificuldades em traduzir (descrever) as construções em linguagem matemática. Iniciamos, em seguida, a análise das atividades.

4.3.1 Atividade 1

Antes de qualquer coisa, orientamos os aprendizes no sentido de que, nesta questão, além de uma construção a ser executada (a da mediatriz de um segmento), deveriam responder a uma pergunta. Os aprendizes resolveram esta questão de duas formas. Em primeiro lugar, não tiveram dificuldades em executar a construção usando a ferramenta “mediatriz”. Podemos ver que responderam corretamente à pergunta “*Como se chama o ponto de intersecção da reta mediatriz com o segmento*?”, embora não tenham construído explicitamente este ponto de intersecção (ponto médio).Vejamos a resposta (1ª forma) da dupla Augusto/Cristina:

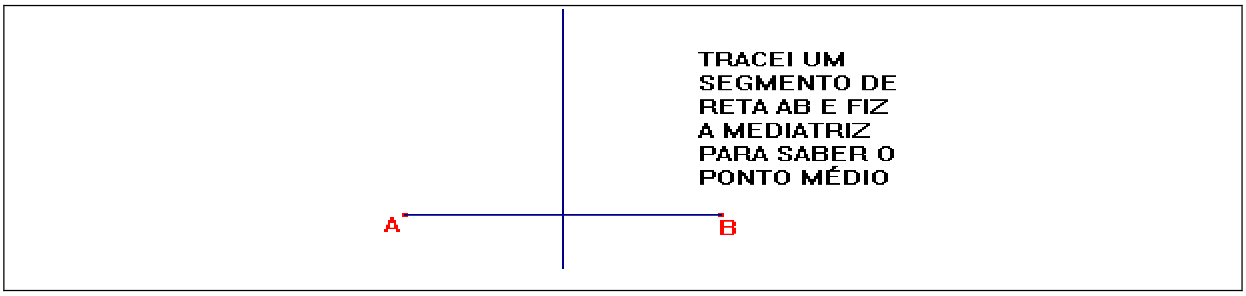


Figura 4.1 – Construção da mediatriz, pela dupla Augusto/Cristina.

Praticamente a mesma resposta acima foi dada pelo aluno Bruno, sendo que este a elaborou com mais rapidez, muito embora as dificuldades na escrita sejam equivalentes (Ver Anexo 3).

A segunda forma de resposta oferecida pela dupla focou apenas na ferramenta "compasso". Neste momento, foi preciso nossa intervenção para que usassem adequadamente tal ferramenta. A maior dificuldade foi usar circunferências de mesmo raio. Assim, uma tentativa inicial utilizando a ferramenta "*arco*" foi a seguinte (a qual avaliamos ser oportuno registrar):

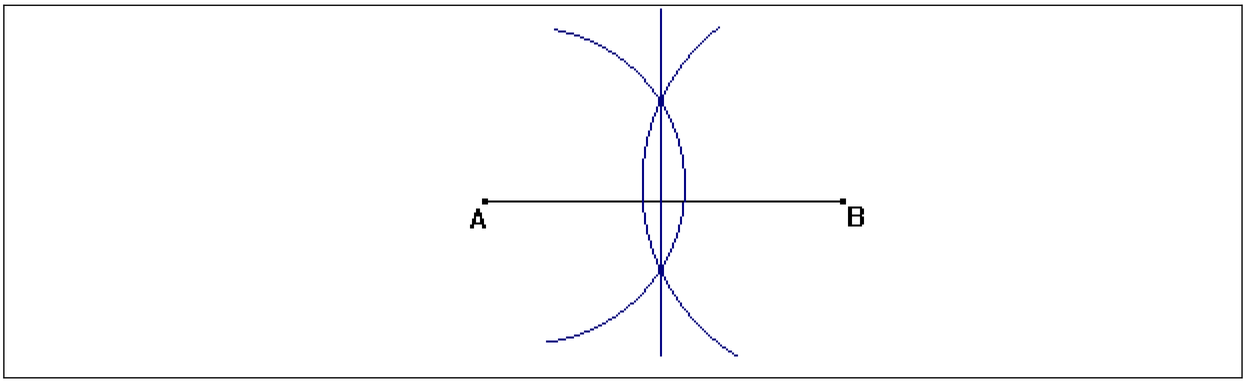


Figura 4.2 – "Construção da mediatriz" usando arcos

Nesta tentativa foram usados dois arcos de circunferência traçados arbitrariamente, e depois traçada a reta nas intersecções. Esta atitude dos aprendizes nos fez refletir sobre três questões:

- ✓ Na sala de aula de Matemática, quando efetuamos construções com régua e compasso, raramente traçamos por completo a circunferência (ou seja, apenas fazemos arcos com o mesmo raio, evidentemente). Já com o Cabri isso não acontece, visto que as circunferências são completamente traçadas.

- ✓ É possível que, ao executar a construção da mediatriz (no Cabri) por este método, tivessem lembrando os passos da mesma construção efetuada na lousa (com o compasso); e
- ✓ Atitudes como essas podem nos dar pistas sobre como nos orientarmos quanto às práticas didático-pedagógicas em sala de aula, notadamente em conceitos de geometria direcionados a crianças do Ensino Fundamental.

Ao que parece, por este motivo, o conceito geométrico de mediatriz talvez não esteja claro para os aprendizes – nem no sentido de lugar geométrico, nem no sentido de uma reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio.

Interagimos explicando então que deveriam clicar na ferramenta “compasso”, depois clicar em dois pontos na tela, determinando o raio (maior que a metade de AB) e por último, que clicassem no ponto A, construindo a primeira circunferência; para construir a segunda circunferência, de centro em B, explicamos que bastaria repetir o procedimento anterior. E então, formularam a seguinte reposta (2ª forma):

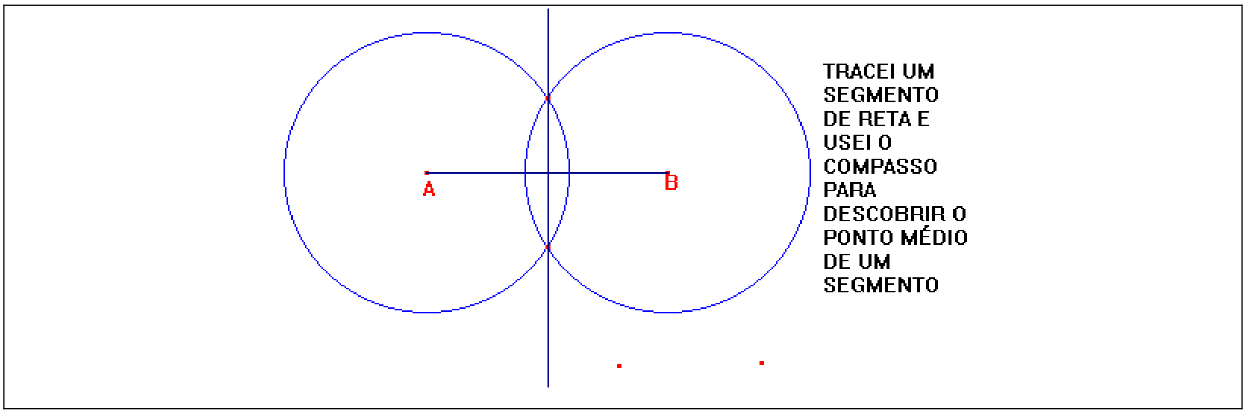


Figura 4.3 – Construção da mediatriz com a ferramenta “compasso”, por Augusto/Cristina

Os dois pontos criados abaixo da figura são tais que a distância entre eles é o raio, indicando, portanto, que a construção – feita com a ferramenta “compasso” – foi bem sucedida. (Em todos os casos, pedimos que os aprendizes fizessem verificações nas figuras, principalmente no caso em que usaram a ferramenta “arco”. Isto para verificar a exatidão da construção, caso em que podiam se valer do dinamismo do software Cabri).

Observemos nesta segunda resposta uma certa confusão em relação ao uso da ferramenta “compasso”. Os aprendizes são unânimes, nas suas descrições, em afirmar que a ferramenta “compasso” tem como finalidade determinar o ponto médio do segmento, o que não é verdade, pois a partir do uso apropriado desta ferramenta é que se determina a mediatriz para, depois, determinar o ponto médio. A resposta do aprendiz Bruno reproduzida abaixo reforça este fato:

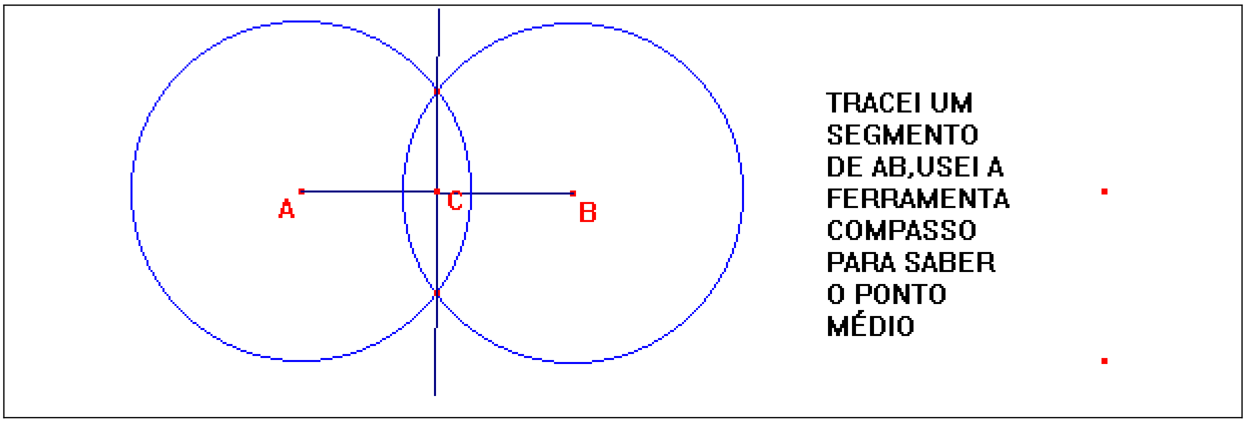


Figura 4.4 – Construção da mediatriz/ponto médio, por Bruno.

Esta confusão, ao que tudo indica, parece estar relacionada com a seguinte idéia: Quanto maior é o número de ferramentas (ou elementos) utilizadas(os) numa mesma figura, maior é a dificuldade de descrever/explicar os passos da construção. Vale a pena, a título de comparação, nos reportarmos à primeira resolução dada pelos aprendizes, na qual a produção escrita ficou bem mais clara.

Nenhum dos aprendizes tentou a solução por meio de circunferências, apesar de que enfatizamos este método nas sessões de familiarização com o Cabri.

4.3.2 Atividade 2

Esta atividade pedia para “construir uma circunferência e um diâmetro”. Logo de início, os estudantes tiveram dificuldades em entender o significado de diâmetro (não lembraram!), quando então tivemos a iniciativa de explicar (na lousa) o significado deste termo. Esclarecemos que o diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência, sendo, portanto, igual a duas vezes o tamanho do raio.

Então, tentaram resolver a questão da seguinte maneira: Traçaram uma circunferência e tentaram construir um diâmetro com a ferramenta “segmento”, procurando “ajeitar” o segmento para que o mesmo passasse pelo centro. Novamente, tivemos que intervir, pedindo que medissem os raios e verificassem se os três pontos eram colineares. Na figura abaixo, segue um esboço das idéias desenvolvidas pelos aprendizes (com base nas suas discussões gravadas em áudio), já que as configurações originais não foram salvas no computador.

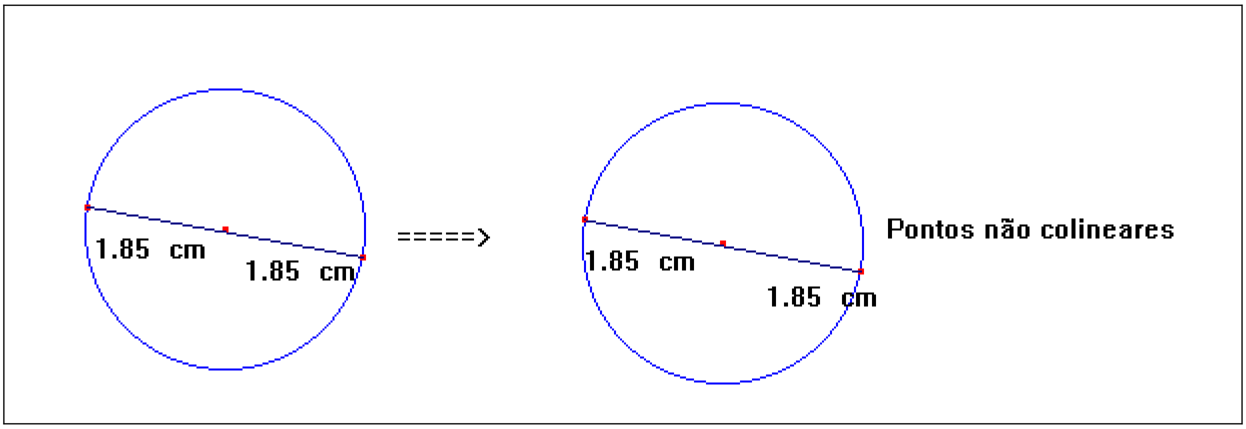


Figura 4.5 - Ilustração de uma construção mole.

Apesar de nossa intervenção, não foi imediato aos aprendizes perceber a relação que deveria existir entre os dois extremos do segmento e o centro da circunferência, ou seja, não perceberam que deveriam construir uma reta passando pelo centro da circunferência. A construção correta só foi executada com a nossa intervenção.

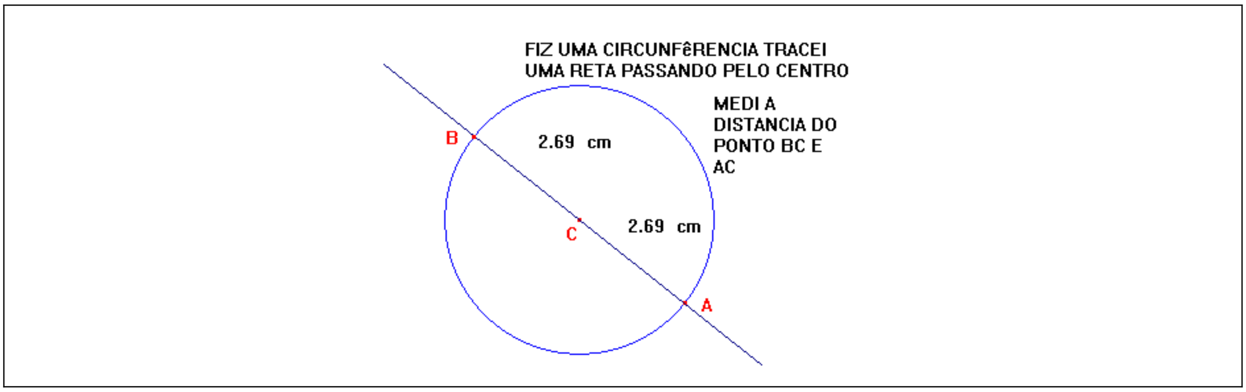


Figura 4.6 – Construção de um diâmetro, pela dupla Augusto/Cristina.

Levando-se em conta que "diâmetro é uma corda que passa pelo centro de uma circunferência", pode-se perceber na resposta do aluno Bruno um salto de qualidade com respeito à apreensão deste conceito. Vejamos na Figura 4.7 a resposta de Bruno:

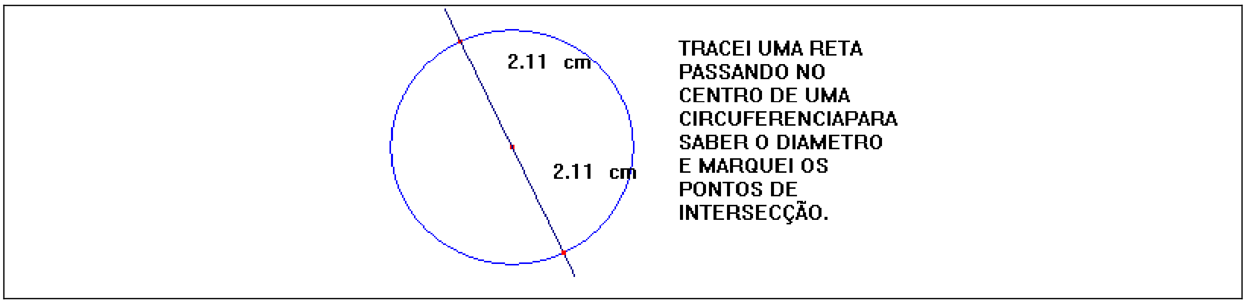


Figura 4.7 – Construção de um diâmetro, por Bruno.

Este exemplo – da construção de um diâmetro – nos permite ver claramente a distinção entre construção *mole* e construção *robusta*, noções que, aliás, só aparecem em ambientes de Geometria Dinâmica – caso do Cabri-Géomètre. No entanto, para os aprendizes, os dados observados[40] nos permitem concluir que, mesmo estando no ambiente do Cabri, é como se estivessem usando lápis e papel (régua e compasso mecânicos), conseqüentemente não relacionando a teoria (noções geométricas simples) com a construção, talvez por uma certa ansiedade e porque o Cabri é novidade para os aprendizes.

4.3.3 Atividade 3

O enunciado desta questão é: "Marque dois pontos A e B e construa o simétrico de A com relação a B". Os aprendizes foram orientados a usar a ferramenta "simetria central" e circunferências. Tanto o aprendiz Bruno como a dupla Augusto/Cristina conseguiram efetuar a construção de três formas possíveis.

Na figura abaixo, vemos a primeira resposta da dupla Augusto/Cristina, em que não apresentaram dificuldade, apesar de a aluna Cristina ter ficado em dúvida

[40] A nossa posição, concomitantemente de professor e pesquisador, contribuiu bastante para esta interpretação.

sobre qual tipo de simetria utilizar, momento em que foi ajudada pelo seu parceiro (Augusto). Eis a resposta da dupla (semelhantemente à que foi dada por Bruno):

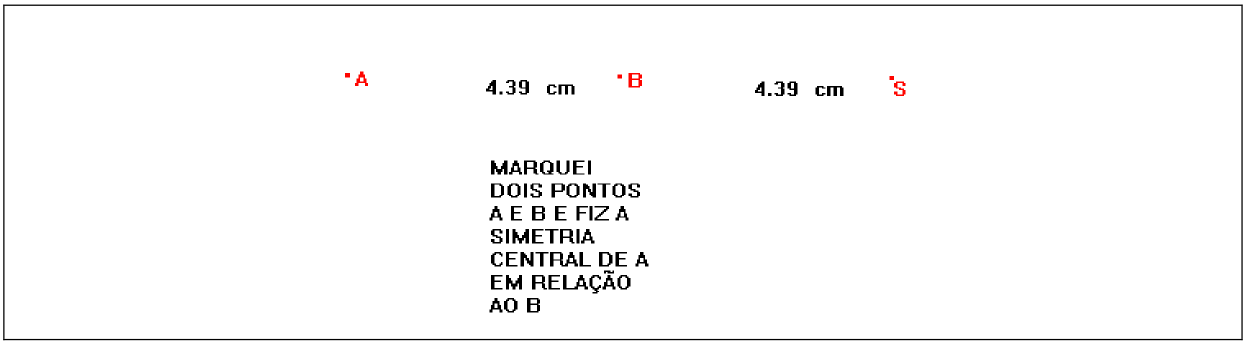


Figura 4.8 – Simetria central, pela dupla Augusto/Cristina.

Observemos que os aprendizes mediram as distâncias, mas não verificaram a colinearidade dos pontos A, B e S. Pela descrição que a dupla fez, pode-se dizer que se apropriaram da ferramenta “simetria central”, mas não podemos dizer o mesmo do conceito de simetria (do ponto de vista de um conceito geométrico).

Todos os aprendizes, sem exceção, conseguiram executar a construção com reta e circunferência. No entanto, cabe ressaltar que o aprendiz Bruno, apesar de ter feito construções muito semelhantes às da dupla Augusto/Cristina, não conseguiu apresentar nenhuma produção escrita (nem ao menos a descrição). Por isso, no que segue, nos deteremos apenas nas produções da dupla Augusto/Cristina. Eis a segunda resposta:

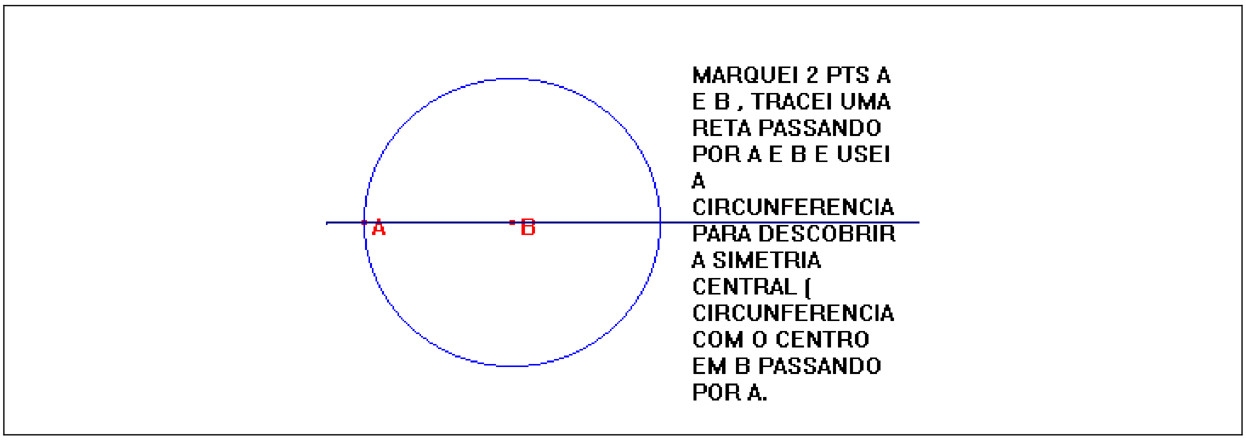


Figura 4.9 - Simetria central com circunferência e reta, por Augusto/Cristina

A ordem correta da construção foi a seguinte: Marcaram o ponto A, em seguida o ponto B, depois a reta passando por A e B e finalmente uma circunferência de centro B e raio BA. Ressaltamos que os aprendizes tiveram certas dificuldades em ajustar a circunferência para que a mesma passasse pelo ponto A, mais uma vez refletindo suas dificuldades em executar construções robustas.

Podemos dizer que a construção está correta (como o demonstra a descrição), mas, neste caso, deixaram de especificar o simétrico do ponto A (não construíram explicitamente o simétrico do ponto[41]), talvez porque não acharam isso mais necessário e porque já o tinham feito antes. Novamente, não associaram a idéia de pontos colineares com a de simetria.

Uma terceira resolução foi dada pela dupla usando o compasso, mas não da maneira como havíamos orientado antes. Na verdade, usaram uma reta e a ferramenta "compasso".

Vimos, nesta questão, uma certa confusão dos aprendizes no uso do compasso virtual. Vejamos: (1) construíram a reta AB como descrito no item anterior; (2) para determinar o ponto C, utilizaram a ferramenta "compasso" clicando em A, em seguida em B e depois num canto da tela, determinando a circunferência (de raio pontilhado); (3) Finalmente, o aluno Augusto, talvez lembrando de algumas construções feitas na sala de aula de Matemática (transporte de segmentos), arrastou a circunferência, tentando fazer coincidir seu centro com o ponto B. Neste momento, interferimos dizendo que não era a forma correta e que deveriam, com a ferramenta compasso, clicar no raio (pontilhado) e em seguida, no ponto B, conforme a Figura 4.10 a seguir:

[41] A esse respeito, o aluno Bruno cumpriu a tarefa (conforme se pode ver no Anexo 3)

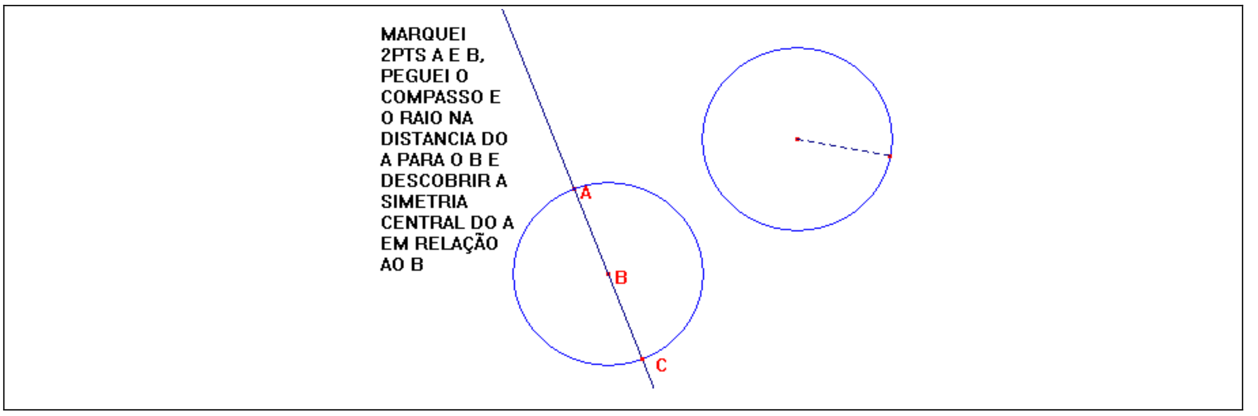


Figura 4.10 – Ainda, simetria central.

Terminada a construção, descreveram as etapas da mesma, de forma semelhante ao item anterior. Ressaltamos que nossa intenção era que não usassem retas para encontrar o ponto simétrico, mas, neste caso, não houve tempo para maiores esclarecimentos, até porque, voltaríamos a essas questões nas atividades posteriores (por exemplo, Atividade 5).

4.3.4 Atividade 4

Da mesma forma que na atividade anterior, orientamos os aprendizes a usar todas as ferramentas disponíveis. Esta questão trata de simetria numa reta, ou seja, simetria axial.

Usando a ferramenta "simetria axial", todos os aprendizes conseguiram realizar a construção sem dificuldades, mas só a dupla Augusto/Cristina fez a descrição de forma satisfatória[42], como segue:

[42] A descrição de Bruno se restringiu ao seguinte: "Desenhei uma reta e um ponto fora dela".

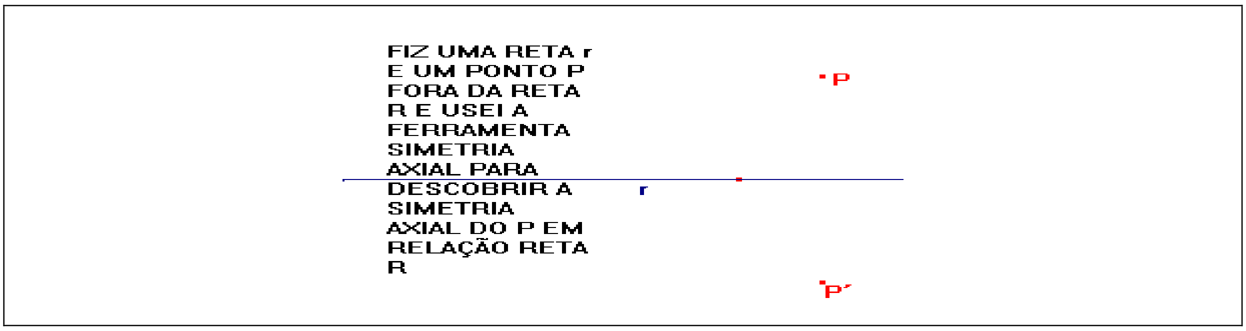


Figura 4.11 – Simetria axial, por Augusto/Cristina.

Mais uma vez, os aprendizes apresentam um bom domínio da ferramenta “simetria axial”, mas não podemos afirmar que o correspondente conceito geométrico foi apreendido por eles. Uma coisa é o domínio no uso de uma ferramenta; outra coisa totalmente distinta é o conceito geométrico associado quando se usa uma ferramenta para executar uma certa construção.

Na segunda forma de resolução destacam-se as ferramentas “reta”, “circunferência” e “compasso”. Com relação ao uso (conjugado) dessas ferramentas, vale ressaltar que o aluno Bruno teve muitas dificuldades[43] para realizar a construção. Daí resulta que foi necessária a nossa intervenção/interação a fim de que o aprendiz cumprisse a tarefa. Contudo, mesmo apesar de nossa intervenção, ficou faltando a produção textual (descrição e justificativa). Já o desempenho da dupla Augusto/Cristina foi um pouco diferente, como se esclarece na seqüência.

A dupla não apresentou dificuldade no uso da ferramenta “compasso”. Além disso, executaram a construção corretamente e na descrição, aliás, percebe-se uma certa evolução em relação às atividades anteriores.

---

[43] Pelo fato, talvez, de estar sozinho (pois sua colega, Gisele, faltou), já estava um tanto cansado.

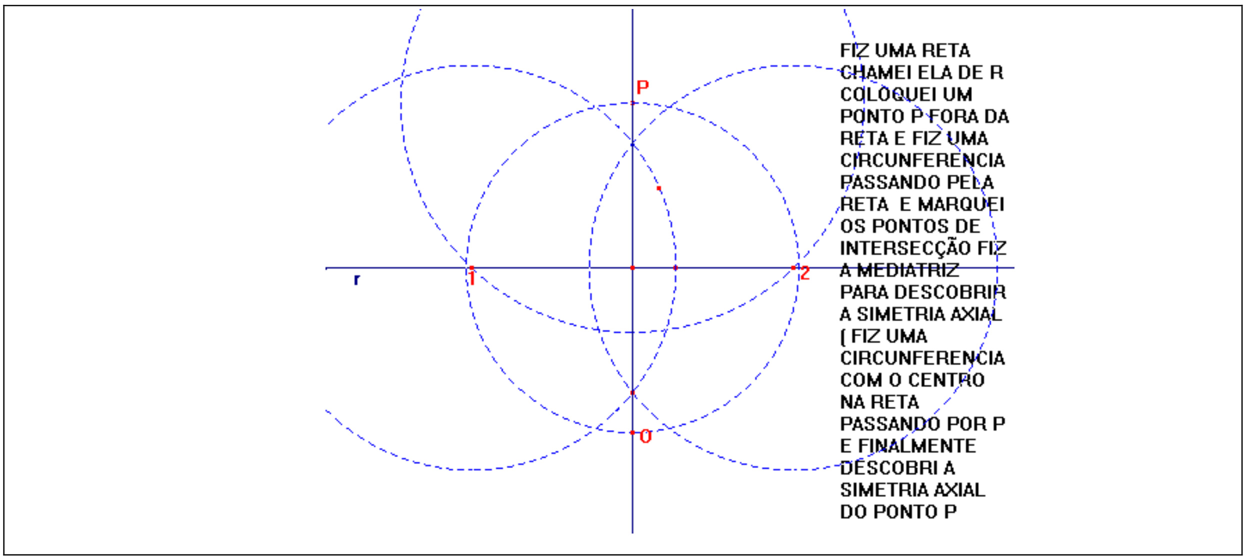


Figura 4.12 – Simetria axial com reta e circunferência, por Augusto/Cristina

A circunferência central (na intersecção das duas retas) é particularmente interessante, pois apesar de o assunto ter sido trabalhado em sala de aula, não tínhamos adotado este método (sobre possibilidades de resolução desta atividade, ver Anexo 2).

Na solução da dupla observa-se que o traçado da mediatriz foi necessário, indicando, a nosso ver (talvez), que os aprendizes estivessem fazendo referência a conhecimentos adquiridos/abordados anteriormente (ponto de intersecção, simetria central, mediatriz, raio).

4.3.5 Atividade 5

Esta atividade foi dividida em 3 partes: Dividir uma circunferência em (**a**) duas partes iguais; (**b**) em seis partes iguais; (**c**) em três partes iguais. Como pode ser visto, em todos os casos a circunferência é necessária para realizar as construções.

Os alunos ficaram à vontade para usar todas as ferramentas disponíveis. Para o item (a), não tiveram dificuldade alguma. Praticamente reproduziram a construção da Atividade 2, mas agora com uma construção robusta. Na figura abaixo se vêem as respostas de Augusto/Cristina e de Bruno, sendo que na deste faltou explicitar os pontos de intersecção e a descrição e/ou justificativa.

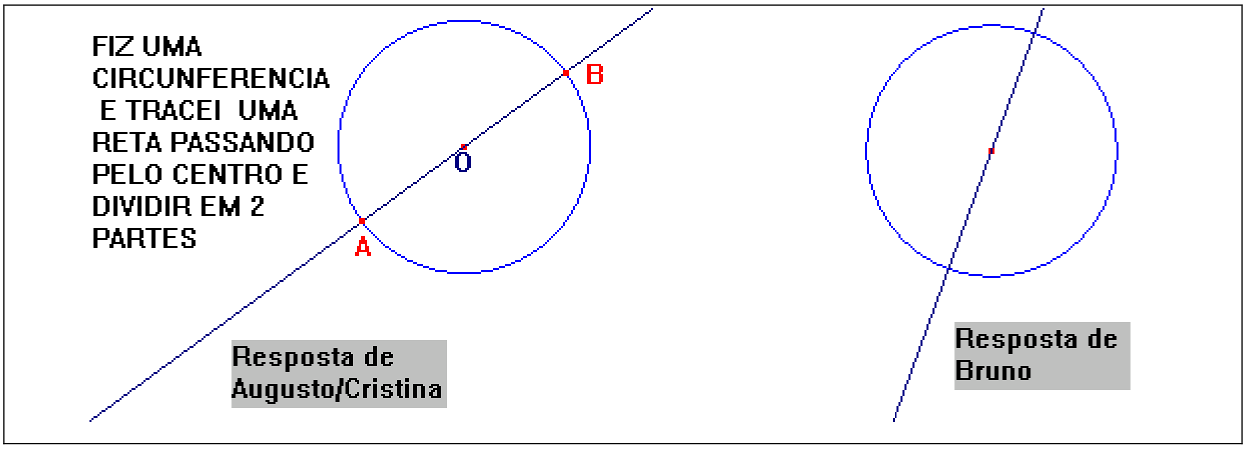


Figura 4.13 - Resposta da Ativ.5a (ciclotomia)

No caso da divisão da circunferência em seis partes iguais, como fora um assunto recorrente nas sessões de familiarização com Cabri, os aprendizes[44] saíram-se bem na construção e apresentaram um esboço de justificativa da construção, apesar de que isso não foi solicitado. Pode-se perceber que tiveram bastante dificuldade para descrever a construção (mais em detalhes), talvez por causa do emaranhado de circunferências desenhadas no “mesmo lugar”. Conforme pudemos constatar, os aprendizes se atrapalham quando lidam com vários objetos bem próximos uns dos outros, principalmente na descrição.

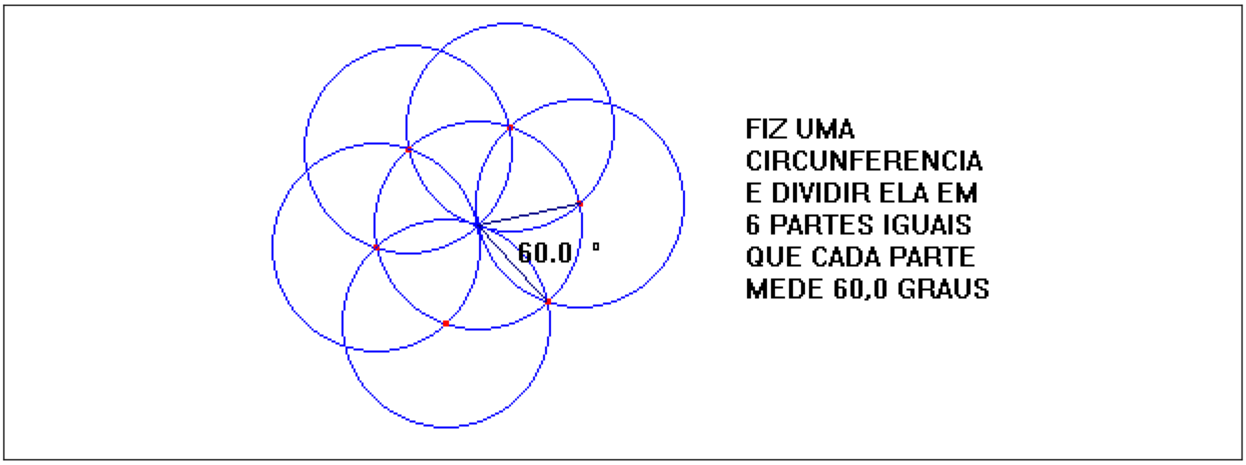


Figura 4.14- Resposta da Ativ.5b, por Augusto/Cristina (ciclotomia)

[44] Novamente o aluno Bruno realizou apenas a construção (mas de forma correta).

Depois de ter resolvido esta questão, um dos aprendizes da dupla indagou o professor-pesquisador sobre o fato de que "… *em 4 partes iguais, o ângulo* [se referindo ao ângulo central] *é de noventa graus, certo*?"(Augusto, 7ª C). Isto, ao que parece, indica que pelo menos este aprendiz da dupla esteja começando a se apropriar do conceito de ângulo central e, desta forma, ligando a construção com a teoria (de certa forma, este aprendiz demonstrou um raciocínio teórico mais elaborado, na medida em que fez uso de propriedades). Podemos mesmo dizer que fez uma descoberta, uma dedução, na medida em que concluiu que a partir de um ângulo de 90º (no centro), chega-se à divisão da circunferência em 4 partes iguais.

Para a divisão da circunferência em três partes iguais, não houve dificuldade em perceber que a mesma construção anterior poderia ser aproveitada.

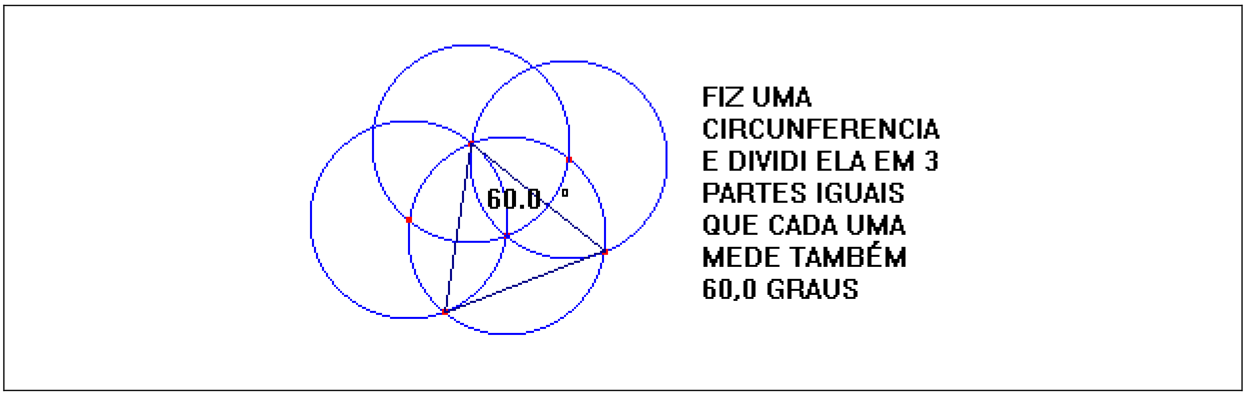


Figura 4.15 - Resposta da Ativ.5c, por Augusto/Cristina (ciclotomia).

Entretanto, a dupla se confundiu com a medida do ângulo central, como se pode observar na descrição acima, isso talvez por porque tenham medido, não o ângulo central, mas o ângulo do triângulo eqüilátero traçado. Já o aprendiz Bruno usou a mesma construção e foi mais categórico (mas também não mencionou nada sobre ângulo central):

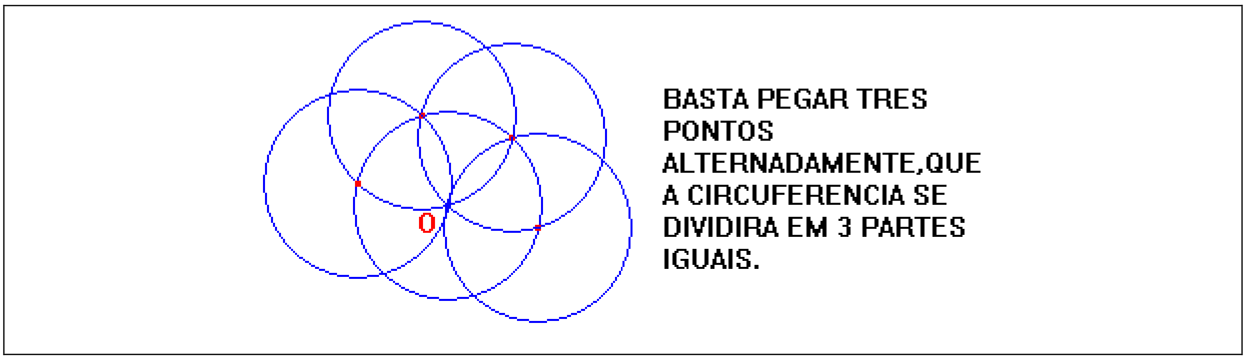


Figura 4.16 – Divisão em 3 partes iguais da circunferência, por Bruno.

Pode-se observar na figura que o aprendiz não teve a preocupação de marcar explicitamente os três pontos que, segundo ele, dividem a circunferência em três partes iguais.

4.3.6 Atividade 6

A tarefa dos aprendizes nesta atividade era construir um ângulo raso. A resolução dada pelos aprendizes Augusto e Cristina, provavelmente, se baseou em argumentos anteriores, como por exemplo, a divisão de uma circunferência em duas partes iguais ou então, a construção de uma circunferência e um seu diâmetro. Associaram, portanto, a construção do ângulo de 180 graus com a divisão da circunferência em duas partes iguais. Nesta atividade, esperávamos que os aprendizes relacionassem a construção do ângulo raso com o fato de que os três pontos devem ser colineares. No entanto, como ocorreu em outras situações deste conjunto de atividades, esta relação não chegou a ser percebida.

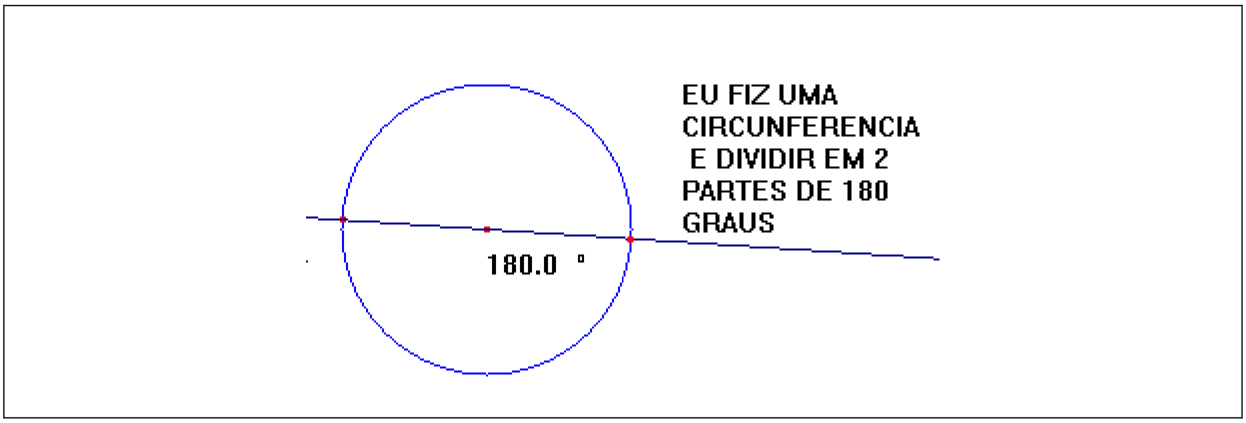


Figura 4.17 – Resposta da Ativ.6, pela dupla Augusto/Cristina.

Mas o aluno Bruno não segue o mesmo caminho para construir o ângulo de 180º, em parte porque já havia realizado construções muito parecidas nas atividades anteriores. Sua idéia é um pouco diferente: Consistiu em desenhar um triângulo qualquer, medir um de seus ângulos e depois ir aproximando o vértice deste ângulo até alcançar o lado oposto para completar os 180º. Vejamos uma seqüência de figuras que ilustram o raciocínio do estudante:

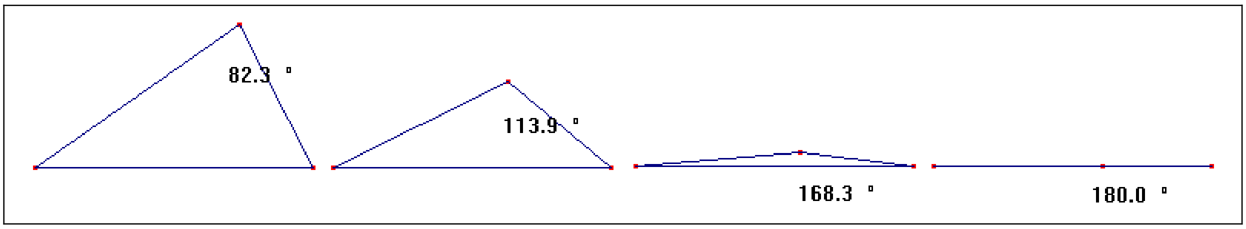


Figura 4.18 – "Construção" de um ângulo raso, por Bruno

Esta resolução mostra um domínio razoável do conceito de ângulo raso, além do que, as ferramentas do software foram utilizadas de forma muito adequada; mostra também que, em certa medida, o domínio dos aspectos técnicos do Cabri pode levar os estudantes a novas descobertas. Um indício de que este software contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico (e quiçá, algum raciocínio dedutivo em geometria).

4.3.7 Atividade 7

Pedia a atividade para se construir três pontos colineares O objetivo foi verificar o nível de apreensão dos estudantes sobre o conceito de colinearidade. Por isso, não nos focamos nesta ou naquela ferramenta. Tanto a dupla Augusto/Cristina como o aprendiz Bruno nos oferece praticamente a mesma resposta (como se vê na Figura 4.15), da forma mais natural possível: traçaram uma reta e simplesmente marcaram três pontos sobre a mesma. Observe-se que ainda mediram as distâncias, apesar disso não comprometer a resposta que deram.

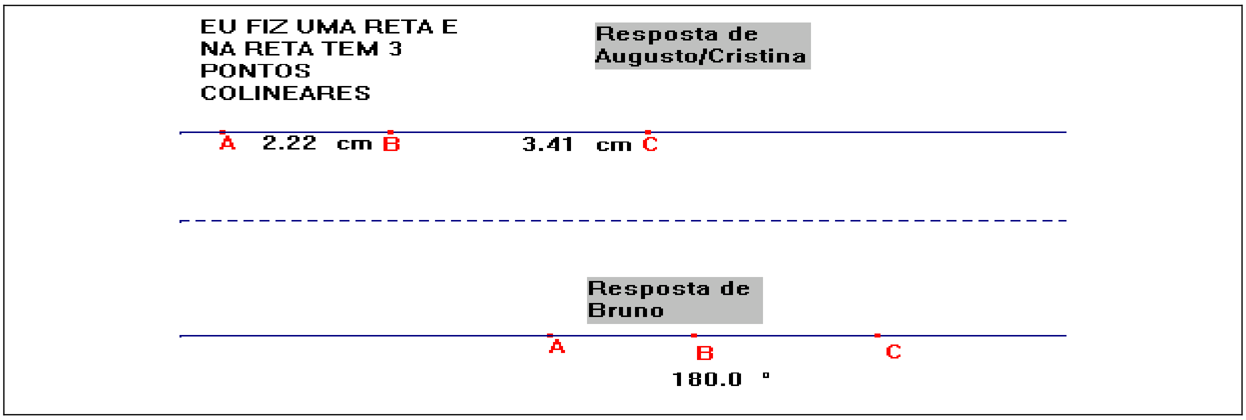


Figura 4.19 - 1ª resposta da Ativ.7.

Vemos que os aprendizes se valem freqüentemente dos recursos de medição do Cabri. No caso de Bruno, compensando a falta de alguma descrição, mandou o Cabri verificar a colinearidade dos pontos por meio da medida do ângulo $C\hat{B}A$. Mas, claro está, que ele ao menos usou uma estratégia correta. Já quanto à dupla Augusto/Cristina, mediram AB e BC (mas não AC), pensando, talvez, que isso pudesse ser utilizado para uma possível justificativa.

Cabe ressaltar que neste momento do experimento de ensino, os aprendizes já estavam cansados, pois a sessão foi longa, com já enfatizamos antes.

Assim mesmo, ainda surgiu uma segunda resolução (somente da dupla Augusto/Cristina), ou melhor, pelo que mostra a figura abaixo, duas soluções, sendo que apenas uma foi descrita. Quanto à primeira figura, tudo indica que foi lembrado o conceito de simetria. Como se vê, não foi feita nenhuma verificação da exatidão da construção. Já na segunda figura, usaram uma reta passando pelo centro da circunferência e ainda marcaram os pontos de intersecção, possivelmente se recordando de situações anteriores (Atividade 2 e Atividade 5, por exemplo). Talvez pelo cansaço, se restringiram a poucas palavras.

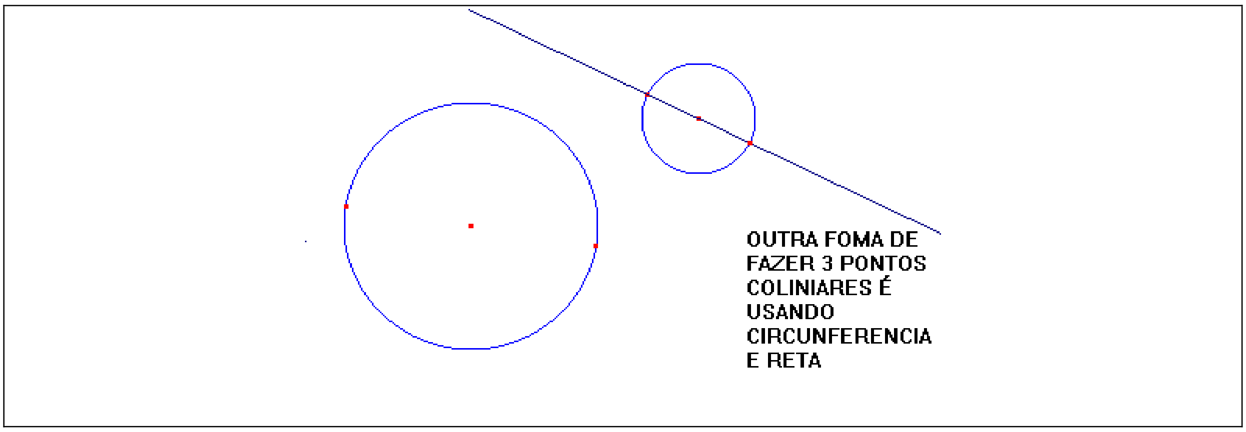


Figura 4.20 – 2ª resposta da Ativ.7, por Augusto/Cristina.

4.3.8 Sumário do Conjunto 0: Análise das Atividades

Apesar do alvo mais específico da presente pesquisa ser a elaboração de provas matemáticas a partir das construções geométricas no Cabri, nesta primeira fase procuramos focar atenção nas tarefas de construção e descrição, sem muitas mudanças nas ferramentas do Cabri.

As tarefas de construção abrangeram conceitos elementares de Geometria Plana: pontos, retas, segmento circunferência, diâmetro, ângulos/ângulo reto, simetria central e axial e colinearidade.

Uma primeira análise nos permite afirmar que o foco principal dos aprendizes sempre fica na construção e, em particular, dão mais atenção aos comandos de construção que aos comandos de criação, tendo quase sempre dificuldades técnicas (no manuseio de ferramentas) nas construções que envolvem a circunferência. Além do mais, que as descrições são muito carentes de detalhes, isto por causa das dificuldades naturais de expressão na linguagem matemática: pouco domínio da escrita e de certos termos e noções de geometria/matemática (devido ao pouco uso no dia-a-dia).

Temos mais duas importantes questões a ressaltar no fim do **Conjunto 0**. A primeira delas diz respeito às muitas dificuldades dos aprendizes em executar construções robustas, principalmente com as tarefas de construção envolvendo circunferências e a segunda, com o conceito de colinearidade, uma propriedade que parece ter passado despercebida aos aprendizes.

No próximo tópico, daremos início à análise das atividades do **Conjunto 1**, em que focaremos atenção mais nas justificativas produzidas pelos aprendizes, sendo que por justificativa devemos entender o seguinte: validar a construção por meio de um teorema matemático.

4.4 Introdução à Análise das Atividades do Conjunto 1

O experimento de ensino que envolveu a aplicação das atividades do Conjunto 1, para o Sistema de Aprendizagem A, ocorreu em duas sessões, com cerca de 3 horas de duração cada uma. (Para o **Conjunto 0**, assim como para este conjunto, não estabelecemos tempo-limite para a resolução das questões)

Uma segunda sessão foi necessária, pois não foi possível para os aprendizes terminar as atividades propostas na primeira Sessão. Um dos motivos foi a quantidade de questões e, certamente, as dificuldades dos aprendizes em executar e justificar algumas construções propostas. Portanto, na segunda Sessão as atividades do Conjunto 1 foram redesenhadas (para mais detalhes ver Capítulo 3, pp.86-87,). E ainda, foi no início desta segunda Sessão que fizemos uma aula explicativa sobre congruência de triângulos e provas – o chamado Episódio de Ensino.

Neste conjunto de atividades, os aprendizes deveriam focar atenção nas justificativas (provas) das construções executadas. Para tanto, serão analisadas as respostas dos aprendizes, levando em consideração alguns aspectos, a saber:

Se usaram linguagem matemática na descrição ou justificativa de cada construção, se fizeram uso de propriedades geométricas vistas anteriormente, e se exploraram o dinamismo do Cabri para validar as construções.

Um outro aspecto da análise aborda a questão da categorização das provas produzidas pelos aprendizes, ou seja, a questão de saber a natureza dos argumentos matemáticos utilizados em cada prova produzida, ou ainda, nos termos de Balacheff, se fazem uso de provas *pragmáticas* ou provas *conceituais*.

Passaremos, em seguida, à análise das atividades das duas duplas do Sistema de Aprendizagem A: Augusto/Cristina e Bruno/Gisele. Serão analisadas as atividades das duas sessões.

4.4.1 Atividade 1

O objetivo principal desta atividade era que os aprendizes se valessem dos aspectos dinâmicos do software Cabri (o que foi sugerido no enunciado da questão). Esta questão, claramente, envolve a noção de raio. (Pedia a questão para "construir uma circunferência e marcar dois pontos sobre a mesma, depois usar recursos de animação, medir distâncias, etc. O que você pode observar?")

Não houve dificuldade dos aprendizes para realizar a construção, mas tivemos de orientá-los no sentido de traçarem (explicitamente) e pontilharem os segmentos. Exploraram o dinamismo do Cabri satisfatoriamente medindo os segmentos e usando o recurso animação. Pela produção escrita da dupla, observa-se que basearam sua resposta no dinamismo do software, mesclando linguagem matemática e linguagem natural. Mas uma vez, tiveram alguma dificuldade com a noção de raio. Vejamos a resposta da dupla Augusto/Cristina:

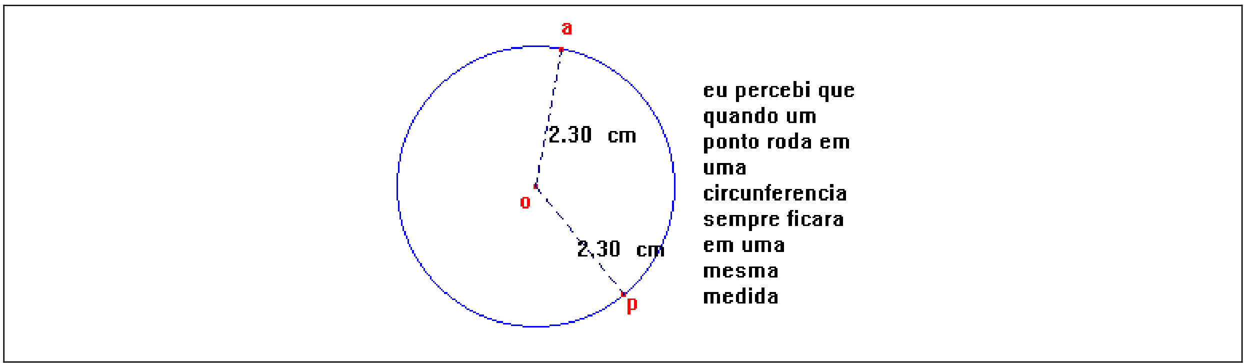


Figura 4.21- Produção da dupla Augusto/Cristina, Ativ.1

Na resposta acima percebe-se que faltou concluir que o que "*fica em uma mesma medida*" é, na verdade, o raio da circunferência, apesar de ter havido uma leve tentativa de generalização. Entretanto, ficou no plano pragmático – baseado em ações e observações empíricas, nos termos de Balacheff.

"*Nós observamos que marcando dois pontos numa circunferência qualquer e* [que se] *usar a ferramenta animação apenas um ponto pode se movimentar em sentido horário*". Esta foi a produção escrita da dupla Bruno/Gisele, a qual indica que não usaram de forma apropriada o recurso de animação do Cabri. Mais uma vez persistiu a dificuldade com o conceito de raio.

Nossa intervenção ocorreu no sentido de que os aprendizes respondessem a pergunta "*que nome se dá ao segmento que vai de um ponto da circunferência ao seu centro*"[45]. No entanto, só a primeira dupla chegou mais perto desta noção, como se observa logo acima. A preferência por termos mais simples (por exemplo, "medida") ao invés de termos matemáticos, como "raio", é recorrente por parte dos aprendizes.

4.4.2 Atividade 2

Relembremos o enunciado desta tarefa: "Na circunferência abaixo, os segmentos AO, OB, OC e OD têm a mesma medida".

Colocamos o enunciado desta atividade na forma de uma afirmação com o objetivo de que os aprendizes concordassem ou discordassem, mas que procurassem justificar sua resposta.

Como na questão anterior, nenhuma das duplas apresentou dificuldade em executar a construção, mas, desta vez, melhoraram a construção nomeando corretamente os pontos. Além disso, se valeram dos recursos de animação e medição do Cabri (dinamismo) para verificar a validade da construção. A dificuldade surgiu na produção escrita, pois não conseguiram se expressar corretamente, apesar de, de forma explícita, terem concordado com a afirmação. Na figura abaixo, apresentamos a produção das duas duplas:

[45] Uma vez que a metodologia empregada neste trabalho é altamente intervencionista, pretendemos, com perguntas como essas, estimular/encorajar as respostas dos aprendizes.

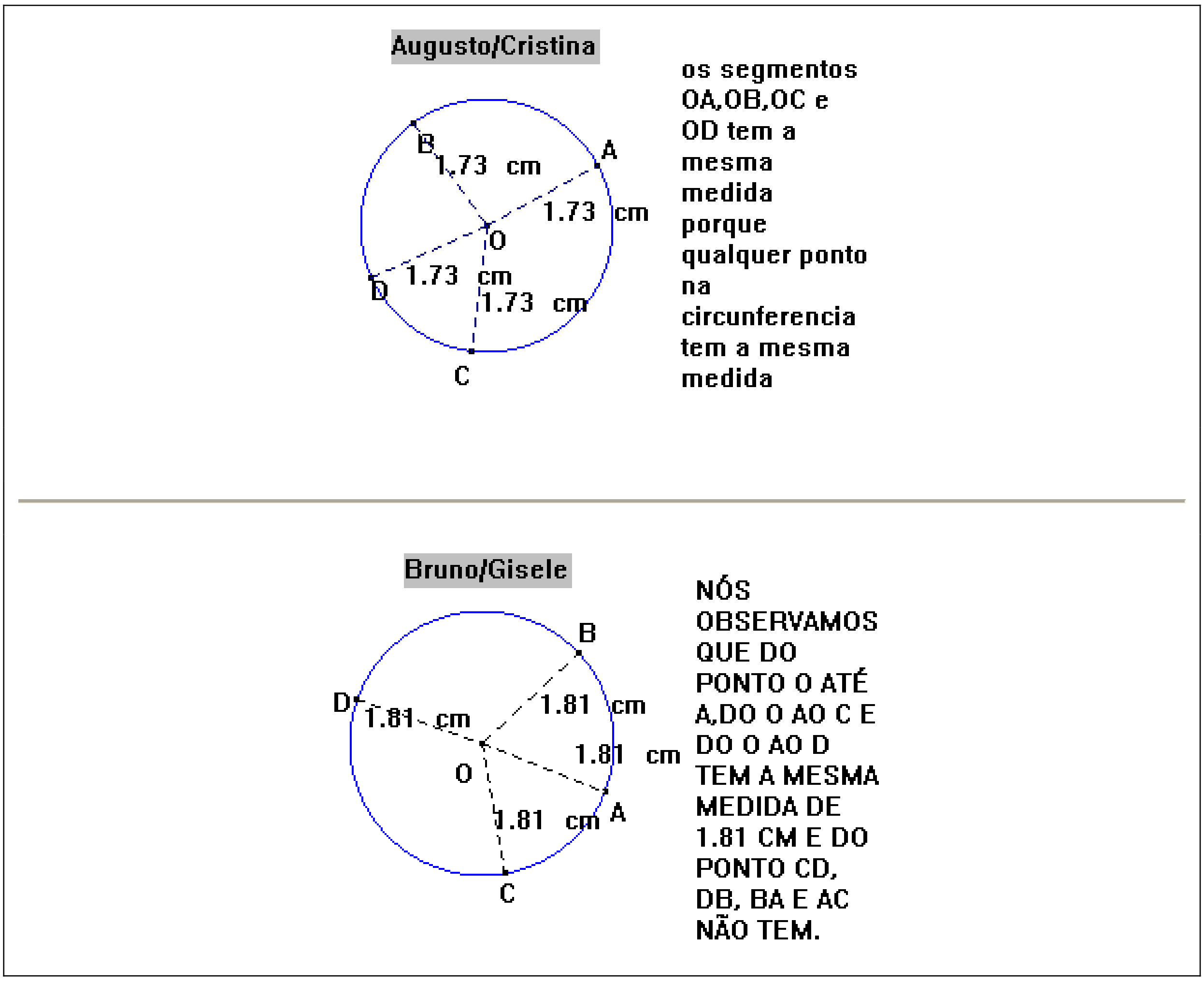


Figura 4.22 – Resposta da Ativ.2, Conjunto 1

Percebemos que sabiam o que era para ser respondido, mas se atrapalharam em como dar a resposta (apenas nas palavras finais). Verifica-se na escrita da primeira dupla que houve dificuldades com a linguagem matemática, principalmente quanto às noções de raio e distância. Isso, a nosso ver, é porque, no nível escolar em que se encontram, os aprendizes não se sentem muito à vontade com certos termos matemáticos para expressar suas idéias ou conclusões, ainda mais quando estão diante coisas novas (demonstrações, por exemplo). Como há menção a propriedades, a nosso ver, trata-se de uma prova quase conceitual. Diferentemente da resposta da segunda dupla – Bruno/Gisele – que, apesar de algumas semelhanças com a primeira, é basicamente empírica. (A semelhança está no fato de que mencionaram a medida do raio obtida e fizeram referência a outros segmentos – distintos do raio)

4.4.3 Atividade 3

Nesta questão, nenhuma tarefa de construção foi solicitada. Os estudantes foram orientados, primeiramente, a abrir o arquivo Ativ.3, contendo a figura seguinte:

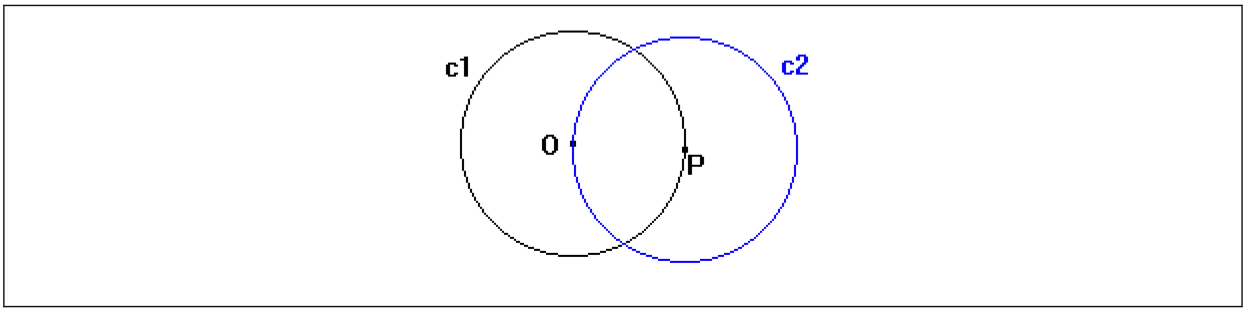


Figura 4.23 – Questão 3, Conjunto 1

em que os aprendizes deveriam responder por quê os dois círculos têm o mesmo tamanho.

Em seguida, pedimos que *clicassem* na figura, movendo partes da mesma. É interessante notar que, pela primeira vez, fizeram referência ao raio, talvez devido à forma com que foram desenhadas as duas circunferências (os pontos P e O, por exemplo).

É importante enfatizar que não houve nenhuma intervenção nossa no sentido de induzir a seguinte resposta cuidadosamente elaborada pela dupla Augusto/Cristina: "*As circunferências 1 e 2 são iguais porque as duas possuem o mesmo raio*". Do que se depreende que esta resposta não se baseou em argumentos empíricos (nem no dinamismo do Cabri) e sim em propriedades matemáticas, chegando bem perto de uma prova conceitual, de acordo com as classificações prova de Balacheff. Temos, neste caso, um momento de segurança com a noção de raio.

A descrição/justificativa da dupla Bruno/Gisele (Figura 4.24), muito embora não expresse uma linguagem (matemática) do nível que vimos acima, denota já um bom entendimento do conceito de raio. Consideramos oportuno trazer ao leitor o que a dupla produziu:

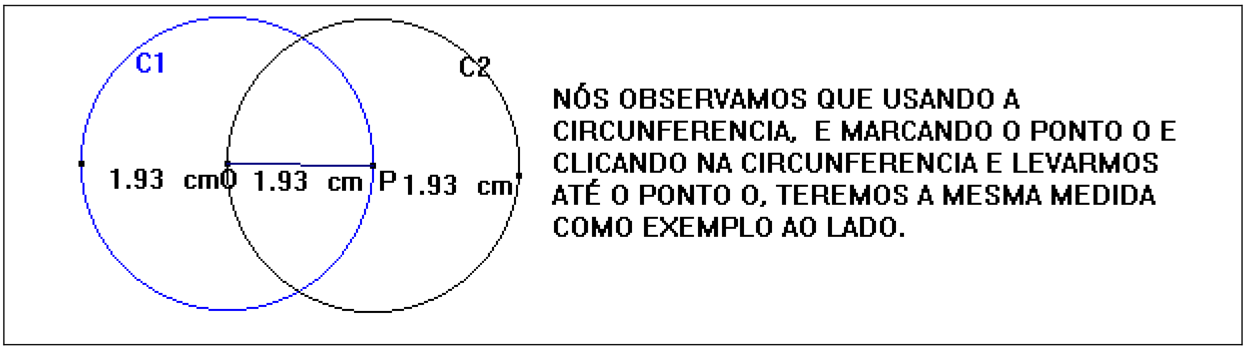


Figura 4.24 – Resposta da dupla Bruno/Gisele, Ativ.3

4.4.4 Atividade 4

Esta atividade pede para construir uma reta que divide uma circunferência em duas partes iguais. O objetivo era que os estudantes usassem as idéias de diâmetro, pontos colineares e de ângulo raso para tentar justificar sua construção.

Uma primeira tentativa se baseou numa construção mole (fato ocorrido às duas duplas), na qual foi traçada uma reta que aparentemente passava pelo centro, quando então tivemos que orientar os aprendizes para que verificassem a colinearidade dos pontos (dois deles na circunferência e o outro, no centro). Tendo verificado que esta tentativa não funcionou, elaboraram uma outra construção, e desta vez, sim, construíram uma reta passando pelo centro da circunferência – uma construção robusta. Abaixo, temos a construção e a "justificativa" de ambas as duplas:

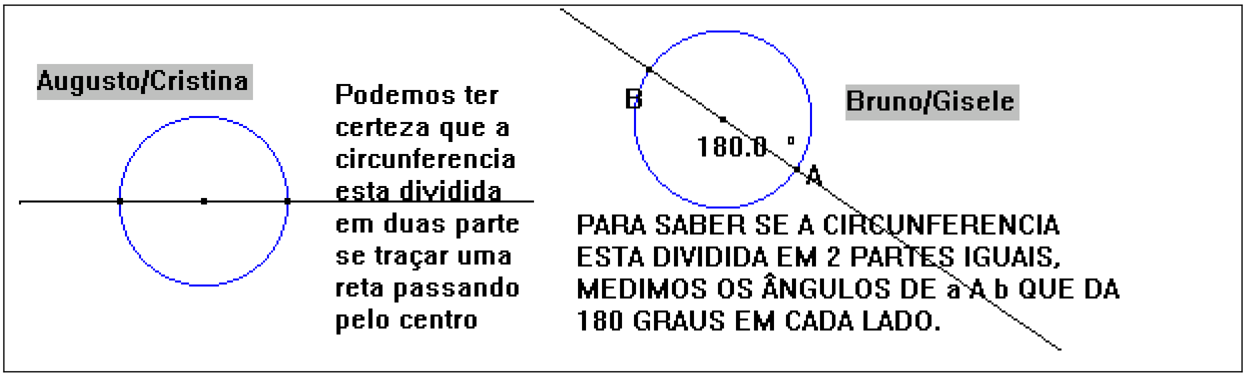


Figura 4.25– Resoluções da Ativ.4, Conjunto 1

Algumas considerações se fazem necessárias sobre a resposta da primeira dupla (Augusto/Cristina). É possível que, como a reta foi criada a partir do centro e passando por um ponto da circunferência, os estudantes não acharam necessário verificar que os três pontos são colineares. Os argumentos utilizados na justificativa já mostram uma certa familiaridade com termos matemáticos, embora não deixem explicitamente claro do porquê a circunferência fica dividida em duas partes iguais.

Quanto à segunda dupla, observa-se que não mencionam a reta passando pelo centro (mas o traçado foi feito) e certificam-se da construção medindo o “ângulo”(que é igual a 180°) a partir dos três pontos: o centro e os dois pontos A e B. A visível dificuldade na justificativa é compensada, em certa medida, talvez, pelo dinamismo do Cabri.

Também pedimos aos aprendizes que resolvessem esta atividade de outra maneira, neste caso, usando apenas circunferências. Realizaram uma construção robusta, no sentido de que mediram o ângulo PÔP’ (em que P’ é o simétrico de P em relação ao centro O), obtendo 180°, fato que pode ter levado os aprendizes a concluir que os três pontos são colineares, embora isso não tenha sido mencionado na produção escrita.

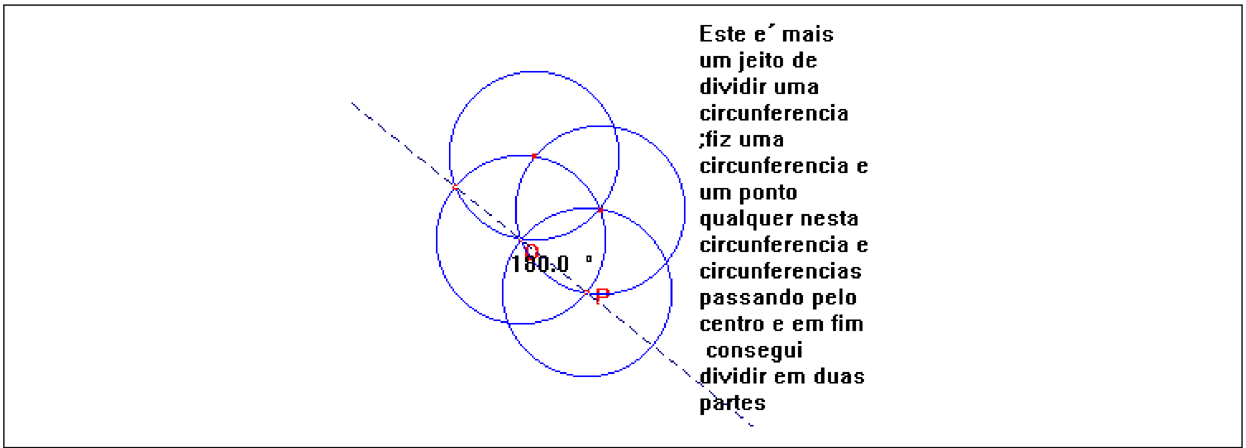


Figura 4.26 – Segunda solução da Ativ.4, por Augusto/Cristina.

A dupla Bruno/Gisele realizou praticamente a mesma construção e escreveram o seguinte: “*Nós fizemos uma circunferência que é o centro e fiz*[emos] *várias circunferências em volta até dividir duas partes de uma circunferência sem usar a reta*". (Vide construção no Anexo 7)

Com base no fato de terem medido o ângulo PÔP', é possível que tenham feito uso de propriedades geométricas vistas anteriormente. Outra questão a ser observada é que não é muito fácil aos aprendizes se livrarem da reta; precisam traçar pelo menos uma reta pontilhada a fim de melhor compreender sua construção. Acreditamos que esta dificuldade é absolutamente normal, pois o traçado (no papel ou na tela do Cabri) é a materialização da noção de reta.

4.4.5 Atividade 5

Relembramos que esta atividade foi aplicada duas vezes. Na primeira Sessão, os aprendizes poderiam resolvê-la com todas ferramentas disponíveis; já na segunda Sessão, deveriam usar, preferencialmente, apenas o compasso. A atividade pedia para dobrar um segmento de reta OA (CA).

Na primeira Sessão, os métodos usados foram: (a) simetria central; (b) retas e circunferências; e (c) compasso apenas. Na segunda Sessão, os métodos foram praticamente os mesmos (simetria central e compasso apenas).

Num primeiro momento, usando simetria central, ambas as duplas elaboraram respostas bem parecidas, mas com o diferencial de que apenas a dupla Bruno/Gisele apresentou sua justificativa (com base no dinamismo do *software* Cabri).

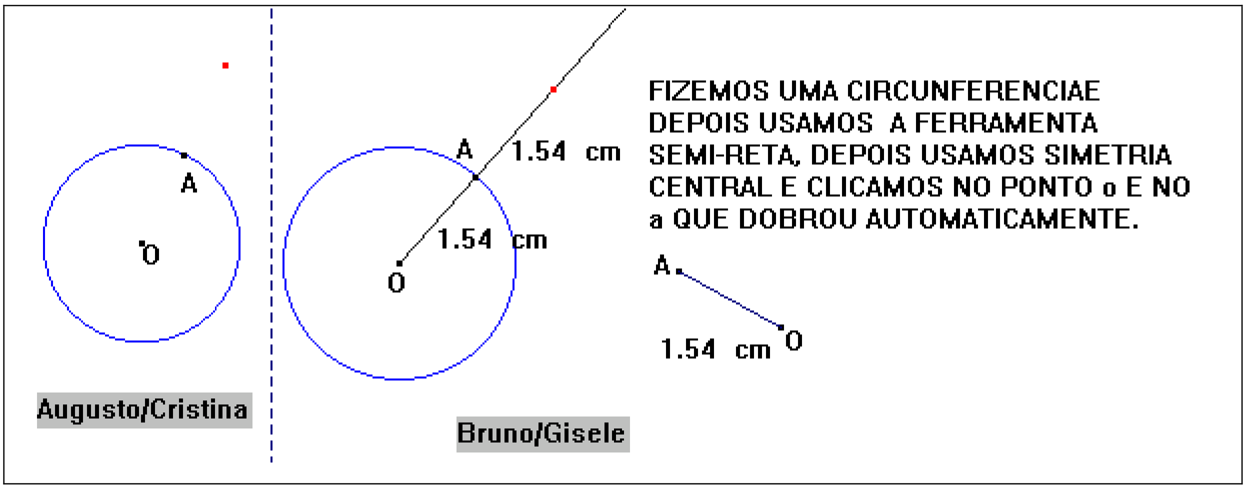


Figura 4.27 – Respostas da Ativ.5

As duas duplas deram uma outra solução usando reta e circunferências. Neste caso, descreveram corretamente a construção, como mostra a elaboração da dupla Augusto/Cristina[46]. É válido observar que construíram o ponto O' explicitamente.

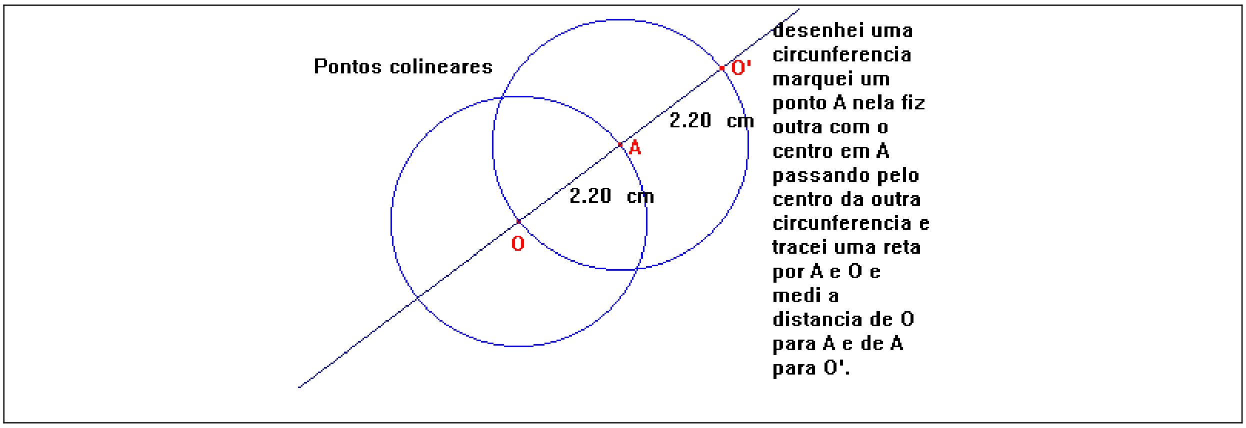


Figura 4.28 – Uma solução da Ativ.5, por Augusto/Cristina

Vemos que a produção escrita fica mais na descrição, sendo que a justificativa se baseia claramente no dinamismo do Cabri, uma vez que usaram a ferramenta "colinear?" para os pontos O, A e O' (apesar de os mesmos já se encontrarem numa mesma reta, por construção) e mediram os segmentos OA e AO' (iguais ao raio). Demonstram, portanto, uma certa atenção à colinearidade. Ainda,

[46] A resposta da outra dupla, na essência, não difere da que nos é apresentada acima. Há apenas uma pequena variação na parte escrita, obviamente.

quanto à descrição da construção, podemos dizer que os estudantes usam termos matemáticos adequadamente (bem próximos da linguagem matemática).

Na segunda Sessão[47], a mesma dupla acima oferece uma justificativa muito mais elaborada, atestando uma prova de natureza quase conceitual (com argumentos matemáticos coerentes): "*Estas medidas estam* [estão] *iguais porque os pontos C, A e C' são colineares e a distância de OA é igual à distância de O'A".*

Na construção executada com o compasso apenas, percebemos uma certa evolução em seus argumentos, muito embora ainda façam apelo às ferramentas do Cabri ("colinear?" e "distância e comprimento") para verificação de propriedades matemáticas. Na falta de argumentos matemáticos, mandam o Cabri "provar".

Atesta este fato a solução dada pela dupla Augusto/Cristina, usando apenas circunferências, como descrito na Figura 4.29 a seguir.

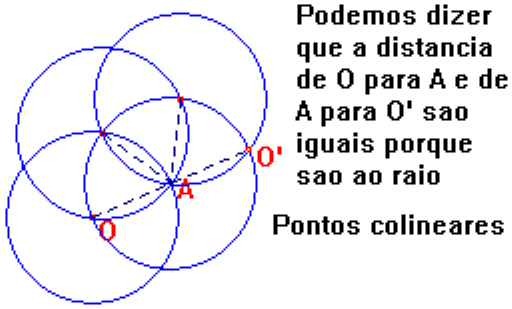


Figura 4.29 - Uma outra solução para a Ativ.5, por Augusto/Cristina (1ª Sessão)

Nesta tentativa, usam claramente propriedades matemáticas e a ferramenta "colinear?".

É interessante notar que esta mesma atividade, quando reaplicada na segunda Sessão do experimento, foi resolvida (a construção) usando a ferramenta "compasso". De forma semelhante à anterior, primeiro *mandaram o Cabri "provar"* e depois escreveram a prova. Vejamos a resposta a título de comparação:

[47] A construção, neste caso, foi feita por simetria central; depois traçaram o segmento de reta OO'. Talvez por isso tenham afirmado que os 3 pontos O, A e O' são colineares.

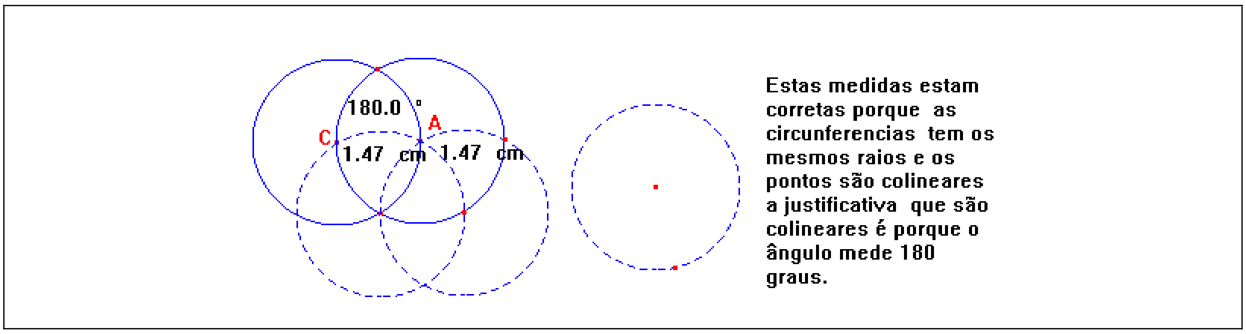


Figura 4.30 – Mais uma solução da Ativ.5, de Augusto/Cristina (2ª Sessão)

Pelo que podemos observar, em ambos os casos apresentados fazem menção a propriedades matemáticas (raio, ângulo raso, pontos colineares). Observamos também que, à medida que o experimento foi se desenvolvendo, os termos matemáticos foram aflorando com mais facilidade nas falas dos aprendizes.

A produção matemática (construção e descrição/prova) da dupla Bruno/Gisele não foge em nada do estilo de resolução visto logo acima. Isto em relação à primeira Sessão. Além do mais, na segunda Sessão do experimento estes aprendizes passaram por muitas dificuldades para dar cabo desta questão (tanto na construção como na justificativa). Aliás, não só desta atividade como também das demais. Na seqüência, nos deteremos um pouco sobre este fato, além de outras considerações.

Como já se sabe, o **Conjunto 1**, para o Sistema de Aprendizagem A (duplas Augusto/Cristina e Bruno/Gisele), se deu em duas sessões. Esta segunda Sessão durou cerca de duas horas e ocorreu 15 dias após a realização da primeira. Com relação às duplas participantes, os resultados se mostraram bem distintos, com exceção das construções de Mohr-Mascheroni, as quais não foram cumpridas por nenhuma dupla.

Nesta segunda Sessão, a dupla Augusto/Cristina conseguiu resolver satisfatoriamente as questões 5 e 6 (reaplicadas/redesenhadas, sobre *dobrar um segmento* e *caixas-pretas*, respectivamente) num tempo considerável. Tal dupla, pelo que pudemos observar, manteve bastante coerência de idéias na resolução das atividades, comparativamente às mesmas atividades da primeira Sessão. Já o par Bruno/Gisele gastou quase todo o tempo na questão 5, restando poucos minutos para as questões 6 e 7 – o pouco que conseguiram desenvolver foi com a nossa intervenção (até mesmo para construir as figuras).

O fato é que foram vários dias com pouco ou nenhum contato com o Cabri, menos ainda com as questões que estávamos a trabalhar com os aprendizes (as atividades do Conjunto 1). Sem contar que somente o aluno Bruno tinha computador em casa. De qualquer forma, estas considerações não podem ser a causa direta das dificuldades por que passou a dupla Bruno/Gisele e, em menor grau, a dupla Augusto/Cristina. Há que se pensar que a temática *construções/provas/Cabri*, da forma como está sendo proposta aos aprendizes, não é um assunto elementar, destacadamente se levarmos em conta o nível escolar em que se encontram. E sendo a presente pesquisa de curta duração, não houve tempo para que os aprendizes amadurecessem muitos dos conceitos geométricos imprescindíveis a um melhor desempenho nas atividades propostas.

4.4.6 Atividade 6

Esta atividade envolve caixas-pretas. O objetivo era que os aprendizes utilizassem os vários recursos dinâmicos que oferece o Cabri e, por meio disto, pudessem testar conjecturas e validar propriedades em cada construção. Não era necessário que apresentassem justificativas da construção efetuada. Enfatizamos que na primeira Sessão utilizamos o termo "cópia exata" no enunciado. Já na segunda Sessão, tiramos o termo "*cópia exata*" e colocamos "*reproduzir uma figura que tenha o mesmo comportamento da figura...*". Esclarecemos que a figura original foi preparada (construída) por nós usando a ferramenta "simetria central" e previamente salva em uma pasta do computador.

Na primeira Sessão, talvez em função do termo "cópia exata", o par Augusto/Cristina tentou fazer a cópia usando um eixo de simetria[48], como mostra a figura seguinte:

---

[48] Usando este raciocínio nenhuma parte da figura-imagem pode ser movida diretamente, a não ser a partir da figura original.

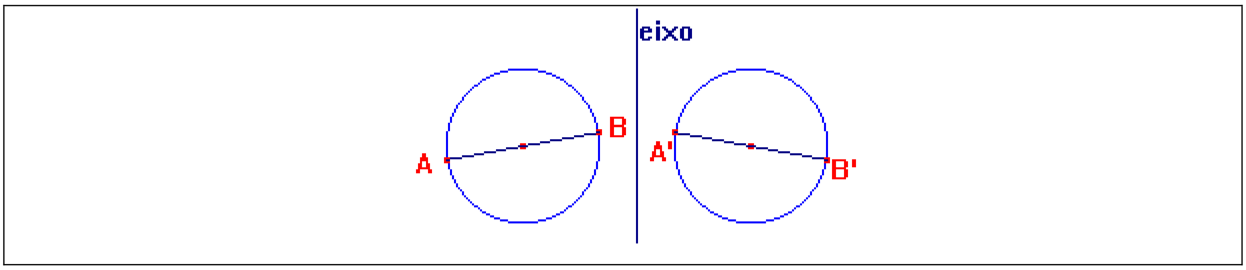


Figura 4.31 – "Cópia exata" (simetria axial), por Augusto/Cristina.

Nossa intervenção, primeiramente, foi no sentido de explicar-lhes que este método não funcionava, pois nenhum objeto da figura-imagem poderia ser movimentado (Os objetos manipuláveis na figura-original são o ponto O, a circunferência e o ponto B). Em segundo lugar, orientamos os aprendizes a usar a ferramenta "compasso" (para construir circunferências de mesmo raio). Daí por diante, os aprendizes não tiveram maiores dificuldades em realizar a construção (lembrando, por exemplo, as propriedades de simetria central, pontos colineares e do ângulo raso). Acreditamos que esta resposta inicial dos aprendizes se deve ao fato de que tiveram como foco principal o desenho, mas não a figura (figura-cabri), talvez ainda se lembrando do ambiente do lápis e papel.

De maneira geral, os resultados da segunda Sessão pouco diferem dos da primeira, mas isto para dupla Augusto/Cristina. Quanto à segunda dupla, os resultados da segunda Sessão foram bem discrepantes se comparados com os da primeira, como enfatizamos nos comentários à Atividade 5. Uma dificuldade em comum persistiu: a realização de construções robustas[49]. Era comum, por exemplo, tentar construir um diâmetro, não com uma reta passando pelo centro ou por simetria central, mas sim, "ajustando" um segmento de reta para que o mesmo passasse pelo centro da circunferência. Dificuldade que pode ser explicada, em primeiro lugar, pela não diferenciação entre figura e desenho e, em segundo, por alguma falta de domínio no manuseio técnico do Cabri, como, por exemplo, fazer uma circunferência (ou reta) passar por um determinado ponto.

Mas voltemos à atividade em questão. Esta atividade só pode ser corretamente resolvida se primeiro for usada a ferramenta "compasso" (nisto os

[49] Por exemplo, o fato de numa circunferência ter o diâmetro traçado, mas na outra não ter, não caracterizou obstáculo algum aos aprendizes.

aprendizes apresentaram bastante dificuldade), pois a figura-imagem precisa ter o mesmo raio que o da original. Em contrapartida, depois poderia-se usar simetria central, retas passando pelo centro (para poder traçar o diâmetro) e circunferências apenas. Em tempo: usaram quase que somente retas passando pelo centro, marcaram as intersecções com a circunferência, esconderam a reta e finalmente traçaram o segmento (neste caso, de fato o diâmetro).

Nas duas ilustrações seguintes estão as respostas de ambas as duplas, nas quais ainda houve preocupação em apresentar justificativas para a construção (Sessão 2):

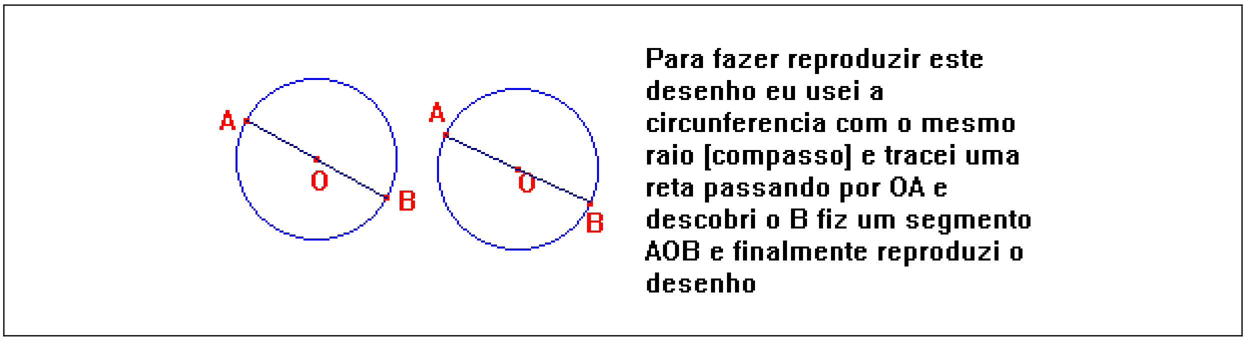


Figura 4.32 - Reprodução de figura, por Augusto/Cristina[50], Ativ.6

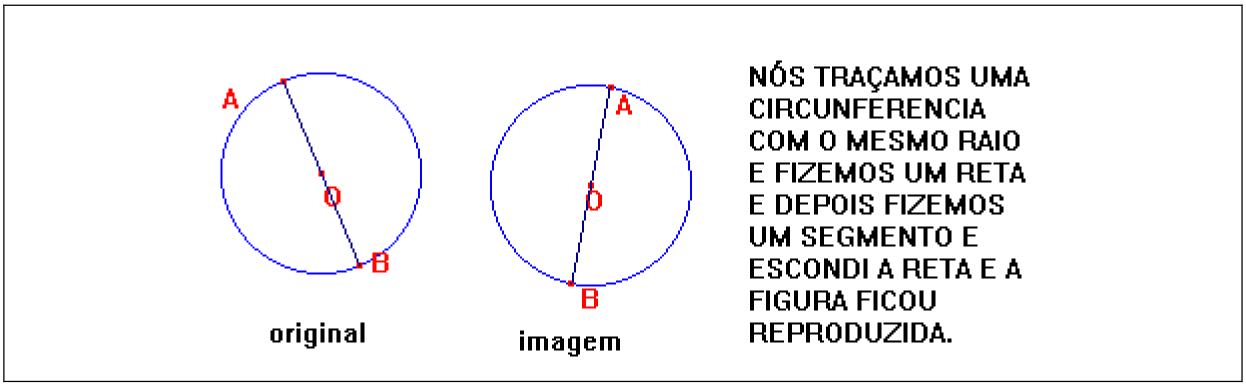


Figura 4.33 – Resposta da dupla Bruno/Gisele, Ativ.6

Uma segunda solução fez uso de circunferências, em que os aprendizes claramente fizeram referência a propriedades matemáticas (a do ponto simétrico, por exemplo):

[50] Veja-se, a título de comparação, a escrita desta mesma dupla na Sessão 2: "*Nós pegamos o compasso e pegamos o mesmo raio da circunferência AOB e fizemos uma outra circunferência com o mesmo raio, é por isso que são iguais [porque têm o mesmo raio]*".

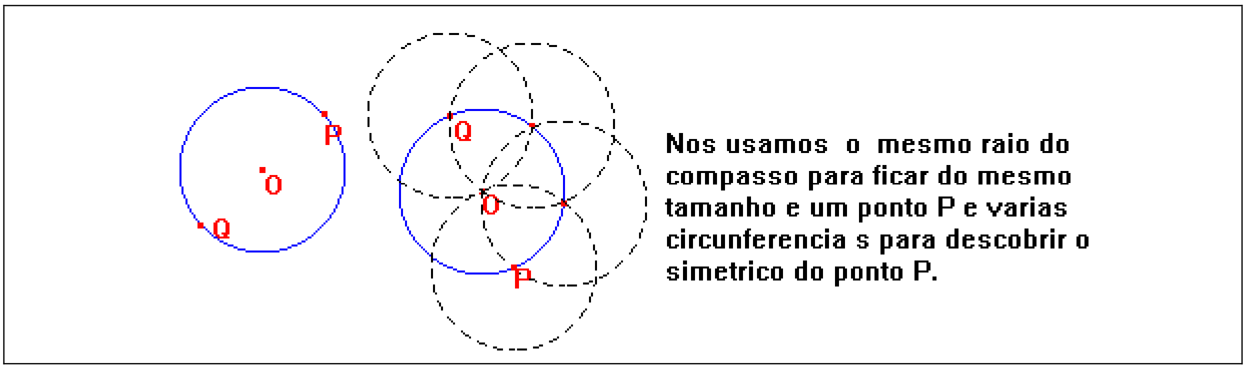


Figura 4.34 – Outra forma de reprodução de figura (Conjunto 1)

Esta atividade, em sua primeira versão, contou com cinco itens, dos quais só foram resolvidos dois – os itens (a) e (b). Na segunda versão, reaplicamos os itens (a), (b) e (c) – este último sobre simetria na circunferência. Mais uma vez, os aprendizes gastaram muito tempo nos itens (a) e (b) e não conseguiram resolver o item (c) sem a nossa ajuda. É possível que tenhamos exagerado na quantidade de questões nas duas sessões do experimento de ensino. De qualquer forma, a maior dificuldade dos aprendizes ainda ficou em torno das construções robustas.

4.4.7 Atividade 7

A atividade pedia para encontrar o simétrico de um ponto em relação a uma reta (usando compasso apenas), conforme as figuras abaixo.

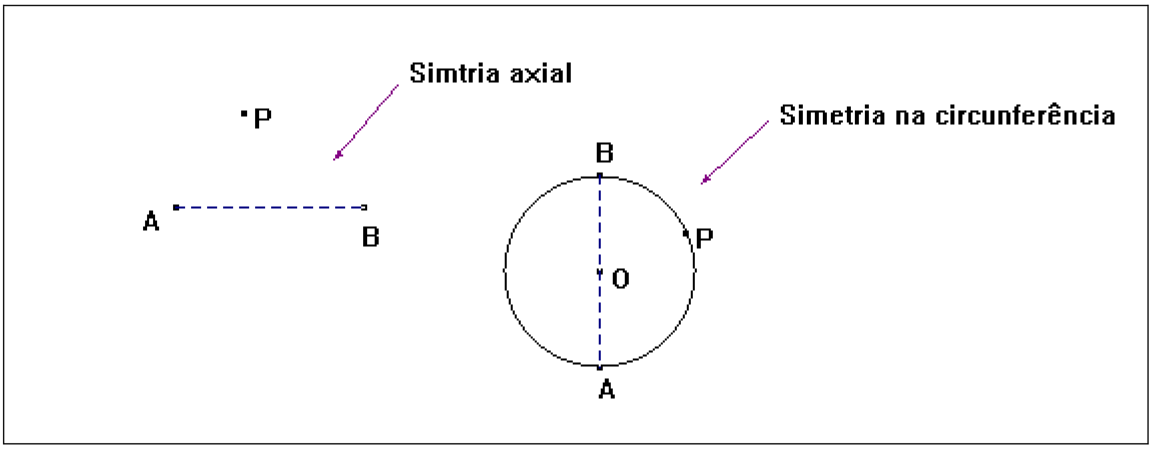


Figura 4.35 – Figuras da Ativ.7, Conjunto 1

O objetivo desta atividade era que os aprendizes focassem as construções de Mohr-Mascheroni. Ou seja, os estudantes deveriam executar a construção com o compasso apenas e depois justificar por quê a construção estava correta (deveriam apresentar a prova matemática). Esperávamos que realizassem ao menos a construção, mas nem isto conseguiram. Temos a avaliação de que, não a prova, mas a construção do simétrico numa reta é muito mais fácil usando o compasso apenas, mas não foi isso que os aprendizes sentiram ao tentar, sem sucesso, realizar as construções.

As construções envolvendo circunferências, ao que parece, são as raízes de tais dificuldades, mas o fato é que nas sessões de familiarização com o Cabri não houve muito espaço para trabalhar tais construções, menos ainda, claro, as provas. Isto porque, para justificar as construções, os aprendizes deveriam usar congruência de triângulos, aliás, um assunto até então pouco explorado na sala de aula de Matemática. Vale ressaltar que esta questão não foi aplicada imediatamente após o Episódio de Ensino[51], pois primeiro a Atividade 5 (sobre dobrar um segmento de reta) foi reaplicada, com a qual foi gasto um tempo considerável, portanto restando pouco tempo às construções de Mohr-Mascheroni.

4.4.8 Sumário sobre o Conjunto 1:Considerações Gerais

As atividades do **Conjunto 1** perfazem um total de 7 questões, além do episódio de ensino. Foram distribuídas em duas sessões, sendo que na segunda Sessão foram redesenhadas. Com exceção do Conjunto 1.3 (episódio de ensino) e do Conjunto 1.4 (caixas-pretas), as demais atividades desenhadas focaram nas produções matemáticas dos aprendizes, isto é, nas justificativas das construções realizadas (para estas atividades exigiu-se sempre algum tipo de prova).

O bloco de questões do Conjunto 1.1 (questões de 1 a 4) não ofereceu maiores dificuldades aos aprendizes, visto que nestas questões foram explorados os aspectos dinâmicos do Cabri. A partir destas questões pudemos perceber que os aprendizes têm mais facilidade com argumentos pragmáticos, baseados principalmente nas verificações com as ferramentas do *software*. Talvez, pelo nível

[51] Este ocorreu no início da segunda Sessão.

escolar em que se encontram, os aprendizes demonstram um certo desconforto com alguns termos matemáticos.

O bloco de questões do Conjunto 1.2 teve como objetivo introduzir os estudantes à prova. As questões abordaram noções como a de simetria central, pontos colineares, raio, diâmetro, angulo raso, além da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Observamos diferenças significativas nos argumentos dos aprendizes ao resolver um mesmo problema, mas com ferramentas diferentes. Por um lado, quando dobraram o segmento usando retas e circunferências, valendo-se do dinamismo do Cabri, conseguiram produzir explicações boas (baseadas em fatos empíricos). Por outro lado, nas construções executadas com o compasso apenas, tiveram dificuldades significativas em usar propriedades matemáticas necessárias à elaboração das provas.

As produções escritas dos estudantes revelam considerável dificuldade em separar a descrição da justificativa (para cada construção efetuada). Por isso, suas "provas", na maior parte das vezes, combinam descrição com justificativa e argumentos empíricos com argumentos teóricos.

Nas atividades sobre caixas-pretas a intenção era enfatizar um importante aspecto (teórico) de um software de Geometria Dinâmica (*Cabri-Géomètre*): a noção de construção robusta. Tal noção, segundo pudemos constatar, não foi facilmente apreensível pelos estudantes envolvidos no nosso experimento. Muitas vezes, enquanto estavam executando a construção na tela do Cabri, era como se estivessem desenhando com lápis e papel. Portanto, foi necessária nossa interação, enquanto professor-pesquisador, no sentido da exatidão da construção (Ou seja, as dificuldades neste tipo de construção persistiram).

As atividades sobre as construções de Mohr-Mascheroni não oferecem elementos para análise, pois os aprendizes não conseguiram realizar nem ao menos as construções. Por este motivo, nosso experimento de ensino envolveu uma segunda abordagem, em que o presente objeto de estudo – construções geométricas e provas – foi desvinculado do ambiente computacional do *Cabri-Géomètre*. Este é o assunto a ser tratado na próxima sessão.

4.5 Conjunto 2

Este é o já mencionado conjunto relativo ao "jogo" de prova, no qual as justificativas das construções geométricas são desvinculadas do Cabri. A principal razão de termos acrescentado esta outra abordagem ao nosso experimento de ensino se deve às dificuldades encontradas pelos aprendizes na elaboração de provas a partir das construções geométricas no ambiente do Cabri. Outra razão, talvez tão importante quanto a primeira, é que pretendemos fazer comparações entre os resultados das duas abordagens (1ª abordagem: com Cabri; 2ª abordagem: sem Cabri).

Neste conjunto, amenizamos as tarefas dos aprendizes no sentido de que eles não precisaram realizar, nem a construção, nem a produção (descrição/prova) escrita, exceto no pós-teste. Para tanto, foram confeccionados cartões, em conjunto com nossa orientadora, contendo provas e/ou explicações matemáticas de alguns problemas de construções geométricas já abordados na primeira fase (Conjunto **0** e Conjunto **1**).

4.5.1 Descrição das Atividades do Conjunto 2

Este conjunto compõe-se de 4 atividades iniciais e um pós-teste. Cada atividade é formada por um certo número de cartões, num dos quais apresenta-se o enunciado, a construção, dicas e explicações adicionais (às vezes por meio de diálogos) da questão e nos demais se dão os passos da prova. A idéia desse tipo de atividade é que os aprendizes reconstituam a "historinha" da prova, organizando os cartões na ordem correta do raciocínio utilizado na prova/explicação. Abrangem, desde as questões de dobrar um segmento de reta, até as construções de Mohr-Mascheroni (ponto simétrico).

Já o pós-teste é um pouco diferente. A cada dupla de estudantes é dado um cartão contendo uma proposição, cuja demonstração se apóia em congruência de triângulos. A tarefa dos aprendizes, neste caso, é montar a "historinha" da prova, mas desta vez têm que escrever a prova.

Estas atividades foram aplicadas, como previsto, às duas duplas do Sistema de Aprendizagem A (cerca de 2 meses e meio depois da coleta de dados da fase 1). Infelizmente, por diversos problemas de horários, tivemos que aplicar as atividades durante o período de aulas. Aplicamos as atividades e o pós-teste numa única sessão, com duração cerca de uma hora e meia. Toda a sessão foi gravada em áudio e vídeo e, em particular, terminada cada atividade, a disposição (resposta) final dos cartões foi focada bem de perto pela câmera, sendo que neste momento o professor-pesquisador numerou os cartões na ordem colocada pelas duplas.

Apresentaremos, a seguir, as atividades deste conjunto, bem como a análise dos resultados obtidos pelas duas duplas do Sistema de Aprendizagem A – Augusto/Cristina e Bruno/Gisele. As questões e respostas deste conjunto se encontram, na íntegra, nos anexos 11 e 12, entretanto, daremos de forma resumida o enunciado de cada uma delas.

4.5.2 Atividade 1

O enunciado desta atividade é o seguinte: "Dados os pontos A e B, construir um ponto C pertencente à reta AB, de maneira que B seja ponto médio do segmento AC". A partir dos pontos A e B, a construção foi feita assim: traçamos a reta AB e, em seguida, a circunferência com centro em B e raio BA. Afirmamos, ao final, que o ponto C – intersecção da reta com a circunferência –, era a resposta procurada e pedimos aos estudantes que explicassem isso. Veja a figura a seguir:

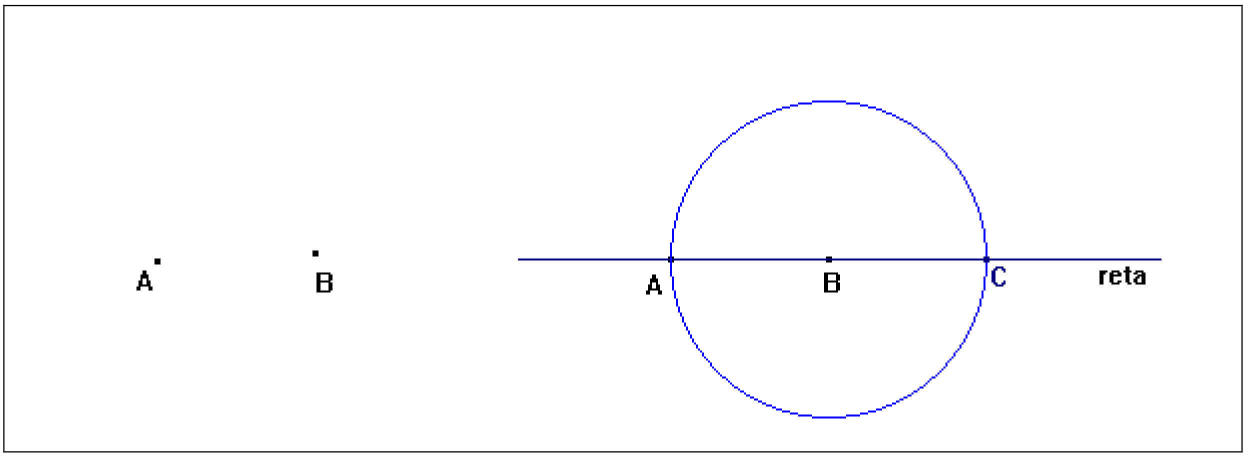


Figura 4.36 - Ativ.1, Conjunto 2 (construção)

Os passos da prova na ordem correta são:

- ✓ 1 - Os pontos A, B e C são **colineares**, pois o ponto C é intersecção da reta AB com a circunferência;
- ✓ 2 – Como eu que, por construção, AB = BC = raio;
- ✓ 3 – Posso, assim, concluir que C é o ponto da reta AB tal que **B é ponto médio do segmento AC**.

A prova desta questão foi feita em três cartões (três passos). Os aprendizes foram orientados, primeiramente, a observar todos os cartões a fim de que percebessem a seqüência de idéias e raciocínios utilizados na prova apresentada. Depois de terem feito isso, passaram às tentativas de organizar os cartões para realizar a “prova”.

As duas duplas concluíram esta atividade em cerca de três minutos. Quando cada dupla terminou sua atividade, nos chamaram para verificar o resultado, mas não interferimos no que já tinham feito. A dupla Bruno/Gisele trocou os dois primeiros cartões, ao passo que a dupla Augusto/Cristina trocou os últimos dois cartões.

A dupla Bruno/Gisele discutiu bastante a questão e até lembraram de situações anteriores em que o assunto (ponto médio) foi abordado, tanto nas aulas de Matemática como nas sessões anteriores do experimento de ensino. Talvez, por este motivo, “resolveram” satisfatoriamente a atividade.

Já a dupla Augusto/Cristina, apesar de discutir os dados da questão, não fez referência a situações anteriores, indicando que possivelmente não lembraram a noção de ponto médio. Na verdade, esta dupla confessou que este tipo de atividade não era muito fácil (comparando, talvez, com as construções elementares que realizara).

Possivelmente, pelos dados de que dispomos, e pelo fato de ser um tipo de prova sem muita linguagem formal (com explicações, ao invés do esquema hipótese-tese), no geral os aprendizes tiveram um bom desempenho.

4.5.3 Atividade 2

Nesta atividade, apresentou-se aos estudantes um triângulo isósceles ABC com sua mediana AM (M = ponto médio de BC) já construída. A tarefa dos aprendizes era provar que “se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes”.

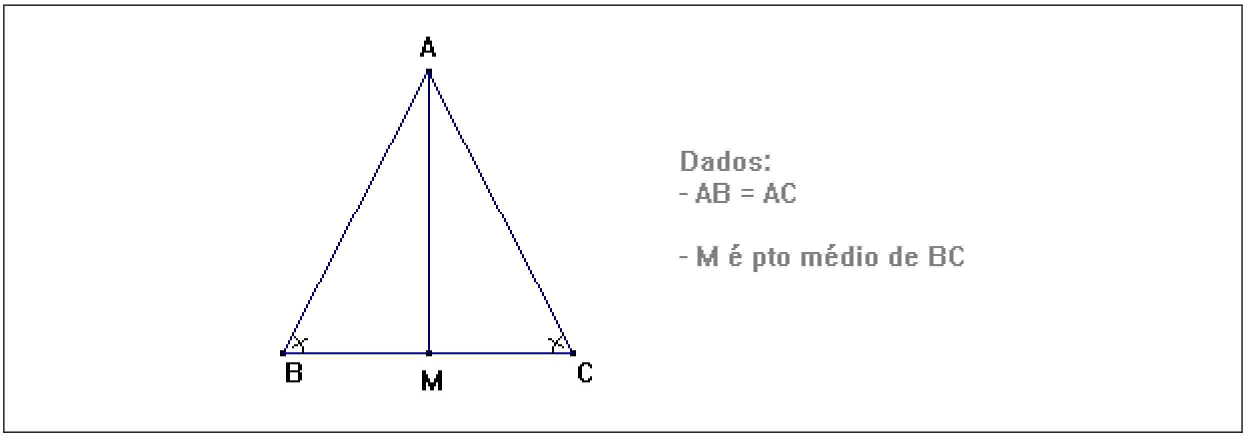


Figura 4.37 – Dados da Ativ.2 (Conjunto 2)

Organizamos os passos da prova na seguinte ordem:

- ✓ 1 - Temos, no triângulo ABC, AB = AC e queremos provar que $\hat{B} \equiv \hat{C}$;
- ✓ 2 - Eu sei que nos dois triângulos, AMB e AMC, temos:

  AB = AC
  AM = AM
  BM = CM;
- ✓ 3 - O critério LLL (Lado, Lado, Lado) nos garante que $\Delta AMB \equiv \Delta AMC$;
- ✓ 4 - O fato de os triângulos AMB e AMC serem congruentes quer dizer que têm a mesma forma e o mesmo tamanho. **Conseqüentemente**, $\hat{B} \equiv \hat{C}$

Repetimos, nesta questão, praticamente as mesmas recomendações que fizemos na atividade anterior. Colocamos explicitamente a proposição na forma hipótese-tese. As duas duplas tiveram bastante dificuldade com os termos matemáticos presentes na questão: mediana, ponto médio e até a notação utilizada. Talvez, por causa disso, gastaram cerca de dez minutos, um tempo considerável para concluir a questão, mas isto porque discutiram e interagiram bastante.

Consideramos, também, que os aprendizes tiveram mais dificuldade na questão em função de se tratar de uma prova envolvendo congruência de triângulos e, além disso, o fato de ter que partir da hipótese para chegar à tese confunde muito os aprendizes (eles não entendem muito bem o que deve ser provado).

Ressaltamos que nesta questão interagimos mais com a dupla Bruno/Gisele que com a outra. A pesar disso, a resposta das duas duplas coincidiu: o primeiro e o último passos ficaram na ordem correta, mas trocaram os passos dois e três (ordem correta: 1-2-3-4; resposta obtida: 1-3-2-4).

Nesta questão, pudemos notar que os aprendizes preferem, nas suas explicações, termos matemáticos mais simples, como por exemplo, ao invés de mencionar a palavra *tese*, mencionam a expressão *conclusão geral*. Também, não dão quase nenhuma atenção à hipótese da proposição (mesmo isto estando escrito no cartão). Identificar os elementos constituintes da hipótese foi muito difícil aos aprendizes.

4.5.4 Atividade 3

Enunciado praticamente igual ao da Atividade 1: “Construir um ponto P na reta AB, de forma que B seja ponto médio do segmento AP”. Essencialmente, a diferença está na construção, a qual foi cumprida somente com o compasso. Eis a construção:

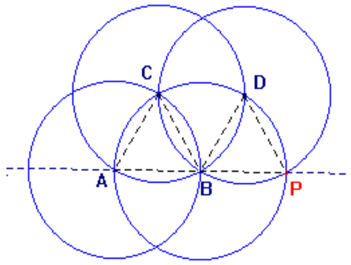


Figura 4.38 – Ativ.3 (Construção)

Ordenamos a prova em 4 passos, como segue:

- ✓ 1 - Eu sei que os triângulos ABC, CBD e DBP são eqüiláteros (pois foram construídos com a mesma medida AB). Logo, todos os 3 ângulos no vértice B medem 60º, ou seja;
- ✓ 2 - $\angle A\hat{B}C = \angle C\hat{B}D = \angle D\hat{B}P = 60^o$;
- ✓ 3 - Logo, somando esses 3 ângulos, vem o resultado $\angle A\hat{B}C + \angle C\hat{B}D + \angle D\hat{B}P = 60^o + 60^o + 60^o = 180^o$;
- ✓ 4 - E como AB = BP (= raio), chegamos à conclusão de que B é ponto médio de AP.

Nesta questão, procuramos focar a atenção dos estudantes em algumas noções importantes de Geometria Plana: de novo o ponto médio, pontos colineares, ângulo raso, triângulo eqüilátero e soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Mas desta vez, a construção foi executada com o compasso apenas, o que foi explicado no enunciado da questão. Não fornecemos nenhuma dica sobre as medidas dos ângulos, nem sobre a natureza dos triângulos. Só foi dada uma dica a respeito da noção de colinearidade no passo três (a prova foi organizada em quatro passos).

Não houve dificuldades na compreensão dos termos matemáticos envolvidos, talvez pelo fato desta questão ter uma particularidade: a forma como as igualdades (envolvendo as medidas dos ângulos) foram escritas, ao que parece, ajudou bastante na rápida e bem sucedida conclusão da atividade: aproximadamente cinco minutos para cada dupla.

É possível que a forma pela qual elaboramos a prova tenha facilitado a tarefa dos aprendizes, mas o fato é que, como nesta questão não se fazia necessário que os aprendizes buscassem argumentos ou raciocínios para identificar hipótese e tese (ao menos explicitamente), a reconstituição da prova ficou mais acessível. Nota-se, novamente, e de acordo com os dados de que dispomos, a preferência por termos matemáticos mais simples.

Não se pode afirmar ao certo que trabalhar demonstrações segundo o esquema hipótese-tese seja mais complicado aos aprendizes envolvidos nesta pesquisa, mas apenas que se este esquema não estiver presente, a compreensão parece tornar-se mais acessível.

Comentários: Notemos que, nesta questão, novamente usa-se medida para justificar as afirmações. Poderia-se ter elaborado uma prova formal, usando conceitos de paralelismo, como visto às pp.89-90, mas isso não foi possível, porque, além da falta de tempo, nos pareceu difícil uma abordagem com aquele nível conceitual. Resumidamente, vejamos a prova neste caso:

Como os triângulos ABC, CBD e DBP são eqüiláteros (por construção), temos:

$$A\hat{B}C \equiv B\hat{C}D \quad \Rightarrow \quad CD \,//\, AB$$

$$D\hat{B}P \equiv B\hat{D}C \quad \Rightarrow \quad CD \,//\, BP$$

Logo, $AB \,//\, BP$, o que prova que os pontos A, B e P são colineares. Mas AB = BP (=raio) e, portanto, P é o ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que B é ponto médio de AP.

4.5.5 Atividade 4

A prova elaborada para esta questão, sobre simetria numa reta, foi composta por nada menos que oito etapas. Não se trata de uma questão em que os aprendizes tenham que identificar explicitamente os elementos hipótese e tese. A dificuldade decorre, novamente, da congruência de triângulos, pois exatamente dois critérios de congruência foram usados na prova. Vejamos a construção e os passos da prova na figura abaixo.

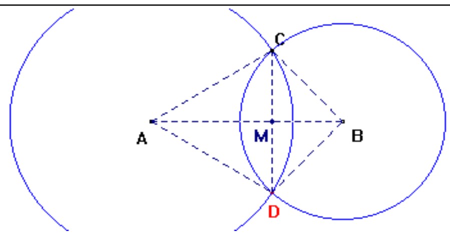
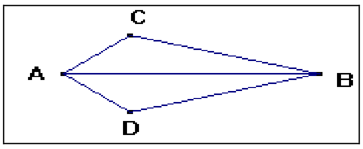


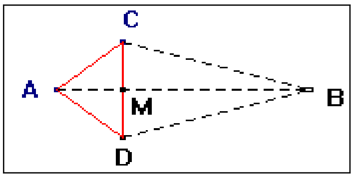
Figura 4.39 – Construção do ponto simétrico numa reta, Ativ.4 (Conjunto 2)

A prova foi organizada em 8 passos, conforme quadro a seguir.

- ✓ **1** – Podemos desenhar dois triângulos: ABC e ABD;



- ✓ **2** – Por construção, eu sei que AC = AD (**L**), BC = BD (**L**) e AB = AB (**L**). E posso então dizer que...
- ✓ **3** – O triângulo ABC é congruente ao triângulo ABD, pelo caso **LLL**.
- ✓ **4** – Podemos desenhar dois triângulos: ACM e ADM;



- ✓ **5** – Sabemos que AC = AD (raio), CÂB = DÂB (porque $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$) e AM = AM (lado comum);
- ✓ **6** – Então, pelo critério LAL, o triângulo ACM é congruente ao triângulo ADM;
- ✓ **7** – Temos que CM = DM e $\angle C\hat{M}A = \angle D\hat{M}A$. E além disso, $C\hat{M}A + D\hat{M}A = 180^o$, donde podemos concluir que $C\hat{M}A = D\hat{M}A = 90^o$ (ângulos retos);
- ✓ **8** – Logo, D é o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$

Como se pode observar, dois triângulos foram desenhados ao longo da prova, mas isso, pelo que observamos, não fez muita diferença para os estudantes.

Os aprendizes das duas duplas levaram um longo tempo discutindo esta questão; concentraram-se, inclusive, na leitura atenta do enunciado.

Percebemos que os aprendizes entendem relativamente bem as explicações, mas o problema maior é o de ordenar as idéias com base nos casos de congruência, de maneira a chegar à conclusão (A aluna Cristina se refere a esta tarefa com “um verdadeiro quebra-cabeça”).

Não era esperado que nenhuma das duplas ordenasse os cartões de forma correta, mas tínhamos a pretensão de que acertassem pelo menos as duas primeiras e a última etapa da prova, pois a idéia de hipótese traduzida por dados iniciais ou ponto de partida, bem como a idéia de tese entendida como conclusão, a esta altura já eram mais familiares aos aprendizes. Uma das duplas, inclusive, tentou encontrar cartões contendo dicas contendo a palavra *conclusão*. Mas, em momento algum nenhum estudante fez referência ao esquema hipótese-tese.

As duas duplas gastaram, cada qual, em torno de 16 a 17 minutos para apresentar uma resposta. No que segue, temos uma tabela geral com as respostas apresentas:

Duplas	Ativ-**1** 1-2-3	Ativ-**2** 1-2-3-4	Ativ-**3** 1-2-3-4	Ativ-**4** 1-2-3-4-5-6-7-8
Augusto/Cristina	1-3-2	1-3-2-4	1-2-3-4	1-3-2-4-6-5-7-8
Bruno/Gisele	2-1-3	1-3-2-4	1-2-3-4	2-7-1-6-3-4-5-8

Tabela 4.1 – Respostas das duplas (Conjunto 2, Ativ.1 a Ativ.4)

4.5.6 O pós-teste (Atividade 5)

Relembramos que o pós-teste foi realizado cerca de meia hora depois das atividades do "jogo" de prova, para as mesmas duplas: Augusto/Cristina e Bruno/Gisele. A questão foi apresentada da seguinte maneira: Construímos o triângulo OAB, conforme a figura abaixo, e pedimos aos estudantes que provassem que o ângulo A é congruente ao ângulo B.

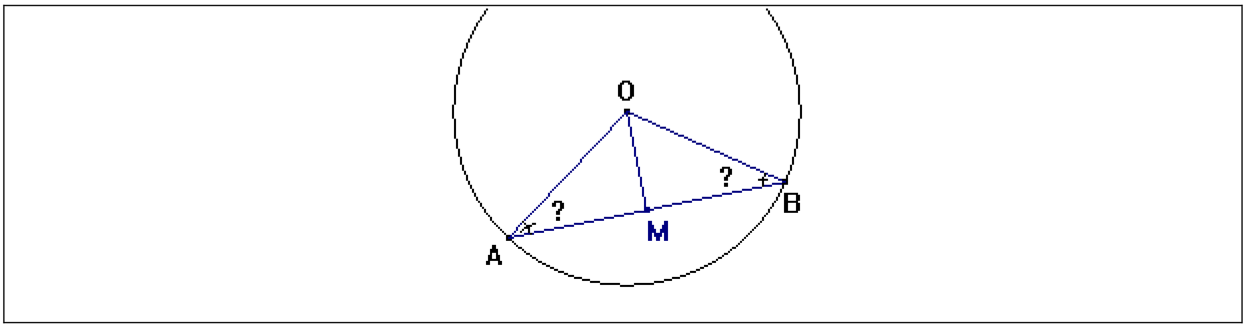


Figura 4.40 - A figura do pós-teste (Conjunto 2)

As duas duplas levaram aproximadamente 25 minutos para concluir esta atividade. Não estabelecemos tempo-limite para que respondessem a questão.

Explicamos inicialmente aos aprendizes que "contar a historinha da prova" era o mesmo que "escrever a prova".

Transcrevemos, a seguir, a "prova" da dupla Augusto/Cristina:

> *Para provar que o triângulo OAM é igual ao triângulo OBM, tem que imaginar se sobrepondo um ao outro.*
>
> [Então, montam os diálogos - Fininho diz: *Sim, Bolinha, também podemos medir os triângulos*; Bolinha responde: *Então, se eu imaginar um triângulo se sobrepondo ao outro, os dois têm que ser iguais*]
>
> E continuam: *Para eles ser*[em] *congruentes, os ângulos e os lados tem que ter as mesmas medidas.*
>
> $$AM \equiv BM$$
> $$AO \equiv BO$$
> $$\hat{A} \equiv \hat{B}$$
>
> *(...) sendo todos iguais os triângulos são congruentes.E então nesta explicação o Bolinha acabou lembrando, o que são os ângulos da base.*

Percebe-se na produção escrita desta dupla a utilização de argumentos empíricos, pois fazem referência a casos de congruência de triângulos com base na idéia de sobreposição, o que indica o recurso às provas pragmáticas, segundo as classificações de prova de Balacheff.

Quanto à "prova" da dupla Bruno/Gisele, não existem diferenças significativas.

Temos dois triângulos de uma mesma medida.

Então vamos ajudar Bolinha e Fininho a provar que os triângulos são congruentes.

[Então começam]

O lado AO = OB, MB = MA.

Os ângulos A e B são iguais.

Fininho e Bolinha resolveram provar de uma forma mais divertida. Vamos ver a idéia [que] eles tiveram!

- ✓ *Vamos recortar assim* [desenham uma tesoura cortando o triângulo em dois, a partir do ponto M] *e colocamos um em cima do outro para termos certeza de que são congruentes;*
- ✓ *Isso Bolinha assim é mais fácil provar.*

A idéia de Bolinha deu certo. Agora sim eles tem certeza que os triângulos são congruentes.

O fato de termos usado a idéia de sobreposição como suporte às explicações, tanto na sala de aula de Matemática, como no próprio experimento de ensino (Conjunto 2) teve grande influência nas respostas das duas duplas.

.

Entretanto, é possível, com base nas produções escritas dos aprendizes, destacar alguns aspectos de suas "provas":

- ✓ Referência a sobreposição de triângulos (usaram a idéia de congruência empicamente);
- ✓ Tentativas de descrever elementos que levassem à congruência de triângulos, mas sem chegar a mencionar qualquer caso de congruência;

Uma conclusão preliminar a que podemos chegar é que, pelos resultados obtidos, conseguem realizar "provas" empíricas, na medida em que se baseiam em sobreposição, talvez caracterizando o que Balacheff chama de empirismo ingênuo, muito embora tenham faltado mais argumentos dos aprendizes.

No próximo tópico, daremos início à análise das atividades do Sistema de Aprendizagem B, com a dupla Bárbara/Suzane.

Sistema de Aprendizagem B

4.6 Introdução à Análise das Atividades do Conjunto 1

O Sistema de Aprendizagem B compõe-se apenas de uma dupla – Bárbara/Suzane. A referida dupla participou de dois conjuntos de atividades: O **Conjunto 1** (7 questões mais o Episódio de Ensino) e o **Conjunto 2**, composto pelo "jogo" de prova e o pós-teste. Para a aplicação das atividades do primeiro Conjunto foram necessárias 3 sessões (em dias diferentes), e para o segundo Conjunto, apenas uma sessão.

Distribuímos as sete atividades do Conjunto 1 ao longo das três sessões da seguinte forma:

- ✓ Primeira Sessão, atividades de 1 a 4;

- ✓ Segunda Sessão, atividades 5 e 6; e
- ✓ Terceira Sessão: Começou com o Episódio de Ensino e depois foi aplicada a Atividade 7.

Depois das dificuldades já relatadas na aplicação das atividades do **Conjunto 1** para as duplas do Sistema de Aprendizagem A (Augusto/Cristina e Bruna/Gisele), resolvemos, para esta presente dupla – Bárbara/Suzane –, estender este experimento de ensino a 3 sessões, a fim de redimensionar o tempo (sessões com menor duração), com tarefas de menor duração[52], conseqüentemente menos cansativas e até mesmo, talvez, mais produtivas.

O perfil sócio-econômico desta dupla é um tanto diferente daquele das outras duplas participantes. Tanto Bárbara quanto Suzane tinham computador em casa. Isto quer dizer que, além das sessões de familiarização com Cabri, houve algum tempo para que praticassem as construções em casa (pois o *software* Cabri foi instalado em seus PCs desde o início dos trabalho com a dupla). As atividades do Conjunto 1 serão analisadas a seguir.

4.7 Conjunto 1

Alguns aspectos gerais para esse Conjunto 1 já foram traçados no Sistema de Aprendizagem A, entretanto, destacaremos alguns de forma resumida.

Os principais objetivos das atividades 1, 2 e 3 (em conjunto) são: (**a**) explorar a noção de raio; e (**b**) reforçar esta idéia (de raio) por meio do dinamismo do Cabri. Retomamos, a seguir o enunciado dessas questões:

[52] 1ª Sessão: 47 min.; 2ª Sessão: 1h 3min; 3ª Sessão: 50 minutos.

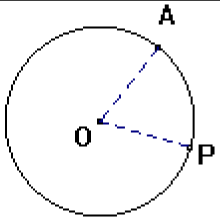
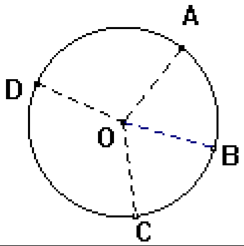
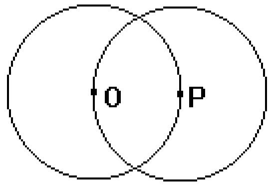
Ativ.1 - Construa uma circunferência qualquer e marque um ponto P sobre a mesma. Use a ferramenta “animação” para mover o ponto **P** sobre a circunferência. Marque um outro ponto **A** e faça o mesmo. O que você pode observar?	**Ativ.2** - Na circunferência abaixo, os segmentos **OA**, **OB**, **OC** e **OD** têm a mesma medida.	**Ativ.3** - Por que o **círculo 1** tem o mesmo tamanho que o **círculo 2**?
		

Tabela 4.2 - Questões 1, 2 e 3 do Conjunto 1

4.7.1 Atividade 1

Nesta atividade, as estudantes da dupla deveriam se valer do dinamismo do Cabri. Lembramos inicialmente às estudantes que sua principal tarefa era investigar a existência de propriedades matemáticas na figura, como a noção de raio e a de distância. Observemos que esta dupla, além de se utilizar dos recursos de animação do programa, ainda achou necessário construir uma outra circunferência semelhante à primeira, talvez, com a intenção de melhor compreender os fatos (ou as propriedades) inerentes à figura. As construções foram feitas sem dificuldades. Vejamos:

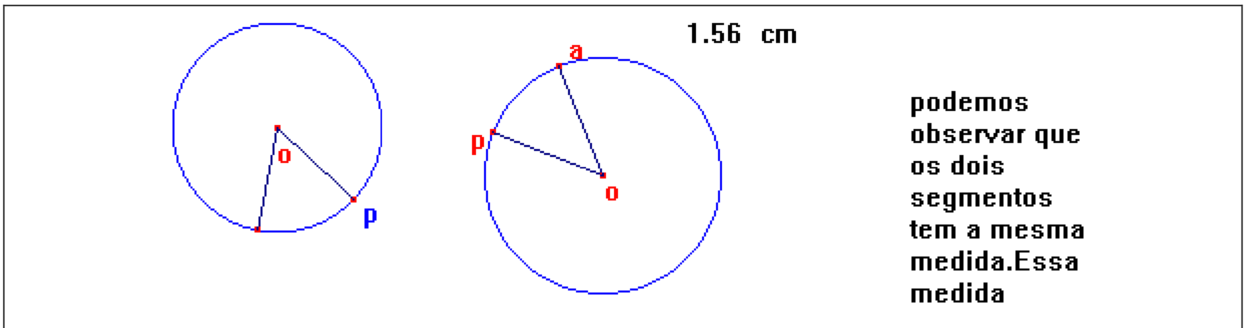


Figura 4.41 – Resposta da Ativ.1, por Bárbara/Suzane

Como no Sistema de Aprendizagem A, algumas dificuldades da dupla Bárbara/Suzane são recorrentes, como, por exemplo, a preferência por termos matemáticos mais simples (de falar): medida/tamanho ao invés de raio/distância.

Também, como se vê, não houve referência ao termo raio como sendo a distância do centro a um ponto qualquer da circunferência, mas a resposta escrita (acima) indica uma boa compreensão do assunto, tenha ficado no plano empírico. A dupla esqueceu de concluir a última frase, entretanto, nos reportando aos dados de voz da dupla, verificamos que a frase completa é: "*Essa medida é o raio*". Queremos enfatizar que os aprendizes esquecem constantemente tais termos matemáticos, principalmente no momento de escrever. Não são apenas dificuldades na linguagem matemática, mas também, e principalmente, dificuldades na produção textual (pode acontecer que uma pessoa se expresse (fale) claramente, mas quando tem que colocar as idéias no papel, as dificuldades aumentam – e muito).

4.7.2 Atividade 2

O enunciado desta atividade foi colocado na forma de uma afirmação e não em forma de pergunta. Houve uma certa confusão por parte da dupla, pois entenderam tratar-se de uma pergunta (após a leitura inicial que fizeram), momento em interagimos com a dupla a fim de esclarecer a dúvida. Esclarecemos que teriam que analisar se a afirmação era verdadeira ou falsa e, além disso, justificar a resposta.

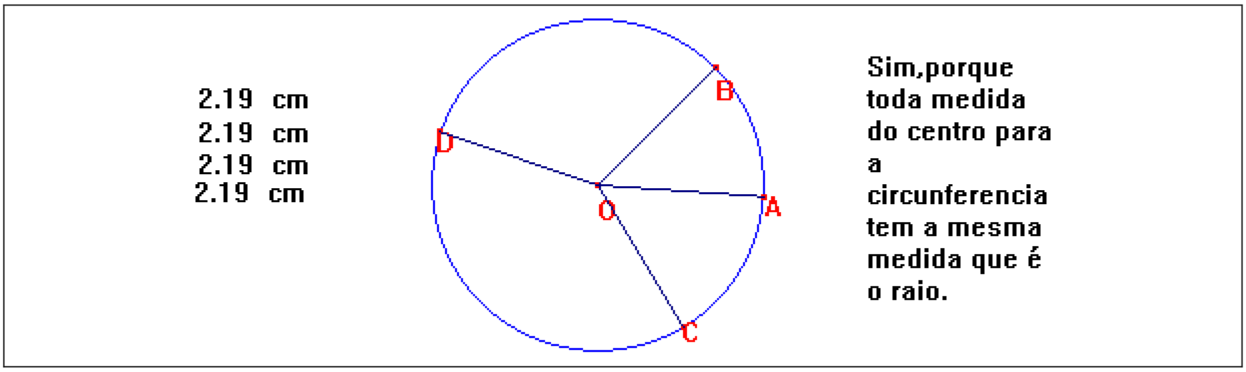


Figura 4.42 – Resposta da Ativ.2, por Bárbara/Suzane

A dupla realizou a construção sem problemas e, assim como na questão anterior, recorreu ao dinamismo do Cabri (Notemos que mediram cada dos segmentos OA, OB, OC e OD. A nosso ver, fizeram assim para melhor convencimento). Na produção escrita, já se pode perceber uma boa articulação com termos matemáticos (raio, centro, circunferência, medida), demonstrando uma leve tentativa de generalização de conceitos (mesmo que inconscientemente), pois, pela primeira vez se referem ao termo “medida” como sendo o raio.

4.7.3 Atividade 3

Antes de qualquer coisa, uma observação: esta atividade está intrinsecamente ligada com as duas anteriores, no sentido de que o principal conceito matemático envolvido é o de raio.

Nesta atividade, o professor-pesquisador orientou as aprendizes a abrir o arquivo ativ.3, salvo no computador, e que continha a figura a ser estudada (ver **Tabela 4.2** , p.161). Ou seja, esta atividade não pedia tarefa de construção. Esperávamos que a dupla respondesse a pergunta sem se valer dos recursos do Cabri, principalmente o recurso “distância e comprimento”, o que não aconteceu. Retomando os passos desta construção (com o comando “revisar construção”), vemos que as aprendizes não se focaram na figura original (desenhada por nós), mas na figura (à esquerda) que elas mesmas construíram. Vê-se que mediram os raios apenas da figura que desenharam, a partir da qual deram a seguinte resposta:

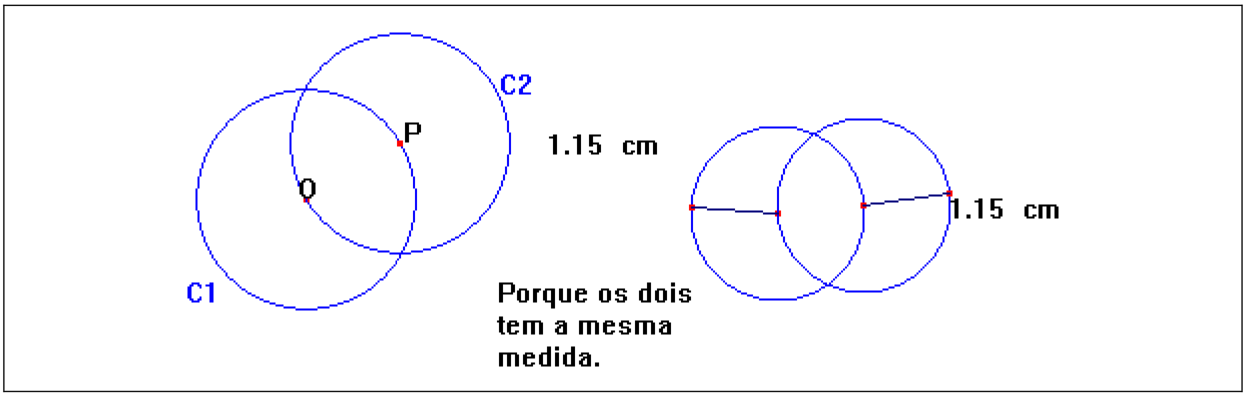


Figura 4.43 – Resposta da Ativ.3, por Bárbara/Suzane

Resposta correta, entretanto influenciada pelos recursos de medição do Cabri (ou seja, as “respostas” fornecidas pelo programa) e sem se referir ao raio, embora isso não interfira na qualidade das respostas, pois muitas vezes o que conta é o entendimento e não o detalhamento de um conceito. Os dados da figura acima nos permitem concluir tratar-se de uma prova pragmática, talvez porque a questão ficou clara para as estudantes. (Elas podem não ter entendido bem a pergunta)

4.7.4 Atividade 4

Relembremos que esta atividade pedia para "*construir uma reta que divide uma circunferência em duas partes iguais*". O esperado era que a dupla se reportasse às idéias de diâmetro, pontos colineares e ângulo raso. Mas, pela construção abaixo se vê que foi traçada uma circunferência com centro numa reta e, depois, marcados pontos de intersecção entre os dois objetos (reta e circunferência). Dito de outra maneira, tiveram a idéia de traçar uma reta passando pelo centro de uma circunferência (mesmo que a ordem da construção tenha sido invertida).

Não solicitamos à dupla que resolvesse a questão usando circunferências apenas, neste caso, para fazer jus ao enunciado [da questão] e para que se focassem somente num mesmo tipo de construção. Segue a resposta da dupla:

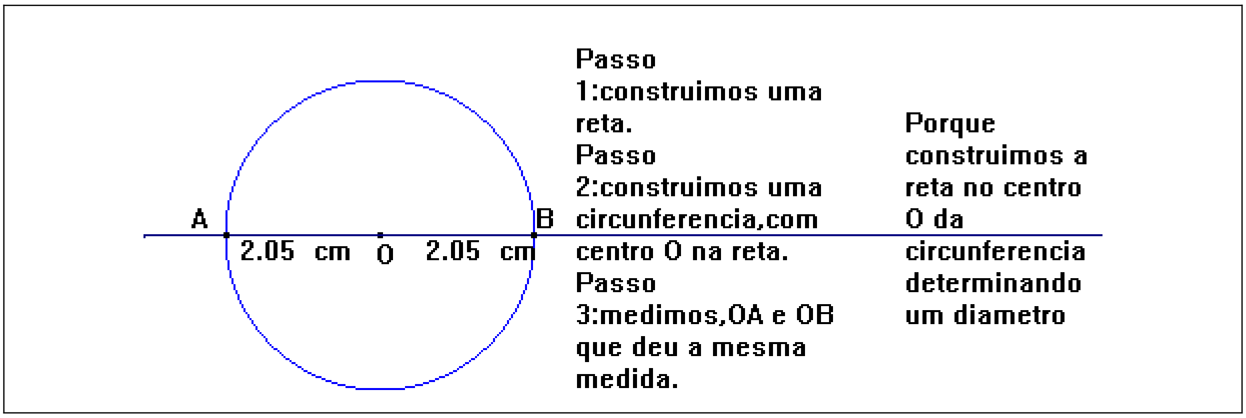


Figura 4.44 – Resposta da Ativ.4, por Bárbara/Suzane

É possível que tenham feito esta construção lembrando da idéia de diâmetro, mas isto não ficou claro na justificativa. Neste ponto foi necessária a nossa intervenção, pois as dificuldades com tais termos matemáticos persistem, a despeito de um considerável esforço dos aprendizes (em lembrar), por exemplo, a palavra diâmetro, bem como seu significado. Segundo nos deixou transparecer uma das aprendizes da dupla – Bárbara –, esses termos matemáticos não fazem parte da sua língua[53]. Claro está que estas visões dos aprendizes devem ser ponderadas, mas é fato que são decorrentes das dificuldades da linguagem natural/matemática.

Observemos ainda que a dupla mediu os raios, mas não se ateve à colinearidade dos pontos ou ao ângulo raso, o que não prejudicou a resposta que produziram. Na verdade, não era nem preciso que mencionassem estes termos a que nos referimos neste parágrafo, mas que dessem pistas de que a divisão da circunferência em duas partes iguais fica assegurada se for traçado um diâmetro. Por último, inexistiu a dificuldade nas construções robustas, pelo menos nesta atividade.

4.7.5 Atividade 5

1ª resolução

Esta questão, que é a de *dobrar um segmento de reta*, assim como ocorreu com as duplas anteriores, deveria ser resolvida usando todas as ferramentas disponíveis no Cabri. (Começa, com esta questão, a segunda Sessão do experimento de ensino com o Sistema de Aprendizagem B). A nossa dupla resolve de duas maneiras.

A primeira resolução fez uso da ferramenta “simetria central”, sendo que as aprendizes não encontraram dificuldades em realizar a construção. Fizeram a “prova” valendo-se da geometria dinâmica do Cabri. Podemos notar que mediram os 3 segmentos: CA, AB e CB. Usaram também a ferramenta de verificação “colinear”, mas ocorreu um fato importante. Não perceberam que a medida de CB não é exatamente igual ao dobro de CA (pois 2 vezes 3.55 dá 7.10 e não 7.09!). É obvio que isto não afeta em nada a resposta dada, mas a questão é que, em certas ocasiões, **dependendo da disposição dos pontos na tela**, isso pode acontecer. Trata-se de um erro de aproximação do software.

---

[53] É comum ouvirmos de estudantes do nível básico a seguinte “exigência”: “*Fala na nossa língua, professor!*”.

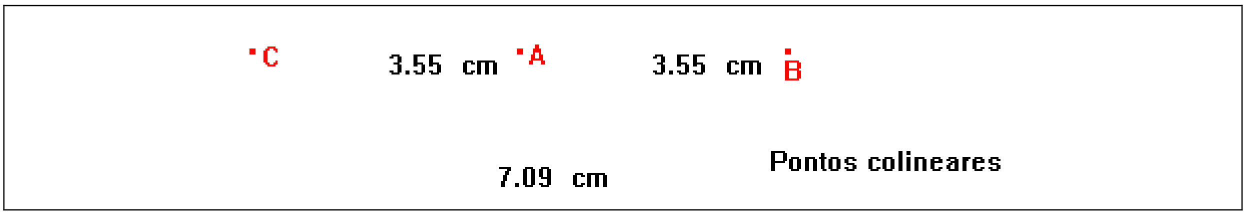


Figura 4.45 – 1ª resposta da Ativ.5, por Bárbara/Suzane

Tivemos a preocupação de comparar duas construções usando a ferramenta "simetria central" e, realmente, dependendo da maneira como estão dispostos os pontos na tela, as distâncias podem ser iguais ou não. Vejamos uma ilustração do que estamos a expressar:

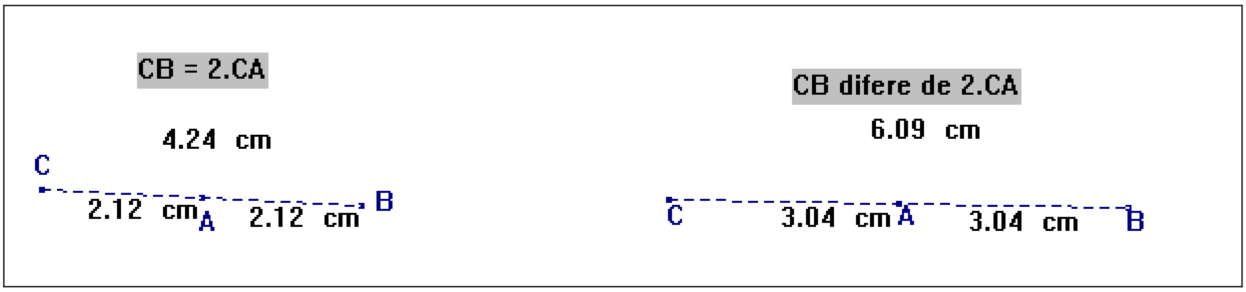


Figura 4.46 – Complemento à Ativ.5 (Observação nossa)

De qualquer forma, esta particularidade do Cabri não poderia ser o foco da atividade (e não o foi), já que por traz da solução dada pela dupla está o conceito de simetria central, mas não os detalhes técnicos do software.

Poderia ser dada uma solução usando retas e circunferências, mas a dupla não enxergou esta possibilidade. Preferimos não intervir a esse respeito.

A solução usando circunferências apenas está descrita abaixo. É claramente perceptível o erro cometido nesta figura: as duas circunferências menores não possuem o mesmo raio que as circunferências (C, CA) e (A, AC), denotando uma considerável dificuldade no feito de construções robustas.

2ª resolução

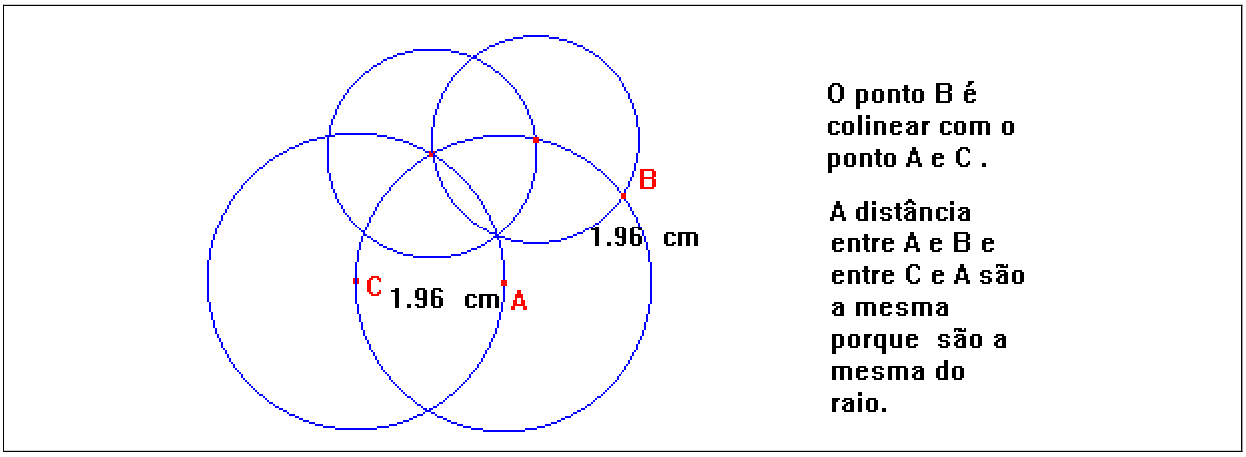


Figura 4.47 – 2ª resposta da Ativ.5, por Bárbara/Suzane

A resolução acima pode ser um indício de que os aprendizes esquecem constantemente[54] a noção de construção robusta, mas também retrata problemas no manuseio técnico do Cabri, além de sérios *déficits* em conceitos de geometria. Por exemplo, afirmam que os pontos C, A e B são colineares sem ao menos mandar o Cabri verificar. Quanto às distâncias CA e AB (raios), está correto o que escrevem, muito embora não tenham concluído que CB = 2.CA, diferentemente do que fizeram na resolução anterior (1ª resolução), quando mediram a distância entre C e B.

Uma outra dificuldade, de acordo com nossas observações no experimento de ensino, talvez, diz respeito ao fato de que não era permitido usar retas nesta construção, apesar das construções com o compasso apenas terem sido bastante exploradas nas sessões de familiarização com Cabri. Por fim, além da visível construção mole, com a escrita da prova/justificativa não foi muito diferente, a ponto de uma das aprendizes nos questionar com a seguinte argumentação: "*Mas ele já provou!* (se referindo ao Cabri e ao que foi feito na primeira resolução); *não precisa mais*...". Queria ela, talvez, se focar apenas nos recursos dinâmicos do Cabri.

4.7.6 Atividade 6

O principal objetivo desta atividade foi o de enfatizar a noção de construção robusta/mole. A dupla foi orientada a usar o dinamismo do Cabri, para que, por meio

[54] Neste caso, devem ter se recordado de alguma construção anteriormente feita, porém, não consideraram o fato de que os raios devem ser todos iguais à medida do segmento CA.

disto, fossem levados a testar conjecturas e validar certas propriedades nas construções. A questão pedia para "*reproduzir uma figura que tenha o mesmo comportamento da figura*". A questão é composta de dois itens: um, sobre simetria central e outro, sobre simetria axial (ambos na circunferência).

As aprendizes foram orientadas, também, a usar a ferramenta "compasso", pois a nova circunferência deveria ter o mesmo comportamento da figura por nós desenhada. Observemos que esta exigência não foi cumprida, pois usaram a ferramenta "circunferência". Em verdade, como esta construção lembra aquela da divisão de uma circunferência em duas partes iguais, a dupla não apresentou nenhum problema, exceto pelo fato de não perceberem que a circunferência deveria ter o mesmo raio, talvez, por não terem entendido o sentido desta questão.

a) **Simetria central na circunferência**

1ª resolução

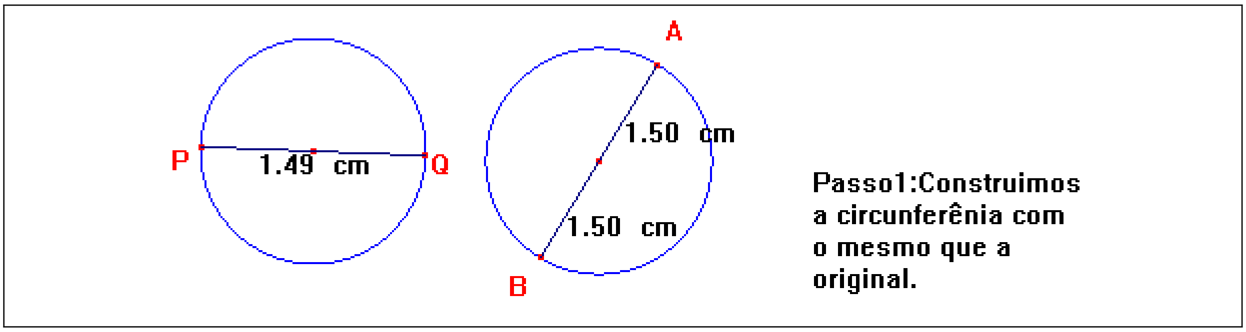


Figura 4.48 – 1ª resolução da Ativ.6, por Bárbara/Suzane

Com a nossa interação, realizaram uma outra construção, desta vez usando a ferramenta "compasso". Ressalte-se aqui a dificuldade em diferenciar o uso das ferramentas "compasso" e "circunferência", no que foram ajudados pelo professor-pesquisador. Na figura seguinte, a construção à direita é a resposta das aprendizes: uma construção robusta e com o mesmo raio da original (à esquerda).

2ª resolução

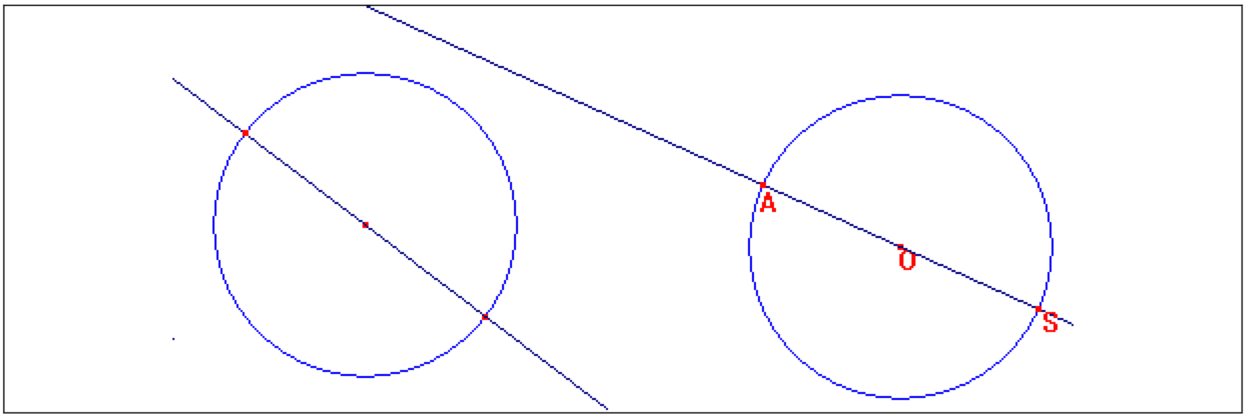


Figura 4.49 – 2ª resolução da Ativ.6, por Bárbara/Suzane

b) **Simetria axial na circunferência**

Temos na figura original abaixo uma circunferência, um diâmetro e os pontos P e P', simétricos em relação a este diâmetro (o ponto movimentável é o ponto P). A primeira resposta indica uma confusão no tipo de simetria a ser usada. Usaram, na verdade, a ferramenta "simetria central", não dando conta de reproduzir a figura dada. Para a resposta 2, a dupla foi orientada sobre o uso correto da ferramenta (simetria axial).

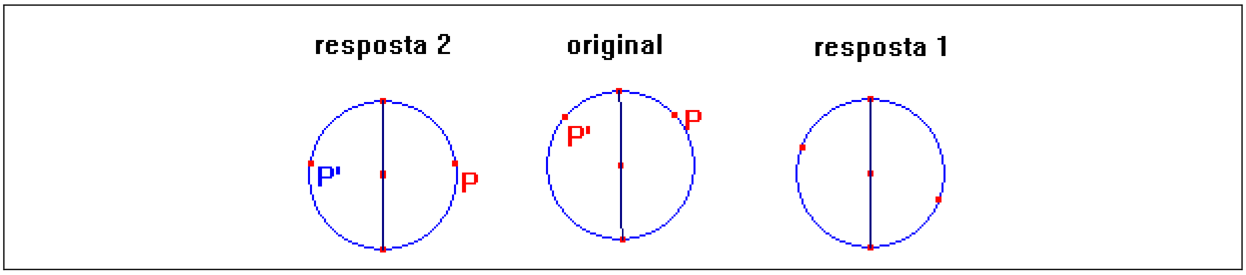


Figura 4.50 - Uma outra resolução da Ativ.6, por Bárbara/Suzane

À primeira vista, parece que a segunda resposta da dupla é uma construção robusta. Mas isto não é verdade. Por algum tipo de confusão, marcaram um segundo ponto praticamente por cima do centro (já traçado) da circunferência. Daí resulta que a reta que foi traçada passou exatamente por este ponto (que não é o centro, pois o Cabri consegue diferenciar objetos que ficam muito próximos uns dos outros) e depois feita a simetria axial nesta reta. Ora, como a reta não passa pelo centro, conseqüentemente não temos um diâmetro, logo o ponto não é o simétrico em relação ao diâmetro. Portanto, o que se vê é uma construção mole. Não fosse por esta confusão de marcar um ponto sobre o outro, teríamos uma construção robusta. E desta forma, acreditamos que esta tarefa não ficou tão prejudicada quanto parece.

Como se viu na exposição acima (da Questão 6), nenhuma resolução fez uso de circunferências apenas. Isto se deu devido ao fato de que as duas meninas já demonstravam sinal de cansaço. Por isso, resolvemos encerrar esta sessão do experimento de ensino. Perguntamos, entretanto, se esta tarefa poderia ser resolvida usando circunferências apenas, ao que responderam que sim, mas que era muito mais difícil.

4.7.7 Atividade 7

Começamos recordando que as duplas do Sistema de Aprendizagem A não conseguiram desenvolver esta questão, porque esta foi aplicada no final da segunda Sessão (que foi muito longa e os estudantes já se encontravam cansados) e devido às dificuldades nas construções de Mohr-Mascheroni.(Eles deveriam se focar nas construções com o compasso apenas)

Quanto ao Sistema de Aprendizagem B, formado pela dupla Bárbara/Suzane, adotamos um procedimento um pouco diferente. A aplicação desta questão foi reservada para uma única sessão, a qual durou cerca de 65 minutos. Foi no início desta terceira Sessão que ocorreu o chamado Episódio de Ensino, cujo enfoque foram os casos de congruência de triângulos (casos LLL, LAL e ALA) e provas. Nessa aula sobre congruência de triângulos, lançamos mão da teoria inerente ao assunto e de material concreto, como cartolinas, plástico transparente e outros (cada triângulo desenhado no papel tinha uma cópia de si numa folha de plástico) a fim de ilustrarmos, na prática, que a idéia que está por traz da congruência é a idéia de sobreposição.

Mais uma vez, o alvo principal era que as aprendizes utilizassem os casos de congruência como recurso para provar as proposições advindas de construções envolvendo ponto simétrico (simetria numa reta).

Combinamos com a dupla que poderiam usar todas as ferramentas disponíveis no Cabri, mas que deveriam escrever a prova/justificativa.

Nós, inicialmente, desenhamos uma reta e um ponto fora dela, como na **Figura 4.51**. Depois pedimos à dupla que encontrasse o simétrico do ponto P na reta r. Interessante notar que a postura desta dupla (assim como foi dos demais aprendizes) consiste sempre em procurar os recursos do Cabri que dêem conta de realizar a construção (comandos de construção). Entretanto, não tiveram clareza em relação a qual ferramenta usar, por exemplo, poderiam ter usado a ferramenta "reta perpendicular" para traçar a reta perpendicular a r passando por P, mas não o fizeram; o que fizeram foi simetrizar o ponto P com a ferramenta "simetria central" e depois traçaram a reta PS, onde S é o simétrico de P.

As aprendizes tentaram justificar a construção com base no conceito de colinearidade (já que fizeram a verificação), mas não mencionam as medidas efetuadas dos segmentos PX e SX, sendo X ponto intersecção das duas retas. Claramente, colocam em primeiro lugar a necessidade de efetuar medidas ou fazer verificações e, talvez, por este motivo certos fatos sejam omitidos em suas tentativas de prova.

1ª resposta

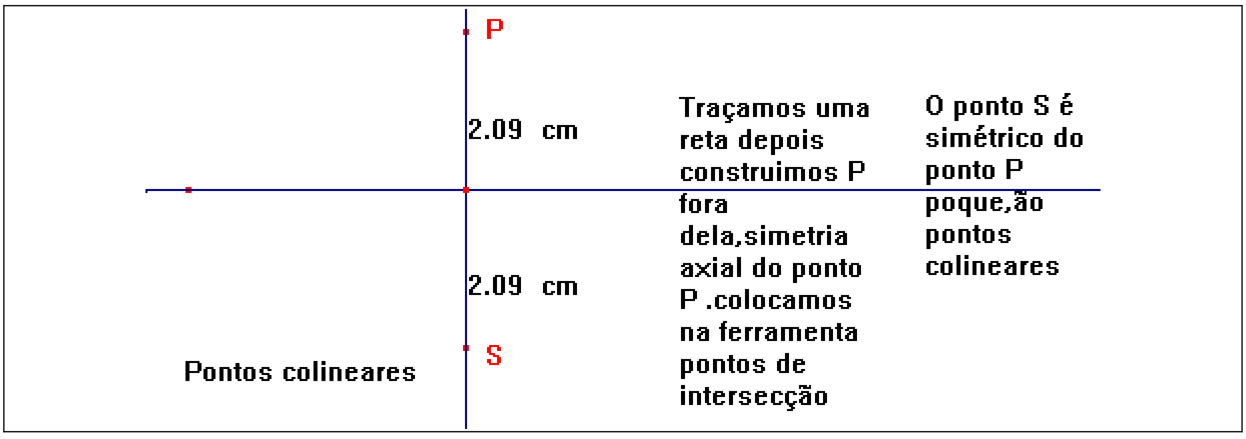


Figura 4.51 – 1ª resposta da Ativ.7, por Bárbara/Suzane

É notório que os aprendizes ficam mais à vontade quando a reta está presente, principalmente com relação à produção escrita.

2ª resposta

Na construção abaixo foram usadas retas e circunferências. A partir dos pontos A e B (da reta) e do ponto P, a dupla construiu a explicitamente a reta AB. O próximo passo foi construir as circunferências (A, AP) e (B, BP), que se intersectam no ponto S (simétrico de P). Notemos que ainda traçam a reta PS e fazem as devidas verificações com o Cabri. Trata-se de uma construção bem elaborada e, neste caso, não se fez necessária a nossa intervenção (a menos de algumas medições que estavam sendo feitas de forma incorreta).

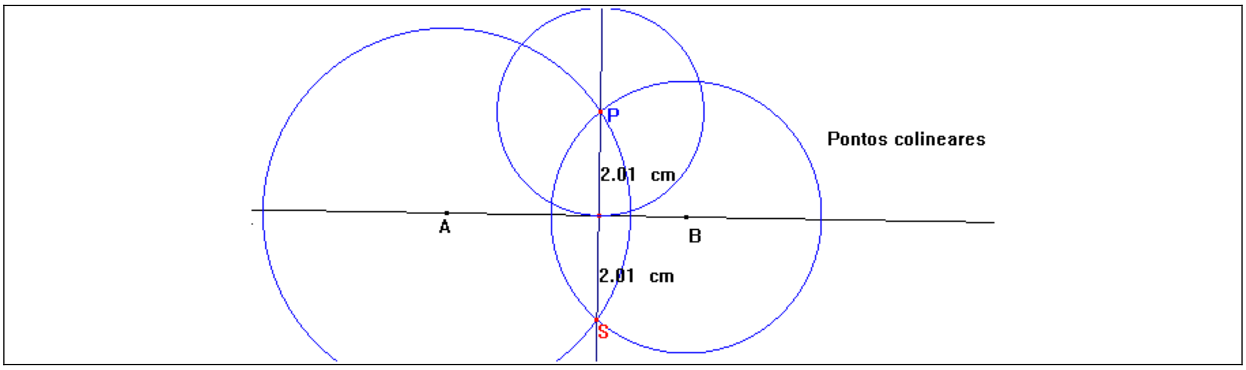


Figura 4.52 – 2ª resposta da Ativ.7, por Bárbara/Suzane

A justificativa da construção se resume, novamente, às verificações/medições. A ponto de supormos que o dinamismo do Cabri pode estimular as provas pragmáticas e, talvez, o empirismo ingênuo, de acordo com Balacheff.

3ª resposta

Nesta resposta se usou a ferramenta “reta perpendicular”; houve a preocupação de marcar o ponto de intersecção das duas retas. Além disso, traçaram a circunferência com centro nesta intersecção X e raio XP. Faltou evidentemente especificar o simétrico, bem como a descrição e a prova.

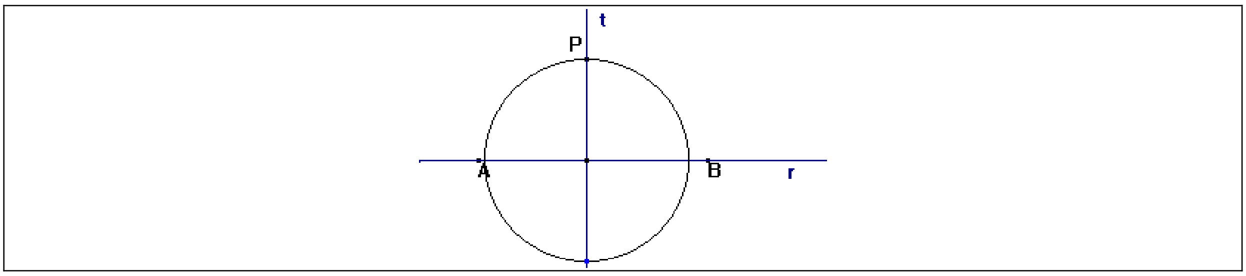


Figura 4.53 – 3ª resposta da Ativ.7, por Bárbara/Suzane

4ª resposta

A construção a seguir foi efetuada, como no caso anterior, sem dificuldades. Orientamos os aprendizes no sentido de traçar os triângulos e marcar o ponto de intersecção dos segmentos AB e PO (o ponto T). Quanto à prova, a dupla não conseguiu identificar nenhum dos casos de congruência presentes na figura. Tudo que produziram foi com relação a pontos colineares.

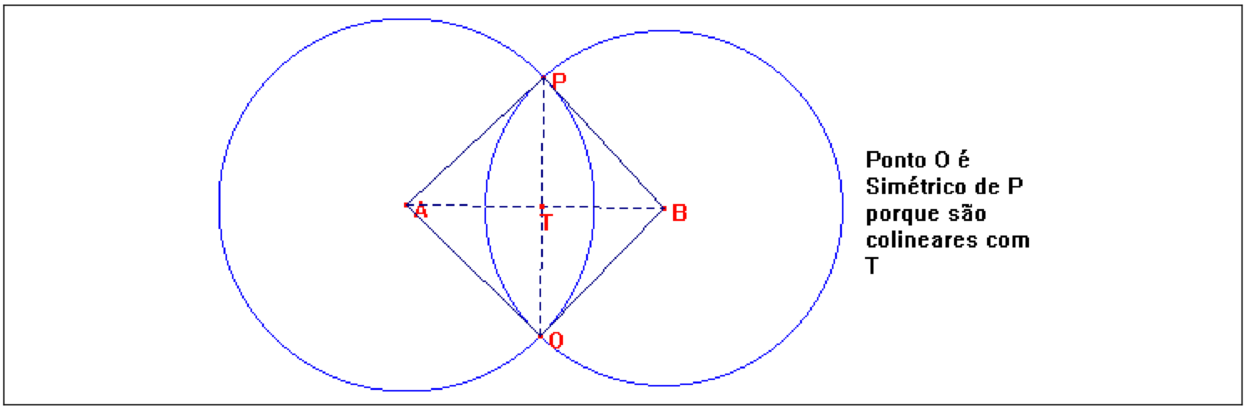


Figura 4.54 – 4ª resposta da Ativ.7, por Bárbara/Suzane

4.8 Sumário sobre o Conjunto 1 (Sistema B)

O Conjunto 1 permaneceu com sete questões. Não houve modificações em relação às atividades aplicadas no Sistema de Aprendizagem A. Foram aplicadas em três sessões.

No grupo de questões de 1 a 4 pudemos observar mais facilidade das aprendizes em lidar com as ferramentas do Cabri, notadamente no tocante a seus aspectos dinâmicos. Também preferiram argumentos pragmáticos em detrimento (quase sempre) dos argumentos matemáticos (envolvendo termos, idéias, noções e conceitos matemáticos). Essa preferência pode se explicar pelo uso recorrente das ferramentas de verificação do software e pelas dificuldades corriqueiras em raciocinar e expressar idéias matematicamente.

Na Atividade 5, com a tarefa de se dobrar um segmento de reta, nossa intenção teórica foi de introduzir os estudantes à prova (como aconteceu com as outras duplas). As produções matemáticas deveriam girar em torno não apenas da construção, mas também de uma boa articulação entre os termos matemáticos necessários às justificativas. As dificuldades com a linguagem matemática foram recorrentes, mas não em menor grau que com a linguagem natural. A quase ausência de justificativas demonstra isso.

Nem todas as ferramentas disponíveis no Cabri foram exploradas e a ferramenta “circunferência” foi usada muito precariamente.

Para a Atividade 6, que tratou de caixas-pretas, procuramos enfatizar a noção de construção robusta/mole e as diferenças entre ambas. Constataram-se resultados semelhantes àqueles obtidos no outro sistema de aprendizagem. Algumas dificuldades marcantes estão relacionadas com o uso de certas ferramentas, tais como “compasso” e “circunferência”. Esta atividade não foi resolvida usando circunferências apenas, simplesmente, talvez, por falta de experiência no uso dessas ferramentas. É interessante notar que só uma vez foi usada a ferramenta simetria, não a simetria central, mas a simetria axial (no caso da simetria na circunferência). Ao invés de usar a ferramenta “simetria central” para determinar o ponto simétrico (de um ponto na circunferência em relação ao centro), as aprendizes preferiram conduzir uma reta pelo centro, determinando assim um diâmetro.

A questão 7, em princípio, tinha como objetivo focar nas construções com o compasso apenas (construções de Mohr-Mascheroni). Naturalmente, pelas dificuldades encontradas pela dupla de aprendizes em realizar tais construções, ampliamos as ferramentas do Cabri para, assim, enriquecer a gama de construções possíveis e, evidentemente, com a intenção de termos mais elementos comparativos na análise de uma mesma questão (diferentes ferramentas para resolver um mesmo problema).

Ao menos a parte das construções não ofereceu maiores obstáculos à dupla Bárbara/Suzane, diferentemente das outras duplas (que não tiveram tempo nem para realizar as construções), no entanto, em relação às provas, o desempenho desta dupla manteve o foco, no máximo, em argumentos pragmáticos, longe, ainda, de alcançar as provas conceituais.

4.9 Conjunto 2

Este conjunto de atividades, como já sabemos, trata do "jogo" de prova e do pós-teste. Os detalhes gerais deste conjunto, bem como a descrição de todas as atividades, já estão colocados na **Sessão 4.5** (p.149), quando foram analisadas as mesmas atividades das duplas do Sistema do Sistema de Aprendizagem A.

A única diferença significativa em relação às outras duplas é que a dupla Bárbara/Suzane teve permissão para recorrer aos casos de congruência de triângulos, a dois modelos de prova pré-elaborados pelo pesquisador, bem como, se necessário, consultar os cartões na hora realizar o pós-teste (que requeria, sobretudo, os conceitos de congruência de triângulos). Na seqüência, iniciaremos a análise das atividades do "jogo de prova".

4.9.1 Atividade 1

A atividade pedia para "construir um ponto C na reta AB de modo que B seja ponto médio de AC". Primeiramente, orientamos a dupla a trocar idéias sobre a questão. Leram atentamente o enunciado e não levaram mais que 2min 20s para nos apresentar o resultado. Uma resposta obtida um tanto rapidamente sem atentar para alguns fatos essenciais. Por exemplo, não foi perceptível à dupla a palavra "portanto", pois a mesma quase sempre precede uma conclusão, que no caso desta atividade indica o último passo da prova. Tendo sido a prova organizada em três passos, as aprendizes deram a seguinte resposta: 1-3-2. Trocaram, desta forma, os últimos dois cartões. Comparemos este resultado com a ordem correta dos cartões a seguir.

- ✓ **1 -** Os pontos A, B e C são **colineares**, pois C é ponto da reta AB;
- ✓ **2** – Por construção, eu tenho que: AB = BC = **raio**;
- ✓ **3** – Portanto, **B é ponto médio de AC.**

Nesta questão não nos referimos de forma explícita aos termos hipótese e tese. Também, não interferimos a fim de que isto ficasse claro aos estudantes. A dupla não fez referência a fatos anteriormente vistos, nem na sala de aula nem nas sessões com Cabri. É possível que não tenham observado a construção feita e afirmação logo abaixo da mesma.

4.9.2 Atividade 2

Começamos esclarecendo que esta questão tinha a ver com congruência de triângulos e que poderiam usar o material disponível sobre o referido assunto, ou seja, os casos de congruência, além de dois exemplos de provas matemáticas que já havíamos preparado para eventuais consultas (o teorema da mediatriz, por exemplo). O enunciado consistia no seguinte: “Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes”.

Houve bastante discussão até chegarem numa conclusão (cerca de 4min30s). Ainda assim, são recorrentes os obstáculos que o esquema-hipótese impõe. Esta atividade requer da parte dos aprendizes algo mais que pensar em jogo; esse algo mais chama-se raciocínio dedutivo.

A pesar da estrutura da demonstração ser dada em termos do esquema hipótese-tese, não se viu nos aprendizes a preocupação de identificar um *ponto por onde começar*; mesmo assim, os dois primeiros cartões foram colocados na ordem correta. Os dois últimos foram invertidos (ou seja, colocaram na seguinte ordem: 1-2-4-3). Vejamos os passos corretos da prova:

- ✓ **1 -** Temos, no triângulo ABC, AB = AC e queremos provar que $\hat{B} \equiv \hat{C}$;
- ✓ **2 -** Eu sei que nos dois triângulos, AMB e AMC, temos:

AB = AC, AM = AM e BM = CM

- ✓ **3 -** O critério LLL (Lado, Lado, Lado) nos garante que $\Delta AMB \equiv \Delta AMC$;
- ✓ **4 -** O fato de os triângulos AMB e AMC serem congruentes quer dizer que têm a mesma forma e o mesmo tamanho. **Conseqüentemente**, $\hat{B} \equiv \hat{C}$

Consideramos que, talvez, confundiram o que era para ser provado: que os triângulos AMB e BMC são congruentes, mas não que o ângulo B é congruente ao ângulo C. Não compreenderam, portanto, que o fato dos ângulos B e C serem congruentes se deve à congruência dos dois triângulos citados.

Uma prova elaborada em poucos passos, mas que exige um razoável raciocínio dedutivo e também um bom nível de leitura e compreensão de termos matemáticos.

4.9.3 Atividade 3

O enunciado desta questão é praticamente igual ao da primeira, com a diferença de que a construção foi realizada com o compasso apenas.

Antes de tudo, uma consideração importante sobre o conteúdo desta atividade. No nosso exame de qualificação, fomos questionados sobre o fato de se estar usando medidas para provar proposições, o que não é aceito do ponto de vista formal da matemática/geometria. Ocorre que já tínhamos aplicado esta atividade às duplas Augusto/Cristina e Bruno/Gisele e não dispusemos de mais tempo para reformular esta atividade, pois teríamos que programar algumas aulas ou episódios de ensino com a dupla, que por sua vez estava em processo de fechamento das notas na escola. Não havia mais tempo. Por isso, o conteúdo desta atividade não foi modificado. O mesmo se aplica àquele problema da construção de três pontos colineares. (Nos dois casos foi usada a medida de ângulos – de 60º e de 180º – para provar a colinearidade de pontos).

A atividade foi solucionada quase no mesmo tempo da anterior. Foi possível observarmos dificuldades em ordenar as idéias (passos) envolvidas na prova. Parece-nos que nem tanto os termos matemáticos causaram problemas às aprendizes, mas sim, a não observância de certas partes escritas que estavam mais claramente ligadas, principalmente o final de cada cartão. Não houve a preocupação em estudar a figura construída a fim de relacioná-la com alguma passagem da prova e, menos ainda, de procurar termos que sugerissem a idéia de conclusão. Aliás, nem mesmo comentaram o fato que nas passagens, está explícita a palavra “conclusão”. Uma outra suposição é que não conseguiram entender bem o enunciado da questão, ou não prestaram atenção o suficiente, mas o certo é que os obstáculos no que diz respeito à interpretação textual têm sido normais a todos os nossos aprendizes.

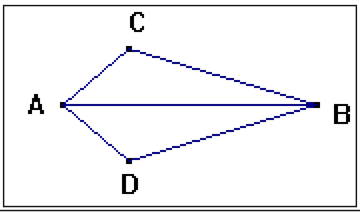
Só conseguiram colocar o primeiro cartão no lugar certo, ou melhor, ordenaram assim: 1-3-4-2. Ao passo que deveriam ter feito do seguinte modo:

- ✓ **1** - Eu sei que os triângulos ABC, CBD e DBP são eqüiláteros (pois foram construídos com a mesma medida AB). Logo, todos os 3 ângulos no vértice B medem 60º, ou seja;
- ✓ **2** - $\angle A\hat{B}C = \angle C\hat{B}D = \angle D\hat{B}P = 60^o$;
- ✓ **3** - Logo, somando esses 3 ângulos, vem o resultado $\angle A\hat{B}C + \angle C\hat{B}D + \angle D\hat{B}P = 60^o + 60^o + 60^o = 180^o$;
- ✓ **4** - E como AB = BP (= raio), chegamos à conclusão de que B é ponto médio de AP.

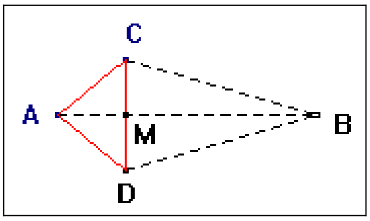
4.9.4 Atividade 4

Esta atividade aborda, essencialmente, congruência de triângulos. Além disso, há que se levar em conta que a construção (do ponto simétrico numa reta) foi realizada com o compasso apenas. Trata-se de uma prova bastante longa, realizada em nada menos que 8 passos. A atividade não deixa nada explícito com relação ao esquema hipótese-tese – isso seria tarefa da dupla participante. Resumidamente, relembramos a seqüência correta desta prova:

- ✓ **1** – Podemos desenhar dois triângulos: ABC e ABD;



- ✓ **2** – Por construção, eu sei que AC = AD (**L**), BC = BD (**L**) e AB = AB (**L**). E posso então dizer que...
- ✓ **3** – O triângulo ABC é congruente ao triângulo ABD, pelo caso **LLL**.
- ✓ **4** – Seja M o ponto de intersecção dos segmentos CD e AB. Podemos, assim, desenhar dois triângulos: ACM e ADM;



- ✓ **5** – Sabemos que AC = AD (raio), CÂB = DÂB (porque $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$) e AM = AM (lado comum);
- ✓ **6** – Então, pelo critério LAL, $\Delta ACM \equiv \Delta ADM$ (o triângulo ACM é congruente ao triângulo ADM);
- ✓ **7** – Conseqüentemente (pela congruência dos dois triângulos), chegamos à igualdade **CM = DM**;
- ✓ **8** – Portanto, D é o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$

A dupla leu atentamente o enunciado da questão, após o que começaram as tentativas de organizar os cartões.

Pôde-se perceber nitidamente as dificuldades no encadeamento lógico das idéias. Tomamos então a iniciativa de orientar as aprendizes no sentido de que a prova se compõe-se de duas etapas importantes, ambas envolvendo o conceito de congruência de triângulos. Mesmo assim, os obstáculos não se dissiparam.

Para esta dupla, em especial, não constatamos um envolvimento voltado ao melhor entendimento dos conceitos e/ou termos matemáticos que fazem parte da questão, desde o enunciado até o último passo da prova (Pelo menos no tocante a isto, os demais aprendizes se sobressaíram). Nos referimos, aqui, às figuras e aos termos matemáticos, como: raio, lado, lado comum, ponto médio, ponto de intersecção etc. É importante salientar que esta dupla poderia rever os casos de congruência, se preciso fosse, uma vez que os mesmos estavam à disposição. Mas não tomaram isso como uma tarefa necessária à resolução da atividade.

Na tabela logo abaixo, resumimos as respostas desta dupla.

Dupla	Ativ-**1** 1-2-3	Ativ-**2** 1-2-3-4	Ativ-**3** 1-2-3-4	Ativ-**4** 1-2-3-4-5-6-7-8
Bárbara/Suzane	1-3-2	1-2-4-3	1-3-4-2	1-5-3-4-2-6-7-8

Tabela 4.3 – Respostas da dupla Bárbara/Suzane, "jogo" de prova.

4.9.5 Pós-teste (Atividade 5)

Para esta dupla, o pós-teste foi realizado apenas alguns poucos minutos depois de terminado o "jogo" de prova. Como aconteceu antes com outras duplas, explicamos como deveria ser realizada esta atividade; que teriam que contar a "historinha" da prova; que usariam, para isso, congruência de triângulos e não apenas a idéia de sobreposição. Reforçamos que poderiam lançar mão dos casos de congruência de triângulos (disponíveis à mesa) e dos cartões envolvendo provas semelhantes (os mesmos cartões que foram usados no "jogo" de prova), a fim de que usassem essas "dicas" como prováveis suportes de idéias às suas elaborações.

Enquanto professor-pesquisador procuramos auxiliar a dupla com relação à identificação do caso de congruência inerente à figura desenhada e de como a prova poderia ser iniciada. Também usamos a idéia de sobreposição para ilustrar a congruência dos triângulos. Mas as dificuldades persistiram.

O enunciado da questão é: "*Se um triângulo é isósceles (tem dois lados iguais"), então os ângulos da base são congruentes*". Após muita discussão e, ao mesmo tempo, com uma considerável intervenção nossa, a dupla escreveu a seguinte "prova":

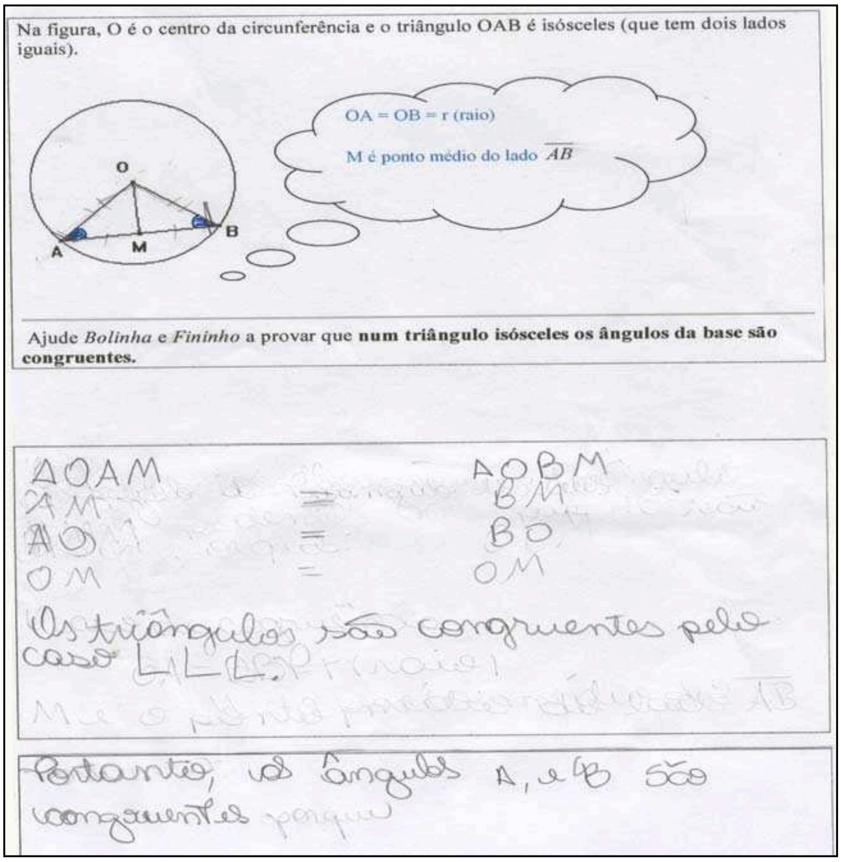


Figura 4.55 – Resp. do pós-teste, por Bárbara/Suzane

Pela resposta acima, vemos que:

- ✓ Os elementos (lados) foram listados/relacionados corretamente.
- ✓ Usaram o caso de congruência (LLL) de forma correta, apesar de não ter havido uma justificativa; e
- ✓ Concluíram a congruência dos ângulos A e B.

Trata-se, evidentemente, de um tipo de prova formal, com uma boa articulação entre encadeamento lógico de idéias e uso de termos matemáticos (escrita, notação, símbolos). Percebe-se que não houve uma justificativa contundente do caso LLL. Neste caso, então, pode-se afirmar que é uma prova quase conceitual e, portanto, se aproxima das classificações de prova de N. Balacheff. A despeito de nossa interação ter sido bastante significativa, o que mudou sobremaneira a ação da dupla no ato de provar, temos que levar em consideração que o empenho das aprendizes é que fez a diferença, mais do que a nossa ajuda.

4.9.6 Uma Breve Comparação entre os dois Sistemas de Aprendizagem

Pelos dados de que dispomos, e pela análise feita até o momento, avaliamos que os dois sistemas apresentam alguns resultados em comum. Destacamos as facilidades e preferências com o dinamismo do Cabri, as dificuldades com as construções robustas e um certo desconforto com alguns termos matemáticos (raio, diâmetro, congruência, etc). Ao que parece, para todos os aprendizes, as dificuldades na linguagem natural (e mais na linguagem matemática) podem ser os fatores associados com as dificuldades na elaboração de provas e mesmo nas descrições das construções. Uma noção que ficou razoavelmente apreendida foi a noção de raio e a de colinearidade (momentos de segurança com essas noções).

4.10 Sumário do Capítulo

Neste capítulo, discutimos e analisamos as atividades aplicadas às três duplas de aprendizes – Sistema de Aprendizagem A: Augusto/Cristina e Bruno/Gisele; e Sistema de Aprendizagem B: Bárbara/Suzane. Foram aplicados três conjuntos de atividades (**0**, **1** e **2**) ao Sistema A e dois conjuntos (**1** e **2**) ao Sistema B.

As atividades do **Conjunto 0** se focaram mais nas tarefas de construção e descrição que nas tarefas de justificativas, muito embora em algumas questões os aprendizes tenham esboçado tentativas de justificar as construções.

No **Conjunto 1**, o enfoque foram as provas matemáticas, ou seja, as justificativas das construções geométricas. Para este conjunto, as atividades de 1 a 4 enfatizaram os aspectos dinâmicos do Cabri. A nossa intenção, neste caso, era que os aprendizes se valessem desse dinamismo como recurso no processo de prova e que, além disso, fossem experimentando o uso de linguagem matemática nas justificativas. Procurou-se, também neste conjunto, abordar uma importante noção em ambientes de Geometria Dinâmica, que é a noção de construção robusta/mole, o que foi feito especificamente na Atividade 6 (Caixas-pretas). Por fim, aspectos mais formais de provas foram levados em conta na Atividade 5 (sobre duplicar um segmento de reta) e na Atividade 7, a qual abordou especificamente as construções de Mohr-Mascheroni.

Foi, ainda, durante a aplicação do **Conjunto 1**, que realizamos o chamado Episódio de Ensino – na verdade uma aula sobre congruência de triângulos e provas. Foram abordados três dos quatro casos de congruência. O objetivo visado era dar suporte teórico para provar proposições envolvendo congruência de triângulos, notadamente o problema da construção do ponto simétrico numa reta (simetria axial), construção cumprida com o compasso apenas (uma das construções de Mohr-Mascheroni). Avaliamos que o Episódio de Ensino não trouxe maiores benefícios a nenhum dos sistemas de aprendizagem envolvidos no experimento de ensino, na medida em que não surtiu muito efeito no momento da execução das provas. Tudo aponta para mais experiências com provas ou mesmo experiências extras.

Dados os reais obstáculos enfrentados nos conjuntos de atividades **0** e **1**, se fez necessário uma outra abordagem para a prova em torno do assunto construções geométricas. Assim, essa abordagem consistiu em tratar as construções geométricas e provas fora do ambiente do Cabri (ou melhor, só lápis e papel), e isso foi feito nas atividades do **Conjunto 2**, que se compôs pelo “jogo” de prova e pelo pós-teste.

No “jogo” de prova, os aprendizes tinham diante de si provas já prontas, organizadas em espécies de cartões. Teriam apenas que ordenar os cartões corretamente. Portanto, não era necessário que escrevessem a prova. Já no pós-teste, era necessário que produzissem uma prova a partir de uma questão envolvendo um caso de congruência de triângulos. Vale ressaltar que o Sistema A não pôde consultar os cartões na hora de produzir a prova escrita, ao passo que o Sistema B teve acesso aos cartões e a exemplos de provas preparadas pelo professor-pesquisador. Apesar desse fato, não foram observadas diferenças significativas nos resultados dos dois sistemas (para o Conjunto 2).

Diferenças significativas, no entanto, foram detectadas nos resultados do **Conjunto 1** para os dois sistemas. Em poucas palavras, o maior empenho e disposição dos aprendizes do Sistema de Aprendizagem A é que determinou os melhores resultados desses estudantes, com destaque nas produções escritas. Com relação à exploração dos recursos dinâmicos do *software* Cabri, os resultados são muito parecidos.

Os principais pontos referidos neste capítulo, sobre a análise das atividades dos estudantes, serão retomados no Capítulo 5 (Conclusão), o qual apresentará ao leitor os mais importantes resultados obtidos neste trabalho, bem como tratará de responder as duas questões de pesquisa propostas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

5.1 Introdução

As investigações em Educação Matemática sobre o tema prova estão na ordem do dia, mas também nos revelam que temos muito a pesquisar, principalmente na Matemática Escolar, ao nível do ensino básico. É exatamente nesse rico cenário educacional que se insere nosso trabalho.

De acordo com as considerações feitas no Capítulo 2 – *Argumentações, Provas e Educação Matemática* –, nosso trabalho consiste em abordar as provas matemáticas produzidas por alunos do ensino básico (7ª série do Ensino Fundamental), em particular, a partir das construções geométricas tratadas num ambiente de Geometria Dinâmica – o *Cabri-Géomètre*. Desta forma, o objetivo principal foi o de investigar as produções matemáticas[55] dos estudantes. Tais produções matemáticas foram observadas em duas vertentes principais:

- ✓ Nas construções realizadas com o *software* Cabri; e
- ✓ Nas produções escritas, ou seja, com base nas descrições/justificativas dessas construções.

O uso do Cabri como recurso no processo de prova (justificativas das construções realizadas) foi tido por nós como o "motor inicial" das provas matemáticas propriamente ditas, ou melhor, esta pesquisa pretendeu não apenas explorar o dinamismo do *software*, mas, sim, introduzir os estudantes aos complexos processos de prova em geometria a partir de atividades que pudessem ser solucionadas de diferentes formas (variar as ferramentas na resolução de um mesmo problema).

[55] Lembramos que *produções matemáticas dos estudantes* dizem respeito, não apenas às descrições e justificativas (das construções), mas também, às suas construções realizadas.

5.2 As Questões de Pesquisa - Comentários Gerais

As duas perguntas de pesquisa que nos propomos a responder neste trabalho giram em torno do menu de ferramentas do Cabri e da maneira como os aprendizes fazem uso dessas ferramentas. Eis as questões:

- ✓ **1**. Em que medida as ferramentas do Cabri, disponíveis para a resolução de problemas, influenciam as provas produzidas pelos alunos?
- ✓ **2**. Qual o impacto da mudança nas ferramentas na compreensão das provas pelos alunos?

Quanto à primeira pergunta, existe um fator fundamental a ser considerado: é muito difícil nos livrarmos da reta nas construções geométricas ou no Desenho Geométrico. Ela é, além de necessária, essencial à compreensão do desenho ou figura em estudo. Facilita a descoberta da heurística de uma figura. Em particular, no caso do Cabri, quando o uso da reta é sempre permitido, amplia-se sobremaneira a gama de construções possíveis e, se somarmos a isto o dinamismo deste software, as construções ficam realmente mais ricas.

Mas a pergunta 2 nos remete a uma consideração de outro tipo. Uma consideração, a nosso ver, de ordem teórica. Primeiro, porque *mudança nas ferramentas* pode significar, por exemplo, restringir o uso de algumas delas, como a reta. Este é o ponto central desta pergunta. Segundo, porque eventuais restrições no menu do Cabri tendem a dificultar ainda mais certos tipos de construção, a exemplo da obtenção do ponto médio de um segmento de reta com o compasso apenas.

Esclareçamos melhor o sentido da pergunta 2. Existem várias maneiras de se restringir o menu do Cabri, mas no caso da nossa pesquisa a restrição é só uma: **A reta não pode ser traçada, de modo que as construções geométricas devem ser cumpridas com o compasso apenas** – e quando dizemos compasso, nos referimos à ferramenta “compasso” ou à ferramenta “circunferência”, ou ambas). Tradicionalmente, as construções geométricas têm sido realizadas com a régua e o compasso, como se fossem componentes de um jogo. Portanto, no nosso jogo, por vezes, faltará uma peça importante: a reta (ou a régua, se pensarmos no ambiente do lápis e papel).

Cabe mais uma consideração sobre esta segunda pergunta. A idéia de proibir o traçado da reta nas construções geométricas surgiu a partir do contato que tivemos com a já mencionada **Geometria do Compasso** (ou de **Mohr-Mascheroni**)[56], que foi a principal fonte de inspiração para o nosso trabalho. Nesse sentido, a mudança nas ferramentas a que refere a pergunta 2 trata exatamente de dispensar a reta[57], de modo que somente circunferências são permitidas nas construções.

Outra questão importante que envolve a mudança de ferramentas diz respeito à colinearidade. Quando a reta está traçada, os aprendizes se convencem muito mais facilmente da colinearidade; quando não está, ou seja, quando a condição “sem reta” é imposta nas construções, a noção de colinearidade como uma propriedade é quase sempre (ou sempre) não percebida pelos aprendizes.

A fim de alcançar o objetivo proposto – o de investigar as questões 1 e 2 –, retomaremos os dois tópicos seguintes, referentes ao embasamento teórico-metodológico:

1. Metodologia. Foi escolhida para este trabalho a metodologia baseada nos procedimentos sobre experimentos de ensino, explicitados por Kelly & Lesh (2000), que têm por objetivo a criação de uma versão, em escala reduzida, de uma ecologia de aprendizagem, de forma que a mesma possa ser estudada em profundidade e detalhe. Esta metodologia pode ser considerada como um tipo mais singular da metodologia baseada em design (*design experiments)*, que por sua vez constitui um paradigma de pesquisa mais abrangente, notadamente em cenários educacionais.

---

[56] Assunto discutido no Capítulo 1, mais em detalhes.
[57] Dispensar no sentido de que a reta não pode (de fato) ser traçada, mas, evidentemente, a reta continua existindo *como sendo determinada por dois de seus pontos*.

A parte empírica de um experimento de ensino, o estudo em si, divide-se em duas fases (inter-relacionadas): a fase de desenvolvimento e fase de experimentação. Na fase de desenvolvimento, foram especificados os sujeitos de pesquisa e elaboradas as atividades, que foram de dois tipos: computacionais (com o uso do Cabri) e não-computacionais (sem o Cabri), envolvendo o ambiente do lápis e papel ("jogo" de prova e pós-teste). Resumindo, foram elaborados três conjuntos de atividades para o Sistema de Aprendizagem A (Augusto/Cristina e Bruno/Gisele) e dois conjuntos para o Sistema de Aprendizagem B (somente a dupla Bárbara/Suzane). Já a fase de experimentação se deu, em primeiro lugar, com as sessões de familiarização com o software Cabri para todos os estudantes e, em segundo lugar, com a aplicação das atividades às 3 duplas participantes do experimento.

O conjunto de atividades denominado **Conjunto 0** teve como objetivo introduzir os estudantes ao Cabri no tocante a conceitos elementares de geometria. Teve como enfoque mais as construções que as descrições/justificativas. O **Conjunto 1**, ao contrário, se focou mais nas provas matemáticas (justificativas das construções). Por último, o **Conjunto 2** abordou praticamente os mesmos temas tratados nos dois primeiros, mas, desta vez, tudo foi feito no ambiente do lápis e papel – nada de Cabri. Teve como objetivo o tratamento das provas matemáticas de um ponto de vista mais formal, em comparação com o tratamento dado quando das atividades desenvolvidas no contexto do *Cabri-Géomètre*.

É importante ressaltar que nenhum dos estudantes conhecia o software Cabri-Géomètre até o início do experimento de ensino e tinham poucos conhecimentos de Geometria Euclidiana elementar, a menos daqueles conceitos mais corriqueiros, abordados de forma esparsa nas aulas de Matemática, como as noções de ponto e de reta, de ângulo, quadrado (talvez o retângulo) e triângulo, mas não as propriedades geométricas inerentes a algumas desta figuras. Podemos citar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e ponto médio. Enfatizamos que todos esses assuntos, inclusive os casos de congruência de triângulos, tiveram que ser ensinados na sala de aula de Matemática, à média de uma aula de Geometria por semana, de acordo com plano de aulas (para a 7ª Série).

Finalmente, esclarecemos que esta fase de experimentação se deu de forma separada para os dois sistemas de aprendizagem, ou melhor, primeiro o Sistema de Aprendizagem A cumpriu as sessões de familiarização com o Cabri e, na seqüência, os três conjuntos de atividades (conjuntos 0, 1 e 2). Somente depois de terminada essa etapa, começamos a experimentação com o Sistema de Aprendizagem B, que cumpriu familiarização com Cabri e os conjuntos 1 e 2 (Não foi aplicado o Conjunto 0).

2. Base Teórica. Buscamos apoio teórico no trabalho de Mariotti (2001), que fundamenta nosso trabalho no que concerne ao campo de experiência (das construções geométricas) e criação das atividades, ou seja, Mariotti enfoca, em sua pesquisa, as provas e construções geométricas com Cabri, sendo que um dos principais alvos era a investigação de uma abordagem para o ensino centrada no uso do micromundo *Cabri-Géomètre* e tendo como intenção o desenvolvimento do pensamento teórico em geometria. Um outro objetivo foi o de clarear o papel do ambiente do Cabri nos processos de ensino-aprendizagem.

Em relação à nossa pesquisa, a escolha do Cabri se deu, não somente por sua flexibilidade ou pelo fato de o mesmo ser um bom suporte didático para ensinar geometria elementar, mas sim, porque ele pode ser encarado como um elemento mediador da idéia de prova matemática. Acreditamos que este enfoque pode contribuir para desenvolver o pensamento teórico em geometria, com destaque para os processos de indução e dedução. A nossa intenção, quando da aplicação das atividades, foi que este pensamento teórico ao qual nos referimos pudesse ser incorporado no momento das tarefas de construção e validação, ou seja, que ocorresse a ligação entre uma construção e o teorema matemático que a valida. Foi justamente esta ligação que foi mais difícil para os nossos aprendizes. E então, dados esses obstáculos absolutamente normais, se faz necessário "aproximar a teoria com a prática", com possíveis movimentos do empírico ao conceitual, envolvendo, respectivamente, desde noções simples de geometria (tratadas, por exemplo, com o dinamismo do Cabri) até aquelas mais complexas, que possam introduzir os aprendizes à prova. Conjecturamos, assim, que atividades privilegiando o modo *dragging* (arrastar) podem favorecer este movimento, bem como a validação de uma construção poderá surgir da observação dos diversos casos particulares decorrentes deste recurso.

As ferramentas teóricas utilizadas para a análise das atividades dos estudantes se fundamentam nos trabalhos de Balacheff, que explicita a categorização de provas e os processos de validação. Segundo este autor, as provas se dividem em duas categorias: as pragmáticas – que utilizam recursos de ação e são sub-categorizadas em empirismo ingênuo, experimento crucial e exemplo genérico – e as conceituais, que envolvem formulações de propriedades em questão, assim como as relações que se estabelecem entre estas propriedades, subdividindo-se em experimento de pensamento e cálculo mental ou cálculo de afirmações. Nas do primeiro tipo, temos um caráter ou raciocínio preponderantemente indutivo e nas do segundo, predomina o raciocínio dedutivo.

Na presente pesquisa, a categoria de prova denominada de pragmática está claramente contemplada nas atividades que enfocam os aspectos dinâmicos do Cabri (medição, verificação de propriedades, etc) e também, naquelas relacionadas com os casos de congruência de triângulos, em que se usa a idéia de sobreposição (caso da atividade 7 do Conjunto 1, e atividade 4 (“jogo” de prova) e pós-teste, do Conjunto 2). Já o tipo de prova classificado como conceitual cobre todas as atividades, desde o Conjunto 0 ao Conjunto 2, que envolvem descrição e justificativas das construções geométricas.

5.3 Principais resultados

As produções matemáticas dos aprendizes foram analisadas levando-se em conta três aspectos importantes: **(a)** se usaram linguagem matemática na descrição/justificativa de cada construção, **(b)** se fizeram referência a propriedades matemáticas vistas anteriormente, e **(c)** se exploram os recursos dinâmicos do Cabri para validar as construções. A partir destes elementos, pretendemos responder as duas questões de pesquisa que retomamos mais adiante. O referencial teórico considerado acima é que nos guiará nas devidas respostas. De um lado, o campo teórico em que se inserem as construções geométricas, na perspectiva de Mariotti, e, de outro lado, a teoria de Balacheff, a qual nos ensina sobre a natureza dos argumentos matemáticos utilizados nas respostas dos aprendizes, argumentos estes que podem originar duas categorias de provas: as de caráter empírico ou **pragmáticas** e as de caráter teórico ou **conceitual**, como já foi discutido no tópico anterior.

Enfatizemos, de início, que o alvo mais específico de nossa pesquisa é a elaboração de provas matemáticas no contexto das construções geométricas (num primeiro momento, com o Cabri, e num segundo momento, sem o Cabri). Pensando, entretanto, no **Conjunto 0** como um bloco de atividades preparatórias, que servissem de iniciação à temática das construções geométricas no Cabri, acabamos por tomar a decisão de enfocar apenas as tarefas de construção e descrição. Por outro lado, sendo tais tarefas desenvolvidas no ambiente do Cabri-Géomètre, fomos levados naturalmente a interagir com os aprendizes no sentido de que explorassem os aspectos dinâmicos deste software, com vistas, obviamente, a que se iniciassem na produção de provas (no contexto do empirismo do cabri).

Podemos, em linhas gerais, afirmar que o foco dos aprendizes ficou mais na construção, sendo que as descrições são muito carentes de detalhes, tanto em termos de linguagem matemática (pouco uso de termos matemáticos adequados) como na própria língua materna. A idade escolar em que se encontram os aprendizes, bem como a falta de experiência com este tipo de atividade, talvez sejam os fatores associados com essas dificuldades.

Algumas dificuldades observadas são particularmente interessantes. Podemos destacar duas delas: as de nível teórico-matemático e as aquelas relacionadas com o manuseio técnico do *software*. Em primeiro lugar, foram recorrentes nas produções escritas dos aprendizes muitas dificuldades em se expressar matematicamente, por exemplo, com a noção de raio e de colinearidade. Só à medida que as atividades foram se desenvolvendo é que certos termos matemáticos iam aflorando nas falas dos aprendizes, mas as dificuldades na escrita não se resolveram por completo, não se dissiparam.

Em segundo lugar, pudemos notar dificuldades no manuseio técnico do software, que, no nosso entendimento, implicaram em problemas na execução de construções robustas. As atividades que trataram, por exemplo, da construção do diâmetro de uma circunferência, ofereceram várias dificuldades aos aprendizes, sem exceção. Outro fato digno de nota é que houve uma maior preferência pelos comandos de construção, em detrimento, quase sempre, dos comandos de criação[58], ou seja, ficou nítida, em muitas atividades, a preferência por processos *mais automáticos* para executar as construções.

Com relação ao conjunto de atividades denominado de **Conjunto 1**, o bloco de questões de 1 a 4, para os dois sistemas de aprendizagem, A e B, apresenta resultados muitos parecidos, senão coincidentes, em alguns casos. Tal bloco de questões teve como foco o dinamismo do Cabri. Um resultado interessante diz respeito às produções escritas dos aprendizes, nas quais percebemos uma mescla de linguagem natural e linguagem matemática e, além do mais, dentro desta linguagem mista, foi preponderante o uso de termos matemáticos acessíveis, ou melhor, daqueles que mais se aproximam do uso diário.

O resultado mais importante deste grupo de questões (de 1 a 4) está relacionado com a natureza das “provas” produzidas pelos aprendizes. Nos referimos, neste caso, ao fato de que as dificuldades nas provas escritas foram compensadas, em grande medida, pelas “provas” empíricas que o Cabri pôde oferecer. Dito de outra maneira, com a ausência de justificativas teóricas mais convincentes, o Cabri era solicitado a “provar”, a validar as construções.

A Atividade 5 – sobre dobrar um segmento de reta –, teve como objetivo principal introduzir os estudantes à prova. Algum tipo de justificativa deveria ser sempre fornecida pelos aprendizes, quer fossem argumentos empíricos, baseados no dinamismo do Cabri, quer fossem argumentos teóricos ou conceituais, com base

[58] Os *comandos de construção* tendem a tornar mais automáticas as construções, e só pode ser construído um novo objeto a partir de um outro já existente. Exemplo: Você pode construir uma reta perpendicular a uma reta dada, com a ferramenta “perpendicular”, ou querer determinar o ponto médio de um segmento de reta, com a ferramenta “ponto médio”. Já os comandos de criação – ponto, reta, circunferência, etc – exigem algum movimento do ***mouse,*** **tipo clicar, mover, arrastar e soltar**. Portanto, é a posição do cursor em certos eventos (pressionar o botão do "mouse", soltar o botão do "mouse", ...) que determinará as características destes objetos.

em fatos matemáticos propriamente ditos. Um resultado que já tínhamos previsto (de acordo com os dados das atividades anteriores), está relacionado com o uso de ”justificativas” com base nos recursos dinâmicos do Cabri, aliás, um fato recorrente a todos os aprendizes.

O uso de diferentes ferramentas para a resolução de um mesmo problema trouxe algumas dificuldades, principalmente no tocante às justificativas. Os recursos dinâmicos do Cabri, aliados à utilização da ferramenta “simetria central” e mesmo o uso constante da reta nas construções, propiciaram boas “provas” para esta questão (provas pragmáticas). No entanto, quando o menu do Cabri foi restrito ao uso do compasso apenas, as dificuldades dos aprendizes aumentaram significativamente, pois, no geral, faltou mencionar propriedades matemáticas imprescindíveis para a elaboração das provas. Salientamos também uma séria dificuldade que se revelou quando os aprendizes se deparavam com uma figura formada por vários objetos bem próximos uns dos outros (o que, a nosso ver, interferiu nas produções escritas). Citamos, por exemplo, este mesmo problema de dobrar um segmento de reta com o compasso somente, em que aparecem várias circunferências ao mesmo tempo.

Foi marcante também o traçado de retas (pontilhadas ou não), apesar de seu uso não ser permitido em algumas atividades. É bem evidente que a reta deixa mais à vontade os aprendizes, tornando as construções mais fáceis de entender. Sem a reta, em geral foi muito trabalhoso para eles perceberem certas propriedades matemáticas nas figuras e, ao mesmo tempo, na sua falta (da reta) percebemos como a noção de colinearidade como uma propriedade matemática passa despercebida pelos estudantes.

As atividades sobre caixas-pretas revelaram um mesmo problema a todos os aprendizes: a dificuldade nas construções robustas. Esta atividade, muito embora não tivesse enfoque nas provas matemáticas (procurava enfatizar as construções robustas), nos faz refletir sobre a seguinte questão. O Cabri se apresenta como algo novo aos estudantes participantes, não só no sentido tecnológico ou didático-pedagógico, mas também, no sentido de que certos conceitos de geometria elementar tiveram uma abordagem distinta daquela costumeiramente vista no ambiente do lápis e papel. De maneira que algumas dificuldades envolvendo, por exemplo, a construção do diâmetro de uma circunferência, revelam que o elemento novo é, na verdade, o conceito de construção robusta. A geometria no ambiente do lápis e papel chegou mesmo, por vezes, a interferir na apreensão do conceito de construção robusta no ambiente do Cabri e de sua Geometria Dinâmica. Mas em parte, os percalços na execução de construções robustas se devem a muitas dificuldades no manuseio técnico deste software.

O alvo principal do Episódio de Ensino, cujo tema central foram as congruências de triângulos, foi "preparar" os aprendizes para as provas de Mohr-Mascheroni, decorrentes das construções realizadas *con el compás solamente*. Temos a avaliação de que este Episódio de Ensino, do modo como foi conduzido (aula explicativa com recurso a materiais manipulativos) foi pouco eficiente, pois seus efeitos quase que não se fizeram presentes nas produções escritas dos aprendizes. Nem as idéias de sobreposição chegaram a ser utilizadas para justificar as construções de Mohr-Mascheroni. É bem verdade que este tipo de prova, pelo fato de envolver congruência de triângulos, requer um tipo de raciocínio puramente teórico, raciocínio, por sua vez, que não esperávamos que emergisse dos estudantes. Esperávamos, sim, uma certa dose de referência, pelo menos ao empirismo ingênuo descrito por Balacheff.

Até mesmo as construções de Mascheroni foram de difícil compreensão para os estudantes, certamente porque a ausência da reta dificulta bastante e até chega a inviabilizar, de fato, algumas construções.

Alguns resultados gerais e importantes podem ser destacados para os sistemas de aprendizagem A e B. Primeiro,fica constatada, nesta pesquisa, a preferência pelas provas pragmáticas (principalmente baseadas no dinamismo do Cabri); segundo, percebeu-se uma certa evolução no uso de termos matemáticos, muito embora, muito poucas vezes as justificativas apresentaram argumentos próximos do nível conceitual; e, terceiro, foram recorrentes as dificuldades com as construções robustas. Um dos conceitos matemáticos que talvez tenha sido melhor apreendido pelos estudantes foi o de raio, em grande parte porque sempre apareceu em quase todas as atividades (e, portanto, provavelmente, esse fato propiciou muitas experiências aos aprendizes).

Passamos, agora, aos principais resultados das atividades do Conjunto 2, sobre o “jogo” prova e o pós-teste, de acordo com a análise feita no Capítulo 4. Enfatizamos que esta fase do experimento de ensino se deu totalmente fora do ambiente computacional do *Cabri-Géomètre*.

O tipo de raciocino que se emprega em demonstrações matemáticas exige muito mais tempo para ser consolidado de alguma forma. Não se trata somente de entender como se faz uma determinada prova matemática, mas de entender as várias facetas que uma prova pode ter, bem como o seu funcionamento. As atividades do **Conjunto 2** suscitam tais preocupações.

Uma das preocupações nossas ao elaborar os cartões do “jogo” de prova (e o pós-teste) levou em conta as dificuldades, explicitadas acima, quando da elaboração das provas ou justificativas. E para tanto, procuramos, nos enunciados ou nos passos de cada prova, realçar o uso de expressões mais corriqueiras, que pudessem despertar nos aprendizes a busca pelo encadeamento lógico contido em uma demonstração. Por exemplo, foi recorrente nos cartões o uso de palavras como “portanto”, “conclusão”, “assim”, etc. Paralelamente, tentamos dosar o que estamos a chamar, neste trabalho, de *esquema-hipótese*, para enfatizar este que é um dos aspectos cruciais das demonstrações e, principalmente, para levar os aprendizes a pensar matematicamente em como “caminhar” do ponto inicial (hipótese), valendo-se de fatos conhecidos (argumentos), até alcançar a conclusão (a tese).

Nas atividades do “jogo” prova, a despeito de cada prova já se encontrar escrita, os principais obstáculos dos aprendizes dizem respeito ao raciocínio lógico empregado nas provas. Na maioria das atividades os aprendizes ordenaram os cartões incorretamente. Houve apenas um acerto, sendo que na maioria dos casos, acertaram o primeiro e último cartões[59]. Se é verdade que os aprendizes têm grandes dificuldades ou não conseguem elaborar provas com o rigor exigido pela matemática, como já pudemos constatar nesta pesquisa, também não é menos

[59] Em todas atividades as duplas Augusto/Cristina e Bruno/Gisele acertaram o 1º e último cartões, pelo menos, ao passo que a dupla Bárbara/Suzane só conseguiu esse feito numa atividade.

verdade que, se forem ajudados do modo como foram neste jogo de prova, suas dificuldades poderiam gradualmente diminuir.

Podemos afirmar que o “jogo” de prova com cartões, em certa medida, ajudou os estudantes a entender umas poucas idéias gerais sobre uma prova matemática, mas o mesmo não se pode dizer da compreensão de cada prova, notadamente aquelas envolvendo congruência de triângulos, pois houve bastante confusão no encadeamento lógico, talvez em função da existência de termos matemáticos ainda não familiares aos aprendizes.

5.4 Respondendo as Questões de Pesquisa

Neste tópico, voltamos às duas questões de pesquisa que foram investigadas no presente trabalho.

- ✓ **1**. Em que medida as ferramentas do Cabri, disponíveis para a resolução de problemas, influenciam as provas produzidas pelos alunos?

Nas atividades desenvolvidas com o Cabri, os aprendizes exploraram praticamente todo o seu menu de ferramentas. Nossa intenção foi chamar a atenção dos aprendizes para que explorassem diferentes propriedades ao resolver um problema (fazer uma verificação, executar uma construção, por exemplo), bem como para a necessidade de utilizar diferentes argumentos em suas justificativas. Por outras palavras, pretendíamos que as ferramentas disponíveis pudessem influenciar os aprendizes na produção de provas conceituais e não apenas que ficassem no campo empírico, como ocorreu mais freqüentemente. Entretanto, como alcançaram muito pouco o campo teórico, é bem verdade que a influência se deu, com destaque, nos tipos de construção, mas não na produção de provas.

Talvez o próprio dinamismo do Cabri seja bastante sugestivo, a ponto de fazer com que os aprendizes apreciem mais as provas empíricas que as conceituais, mas o fato é que a falta de experiência com as atividades propostas (no Cabri) e, principalmente, com provas matemáticas, também devem ter um papel central nas dificuldades em elaborar provas. Em muitas atividades os aprendizes não iam além dos recursos de medição (de segmentos, de ângulos) e animação, ou melhor, não passavam do pragmatismo, não vendo, portanto, necessidade de escrever a justificativa por escrito.

✓ **2**. Qual o impacto da mudança nas ferramentas na compreensão das provas pelos alunos?

Como já se discutiu anteriormente, a única mudança proposta a que se refere esta pergunta é que, nas construções geométricas só deveriam ser usadas circunferências e nenhuma reta poderia ser traçada (construída). Trata-se, claramente, de uma mudança radical.

Em primeiro lugar, o fato de a reta não estar presente trouxe impacto considerável às tarefas de construção e, em segundo, a ausência da reta causou ainda mais obstáculos na compreensão das figuras (foi difícil aos aprendizes identificarem, por exemplo, ângulos, segmentos e triângulos nas figuras sem a reta).

Mas então, qual o impacto dessa mudança na compreensão das provas? Ao que tudo indica, não é o uso de uma ou outra ferramenta que poderia influenciar a compreensão das provas pelos estudantes, e sim, um pouco mais de experiência em provas. Avaliamos, desta maneira, que o curto tempo dedicado ao tema prova, às atividades enfim, não foi suficiente para responder satisfatoriamente esta questão.

Nas construções com o compasso apenas quase sempre se quebrava a regra "*não trace retas*". Mas, foi justamente essa quebra de regra que propiciou alguns momentos de segurança com as propriedades geométricas envolvidas, destacando-se a noção de colinearidade.

5.5 Sugestões e Implicações para Estudos Futuros

Quando o assunto é prova, não é nenhuma novidade que, sendo um aluno do nível básico ou mesmo da graduação, as dificuldades são persistentes. A nossa experiência como professor do nível básico mostra que, com temas como este, se faz necessário sempre dedicar mais tempo às atividades planejadas para este fim, muito embora existam outras variáveis, tais como o conteúdo abordado (que pode ser mais ou menos acessível) e o tipo das atividades. E no caso dessas atividades serem desenvolvidas no ambiente do *Cabri-Géomètre*, além de tempo, é necessário algumas experiências extras com provas.

O problema dos experimentos de ensino de curta duração, como foi o nosso, é que ficam lacunas, ou no desenho das atividades ou nos resultados obtidos pelos aprendizes, de modo que, mesmo a pesquisa estando embasada teoricamente, não se consegue investigar o problema de pesquisa profundamente. Portanto, a nosso ver, futuras pesquisas abordando o tema prova, construções geométricas e Cabri deverão ser conduzidas na base de experimentos de ensino de longa duração, talvez, até mesmo, nos termos descritos por Mariotti, com estrita colaboração entre pesquisadores e professores. Além disso, também seria interessante pesquisar um grupo de alunos que já tenha tido alguma experiência com provas e confrontar os resultados com outro grupo que não teve esse tipo de experiência.

E também, além das atividades envolvendo provas no contexto do Cabri, deixamos a sugestão de se trabalhar atividades semelhantes no ambiente do lápis e papel. Na presente pesquisa, as tarefas do “jogo” de prova e do pós-teste nos revelaram que as dificuldades dos aprendizes não são muito diferentes, se comparadas com as atividades no Cabri.

Seria apropriado, no nosso entender, que atividades envolvendo as construções de Mohr-Mascheroni fossem tratadas num nível escolar mais avançado do que o do nosso estudo – por exemplo, poderia ser para uma terceira série do Ensino Médio ou para um primeiro ano de graduação.

Referências Bibliográficas

AABOE, Asger. ***Episódios da história antiga da matemática***. Tradução de João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de janeiro: SBM, 2002. 178 p.

ALMOULOUD, Saddo Ag; MELLO, Elizabeth G.S. **Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos**. CD – 23ª ANPEd, 2000.

ALVES, S. **Introdução às construções geométricas**. São Paulo: IME/USP, 1991

AMARAL, Rúbia Barcelos. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: Suas características e perspectivas.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: UNESP/Rio Claro, 2002. Orientada pela Profa. Dra. Miriam de Godoy Penteado.

BALACHEFF, N. **Processus de Peuve et Situations de Validations**. Educational Studies in Mathematics. 18. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987.

________.**Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics**. Pimm D. (ed.) Mathematics, Teachers and Children. London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 230-316.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2001 (Coleção do Professor de Matemática).

BARTHÉLEMY, G. ***2 500 anos de matemática*: *A evolução das idéias***. Tradução de Isabel Andrade. Lisboa: Instituto Piaget (Coleção Horizontes Pedagógicos), 1999.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1991. 496 p.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais, Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: SEF, 1998.

BREIDENBACH, W.; SÜSS, W. **Geometric Constructions**. In: BEHNKE, H. et al. **Fundamentals of Mathmatics**. Geometry, volume II. Traduzido por S. H. Gould. Massachusetts: MIT,1983(Três volumes)

CARNEIRO, José Paulo Q. **Construções possíveis usando régua e compasso** (Apêndice), p. 91-108. In: WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2000.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. ***Design Experiments in educational research***. Educational Researcher, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. ***Diferentes métodos para realizar construções***. *In:* ________. ***O que é matemática***? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. p. 171-200.

COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. Rio de janeiro: L. Coutinho, 1989.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. ***A experiência matemática*** *– A história de uma ciência em tudo e por tudo fascinante*. 3. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986. 481 p.

______. **O sonho de Descartes**.Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

De Villiers, M. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração**. University of Durban-Westville, 2002. Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepaje.html. Acesso em: 20.out.2006.

DOMINGUES, H. H. **Introdução histórica**.(p.3-12). In: FETISSOV, A. I. **A demonstração em geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

DOXIADIS, Apóstolos. **Tio Petrus e a conjectura de Goldbach: um romance sobre os desafios da matemática**. Trad. De Cristiane Gomes de Ribas. São Paulo: Trinta e Quatro, 2001.

DRISOSTES, Carlos Aparecido Teles. **Design interatvo de um micromundo com professores de Matemática do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2005. Orientado pela Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy).

EVES, H. ***Introdução à história da matemática***. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004. 844 p.

______. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula – Geometria**. Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FERREIRA, S. **Construções geométricas euclidianas realizadas apenas com o compasso**. TCC (Trabalho de Conclusão de Curso). São Paulo, IME/USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo), 2000.

FETISSOV, A. I. A demonstração em geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre, RS: UFRGS, 2001. Tese de doutorado

GREENBERG, M. J. ***Euclidian and Non-Euclidian Geometries:*** *Development and Hstory*. New York: W. H. freeman and Company, 1997.

HEALY, L.; HOYLES, C. **A study of proof conceptions in algebra**. Journal for Research in Mathematics Education. N. 31(4), p. 396-428, 2000.

KARRER, Mônica. ***Articulação entre Álgebra Linear e Geometria****: Um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação* *semiótica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática).São Paulo: PUC/SP, 2006. Orientada pela Profª Drª Ana Paula Jahn.

KELLY, A. E. & LESH, R. A. ***Research Design in Mathematics and Science Education***. London: LEA, p. 192-195, 2000.

KOSTOVSKI, A. N. **Construcciones geométricas mediante un compás**. Traduzido do russo por G. Lozhkin. [s.l]: MIR, 1980.

LEITE, Paulo Ferreira. ***Construções com o compasso***. SBM, 1983 (texto de uma palestra)

LISBOA, Joaquim L. de A. **A geometria do compasso ou geometria de Mascheroni: Construções geométricas graphicas effectuadas somente com o compasso**. Rio de Janeiro: Typ. Revista dos Tribunaes, 1915. 217 p.

MARIOTTI, M. A. **Justifying and proving in the Cabri environmen**t. International Journal of Computers for Mathematical Learling. V.6, n.3, p.257-281, 2001.

MASCHERONI. L. **Geometrie du Compass**. Paris: Monom, 1980.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. **Preparando para o raciocínio dedutivo**. [s.l]. 2001. Disponível em: www.sbem.com.br/ANAIS/VII%20ENEM/ARQUIVOS/comum_41.pdf. Acesso em: 29.mai.2005.

______ . **Argumentação e provas no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ(Projeto Fundão), 2003.

PAVANELLO, Regina Maria. ***O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências***. In: Revista Zetetiké. Campinas/SP: UNICAMP, ano 1, n. 1, 1993.

PIETROPAOLO, R. C. **Re(Significar) a demonstração nos currículos de educação básica e da formação de professores de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática. PUC/SP,São Paulo, 2006.

PUTNOKI, José Carlos. **Geometria e Desenho Geométrico**. São Paulo: Scipione, 1991.192 p. (Coleção Régua e Compasso, v.3)

SANTOS, E. T., MARTINEZ, M. L. **Software para Ensino de Geometria e Desenho Técnico**. In: **Anais do III Congresso Internacional de Engenharia Gráfica nas Artes e no Desenho** (GRAPHICA 2000), jun. 2000, Ouro Preto, MG. (CD-ROM). Disponível em: http://www.pcc.usp.br/toledo/pdf/graphica2000_software.pdf. Acesso em 10/10/2005.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**: A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. 10. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

SOUSA, José Miguel. **Construções com régua e compasso**. Prof2000, Portugal, 2005.Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/ce2005/materiais/texto7.htm#ft1. Acesso em 15/10/2006.

STEFFE, L. P. & THOMPSON, P. W. ***Teaching Experiment Metodology**: Underlying Priciples and Essential Elements*. In: KELLY, A. E. & LESH, R. A. (Eds.). Research Design in Mathematics and Science Education. London: LEA, p. 267-307, 2000.

STRUIK, D. **História concisa das matemáticas**. Tradução de João Cosme S. Guerreiro. 4. ed. Lisboa: Gradiva, 1986.

VAZ, Regina de Lourdes. ***O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.*** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo. 2004. Orientada pela Profª. Drª. Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy).

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2000. (Coleção do Professor de Matemática)

ANEXOS

ANEXO 1: Atividades do **Conjunto 0**

ANEXO 2: Possibilidades de resolução das atividades do **Conjunto 0** (nossa resolução)

ANEXO 3: Resposta das atividades do **Conjunto 0**, pelo aprendiz Bruno

ANEXO 4: Resposta das atividades do **Conjunto 0**, pela dupla Augusto/Cristina

ANEXO 5: **Conjunto 1** – Atividades Previstas para a primeira Sessão

ANEXO 6: Respostas das atividades realizadas do **Conjunto 1** – Primeira Sessão, pela dupla Augusto/Cristina

ANEXO 7: Respostas das atividades realizadas do **Conjunto 1** – Primeira Sessão, pela dupla Bruno/Gisele

ANEXO 8: **Conjunto 1** – Atividades Previstas para a segunda Sessão

ANEXO 9: Respostas das atividades realizadas do **Conjunto 1** – Segunda Sessão, pela dupla Augusto/Cristina

ANEXO 10: Respostas das atividades realizadas do **Conjunto 1** – Segunda Sessão, pela dupla Bruno/Gisele

ANEXO 11: **Conjunto 2** - Respostas das atividades do “jogo” de prova e do pós-teste, pela dupla Augusto/Cristina

ANEXO 12: **Conjunto 2** - Respostas das atividades do “jogo” de prova e do pós-teste, pela dupla Bruno/Gisele

ANEXO 13: Respostas das atividades realizadas do **Conjunto 1** – pela dupla Bárbara/Suzane (apenas uma sessão)

ANEXO 14: **Conjunto 2** - Respostas das atividades do “jogo” de prova e do pós-teste, pela dupla Bárbara/Suzane

PRIMEIRA PARTE: SISTEMA DE APRENDIZAGEM A – DUPLAS: AUGUSTO/CRISTINA & BRUNO/GISELE

ANEXO 1

Atividades do **Conjunto 0**

1) Construa um segmento de reta AB. Trace a mediatriz deste segmento. Como se chama o ponto de intersecção da reta mediatriz com o segmento?

2) Construir uma circunferência e um diâmetro.

3) Marque dois pontos A e B e construa o simétrico de A com relação a B.

4) Desenhe uma reta r e um ponto P fora dela. Construa o simétrico de P com relação à reta r.

5) Dividir uma circunferência

[a] em duas partes iguais;

[b] em seis partes iguais

[c] em três partes iguais

6) Construa um ângulo de 180°.

7) Construa 3 pontos colineares (que estão na mesma reta). Faça a verificação!

ANEXO 2

Possibilidades de resolução das atividades do **Conjunto 0** (nossa resolução)

Atividade 1: Construa um segmento de reta AB. Trace a mediatriz deste segmento. Como se chama o ponto de intersecção da reta mediatriz com o segmento?

Possibilidades de resolução.

1ª) Usando a ferramenta "mediatriz", conforme mostrado na figura abaixo, a reta mediatriz é facilmente traçada. Para isso,

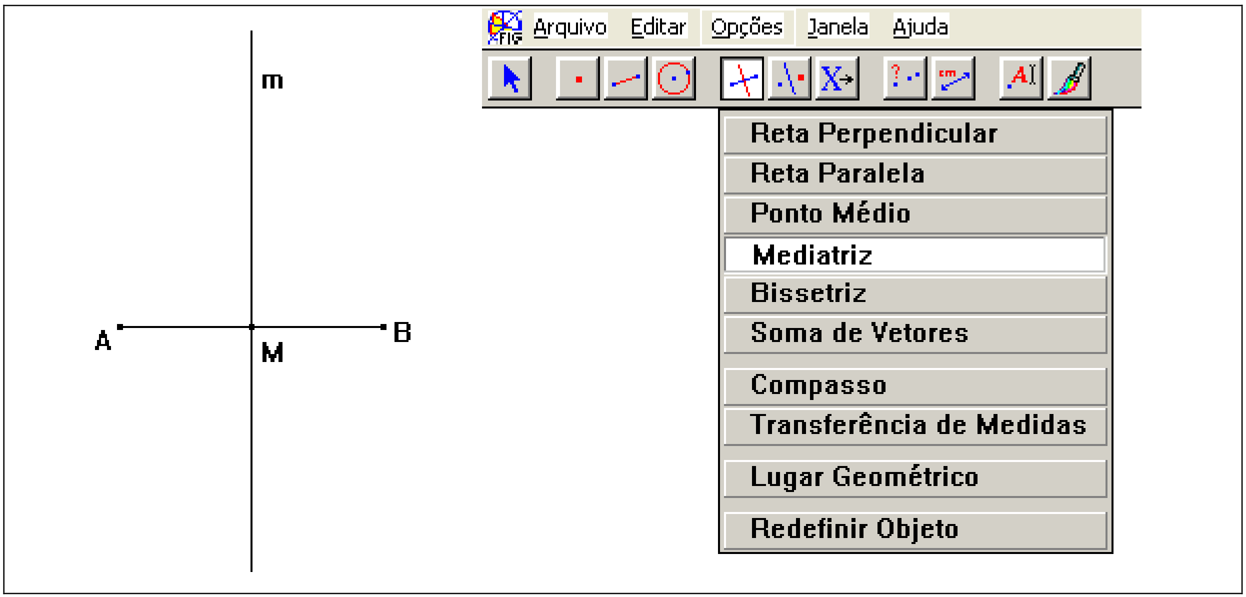


Figura **a.1 – Construção da mediatriz (1)**

2ª) Determinamos o ponto médio (M) do segmento de reta AB e, em seguida, traçamos uma reta perpendicular ao segmento passando pelo ponto M. Essa perpendicular será a mediatriz do segmento de reta AB.

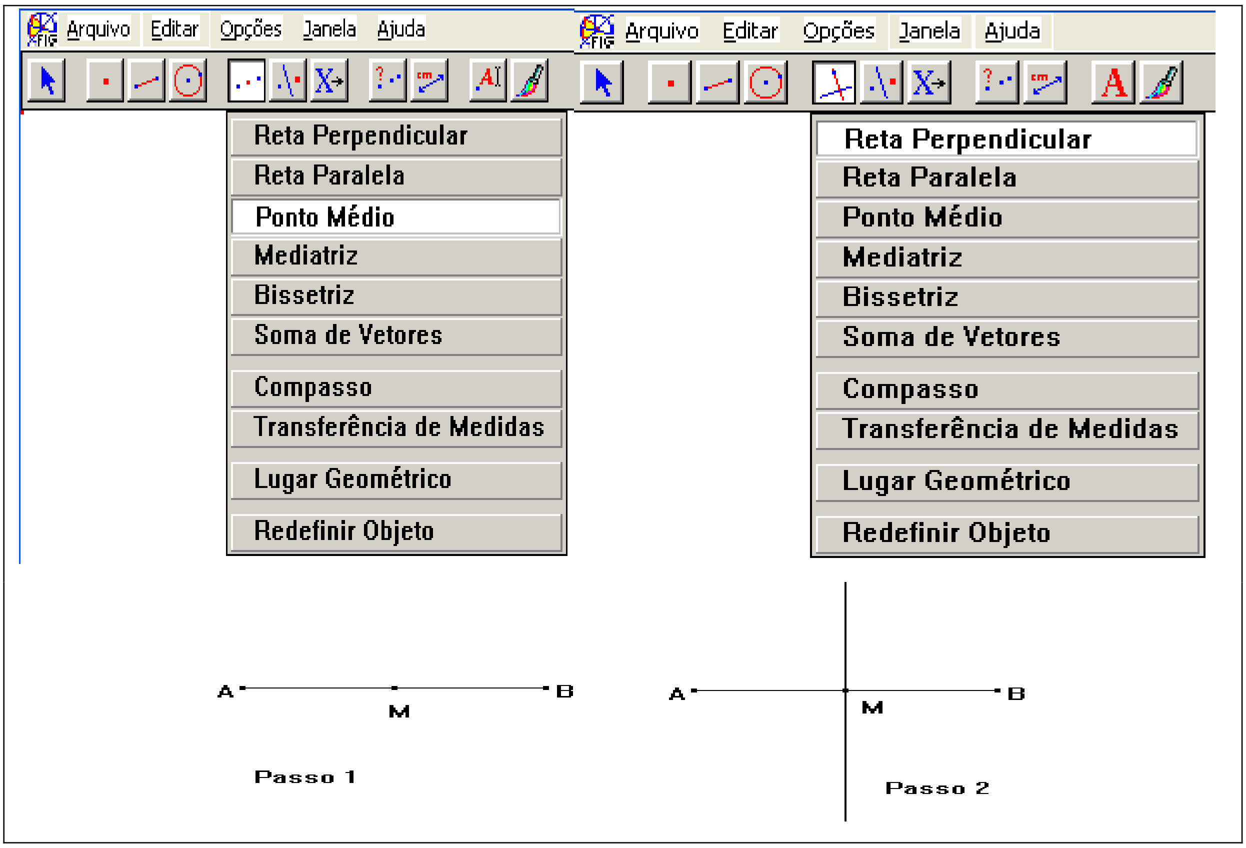


Figura **a.2** – Construção da mediatriz (2)

3ª) Podemos usar a ferramenta “circunferência”. Neste caso, traçamos duas circunferências: Uma de centro A, passando por B; e outra de centro B, passando por A (portanto com o mesmo raio AB). Depois disso, traçamos a reta m que passa pelos pontos C e D, intersecções da duas circunferências. Essa reta m será a mediatriz do segmento de reta AB.

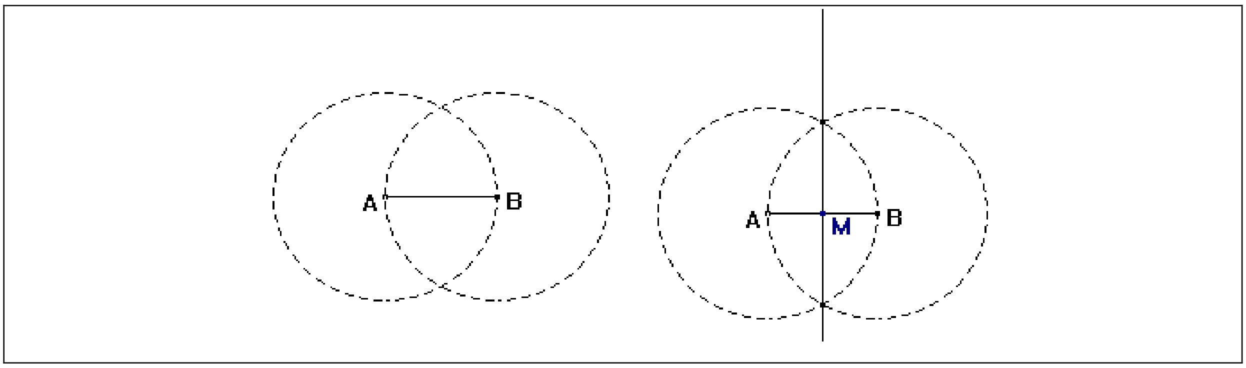


Figura **a.3** – Construção da mediatriz (3)

4ª) O mesmo resultado se obtém usando a ferramenta “compasso”, bastando tomar o raio maior que metade do segmento.

Prova: Seja P um ponto da mediatriz. Precisamos provar que P é eqüidistante de A e de B. Temos:

- ✓ AM ≡ MB (**L**) – pois M é ponto médio do segmento AB;
- ✓ ∠BMP ≡ ∠AMP (**A**) – ângulo reto, 90 graus
- ✓ PM ≡ PM (**L**) – lado comum

Então, pelo caso LAL, os triângulos AMP e BMP são congruentes.
Conseqüentemente, PA = PB.

Atividade 2: Construir uma circunferência e um diâmetro.

Possibilidades de resolução:

1ª) Traçamos uma circunferência com qualquer raio; em seguida, construímos uma reta passando pelo centro desta circunferência. O diâmetro fica determinado pelos dois pontos de intersecção da reta com a circunferência.

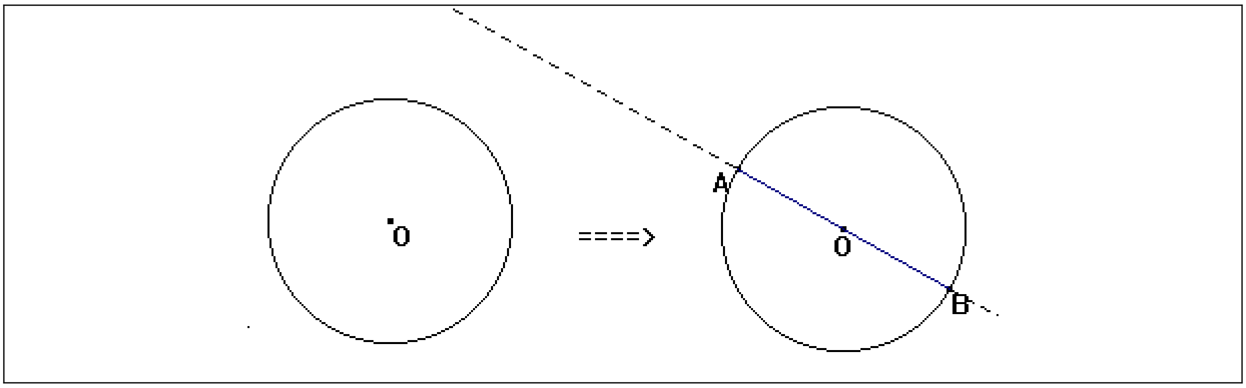


Figura a.4 – Construção de uma circunferência e um diâmetro.

Prova: Por construção, os pontos A, O e B são colineares. E como AO = OB = r, temos AB = AO+OB = r + r = 2r, ou seja, AB é um diâmetro.

2ª) Criamos uma circunferência qualquer (C_1) e nesta marcamos um ponto P (arbitrário). A partir do ponto P:

a) traçamos a circunferência C_2 de centro P e raio OP = r;
b) Tomamos o ponto R = $C_1 \cap C_2$;
c) Traçamos a circunferência C_3 de centro R e raio r;
d) Tomamos ponto S = $C_1 \cap C_3$;
e) Traçamos a circunferência C_4 de centro S e raio r, a qual encontra C_1 em Q. O segmento PQ assim obtido é diâmetro da circunferência dada.

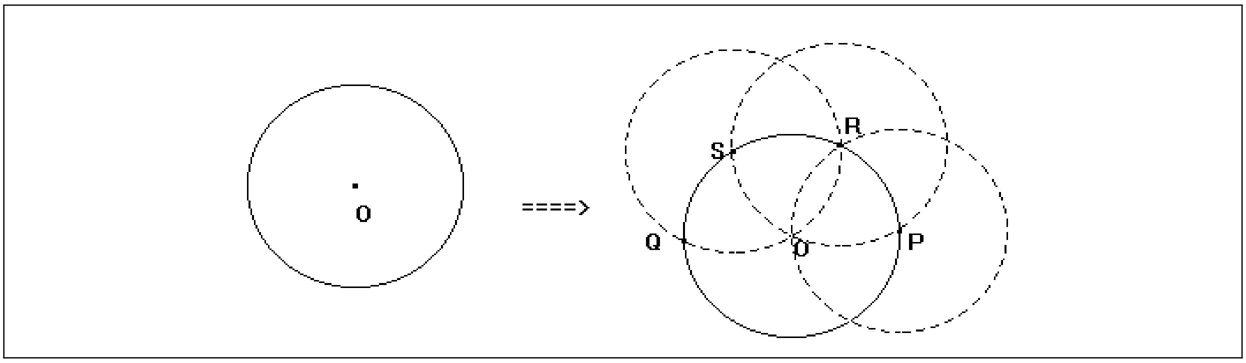


Figura **a.5** – Construção de uma circunferência e um diâmetro (2)

Prova: Os pontos P, O e Q são colineares pois, por construção: m($\sphericalangle$POR) =m($\angle$ROS) = m($\angle$SOQ) = 60° e, portanto, a soma desses três ângulos é 180°. Além disso, também por construção, QO =OP = r e pelo fato de Q, O e P serem colineares, tem-se: PQ = QO + OP = r + r = 2r, logo PQ é um diâmetro.

Atividade 3: Marque dois pontos A e B e construa o simétrico de A em relação a B.

Possibilidades de resolução:

1ª) Criamos dois pontos A e B, distintos, pelos quais traçamos uma reta t. Em seguida, construímos uma circunferência de centro B, passando por A. O ponto A', intersecção da circunferência C com a reta t, é o simétrico de A.

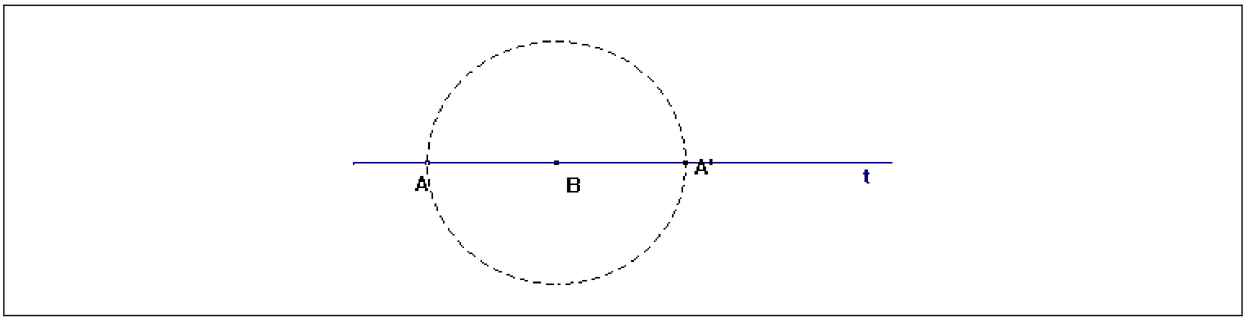


Figura **a.6** – Simetria central (1)

Prova: De fato, A' esta alinhado com A e B; além disso, esta à mesma distância de B que A (AB = BA' = r e AA' = AB+BA' = r+r = 2r).

2ª) Podemos também usar a ferramenta "simetria axial" e fazer a verificação com os recursos do Cabri (ferramentas "*distância e comprimento*" e "*colineares?*")

3ª) Ainda podemos dar uma solução apenas com o compasso (ferramenta "circunferência"). Para isso, a partir dos pontos A e B dados, construímos as circunferências (A,AB), (B,AB), (C,AB) e (D,AB). O Procedimento, tanto de resolução como de prova, é igual ao da questão 2, segunda forma de resolução.

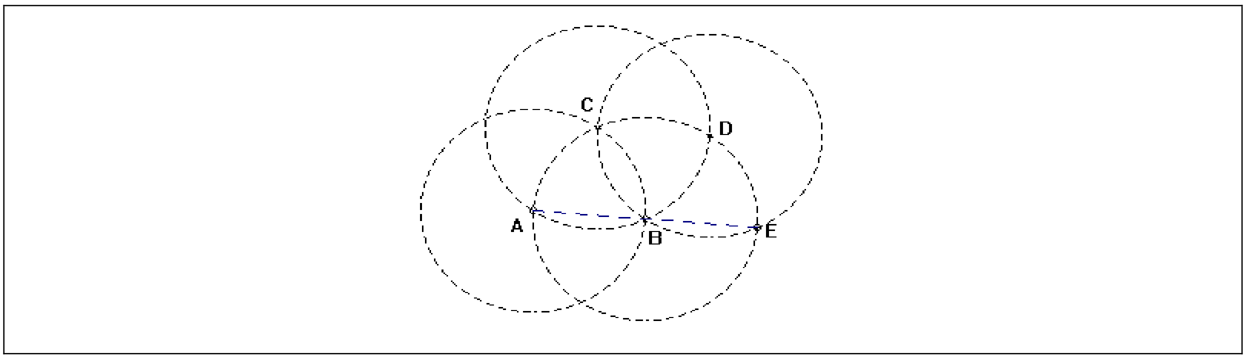


Figura **a.7** – Simetria central (2)

Atividade 4: Desenhe uma reta r e um ponto P fora dela. Construa o simétrico de P com relação à reta r.

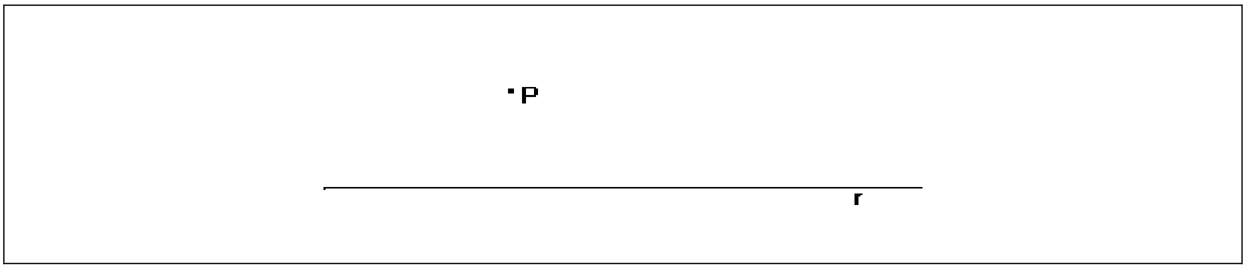


Figura a.8 – Uma reta, um ponto fora dela.

Possibilidades de resolução

1ª) Podemos simplesmente clicar na ferramenta "simetria axial", levar o cursor à tela, clicar no ponto P e depois na reta r, quando aparecerá o ponto P', simétrico de P em relação à reta r.

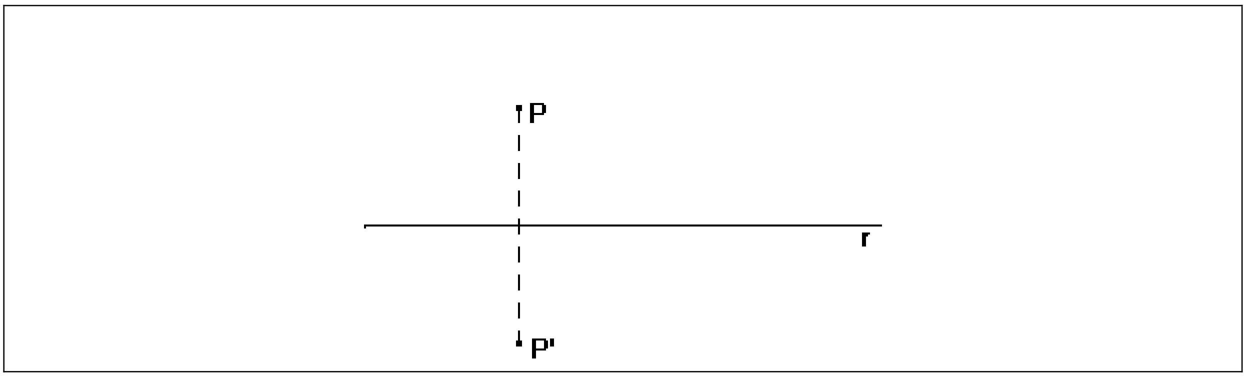


Figura **a.9** – Simetria axial no cabri

2ª) Pelo ponto P, traçamos a reta t perpendicular à reta r. Com centro no ponto O, intersecção de r e t, construímos uma circunferência de raio OP. O ponto P', intersecção dessa circunferência com a reta t, será o simétrico que buscamos.

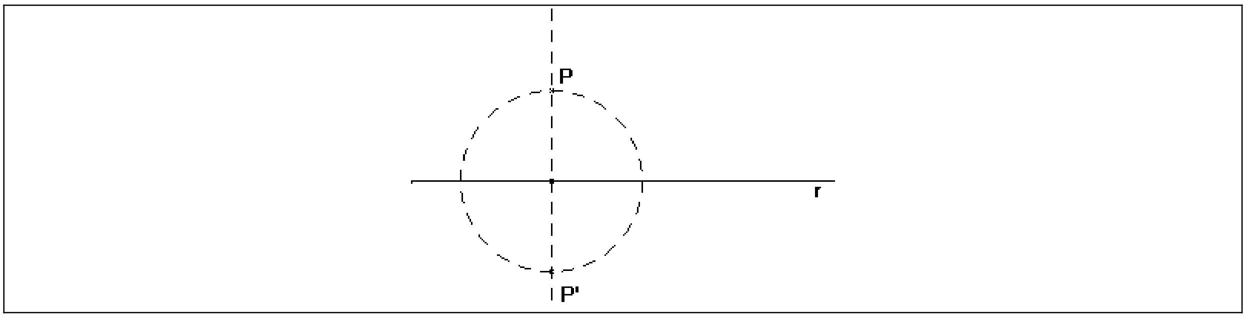


Figura **a.10** – Simetria axial (com reta e circunferência).

3ª) Com centro em P, criamos uma circunferência de raio suficiente a cortar a reta r, determinando os pontos A e B. Traçamos as circunferências (A, AB) e (B,AB), determinando a mediatriz do segmento AB. Por fim, construímos a circunferência de centro M (ponto médio do segmento AB) e raio MP. O ponto P', intersecção da circunferência (M,MP) com a mediatriz é o simétrico que procuramos.

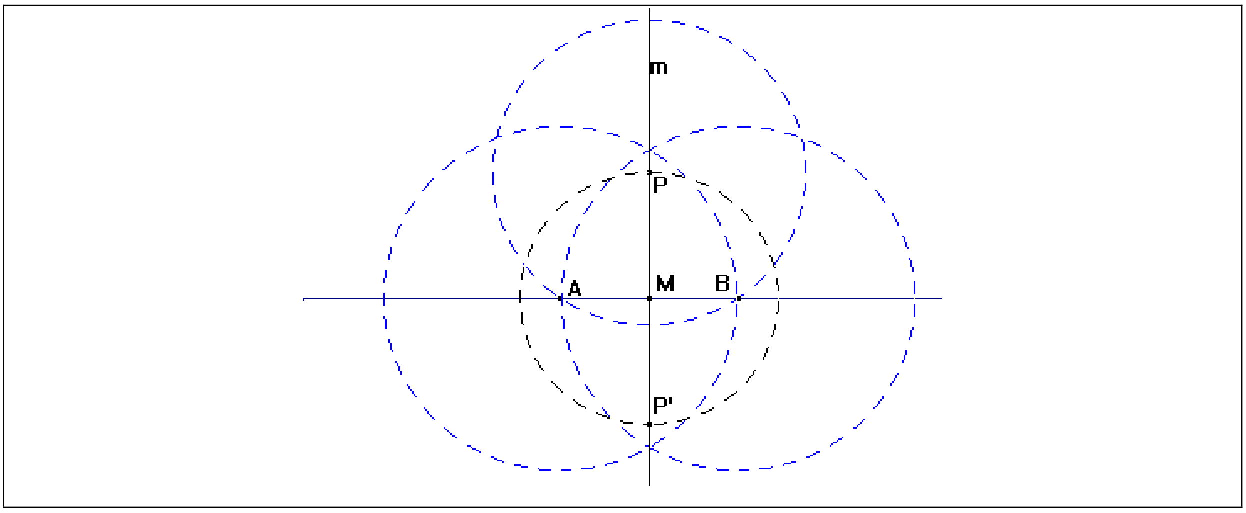


Figura **a.11** – Simetria axial com reta e circunferência (2)

4ª) Uma outra solução poder obtida, primeiro marcando-se dois pontos A e B sobre a reta r. Esta construção é muito simples, como segue:

a) Traçamos as circunferências (A,AP) e (B,BP);
b) O ponto P', intersecção das duas circunferências traçadas, é o simétrico procurado.

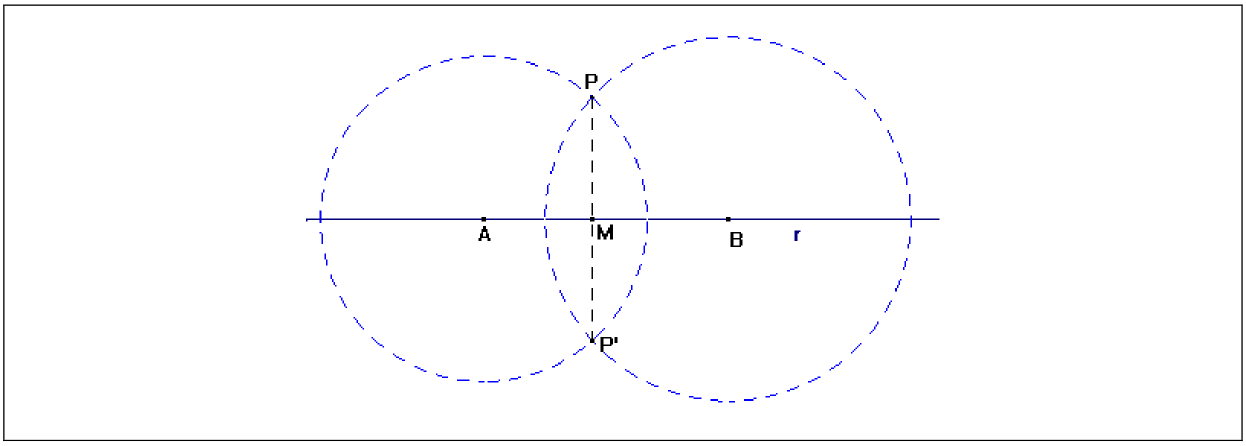


Figura **a.12**– Simetria axial (com o compasso apenas).

Observe-se que nesta possibilidade, podemos dispensar o traçado da reta. A figura abaixo ilustra melhor o queremos dizer[60].

---

[60] A diferença básica é que no primeiro caso, traçamos a reta e depois marcamos os pontos A e B e no segundo caso, marcamos os pontos A e B sem traçar a reta, caso em que assumimos que uma reta fica perfeitamente definida por dois de seus pontos.

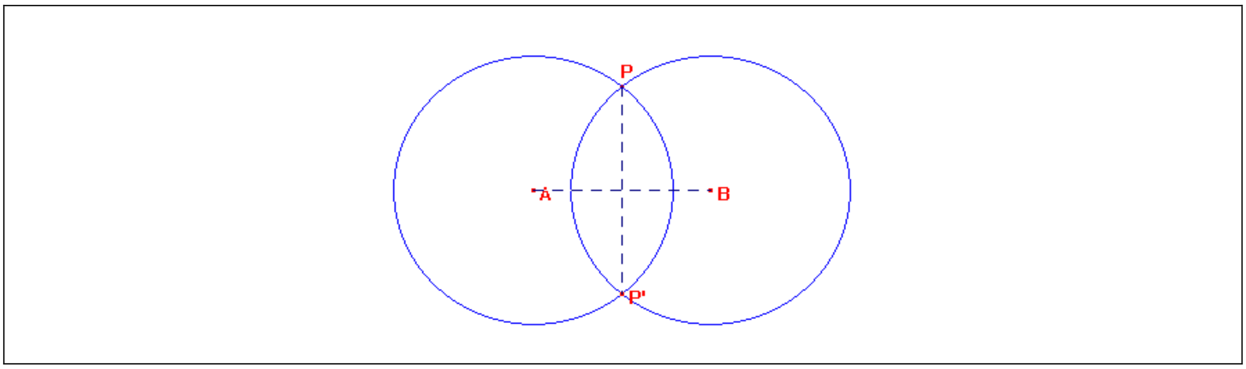


Figura a.13– Simetria axial com o compasso apenas (2)

A prova desta questão usa congruência de triângulos e será explorada em detalhes no Conjunto 1(Pois neste Conjunto 0, só focamos nas construções basicamente)

Atividade 5: Dividir uma circunferência em:

[a] em duas partes iguais;

Resolução já contemplada nas atividades 2 e 3 acima.

[b] em seis partes iguais

Construímos uma circunferência de centro O e raio r e marcamos o ponto 1 sobre a mesma. A seguir, a partir do ponto 1 e com mesmo raio r, construímos conforme a figura abaixo, determinando os pontos 2, 3, 4, 5 e 6.

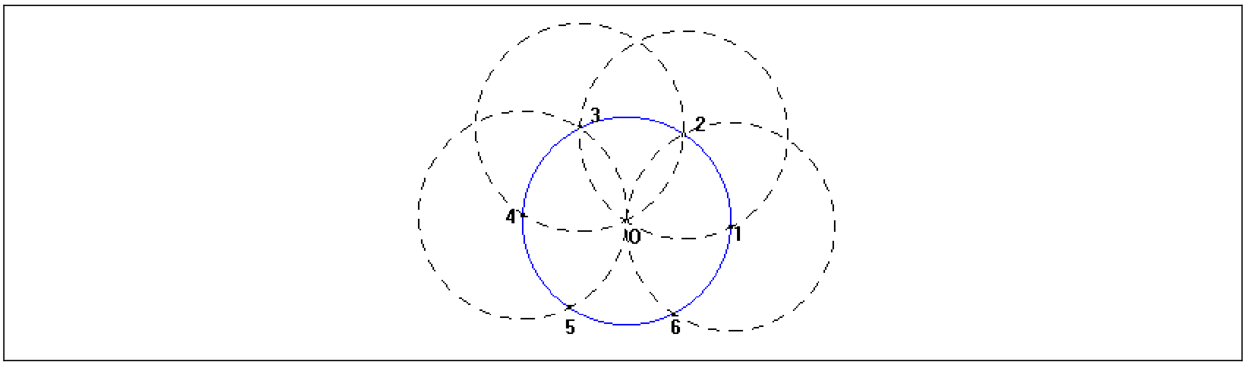


Figura a.14– Ciclotomia (1).

Prova: Por construção, temos seis triângulos eqüiláteros; segue que cada um dos ângulos centrais (no vértice O) mede 60° e, portanto, a circunferência fica dividida em 6 partes iguais.

[c] em três partes iguais

Da resolução anterior, basta considerarmos os pontos 1, 3 e 5 (por exemplo), que a a circunferência fica dividida em3 partes iguais, pois 360°/3 = 120°.

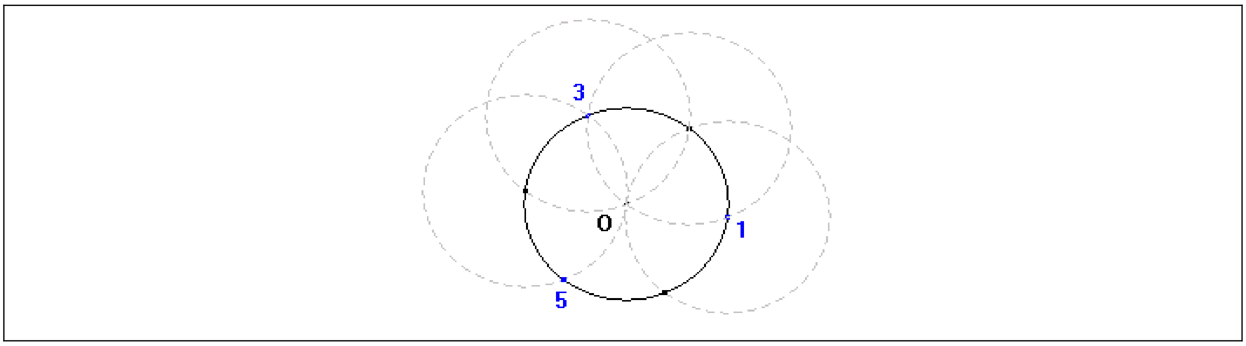


Figura a.15 – Ciclotomia (2)

Prova: Basta observar que cada um dos ângulos no vértice O (centro) mede 120° [60° + 60° = 120°, devido ao item (**a**)]; logo, a circunferência fica dividida em 3 partes iguais, pois 360°/3 = 120°.

Atividade 6: Construa um ângulo de 180°.

1ª) Basta traçar uma circunferência e um diâmetro, como na figura abaixo.

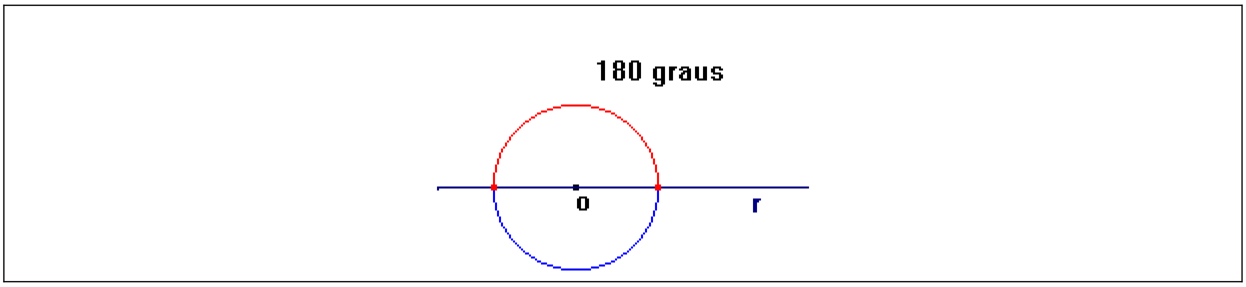


Figura **a.16** – Ângulo raso.

2ª) Marcar um ponto P numa circunferência e encontrar o seu simétrico em relação ao centro.

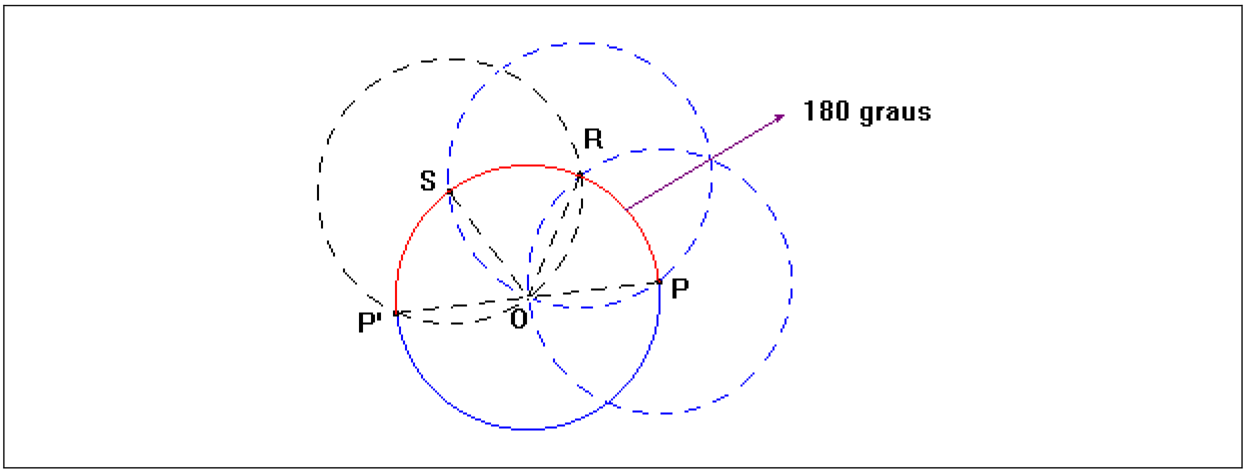


Figura **a.17** – Construção de um ângulo raso (com o compasso apenas).

Os três triângulos P'OS, SOR e ROP são eqüiláteros (por construção) e, portanto, cada um dos três ângulos no vértice O medem 60°, o que dá um ângulo de 180° em torno de O (logo, os três pontos P, O e P' são colineares) . Observemos que no caso de "dobrar um segmento de reta" ou "encontrar o simétrico de um ponto (simetria central)" esta mesma solução pode ser usada, bastando lembrar que P'O = PO = raio e daí, PP' = 2.OP = 2.(raio).

Atividade 7: Construa 3 pontos colineares. Faça a verificação!
Esta atividade foi contemplada nas questões 1, 2, 3, 4 e 5. Entretanto, apresentaremos outras opções, como segue.

1ª) Marcamos dois pontos A e B e por eles passamos uma reta. Depois assinalar um ponto sobre esta reta (distinto de A e B).

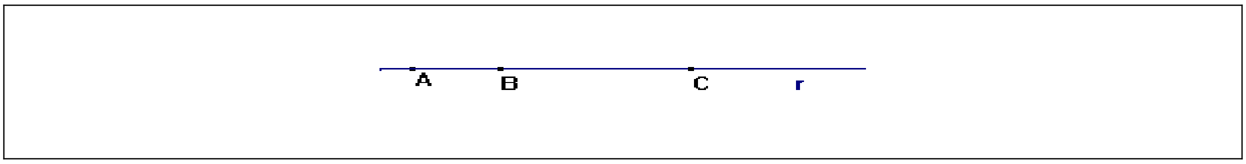


Figura a.18 – Três pontos colineares.

2ª) Usando o compasso apenas.

- ✓ Traçamos as circunferências (A,AB) e (B,AB), que se intersectam em C e C'.;
- ✓ Com centros em C e em C' construímos s circunferências de um mesmo raio (maior que a distância de C à reta AB);

- ✓ Tais circunferências se cortam nos pontos P e P', os quais são colineares com A e B.

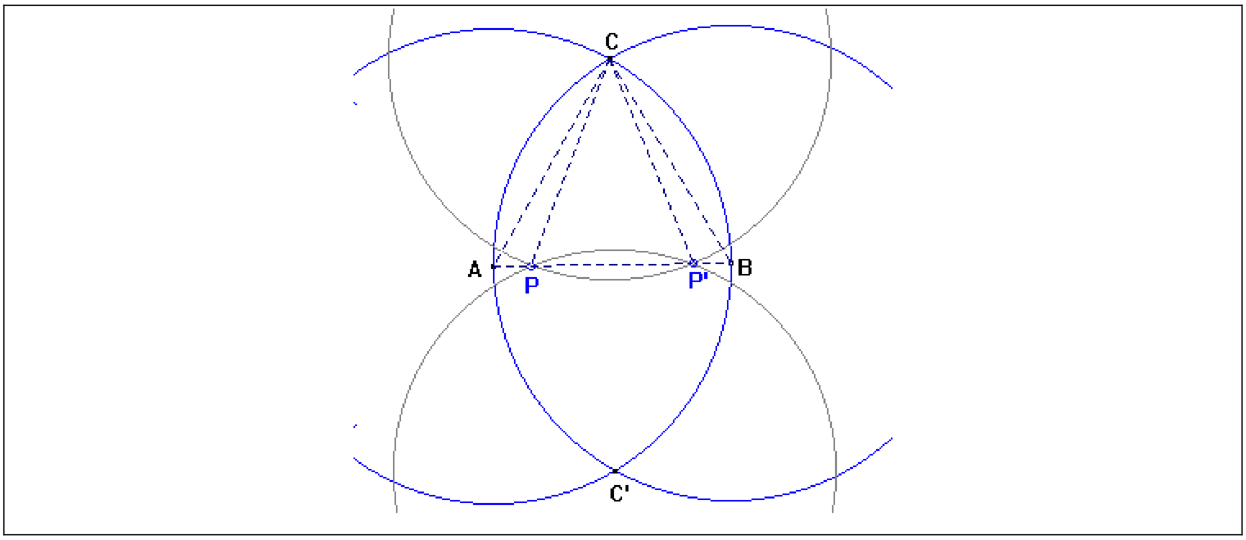
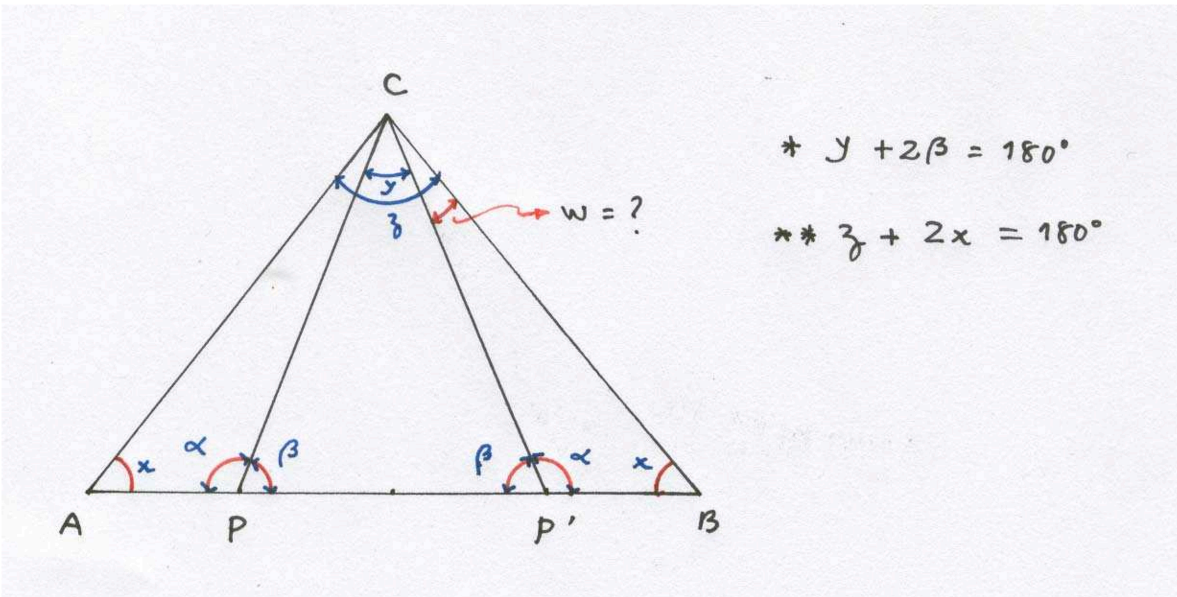


Figura a.19 – Construção de pontos colineares com A e B.

Prova: Observemos que os triângulos CAB e CPP' são isósceles (por construção). Logo, os ângulos da base são iguais desses dois triângulos são iguais.

Para provar que o ponto P' (por exemplo) é colinear com A e B, bastar concluir que $\alpha + \beta = 180^o$, conforme a figura **a-20** desenhada a seguir.



Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:

No triângulo CAB: $z = 180^o - 2x$ e

No triângulo CPP’: $y = 180^o - 2\beta$.

Por outro lado, sendo w a medida do ângulo $B\hat{C}P'$, tem-se que:

$$w = \frac{z-y}{2} = \frac{(180^o - 2x) - (180^o - 2\beta)}{2} = \beta - x \,.$$

Finalmente, como no triângulo BCP’

$$w + \alpha + x = 180^o \,,$$

vem que

$$(\beta - x) + \alpha + x = 180^o \,,$$

ou seja:

$$\alpha + \beta = 180^o \,.$$

como queríamos.

ANEXO 3

Respostas das atividades do **Conjunto 0** – Por Bruno

Atividade 1

1ª forma:

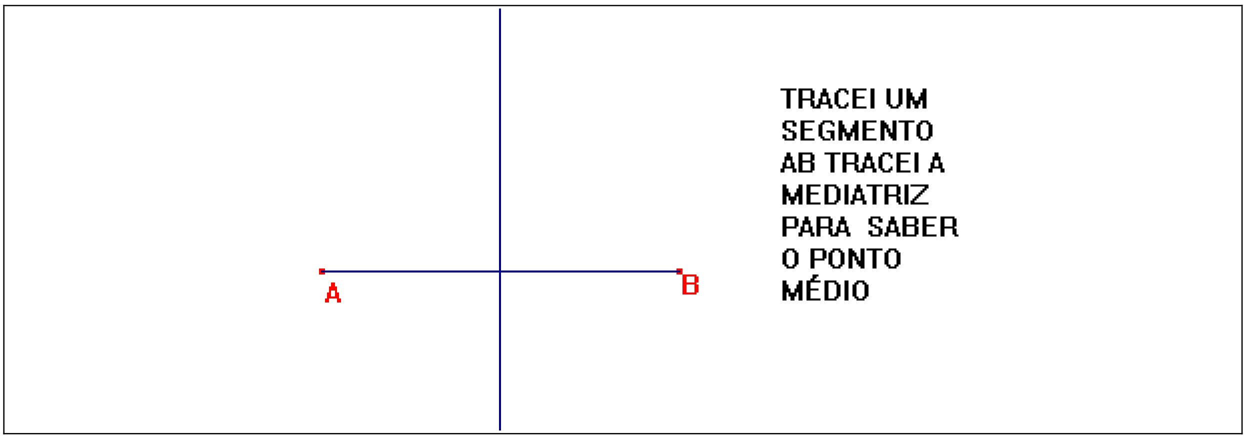


Figura a-21 – Resposta da ativ.1, por Bruno

2ª forma

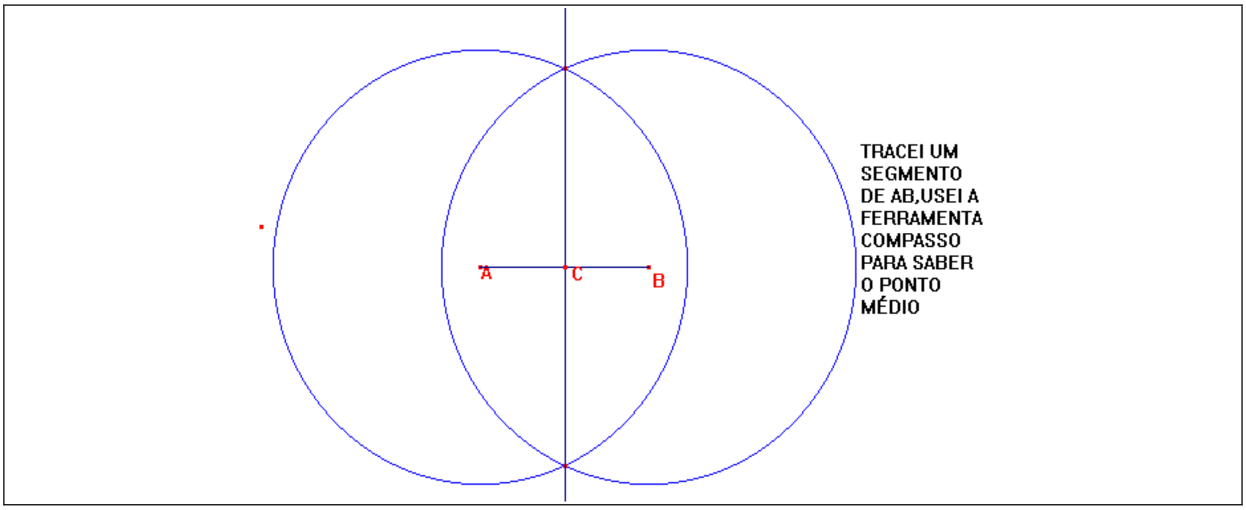


Figura a-22 -- Resposta da ativ.1, por Bruno

Atividade 2

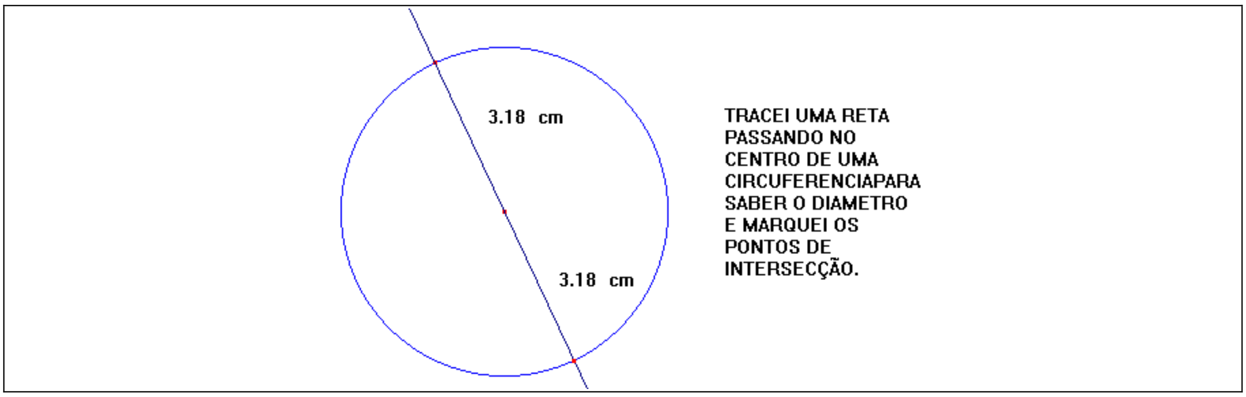


Figura a-23 -- Resposta da ativ.2, por Bruno

Atividade 3

1ª forma

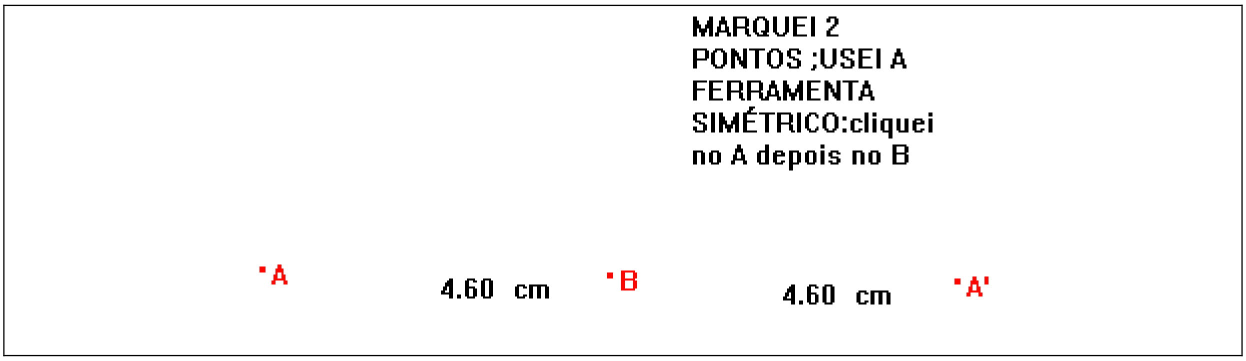


Figura a-24 -- Resposta da ativ.3, por Bruno

2ª forma

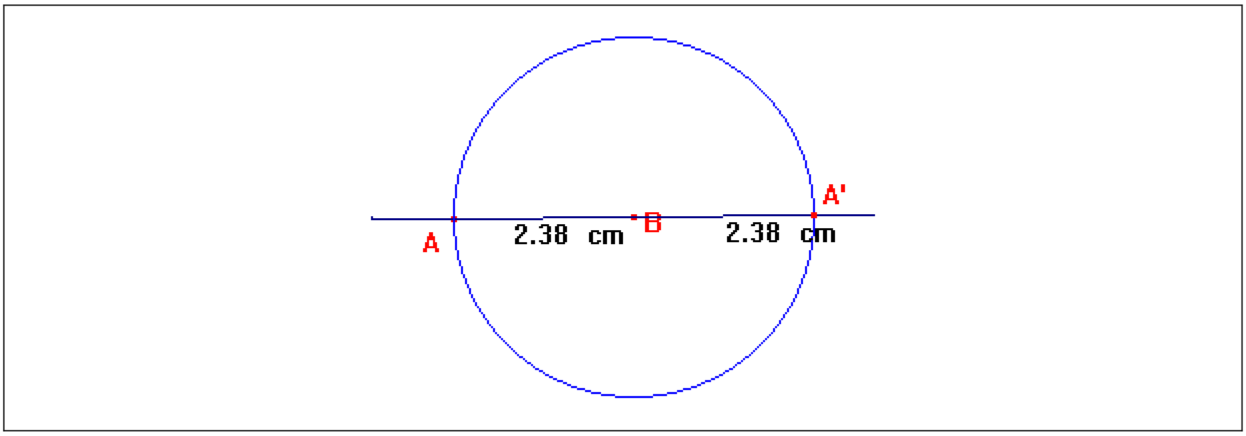


Figura a-25 -- Resposta da ativ.3, por Bruno

3ª forma

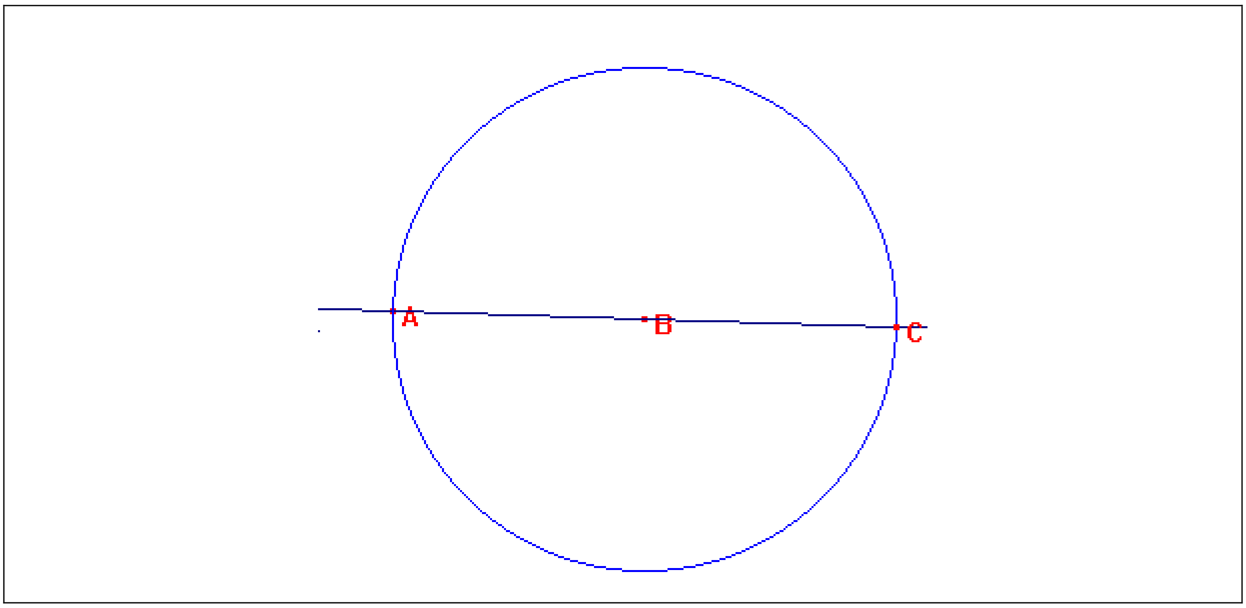


Figura a-26 -- Resposta da ativ.3, por Bruno

Atividade 4

1ª forma

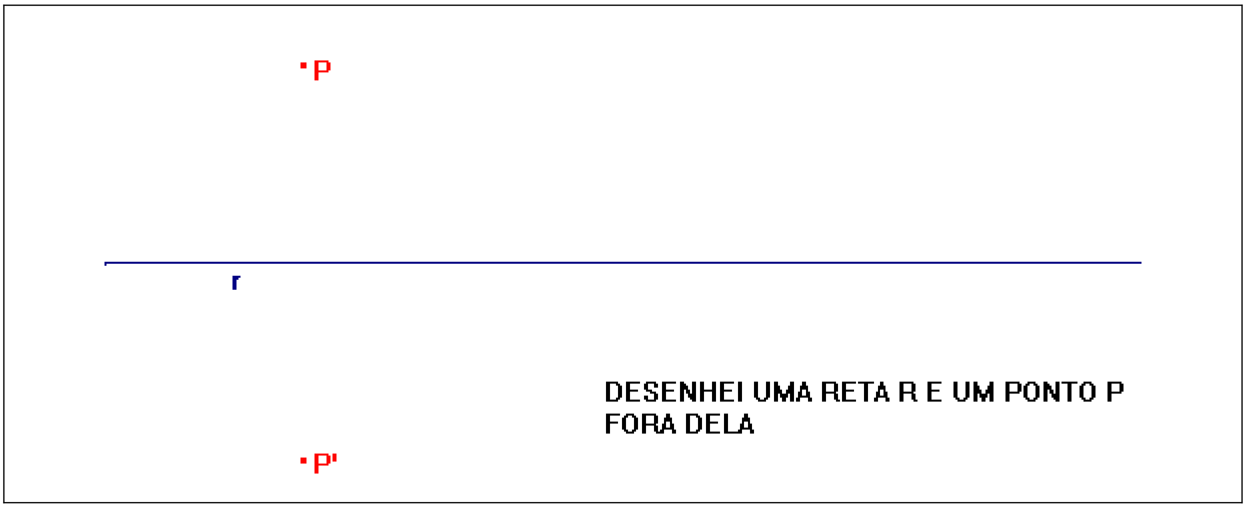


Figura a-27 -- Resposta da ativ.4, por Bruno

2ª forma

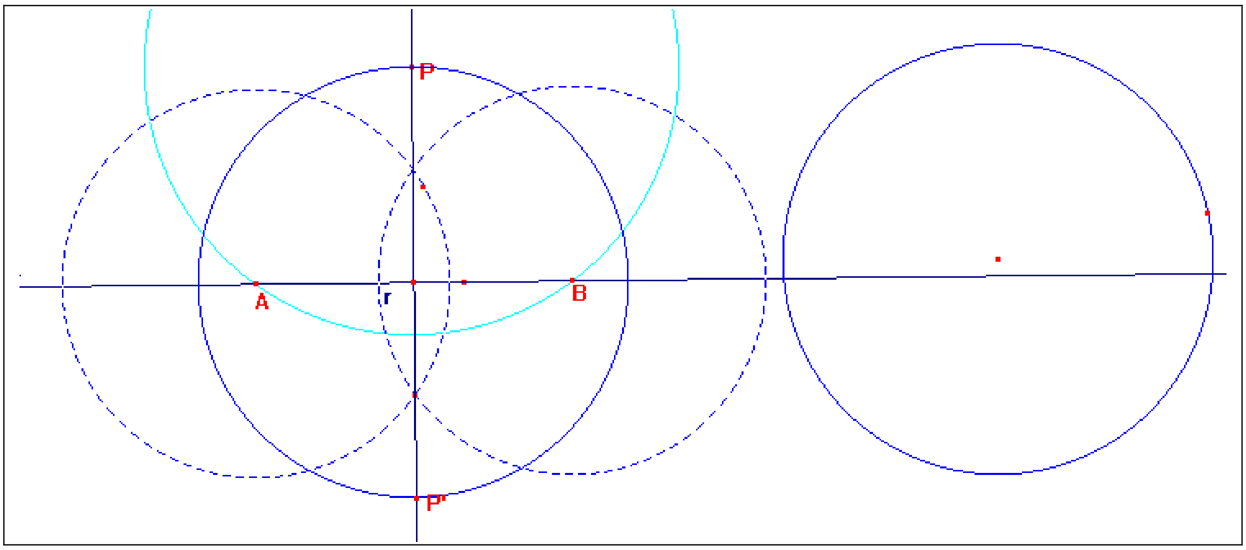


Figura a-28 -- Resposta da ativ.4, por Bruno

Atividade 5

1ª forma

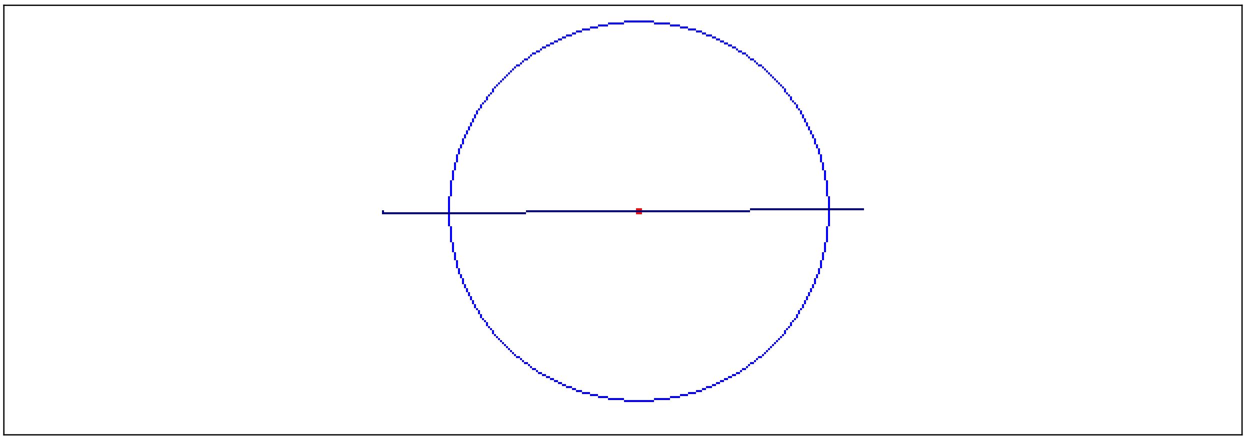


Figura a-29 -- Resposta da ativ.5, por Bruno

2ª forma

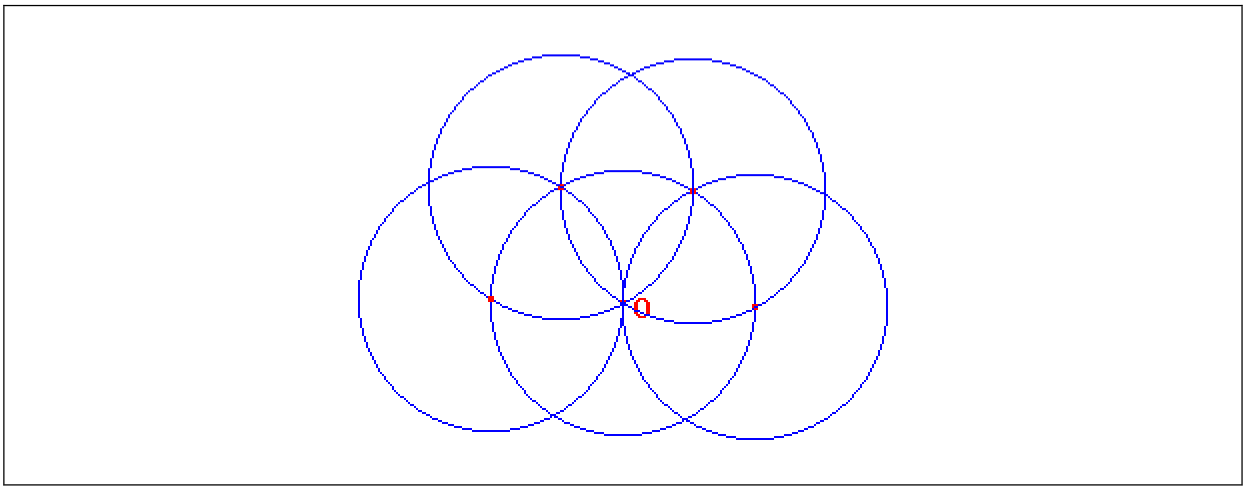


Figura a-30 -- Resposta da ativ.5, por Bruno

3ª forma

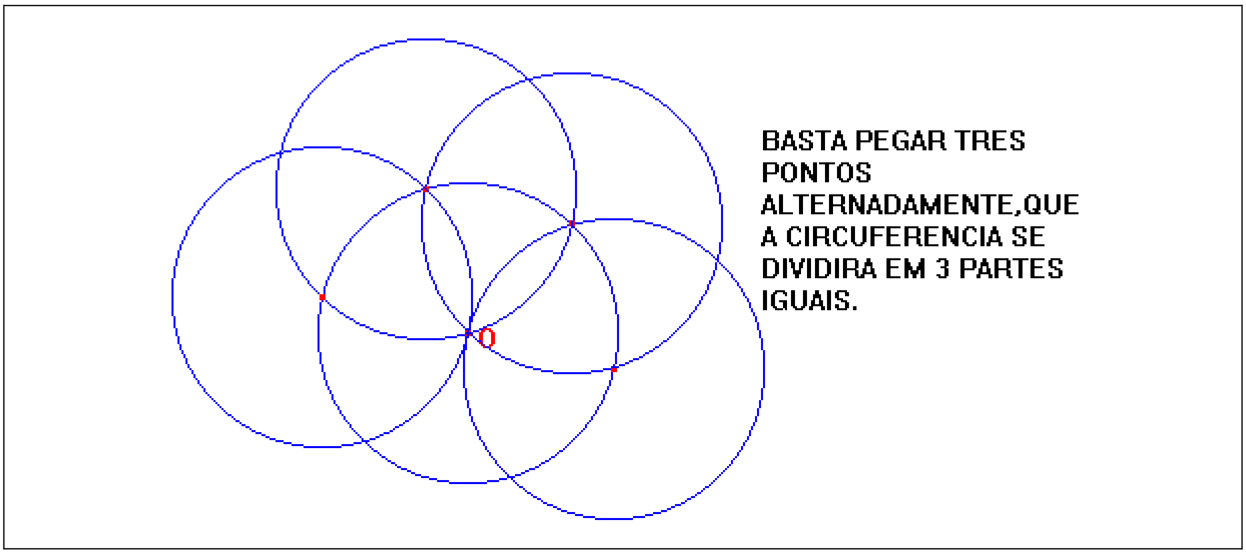


Figura a-31 -- Resposta da ativ.5, por Bruno

Atividade 6

1ª forma

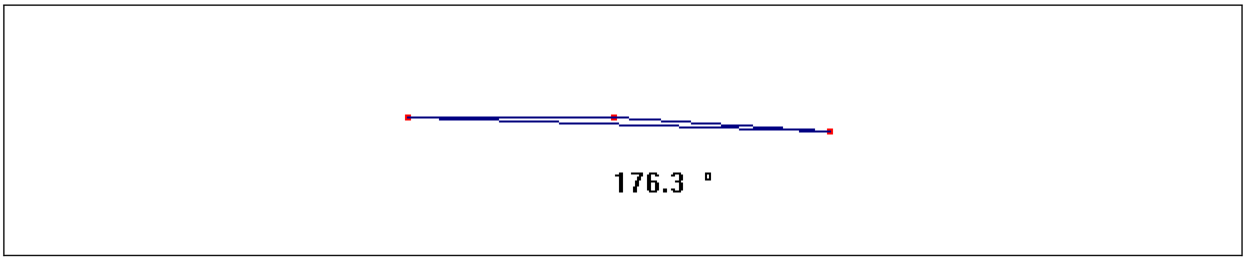


Figura a-32 -- Resposta da ativ.6, por Bruno

Atividade 7

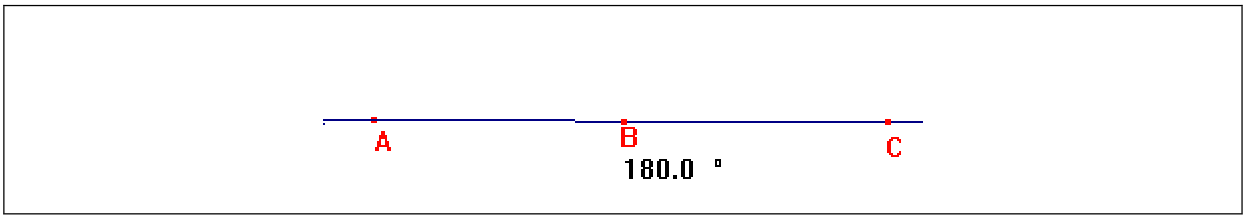


Figura a-33 -- Resposta da ativ.7, por Bruno

ANEXO 4

Respostas das atividades do **Conjunto 0**, pela dupla Augusto/Cristina

Atividade 1

1ª forma

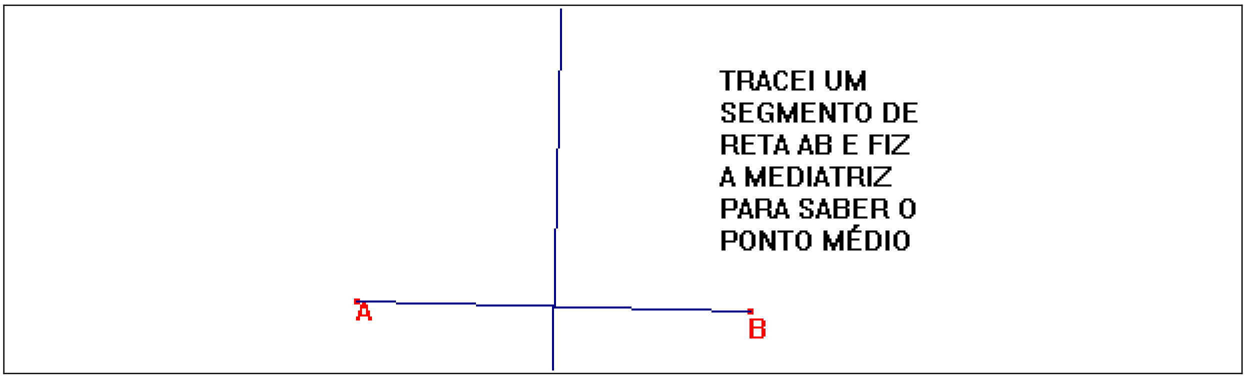


Figura a-34 -- Resposta da ativ.1, por Augusto/Cristina

2ª forma

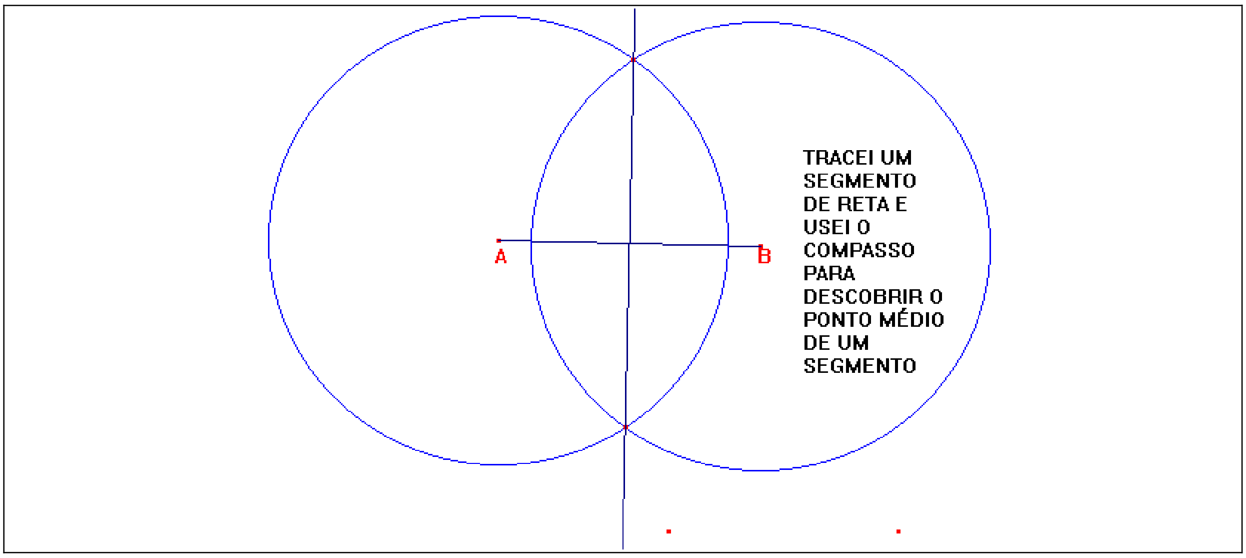


Figura a-35 -- Resposta da ativ.1, por Augusto/Cristina

Atividade 2

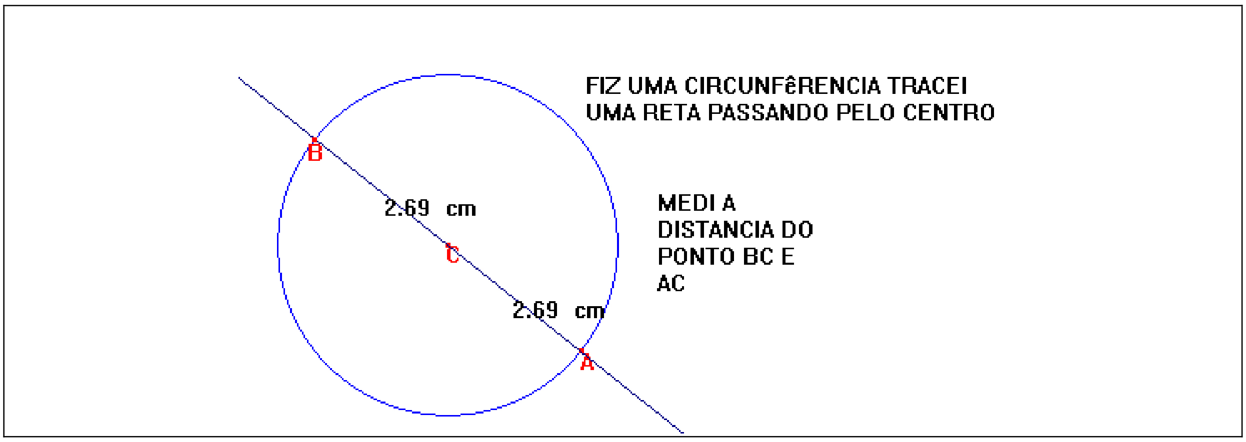


Figura a-36 -- Resposta da ativ.2, por Augusto/Cristina

Atividade 3

1ª forma

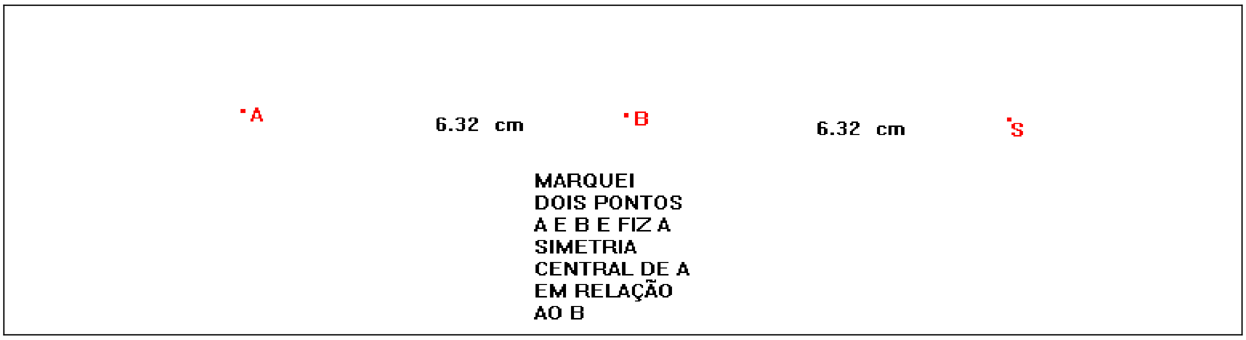


Figura a-37 -- Resposta da ativ.3, por Augusto/Cristina

2ª forma

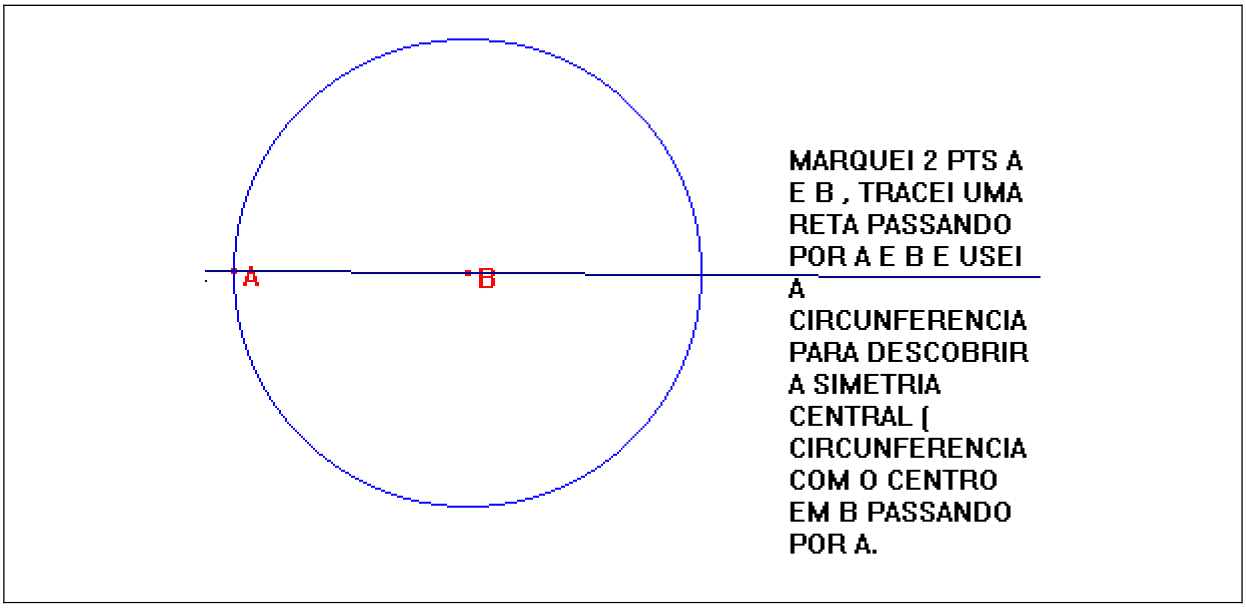


Figura a-38 -- Resposta da ativ.3, por Augusto/Cristina

3ª forma

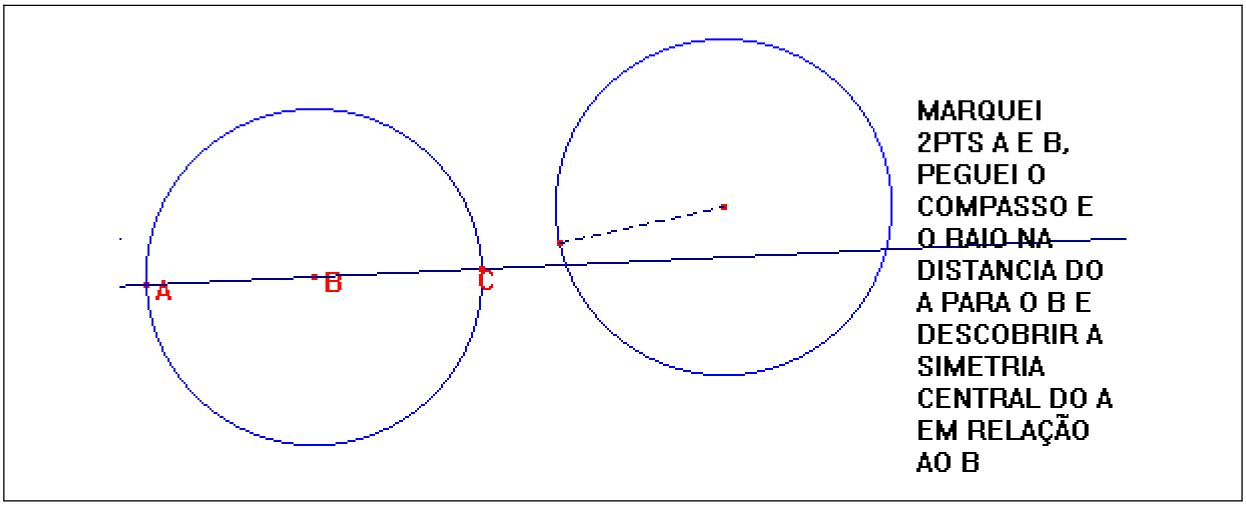


Figura a-39 -- Resposta da ativ.3, por Augusto/Cristina

Atividade 4

1ª forma

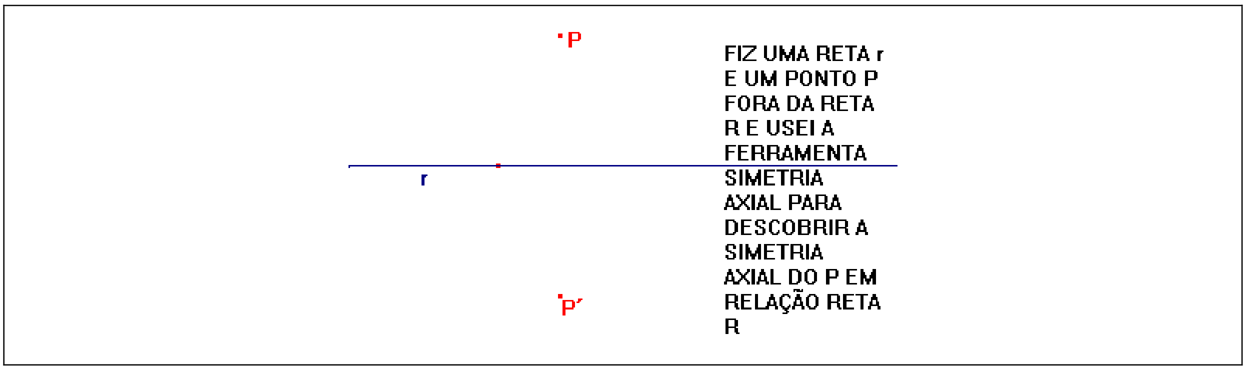


Figura a-40 -- Resposta da ativ.4, por Augusto/Cristina

2ª forma

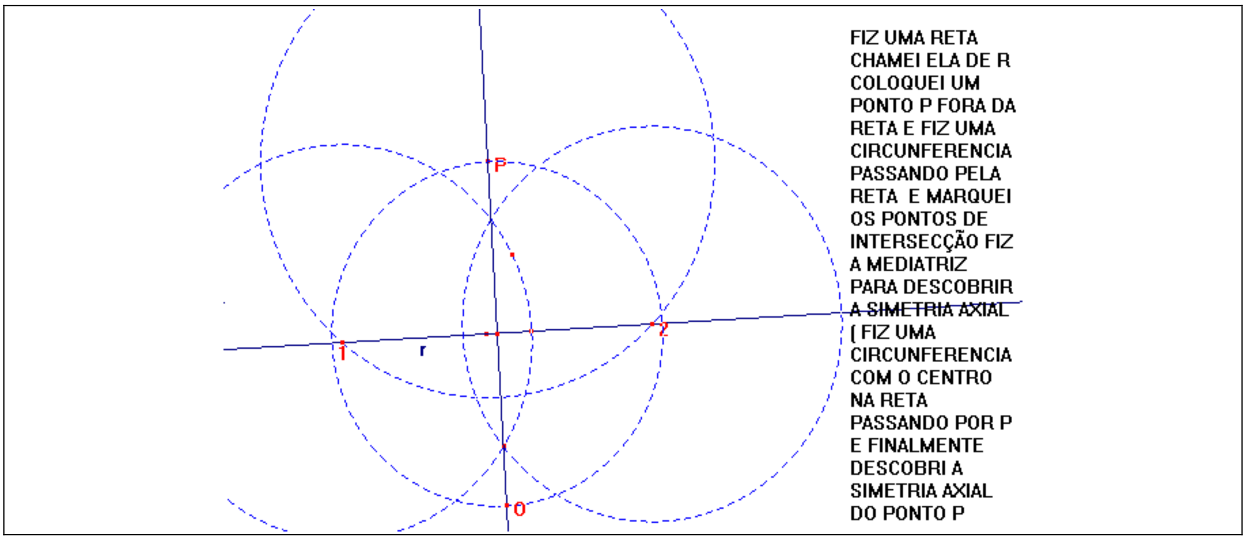


Figura a-41 -- Resposta da ativ.4, por Augusto/Cristina

Atividade 5

1ª forma

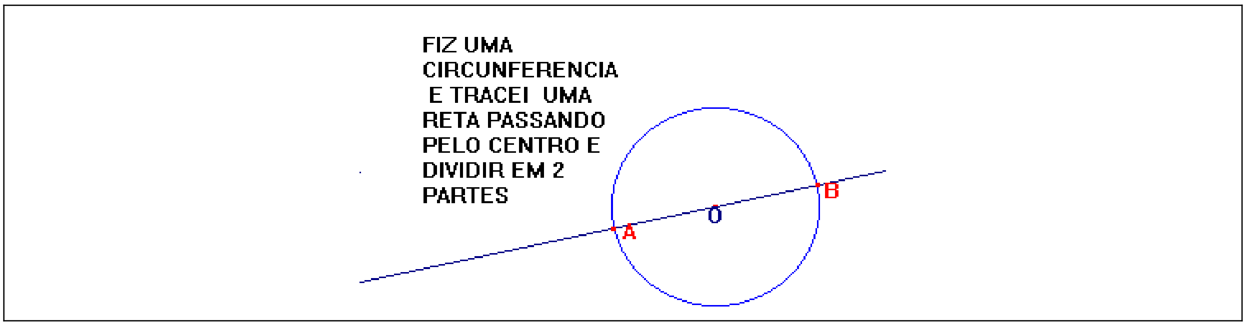


Figura a-42 -- Resposta da ativ.5, por Augusto/Cristina

2ª forma

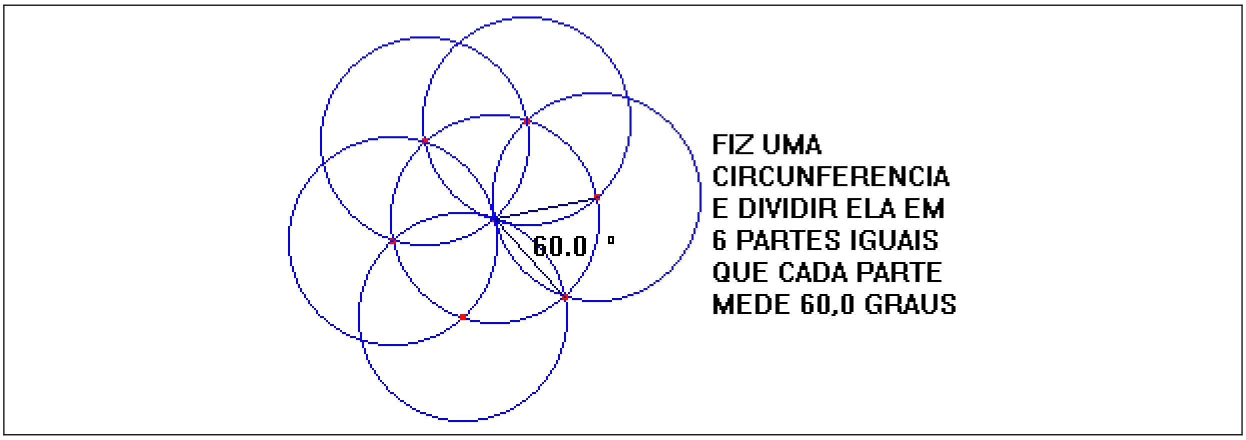


Figura a-43 -- Resposta da ativ.5, por Augusto/Cristina

3ª forma

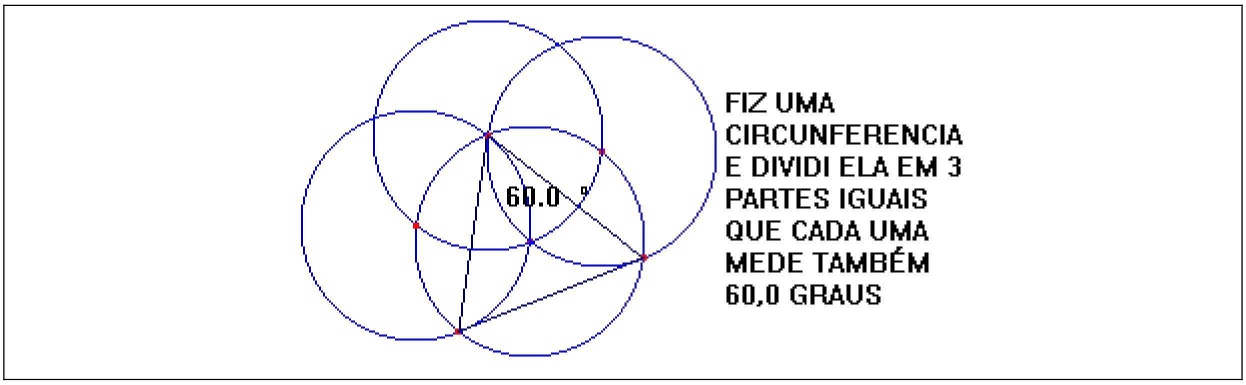


Figura a-44 -- Resposta da ativ.5, por Augusto/Cristina

Atividade 6

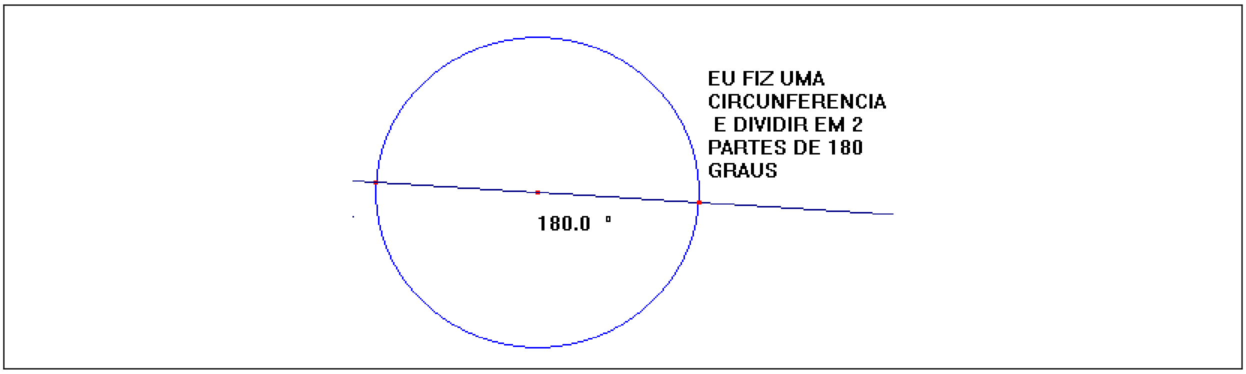


Figura a-45 -- Resposta da ativ.6, por Augusto/Cristina

Atividade 7

1ª forma

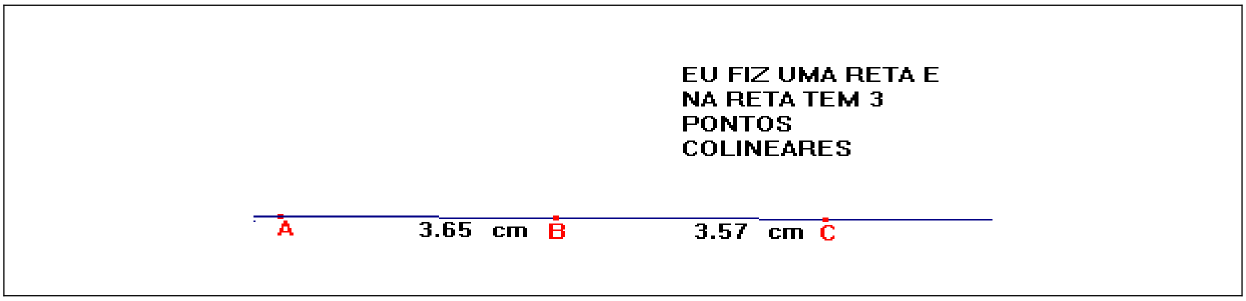


Figura a-47 -- Resposta da ativ.7, por Augusto/Cristina

2ª forma

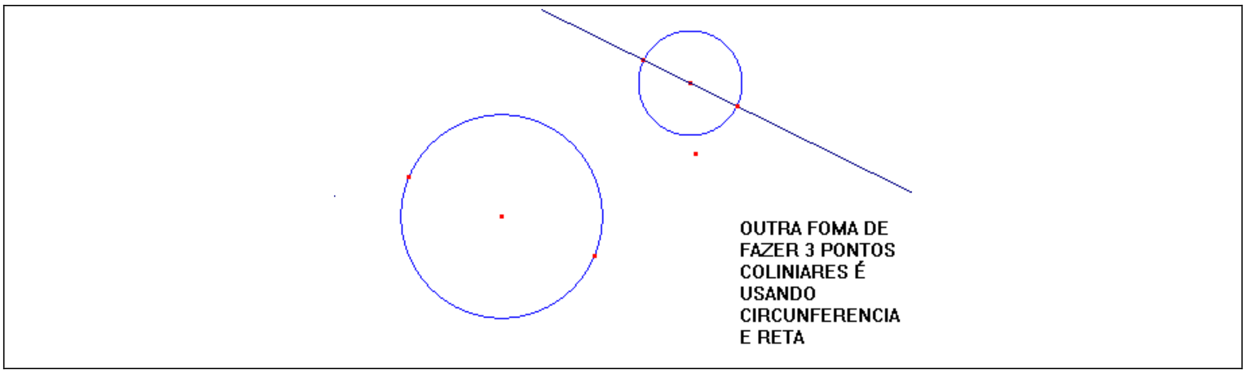


Figura a-48 -- Resposta da ativ.7, por Augusto/Cristina

ANEXO 5

Atividades Previstas do Conjunto 1 (1ª Sessão)

Conjunto 1.1: Introduzindo construções geométricas no Cabri

[1] Construa uma circunferência qualquer e marque um ponto **P** sobre a mesma. Use a ferramenta "animação" para fazer com que o ponto **P** se movimente sobre a circunferência. Marque um outro ponto, **A**, sobre a circunferência, e repita a operação. O que você pode observar?

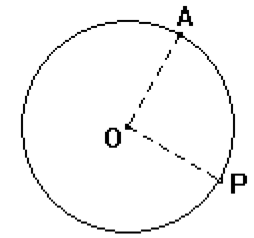


Figura a-49 – Ativ.1

[2] Na circunferência abaixo, os segmentos OA, OB, OC e OD têm a mesma medida.

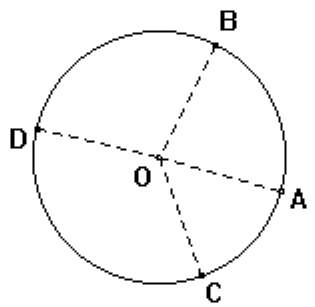


Figura a-50 – Ativ.2

[3] Por quê o círculo C_1 tem o mesmo tamanho que o círculo C_2?

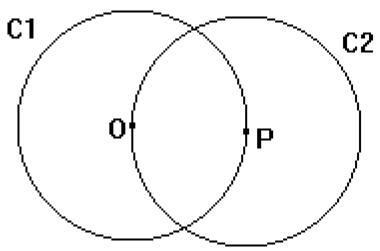


Figura a-51 – Ativ.3

[4] Construir uma reta que divide uma circunferência um duas partes iguais.

Conjunto 1.2: Introdução à prova

[5] Dobrar o segmento de reta AO

[a] Usando todas as ferramentas disponíveis do Cabri.

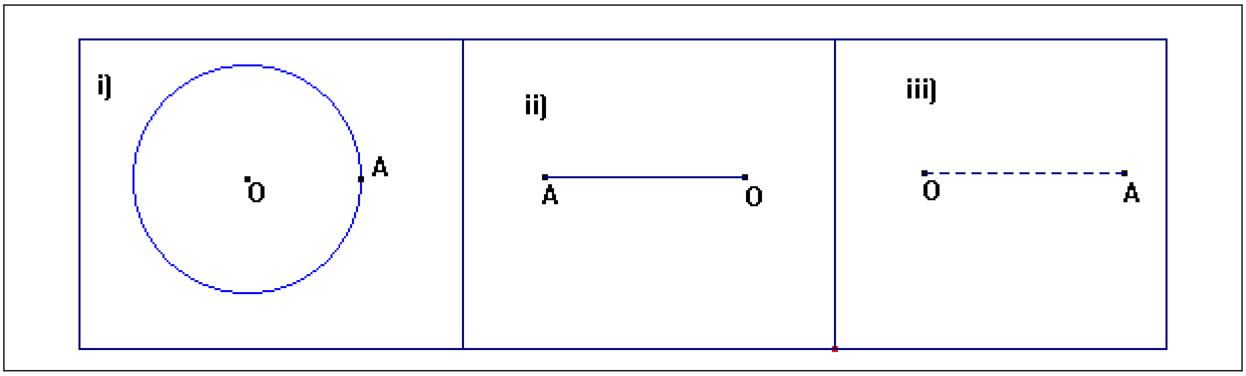


Figura a-52 – Ativ.5

Conjunto 1.3 – "Caixas pretas":

[6] Procure fazer uma cópia exata de cada figura a seguir:
Mas antes, procure movimentar a figura ou partes da mesma.

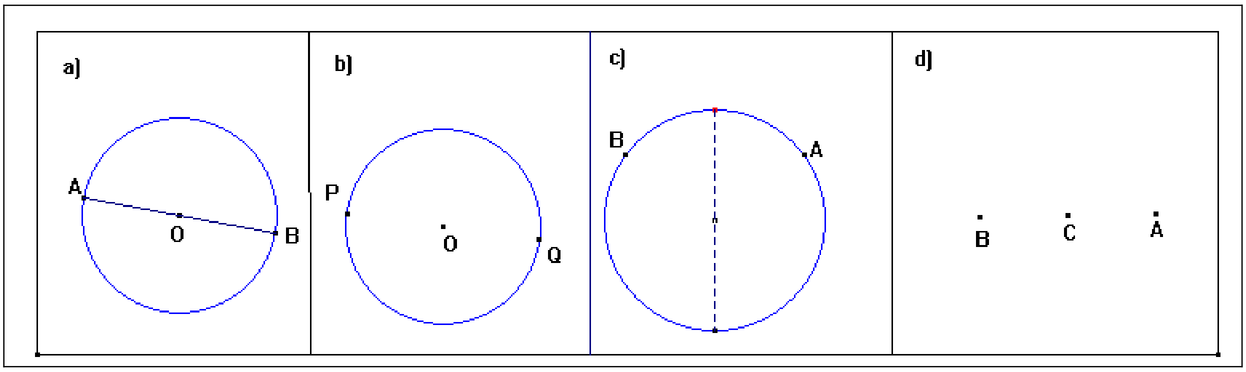


Figura a-53 – Ativ.6

Conjunto 1.4 – Episódio de ensino: Introduzir as congruências.

Conjunto 1.5 :Construções de *Mascheroni* (Ponto simétrico)

[7] (Resolva esta atividade de duas maneiras: (**a**) Utilizando todas as ferramentas disponíveis no Cabri; e depois (**b**) Usando somente circunferências.)

a) Encontrar o simétrico do ponto P em relação à reta.

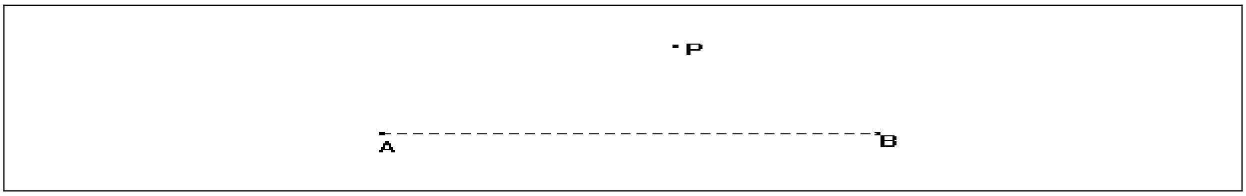


Figura a-54 – Ativ.7a

b) Construa o simétrico do ponto P em relação ao diâmetro AB

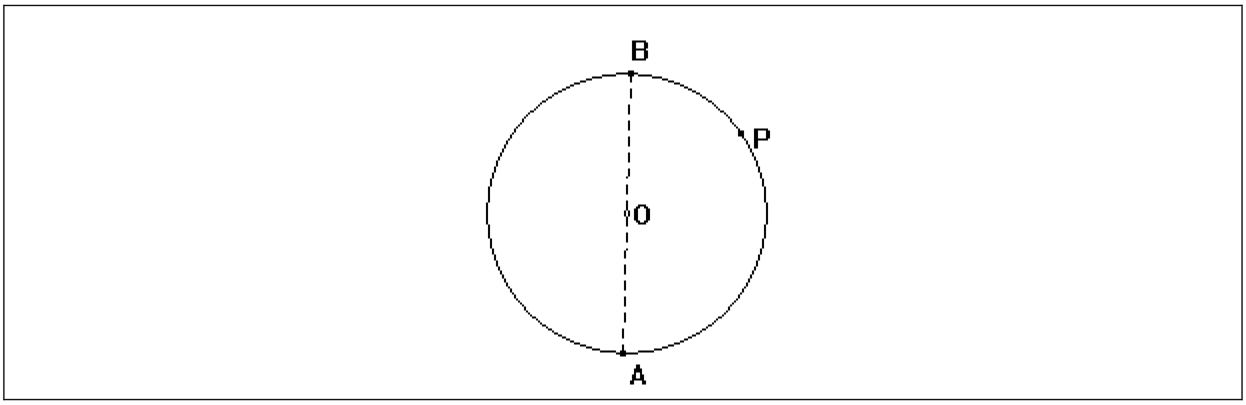


Figura a-55 – Ativ.7b

ANEXO 6

Respostas das Atividades Realizadas do **Conjunto 1 – 1ª Sessão**, pela dupla Augusto/Cristina

Atividade 1

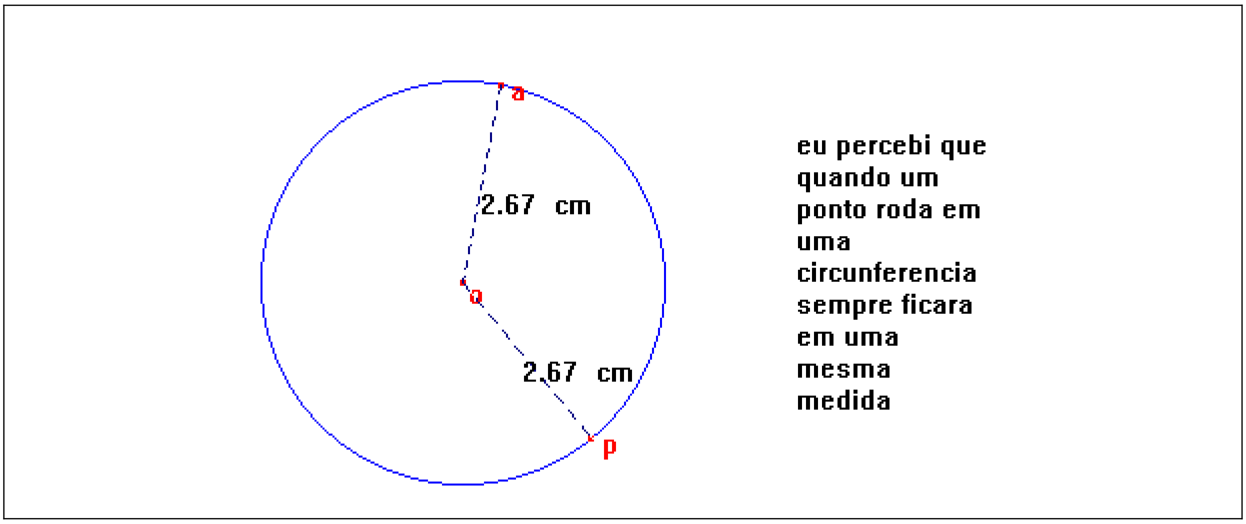


Figura a-56 – Resp. da ativ.1, por Augusto/Cristina

Atividade 2

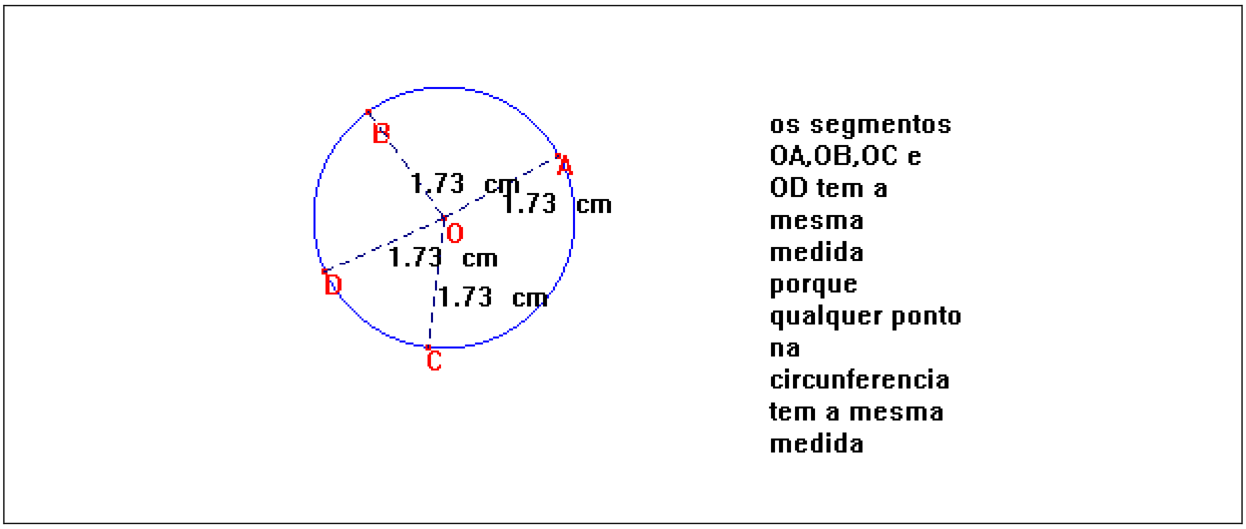


Figura a-57 -- Resp. da ativ.2, por Augusto/Cristina

Atividade 3

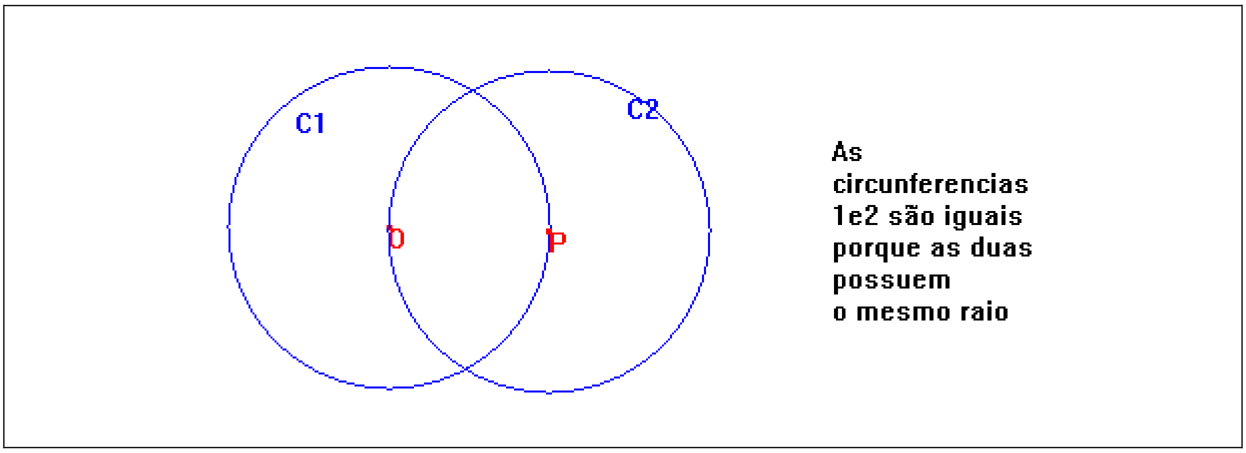


Figura a-58 -- Resp. da ativ.3, por Augusto/Cristina

Atividade 4

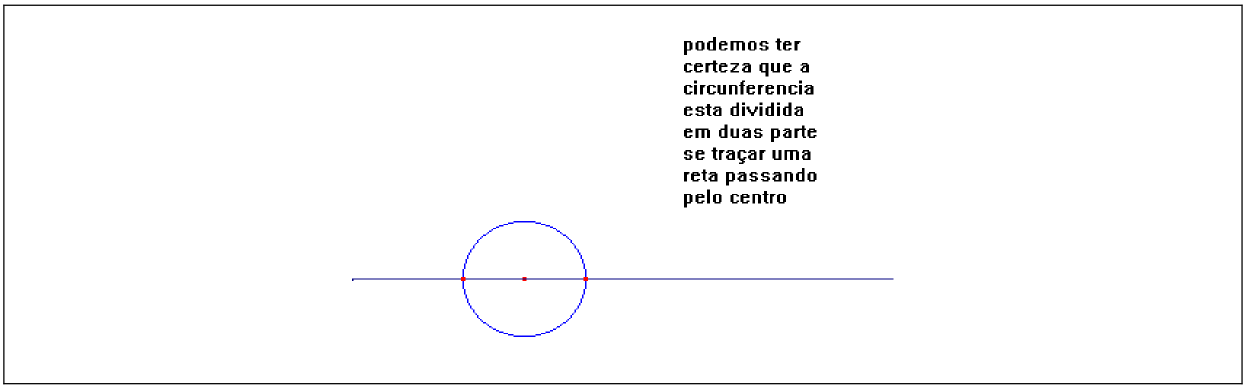


Figura a-59 -- Resp. da ativ.4, por Augusto/Cristina

Atividade 5

5-a)

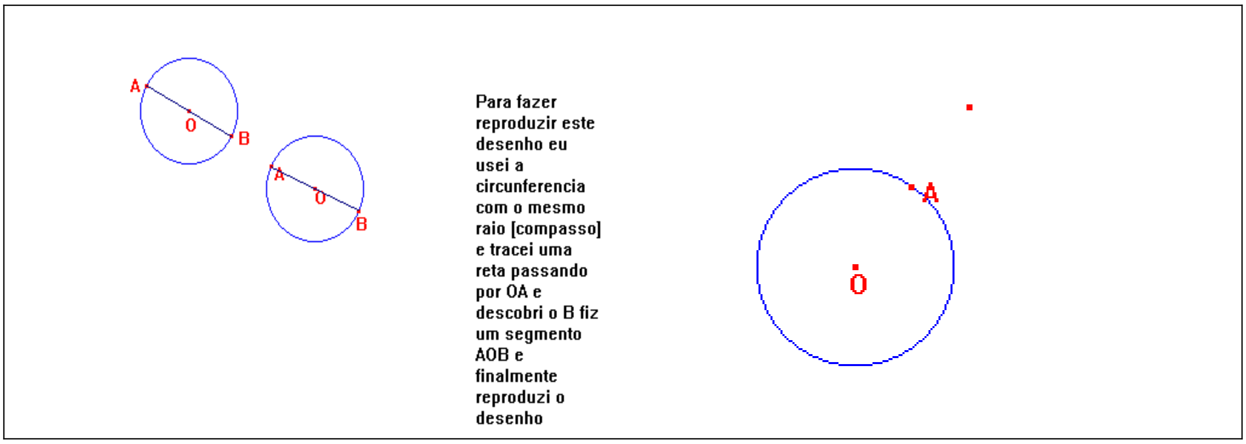


Figura a-60 -- Resp. da ativ.5a, por Augusto/Cristina

5-b)

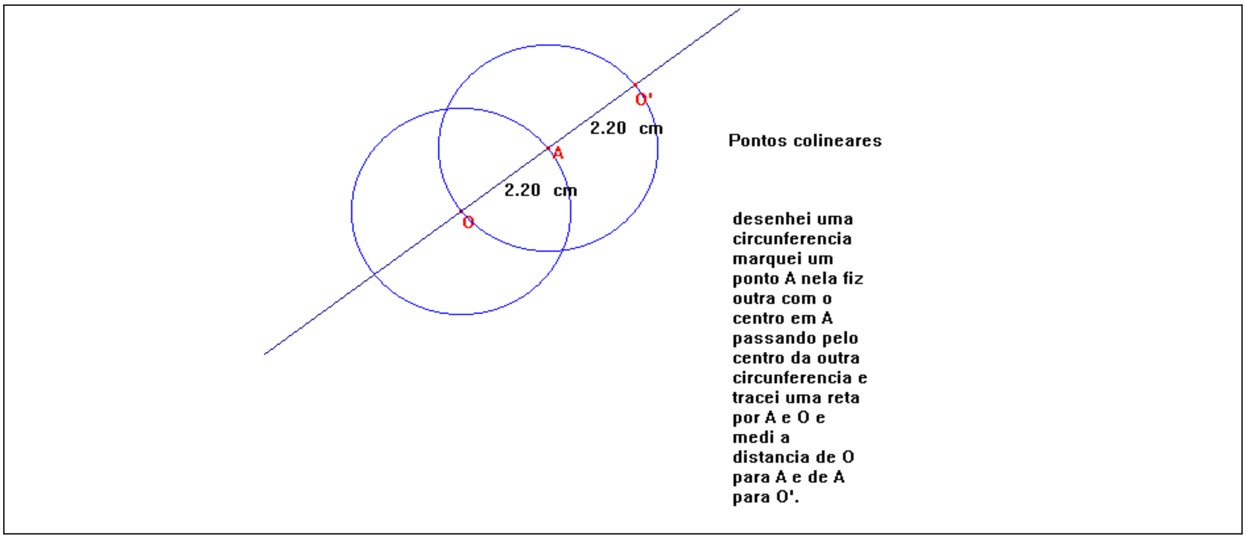


Figura a-61 -- Resp. da ativ.5b, por Augusto/Cristina

5-c)

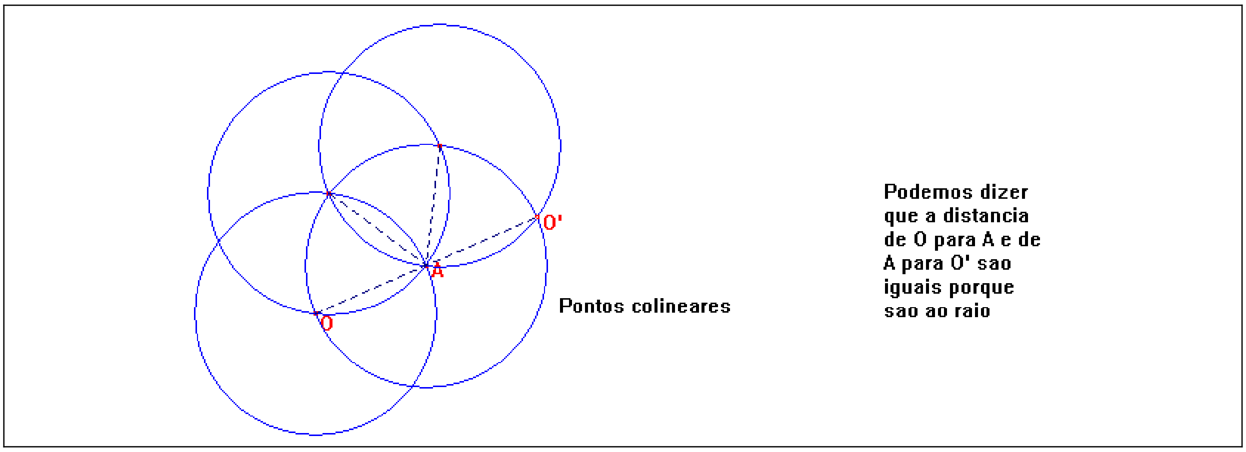


Figura a-62 -- Resp. da ativ.5c, por Augusto/Cristina

Atividade 6

6-a)

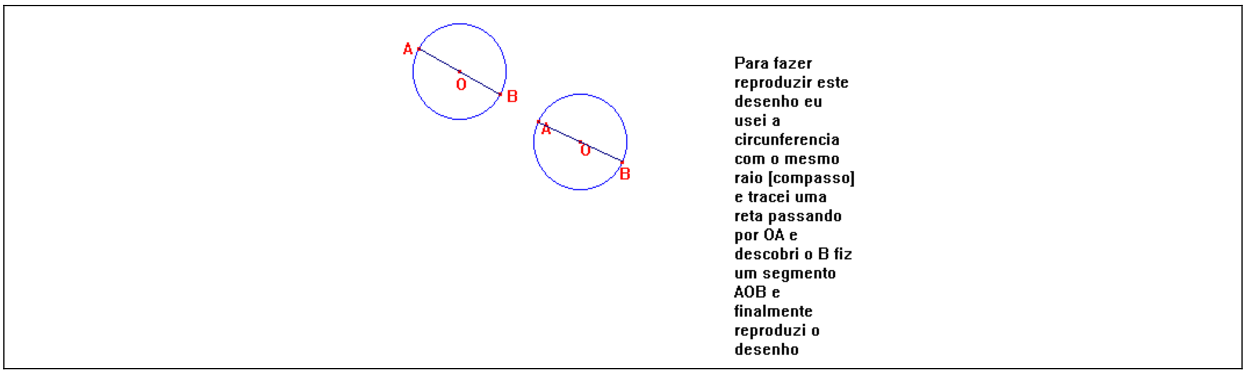


Figura a-63 -- Resp. da ativ.6a, por Augusto/Cristina

6-b)

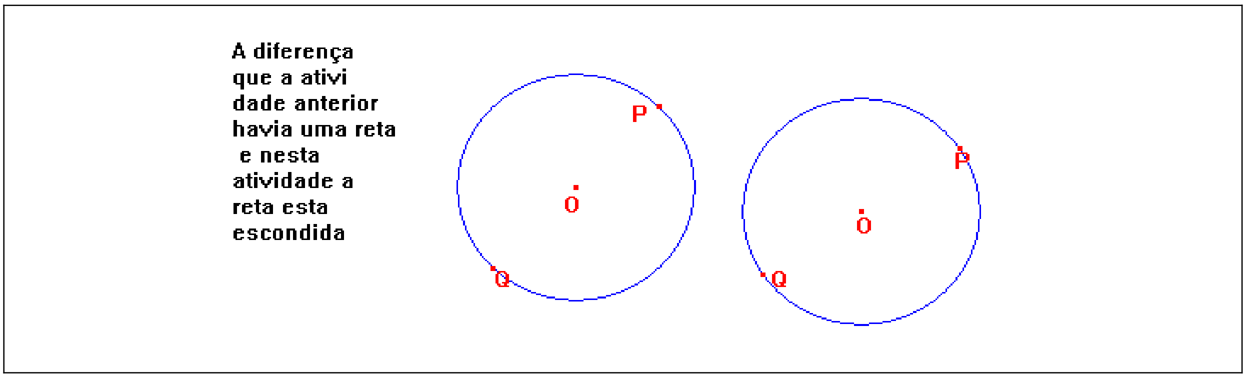


Figura a-64 -- Resp. da ativ.6b, por Augusto/Cristina

6-c)

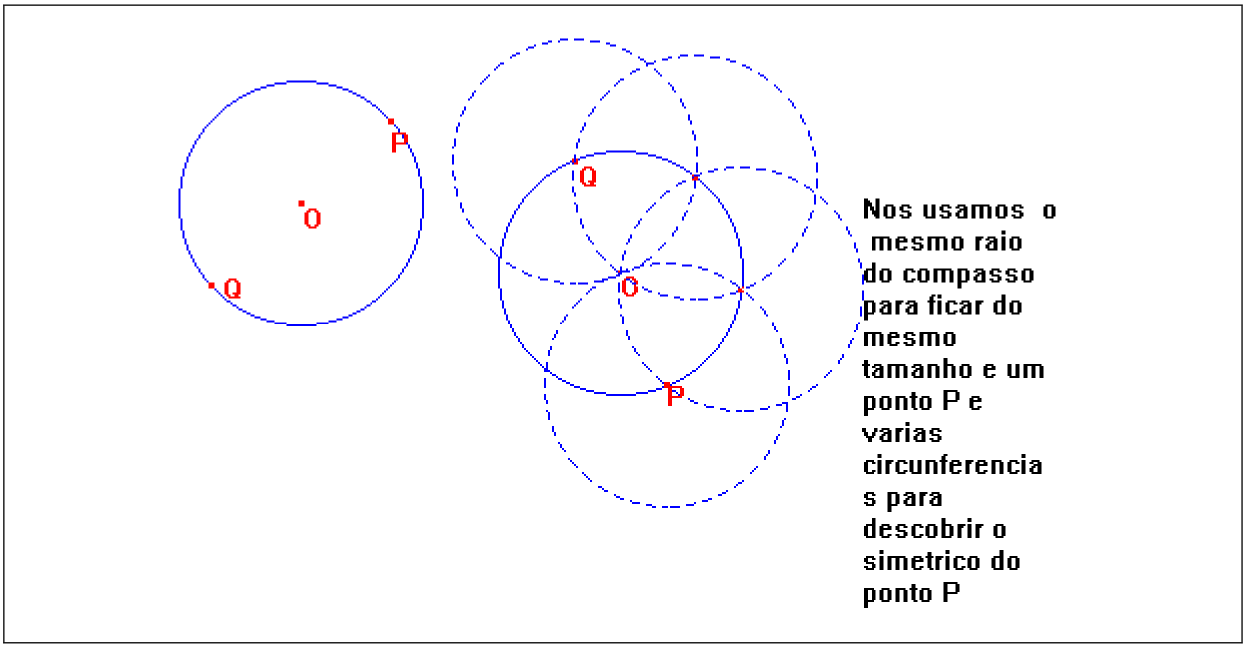


Figura a-65 -- Resp. da ativ.6c, por Augusto/Cristina

ANEXO 7

Respostas das Atividades Realizadas do **Conjunto 1 – 1ª Sessão**, pela dupla Bruno/Gisele

Atividade 1

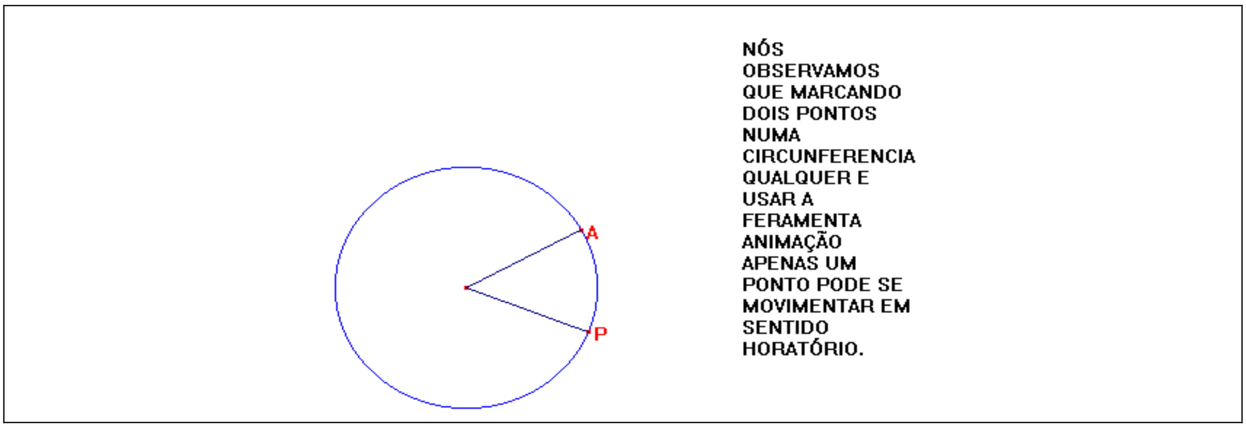


Figura a-66 – Resp. da ativ.1, por Bruno/Gisele

Atividade 2

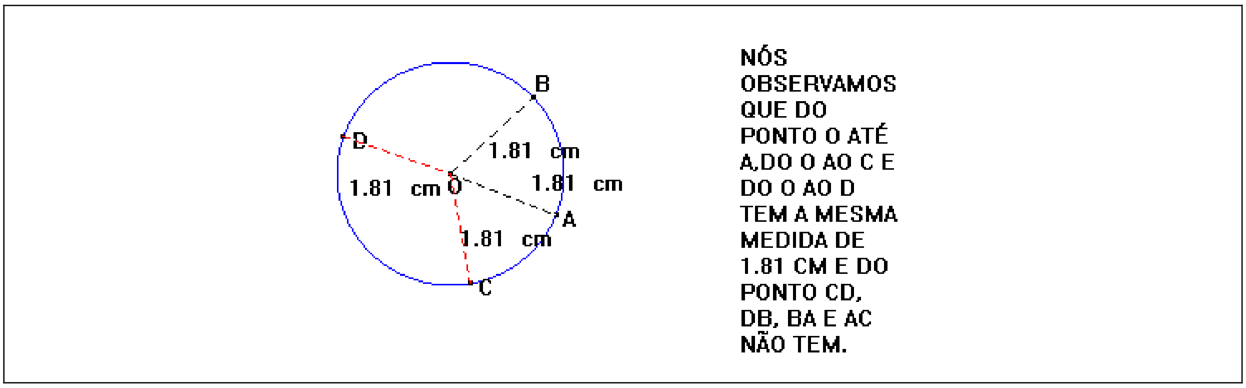


Figura a-67 -- Resp. da ativ.2, por Bruno/Gisele

Atividade 3

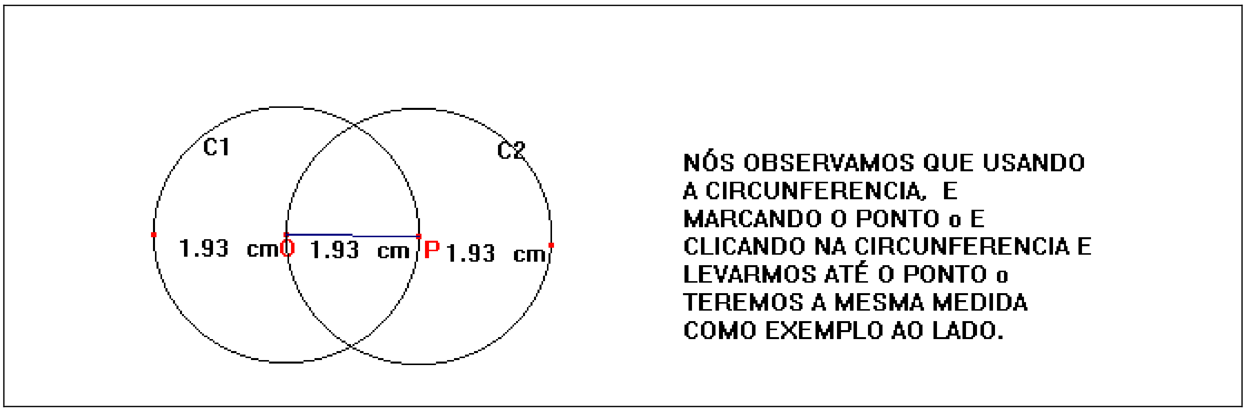


Figura a-68 -- Resp. da ativ.3, por Bruno/Gisele

Atividade 4

4-a)

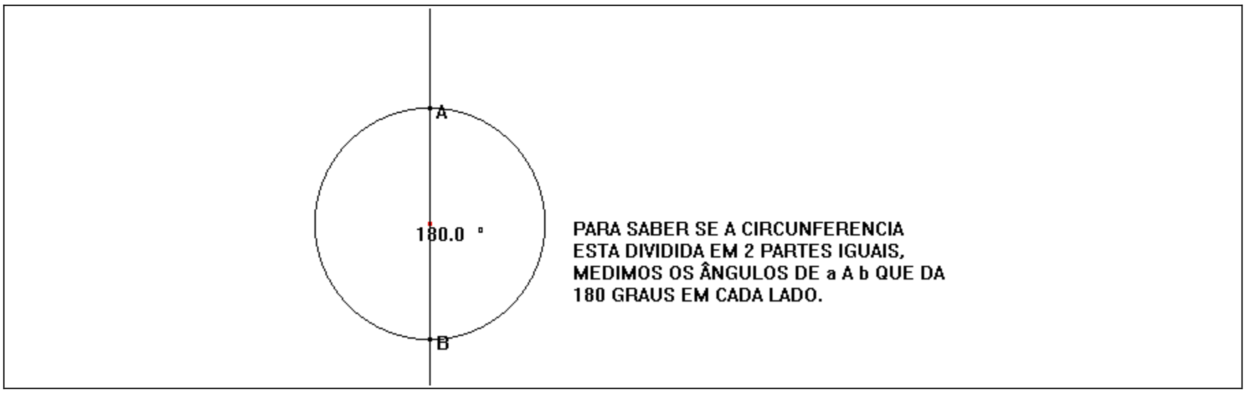


Figura a-69 -- Resp. da ativ.4a, por Bruno/Gisele

4-b)

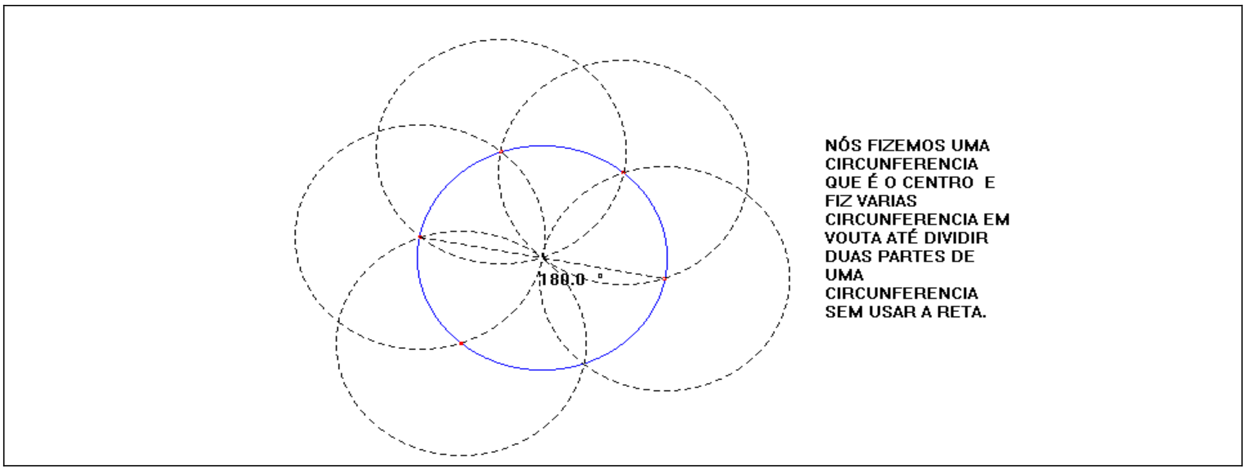


Figura a-70 -- Resp. da ativ.4b, por Bruno/Gisele

Atividade 5

5-a)

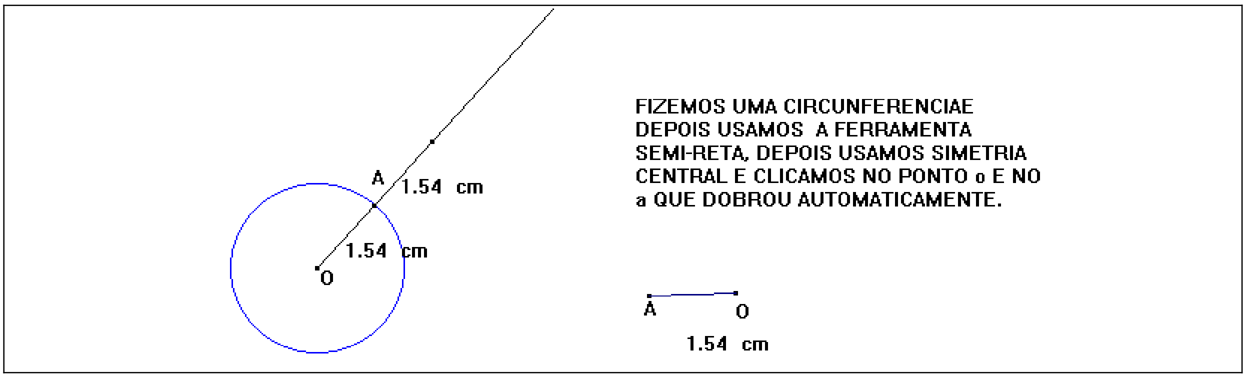


Figura a-71 -- Resp. da ativ.5a, por Bruno/Gisele

5-b)

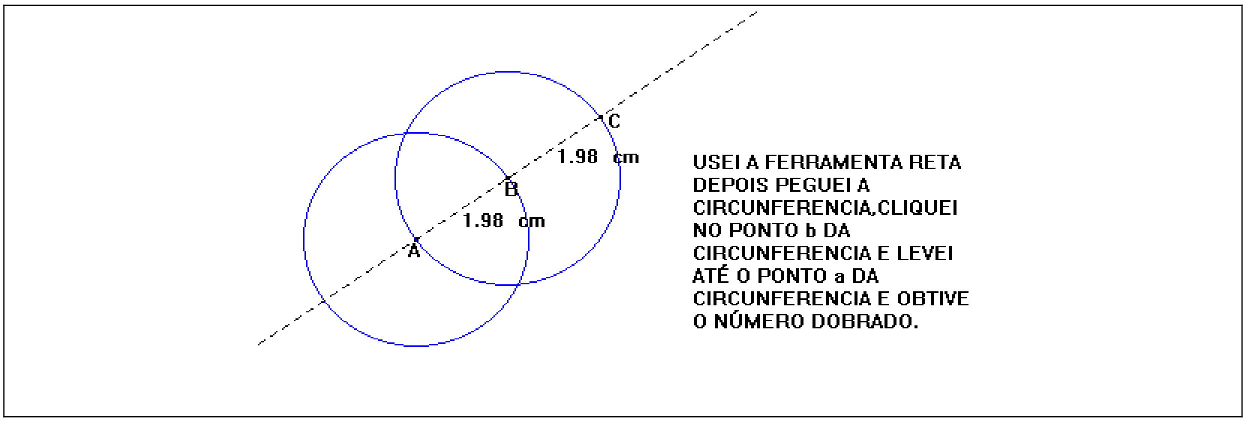


Figura a-72 -- Resp. da ativ.5b, por Bruno/Gisele

5-c)

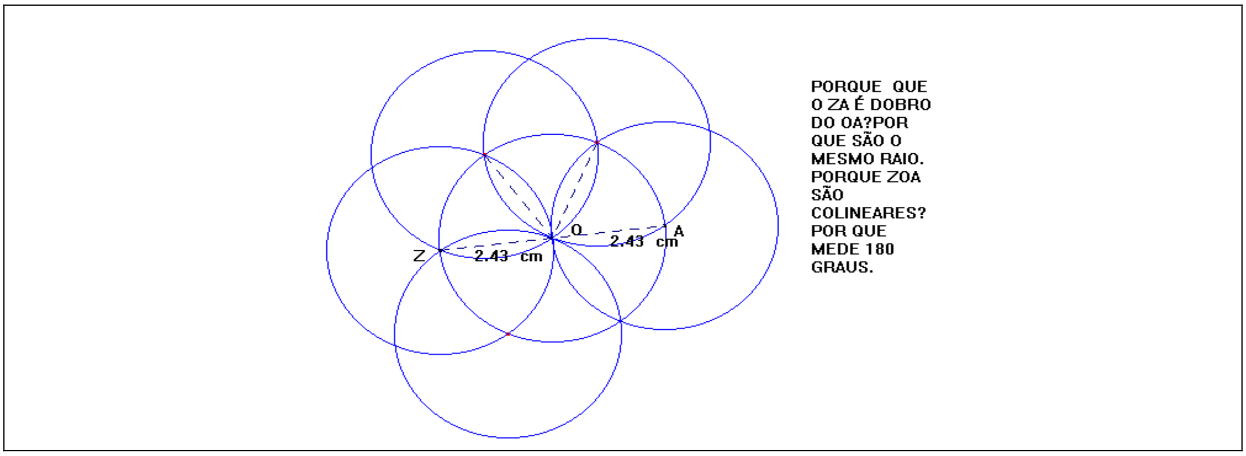


Figura a-73 -- Resp. da ativ.5c, por Bruno/Gisele

Atividade 6

6-a)

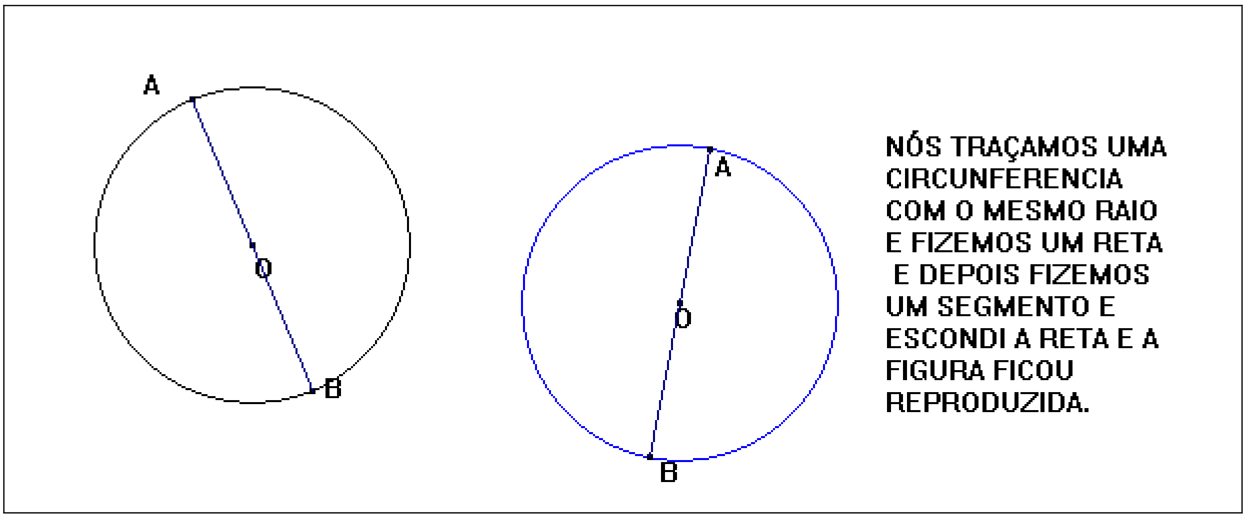


Figura a-74 -- Resp. da ativ.6a, por Bruno/Gisele

6-b)

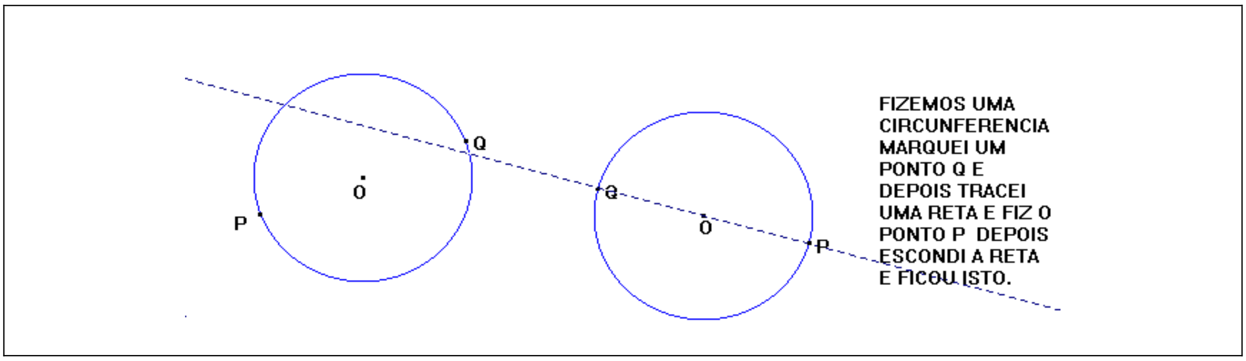


Figura a-75 -- Resp. da ativ.6b, por Bruno/Gisele

6-c) Construção com o compasso apenas

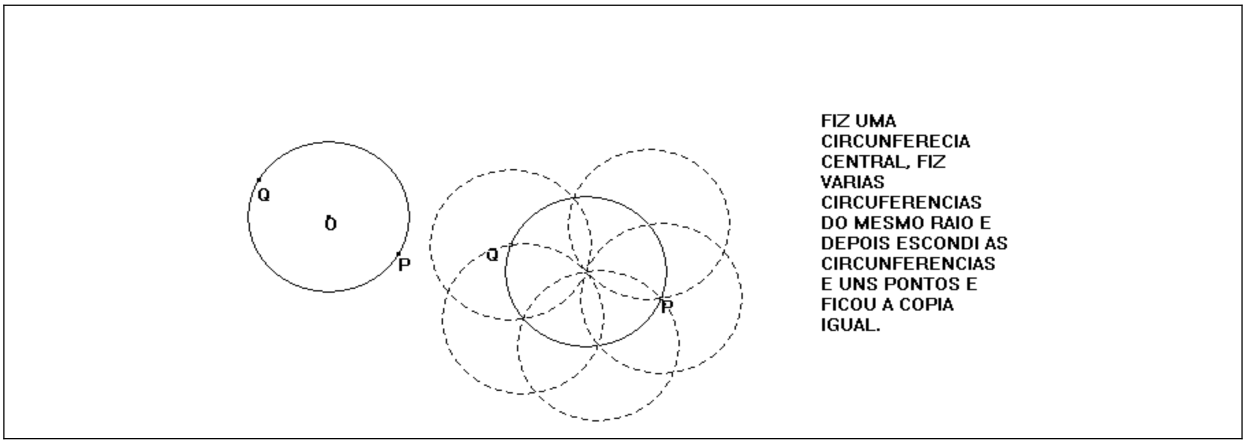


Figura a-76 -- Resp. da ativ.6c, por Bruno/Gisele

Resolução Extra: Neste caso, simplesmente traçaram dois raios e procuraram ajeitar para ficar igual à figura dada.

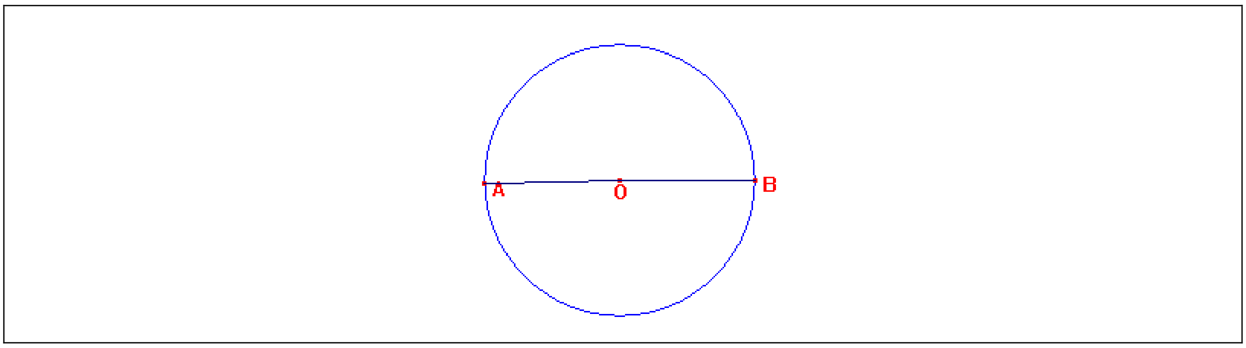


Figura a-77 -- Resp. extra da ativ.6, por Bruno/Gisele

ANEXO 8

Conjunto 1 – Atividades Previstas para a 2ª Sessão (Dupla: Augusto/Cristina e Bruno/Gisele). Foram aplicadas assim à dupla Bárbara/Suzane.

5] Dobrar o segmento de reta CA (atividade reaplicada):

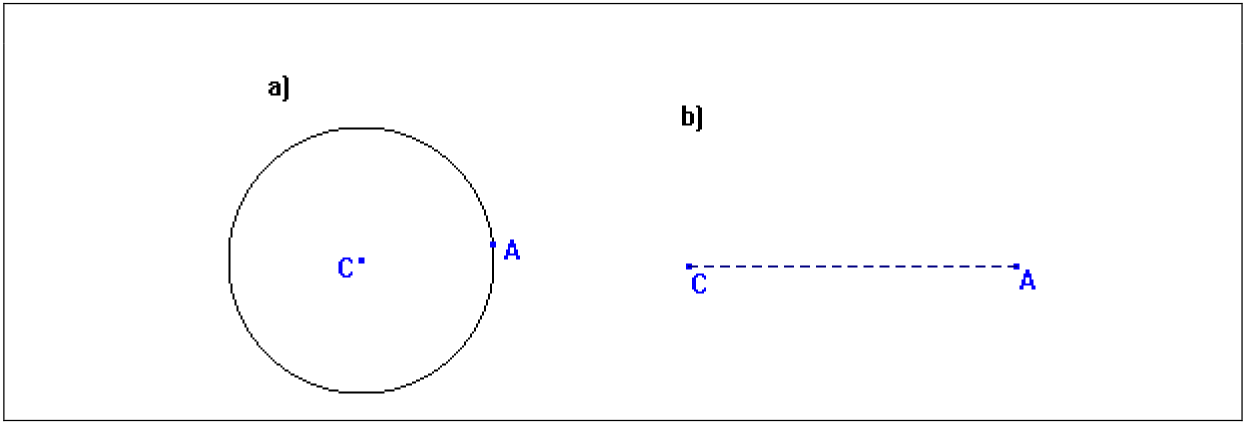


Figura a-78 -- Ativ.1, Conjunto 1(2ª Sessão)

6] **Caixas-pretas** – Reproduzir uma figura que tenha o mesmo comportamento que a figura abaixo (atividade redesenhada):

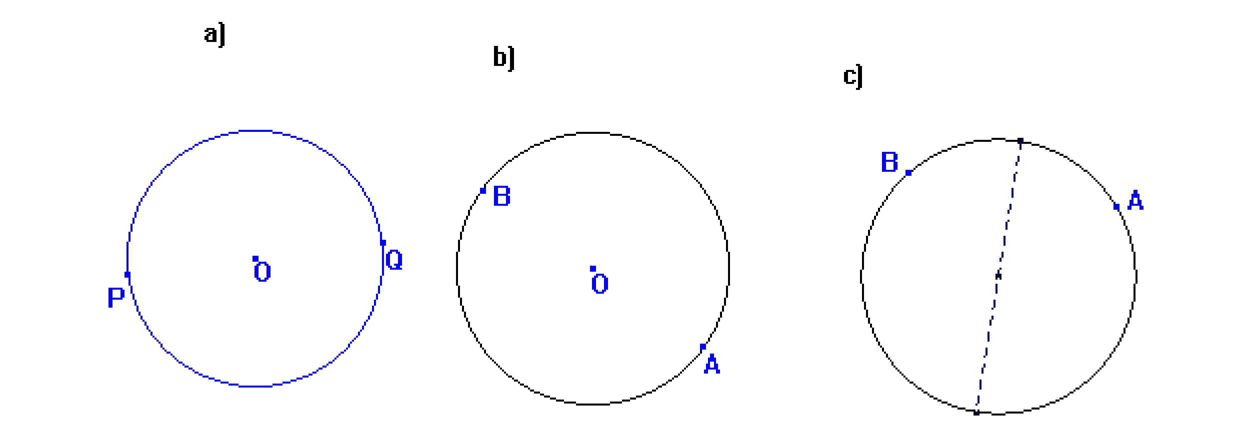


Figura a-79 -- Ativ.2, Conjunto 1(2ª Sessão)

Construções de *Mascheroni – Ponto simétrico**

*As chamadas construções de Mascheroni são efetuadas apenas com o compasso.

7] Encontrar o simétrico do ponto P em relação à reta.

Resolva esta atividade de duas maneiras:

- Primeiro, utilizando todas as ferramentas disponíveis no Cabri; e depois
- Usando somente a "circunferência".

a]

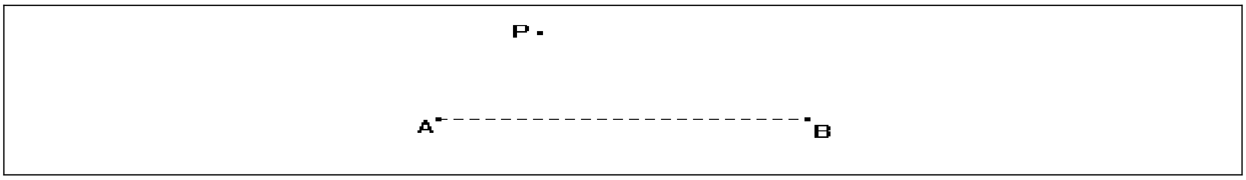


Figura a-80 -- Ativ.3a, Conjunto 1(2ª Sessão)

b] Construa o simétrico do ponto P em relação ao diâmetro AB

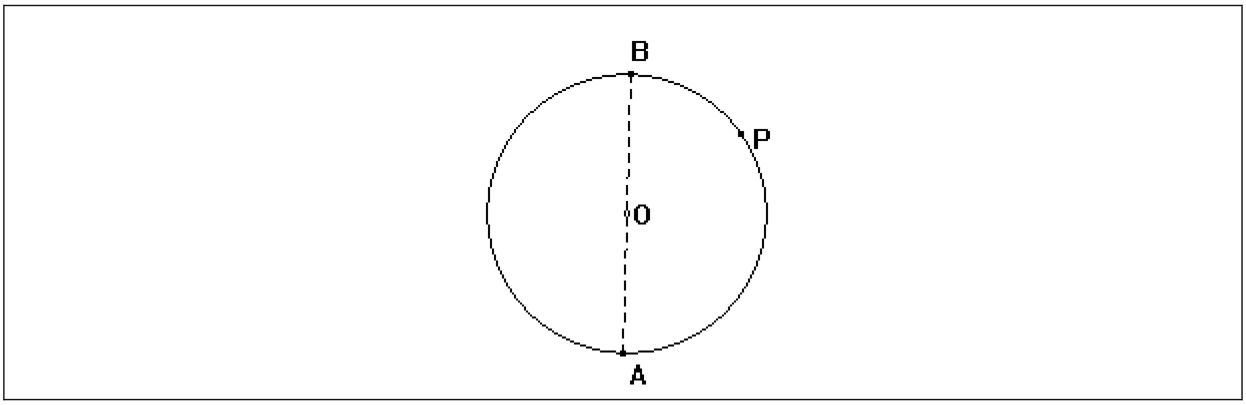


Figura a-81 -- Ativ.3b, Conjunto 1(2ª Sessão)

ANEXO 9

Respostas das Atividades da 2ª Sessão, pela dupla Augusto/Cristina.

Atividade 5

1ª forma:

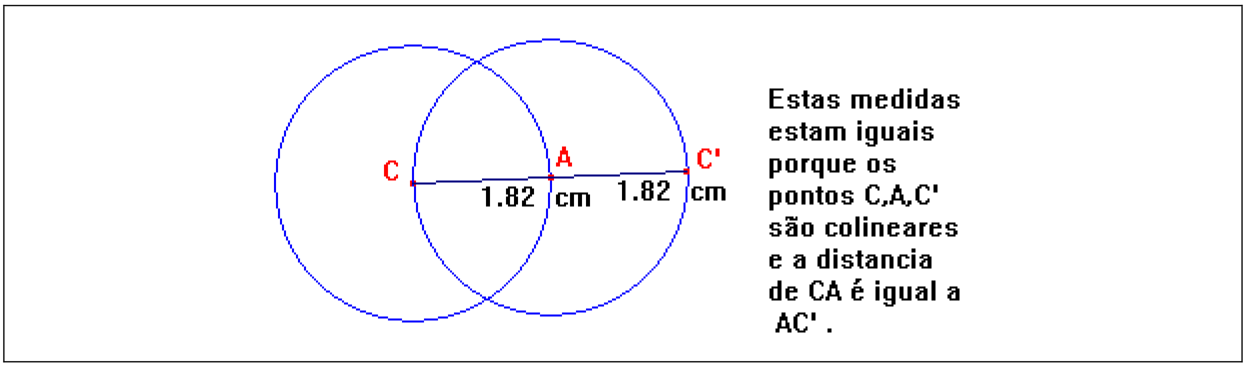


Figura a-82 – Resp. da ativ.1(2ª Sessão), por Augusto/Cristina

2ª forma:

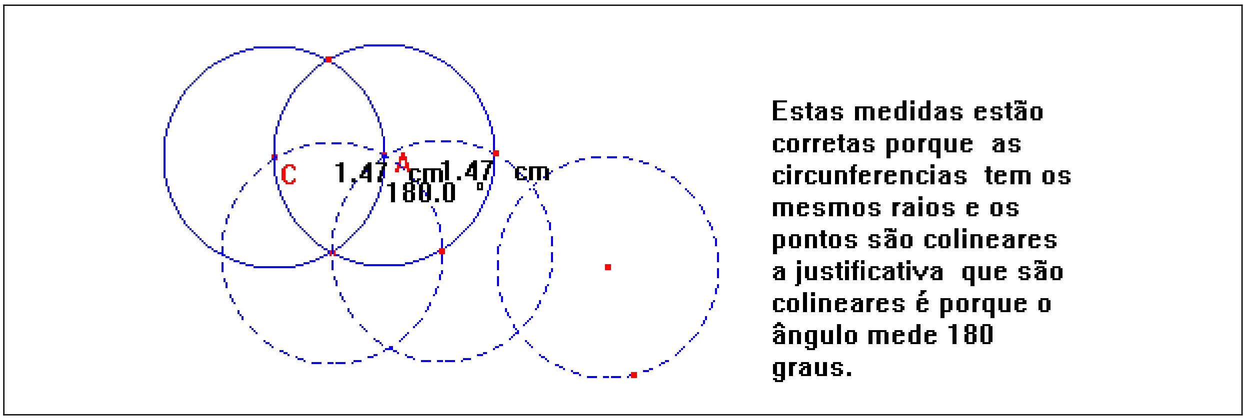


Figura a-83 -- Resp. da ativ.1(2ª Sessão), por Augusto/Cristina

Atividade 6

6-a)

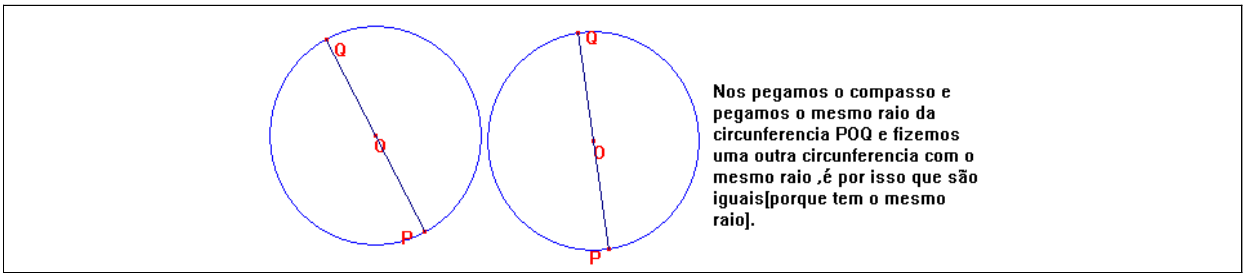


Figura a-84 -- Resp. da ativ.6a (2ª Sessão), por Augusto/Cristina

6-b) Não fizeram

6-c)

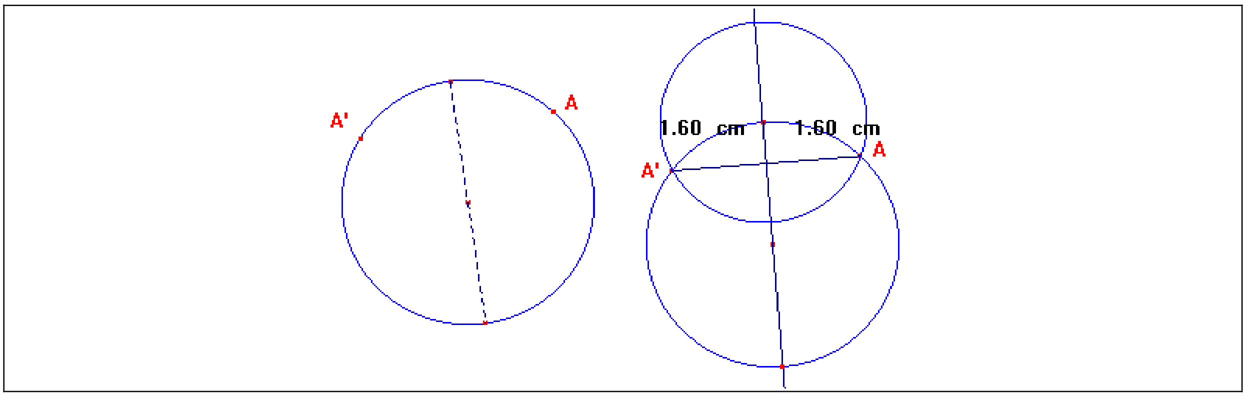


Figura a-85 -- Resp. da ativ.6c (2ª Sessão), por Augusto/Cristina

Atividade 7 (Construção abaixo realizada com ajuda do professor-pesquisador)

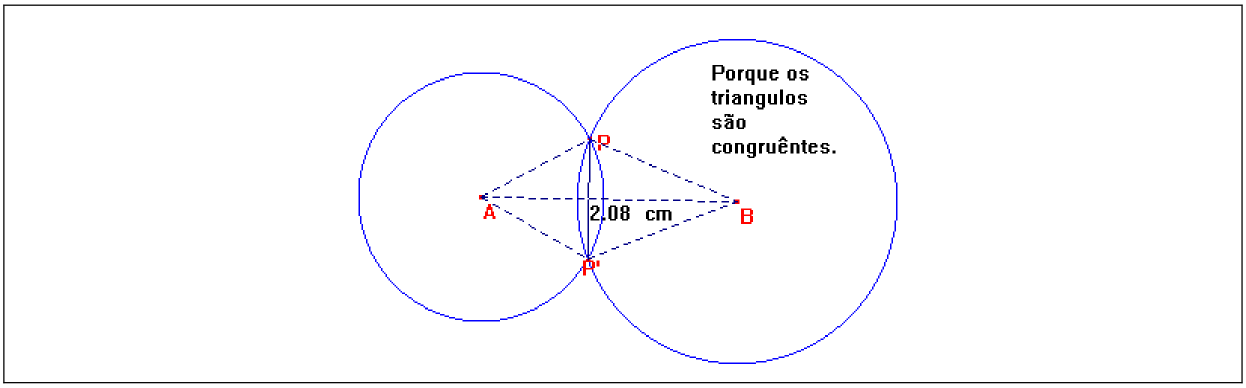


Figura a-86 -- Resp. da ativ.7 (2ª Sessão), por Augusto/Cristina

ANEXO 10

Respostas das atividades do **Conjunto 1** – 2ª Sessão, pela dupla Bruno/Gisele

Atividade-5 (1ª resolução)

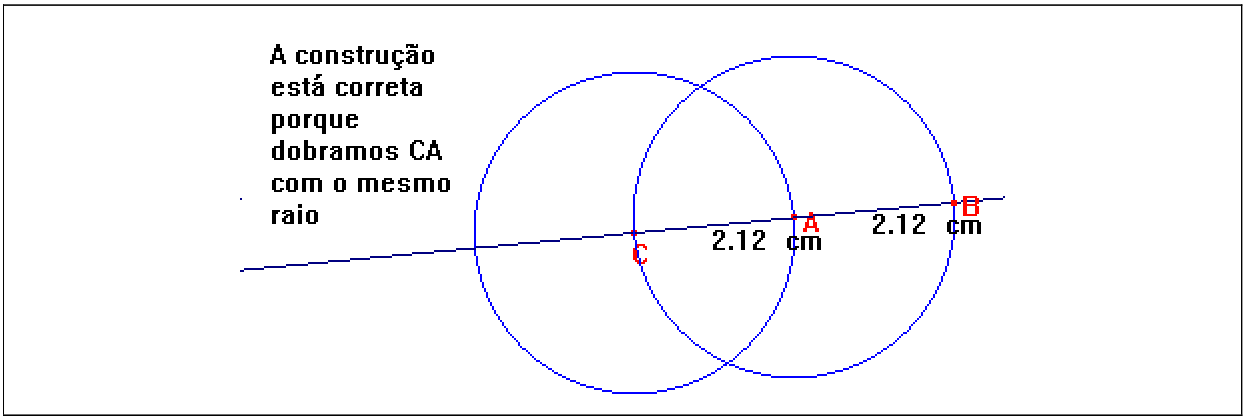


Figura a-87 – Resp. da ativ.5 (2ª Sessão), pela dupla Bruno/Gisele

Atividade-5 (2ª resolução – com o compasso apenas)

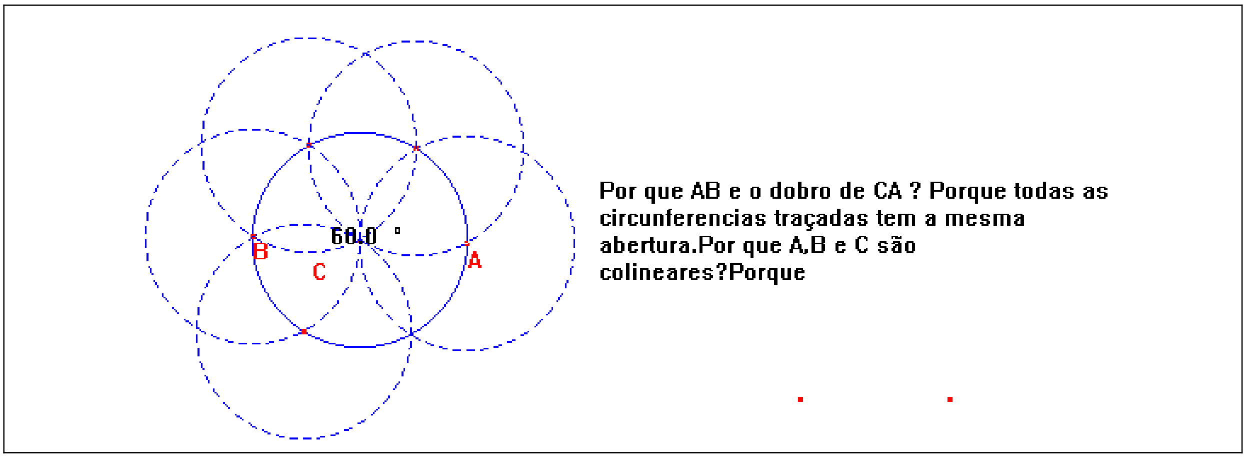


Figura a-88 -- Resp. da ativ.5 (2ª Sessão), pela dupla Bruno/Gisele

Atividade-6

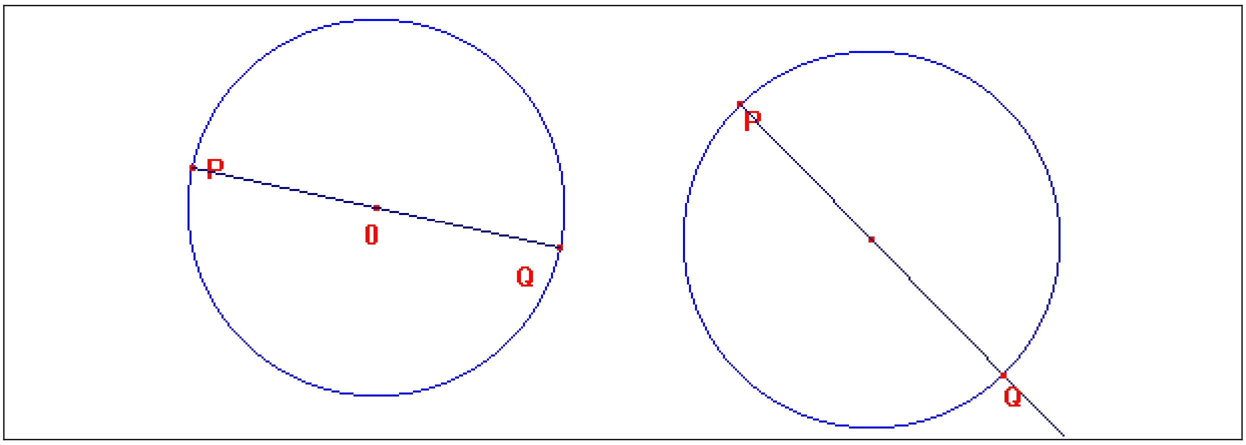


Figura a.89 -- Resp. da ativ.6 (2ª Sessão), pela dupla Bruno/Gisele

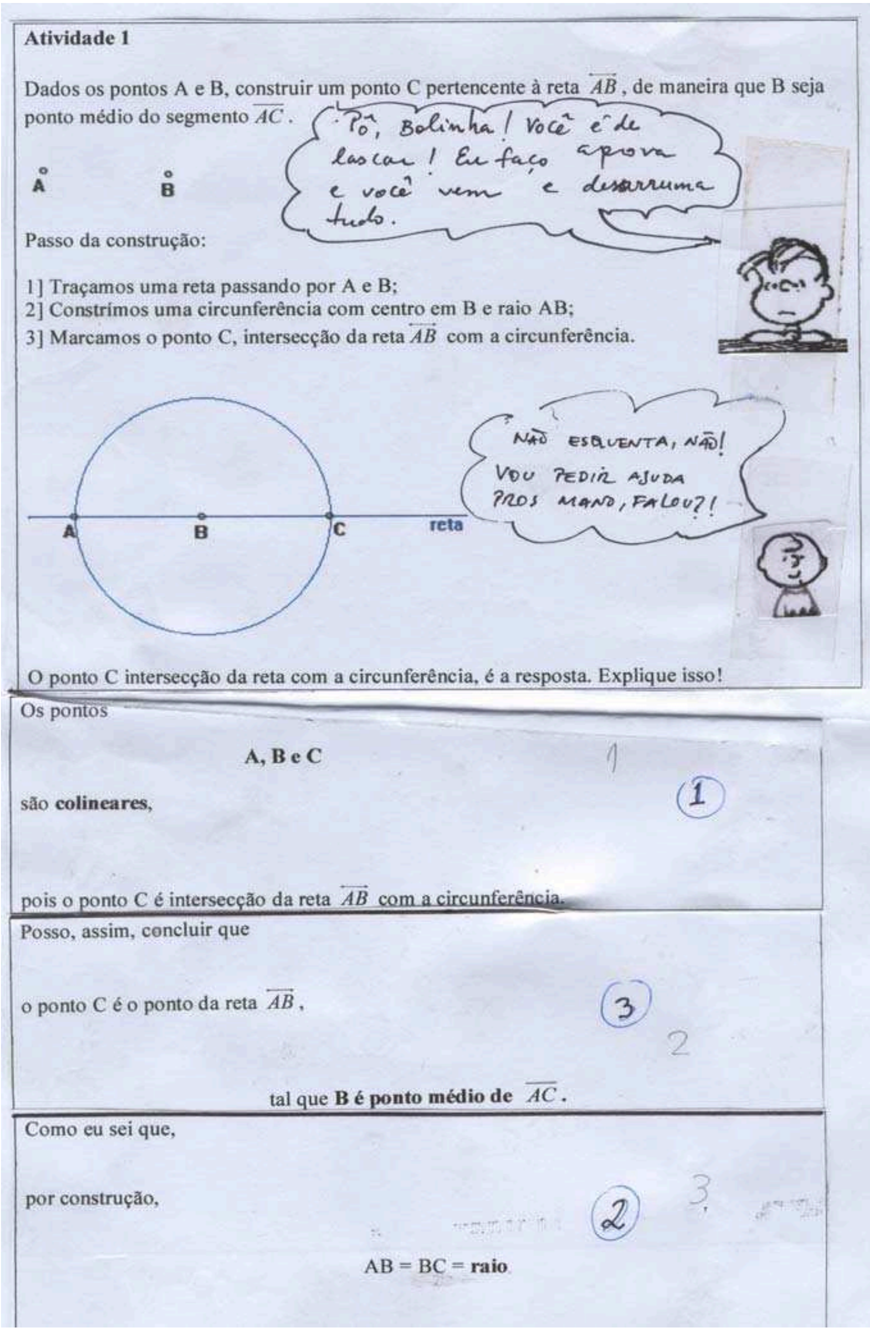
Atividade-7

Observação nossa: Não conseguiram desenvolver, nem ao menos a construção do ponto simétrico. O problema era sobre simetria axial. Lembremos que as construções deveriam ser realizadas com o compasso apenas (construções de Mohr-Mascheroni).

ANEXO 11

Conjunto 2 -- Respostas das Atividades do “Jogo” de prova e Pós-teste, pela dupla Augusto/Cristina.

Atividade 1



Atividade 1

Dados os pontos A e B, construir um ponto C pertencente à reta $\overleftrightarrow{AB}$, de maneira que B seja ponto médio do segmento $\overline{AC}$.

A B

Passo da construção:

1] Traçamos uma reta passando por A e B;
2] Constrímos uma circunferência com centro em B e raio AB;
3] Marcamos o ponto C, intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a circunferência.

O ponto C intersecção da reta com a circunferência, é a resposta. Explique isso!

Os pontos **A, B e C** são **colineares**, pois o ponto C é intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a circunferência. 1 (1)

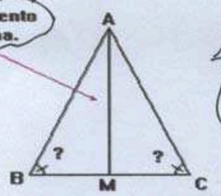
Posso, assim, concluir que o ponto C é o ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$, tal que **B é ponto médio de** $\overline{AC}$. (3) 2

Como eu sei que, por construção, AB = BC = **raio** (2) 3

Atividade 2

A figura abaixo é um triângulo isósceles. Veja!

Este segmento é a mediana.



Mediana? O que é mesmo uma mediana?

Em qualquer triângulo, é um segmento que vai de um vértice até o ponto medio do lado oposto.

??

$AB = AC$ faz parte da hipotese

$$\begin{cases} AB = AC \\ M \text{ é ponto médio de } \overline{BC} \end{cases}$$

Bolinha e Fininho estão tentando provar que $\measuredangle\hat{B} = \measuredangle\hat{C}$. Será que você pode dar uma força prá eles? – É que eles são meio atrapalhados!

Temos:

$\boxed{\begin{array}{l}\Delta ABC \\ AB \equiv AC\end{array}}$

Hipótese
(O que é dado)

Queremos provar que:

$\boxed{\measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{C}}$ 1

Tese
(Conclusão)

1

O critério

LLL (Lado, Lado, Lado) 3

2

nos garante que

$$\Delta AMB \equiv \Delta AMC$$

(Os dois triângulos são congruentes)

Eu sei que nos dois triângulos, AMB e AMC, temos: 3

$$AB = AC$$
$$AM = AM$$
$$BM = CM$$

do △ AMB   do △ AMC

Ah! Então posso imaginar um triângulo se sobrepondo ao outro. E daí?

2

3

O fato de os triângulos AMB e AMC serem congruentes quer dizer que eles têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

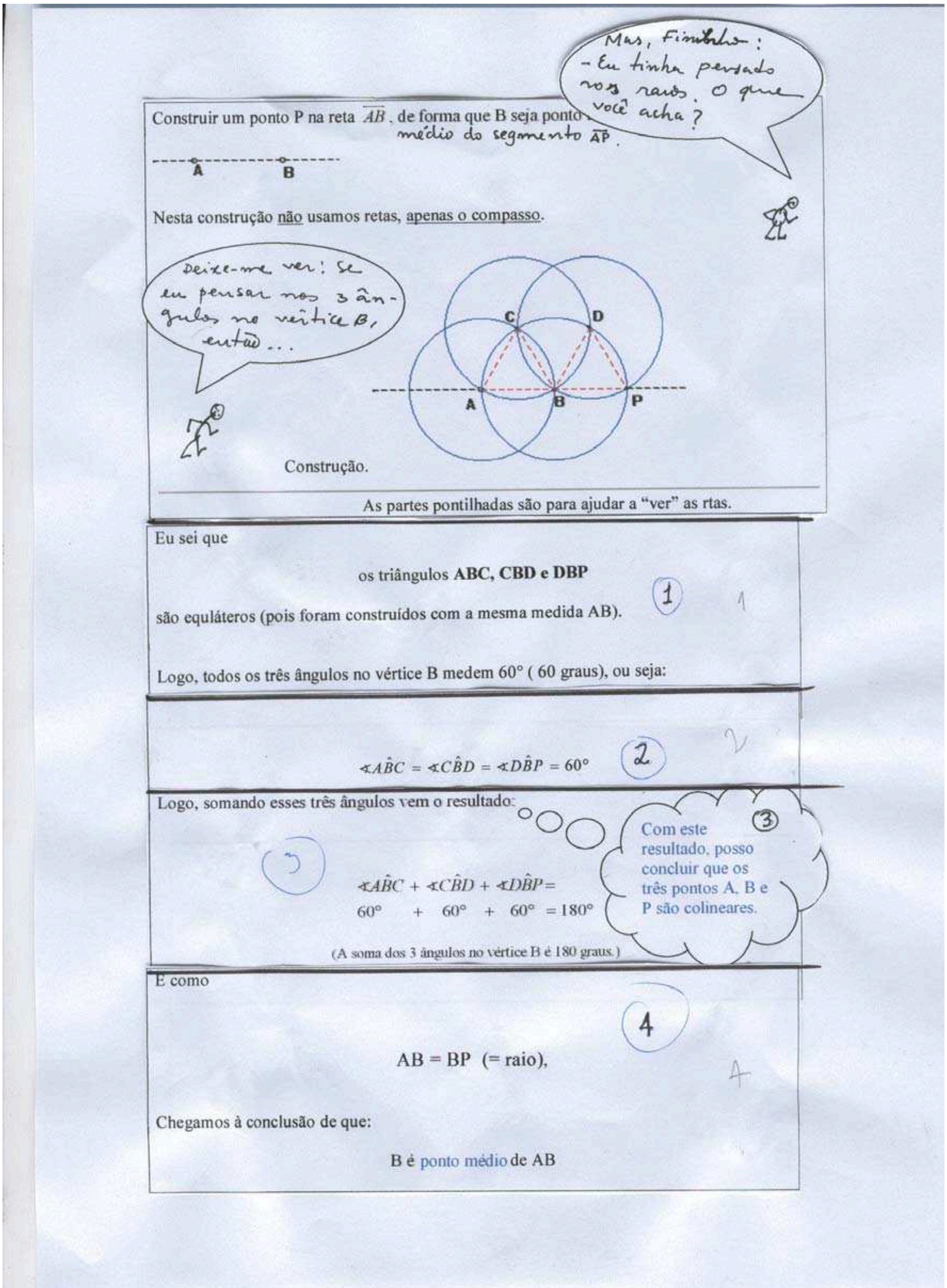
Os lados correspondentes são iguais. Os ângulos correspondentes também!

Consequentemente, 4

$$\measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{C}$$

4

Atividade 3

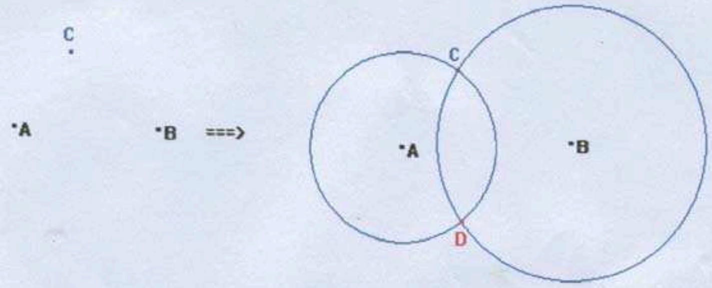


Mas, Fininho:
- Eu tinha pensado nos raios. O que você acha?
Construir um ponto P na reta $\overline{AB}$, de forma que B seja ponto médio do segmento $\overline{AP}$.
A
B
Nesta construção não usamos retas, apenas o compasso.
Deixe-me ver! Se eu pensar nos 3 ângulos no vértice B, então...
C
D
A
B
P
Construção.
As partes pontilhadas são para ajudar a "ver" as rtas.
Eu sei que
os triângulos **ABC, CBD e DBP**
1
são equiláteros (pois foram construídos com a mesma medida AB).
Logo, todos os três ângulos no vértice B medem 60° (60 graus), ou seja:
$\sphericalangle A\hat{B}C = \sphericalangle C\hat{B}D = \sphericalangle D\hat{B}P = 60°$
2
Logo, somando esses três ângulos vem o resultado:
$\sphericalangle A\hat{B}C + \sphericalangle C\hat{B}D + \sphericalangle D\hat{B}P =$
$60° + 60° + 60° = 180°$
(A soma dos 3 ângulos no vértice B é 180 graus.)
3
Com este resultado, posso concluir que os três pontos A, B e P são colineares.
E como
4
AB = BP (= raio),
Chegamos à conclusão de que:
B é ponto médio de AB

Atividade 4

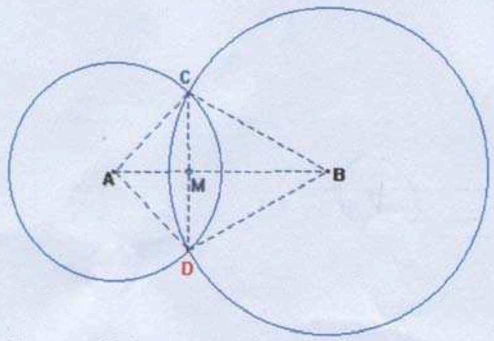
Dados os pontos A, B e C, construir o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$. 4

Nesta construção não usamos retas, apenas o compasso.



Passos da construção:

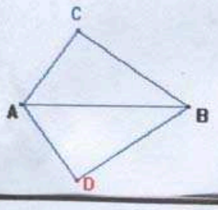
1] Construímos uma circunferência de centro B e raio BC;
2] Construímos outra circunferência, de centro A e raio AC
3] Marcamos o ponto D, que intersecção das duas circunfrências traçadas. E pronto!



As partes tracejadas são apenas para ajudar a "ver" as retas!

Então, o ponto D é a resposta procurada. Como vou mostrar agora que a construção está correta?

Podemos desenhar dois triângulos, ABC e ABD:



Será que sobrepondo...

1

O triângulo **ABC**

é congruente ao 3 2

triângulo **ABD**,

pelo caso **LLL**

Atividade 4 (Continuação)

Por construção, eu sei que:

AC = AD (mesmo raio) → **L** 2

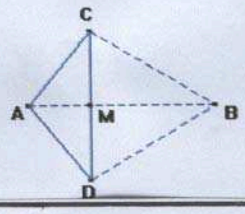
BC = BD (mesmo raio) → **L** 3

AB = AB (lado comum aos 2 triângulos) → **L**

E posso dizer então que...

Podemos desenhar dois tri^ngulos, ACM e ADM 4

4



Então, pelo critério LAL 6

$\Delta ACM \equiv \Delta ADM$

Qual é mesmo a consequência desses dois triângulos serem congruentes? **Hum!** A resposta me ajudaria bastante! 5

Daí, isso me leva ao seguinte:

Sabemos que: 5

6

AC = AD (raio)

CÂB = DÂB (Por causa da congruência dos triângulos ABC e ABD).

AM = AM (lado comum)

CM = DM 7

→Se dois ângulos são iguais e têm soma 180 graus, então cada um mede 90 graus.

$\sphericalangle C\hat{M}A = \sphericalangle D\hat{M}A$

E além disso, como $C\hat{M}A + D\hat{M}A = 180°$, 7

podemos concluir que:

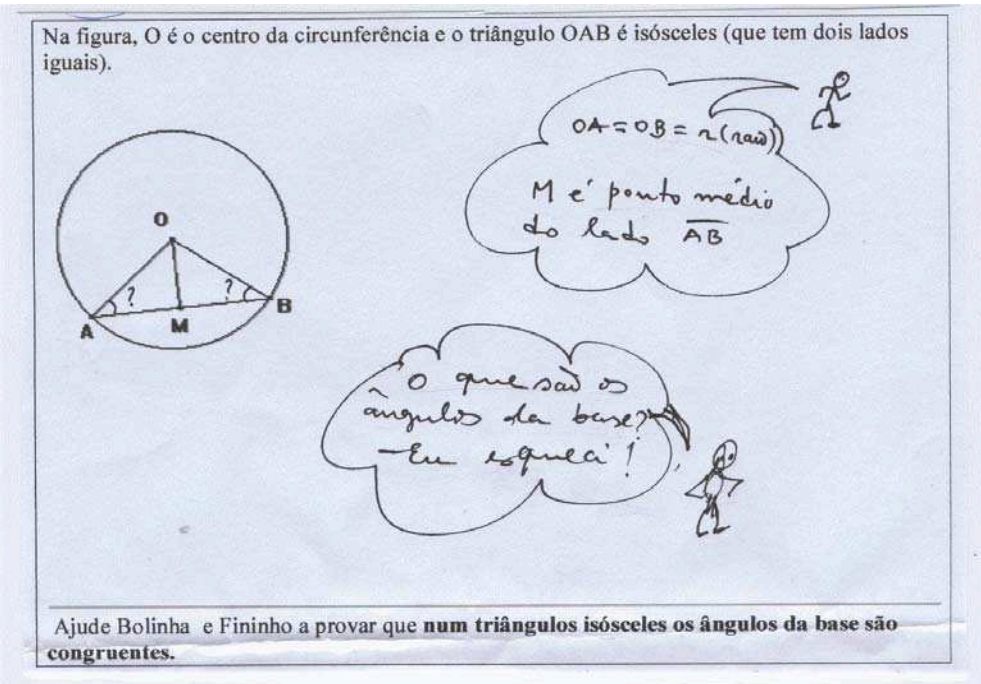
$C\hat{M}A = D\hat{M}A = 90°$ (ângulos retos)

Logo, 8

8

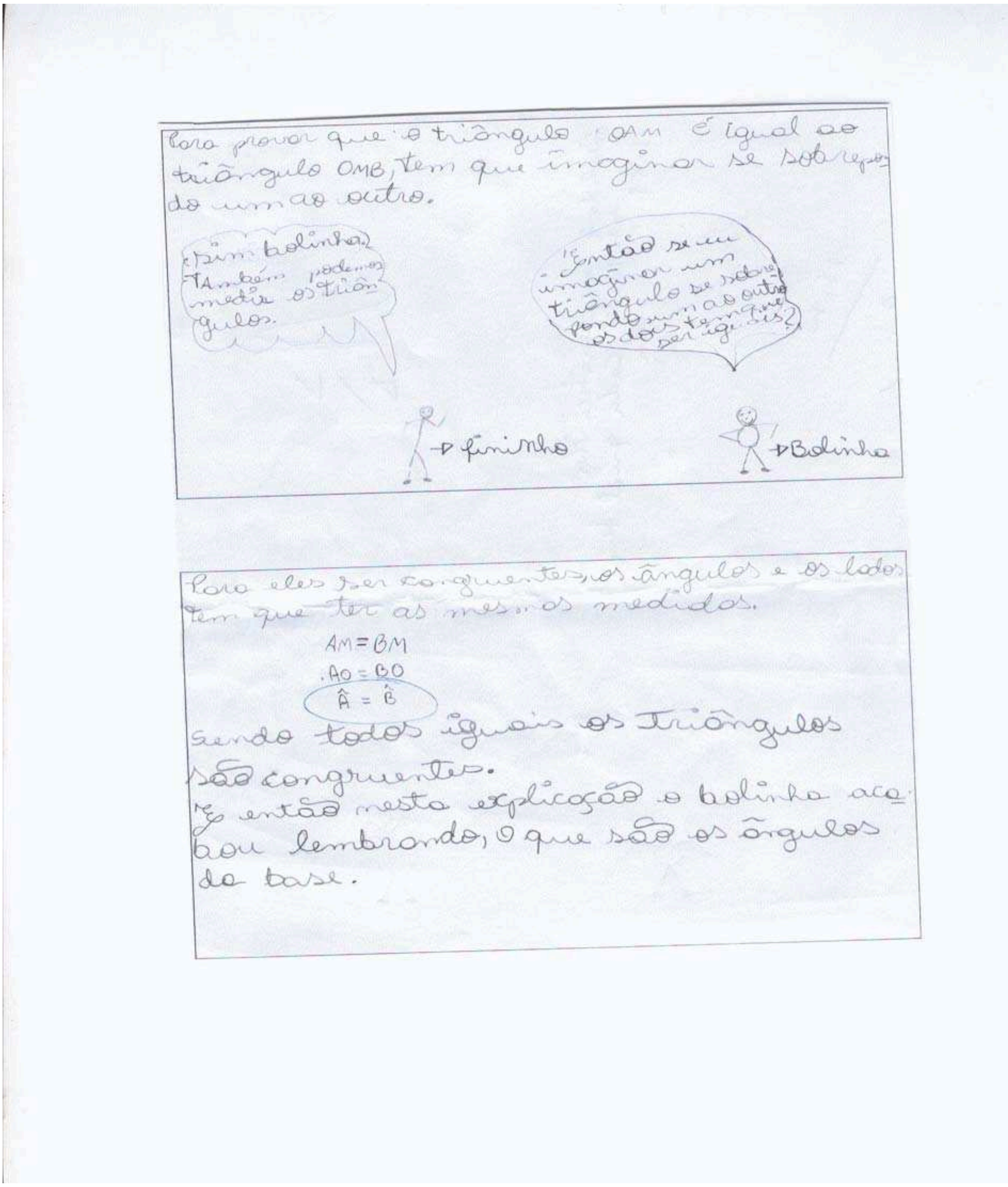
D é o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$

Atividade 5 – Pós-teste aplicado à dupla Augusto/Cristina


Na figura, O é o centro da circunferência e o triângulo OAB é isósceles (que tem dois lados iguais).

Ajude Bolinha e Fininho a provar que **num triângulos isósceles os ângulos da base são congruentes.**

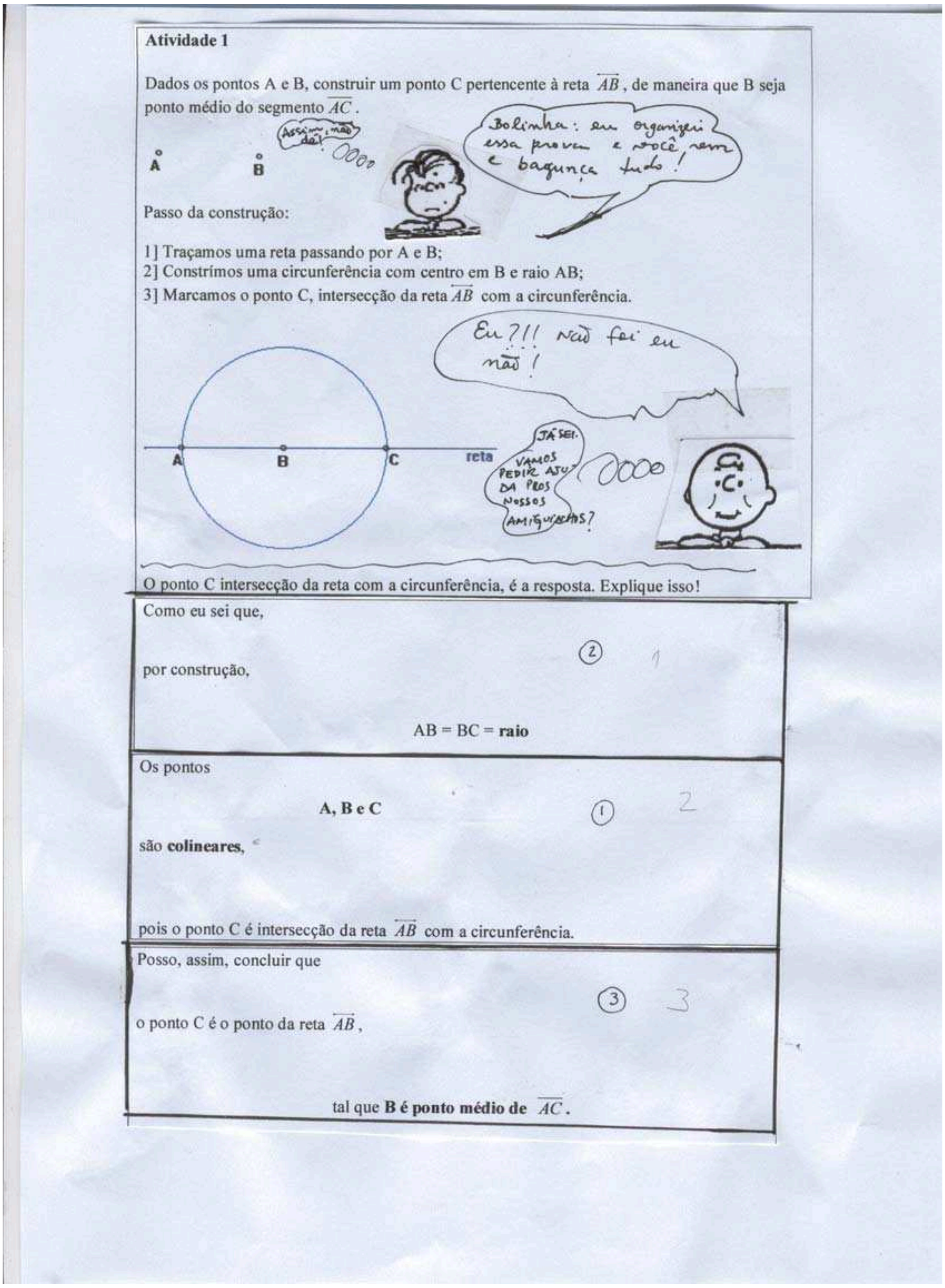
A resposta:


Para provar que o triângulo OAM é igual ao triângulo OMB, tem que imaginar se sobrepondo um ao outro.
Sim bolinha. Também podemos medir os triângulos.
Então se eu imaginar um triângulo se sobrepondo um ao outro os dois tem que ser iguais?
fininho
Bolinha
Para eles ser congruentes, os ângulos e os lados tem que ter as mesmas medidas.
AM = BM
AO = BO
Â = B̂
Sendo todos iguais os triângulos são congruentes.
E então nesta explicação o bolinha acabou lembrando, o que são os ângulos da base.

ANEXO 12

Conjunto 2 – Respostas das Atividades do “Jogo” de prova e Pós-teste, pela dupla Bruno/Gisele.

Atividade 1



Atividade 1

Dados os pontos A e B, construir um ponto C pertencente à reta $\overleftrightarrow{AB}$, de maneira que B seja ponto médio do segmento $\overline{AC}$.

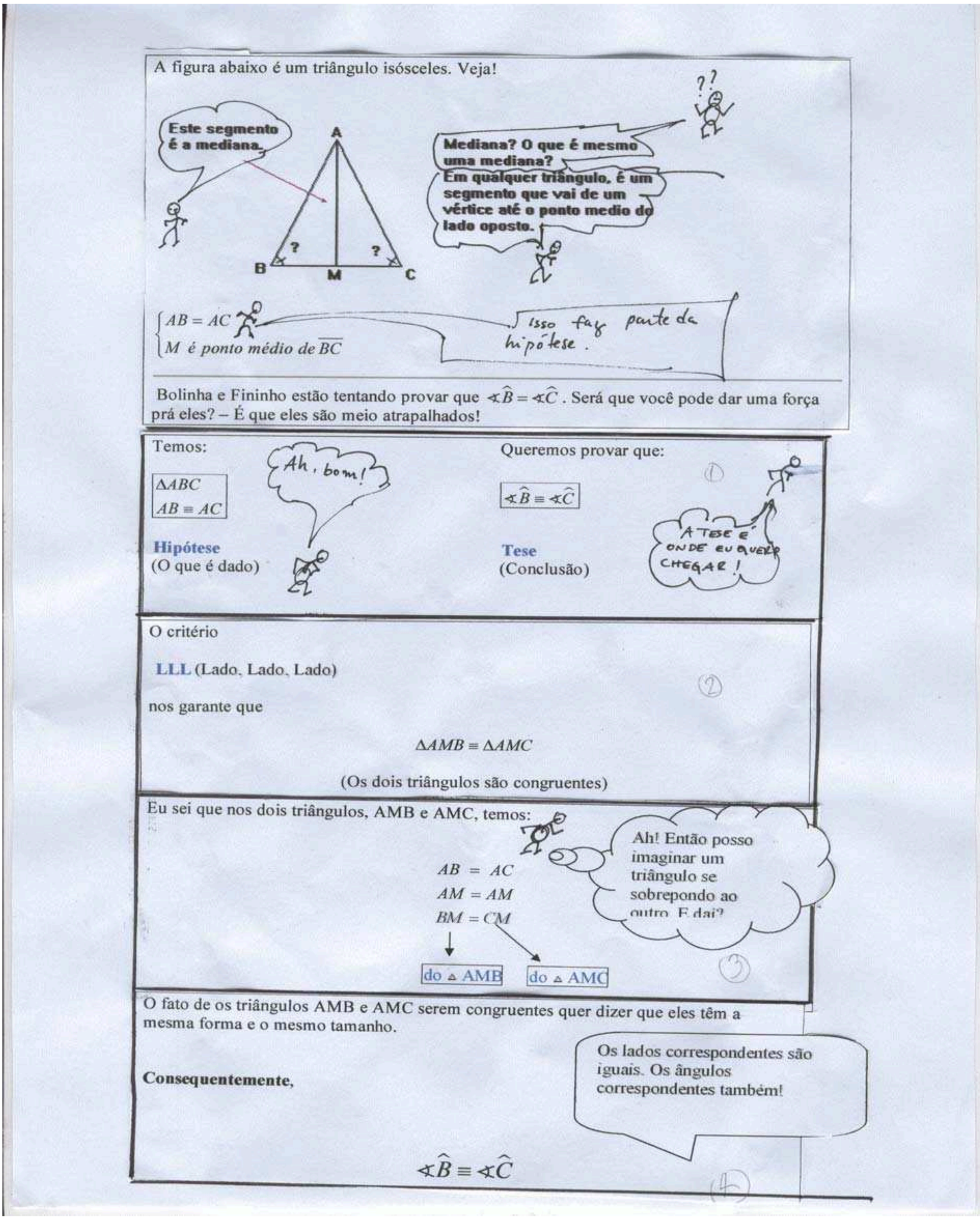
Passo da construção:

1] Traçamos uma reta passando por A e B;
2] Constrímos uma circunferência com centro em B e raio AB;
3] Marcamos o ponto C, intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a circunferência.

O ponto C intersecção da reta com a circunferência, é a resposta. Explique isso!

Como eu sei que, por construção, AB = BC = **raio**	2 1
Os pontos **A, B e C** são **colineares**, pois o ponto C é intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a circunferência.	1 2
Posso, assim, concluir que o ponto C é o ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$, tal que **B é ponto médio de** $\overline{AC}$.	3 3

Atividade 2



A figura abaixo é um triângulo isósceles. Veja!

$\begin{cases} AB = AC \\ M \text{ é ponto médio de } \overline{BC} \end{cases}$

Isso faz parte da hipótese.

Bolinha e Fininho estão tentando provar que $\measuredangle\hat{B} = \measuredangle\hat{C}$. Será que você pode dar uma força prá eles? – É que eles são meio atrapalhados!

Temos:

$\boxed{\begin{array}{l} \Delta ABC \\ AB \equiv AC \end{array}}$

Ah, bom!

Hipótese
(O que é dado)

Queremos provar que:

$\boxed{\measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{C}}$

① A tese é onde eu quero chegar!

Tese
(Conclusão)

O critério

LLL (Lado, Lado, Lado)

nos garante que ②

$\Delta AMB \equiv \Delta AMC$

(Os dois triângulos são congruentes)

Eu sei que nos dois triângulos, AMB e AMC, temos:

$AB = AC$
$AM = AM$
$BM = CM$

do △ AMB   do △ AMC ③

Ah! Então posso imaginar um triângulo se sobrepondo ao outro. E daí?

O fato de os triângulos AMB e AMC serem congruentes quer dizer que eles têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Consequentemente,

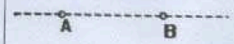
Os lados correspondentes são iguais. Os ângulos correspondentes também!

$\measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{C}$ ④

Atividade 3

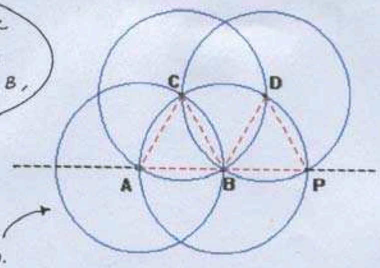
·Mas, Firminho:
– Eu tinha pensado nos raios. O que você acha?

Construir um ponto P na reta $\overleftrightarrow{AB}$, de forma que B seja ponto MÉDIO DO SEGMENTO $\overline{AP}$



Nesta construção <u>não</u> usamos retas, <u>apenas o compasso</u>.

Deixe-me vêr: Se eu pensar nos 3 ângulos no vértice B, então...



Construção.

As partes pontilhadas são para ajudar a "ver" as rtas.

Eu sei que

os triângulos **ABC, CBD e DBP**

são equiláteros (pois foram construídos com a mesma medida AB). 1

Logo, todos os três ângulos no vértice B medem 60° (60 graus), ou seja:

$\measuredangle A\hat{B}C = \measuredangle C\hat{B}D = \measuredangle D\hat{B}P = 60°$ 2

Logo, somando esses três ângulos vem o resultado:

$\measuredangle A\hat{B}C + \measuredangle C\hat{B}D + \measuredangle D\hat{B}P =$

$60° \quad + \quad 60° \quad + \quad 60° \quad = 180°$

(A soma dos 3 ângulos no vértice B é 180 graus.)

Com este resultado, posso concluir que os três pontos A, B e P são colineares.

E como

AB = BP (= raio),

4

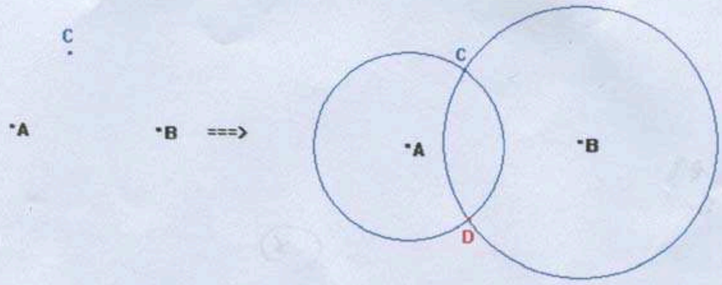
Chegamos à conclusão de que:

B é ponto médio de AB

Atividade 4

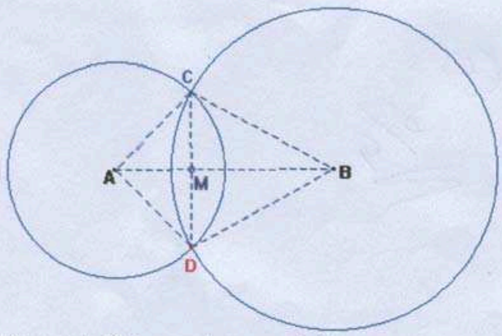
Dados os pontos A, B e C, construir o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$. A

Nesta construção não usamos retas, apenas o compasso.



Passos da construção:

1] Construímos uma circunferência de centro B e raio BC;
2] Construímos outra circunferência, de centro A e raio AC
3] Marcamos o ponto D, que intersecção das duas circunfrências traçadas. E pronto!



As partes tracejadas são apenas para ajudar a "ver" as retas!

Então, o ponto D é a resposta procurada. Como vou mostrar agora que a construção está correta?

Por construção, eu sei que: 2

AC = AD (mesmo raio) $\rightarrow$ **L**

BC = BD (mesmo raio) $\rightarrow$ **L** 1

AB = AB (lado comum aos 2 triângulos) $\rightarrow$ **L** X

E posso dizer então que…

Atividade 4 (Continuação)

CM = DM

$\measuredangle C\hat{M}A = \measuredangle D\hat{M}A$ 7

➔Se dois ângulos são iguais e têm soma 180 graus, então cada um mede 90 graus.

E além disso, como $C\hat{M}A + D\hat{M}A = 180°$,

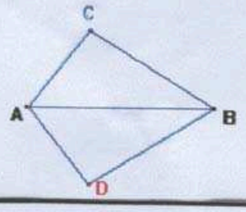
x 2

podemos concluir que:

$C\hat{M}A = D\hat{M}A = 90°$ (ângulos retos)

Podemos desenhar dois triângulos, ABC e ABD:

1



Será que sobrepondo...

3

x

O triângulo **ABC**

é congruente ao 3 4

triângulo **ABD**,

pelo caso **LLL**

Então, pelo critério LAL

$\Delta ACM \equiv \Delta ADM$ 6

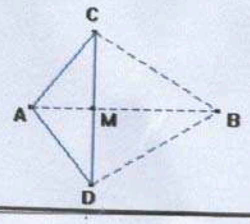
Qual é mesmo a consequência desses dois triângulos serem congruentes? **Hum!** A resposta me ajudaria bastante!

5

Daí, isso me leva ao seguinte:

Podemos desenhar dois tri^ngulos, ACM e ADM

4 6



Sabemos que:

5 7

AC = AD (raio)

CÂB = DÂB (Por causa da congruência dos triângulos ABC e ABD).

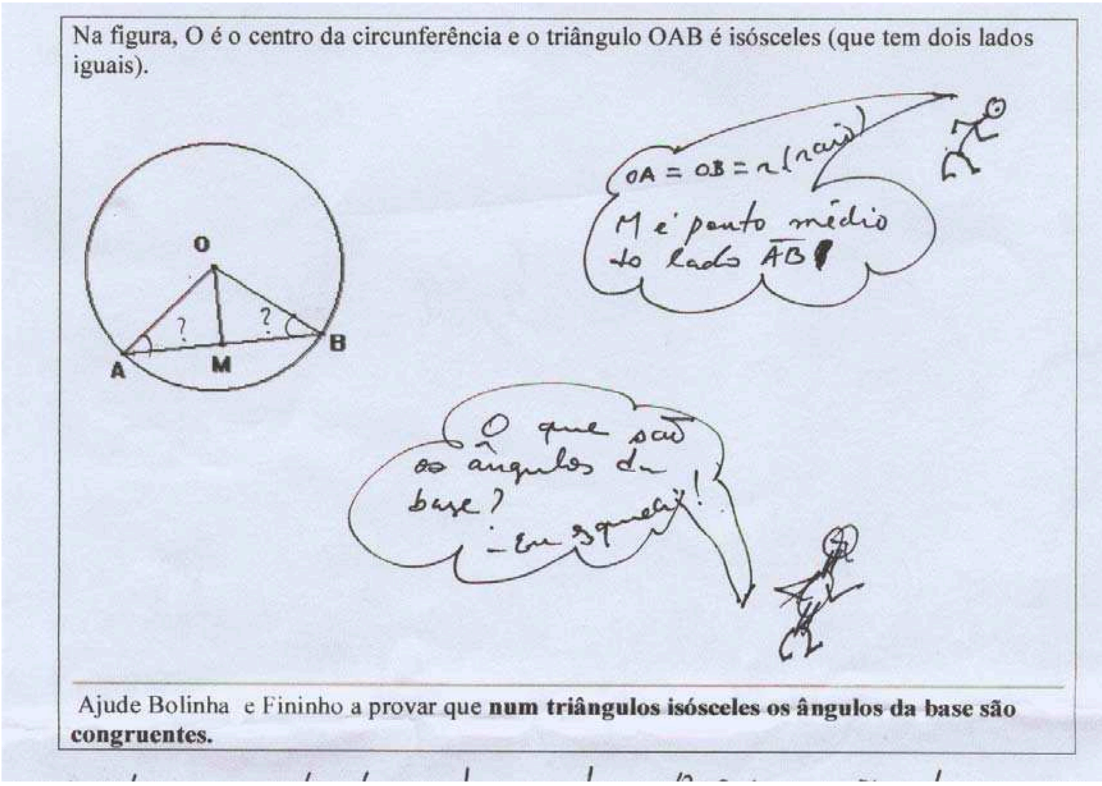
AM = AM (lado comum)

Logo,

8 8

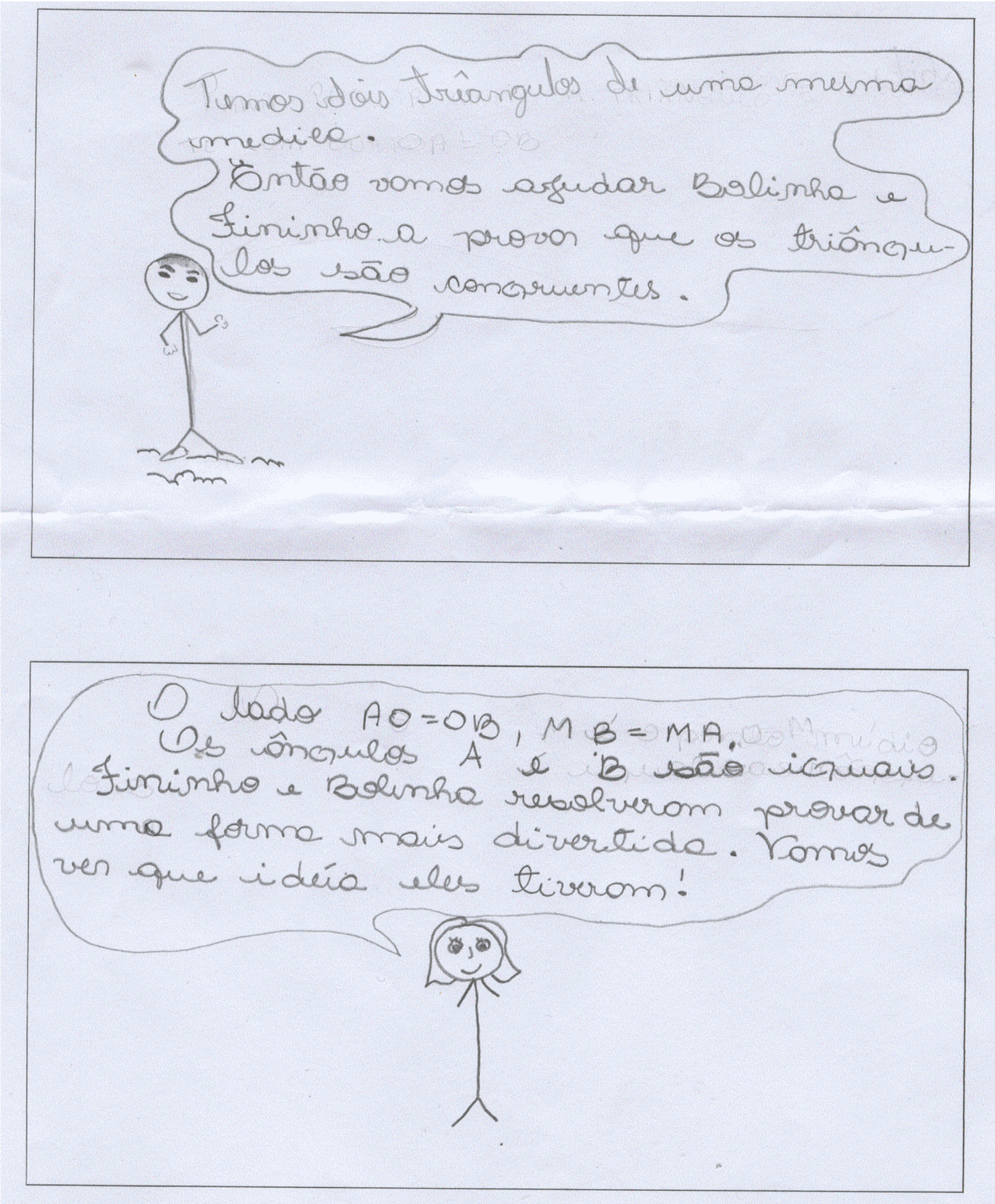
D é o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$

Atividade 5 - Pós-teste


Na figura, O é o centro da circunferência e o triângulo OAB é isósceles (que tem dois lados iguais).

Ajude Bolinha e Fininho a provar que **num triângulos isósceles os ângulos da base são congruentes.**

A resposta:


Temos dois triângulos de uma mesma medida.
Então vamos ajudar Bolinha e Fininho a provar que os triângulos são congruentes.
O lado AO = OB, MB = MA.
Os ângulos A e B são iguais.
Fininho e Bolinha resolveram provar de uma forma mais divertida. Vamos ver que idéia eles tiveram!

Continuação...

SEGUNDA PARTE: SISTEMA DE APRENDIZAGEM B – DUPLA: BÁRBARA/SUZANE

ANEXO 13

Respostas das atividades do **Conjunto 1**, pela dupla Bárbara/Suzane

Atividade 1

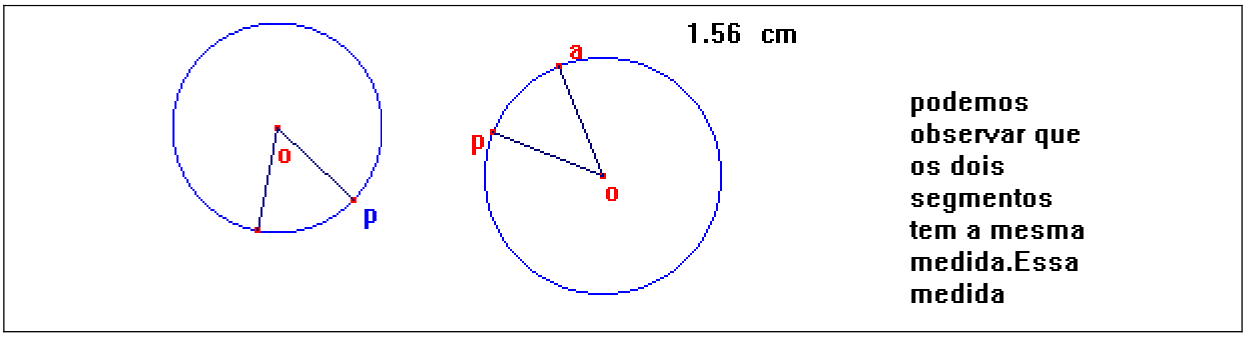


Figura a.105 – Resp. da ativ.1 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

Atividade 2

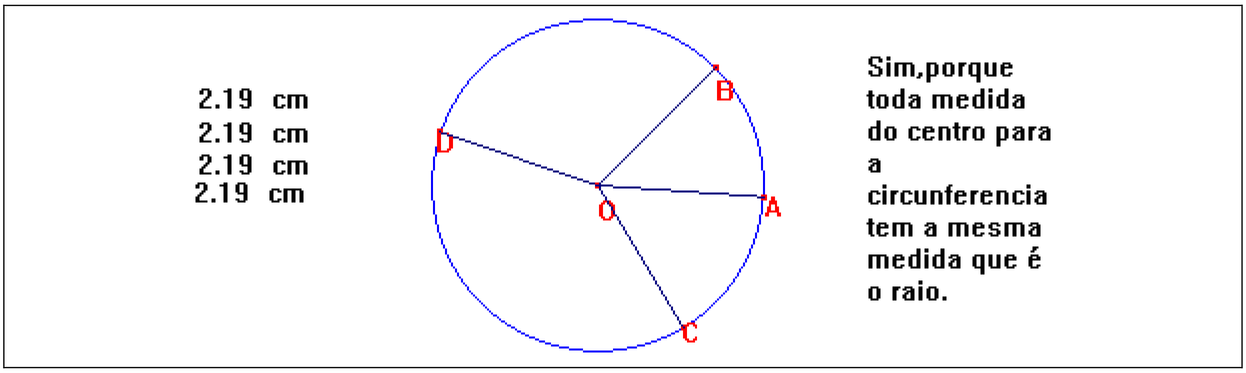


Figura a.106 -- Resp. da ativ.2 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

Atividade 3

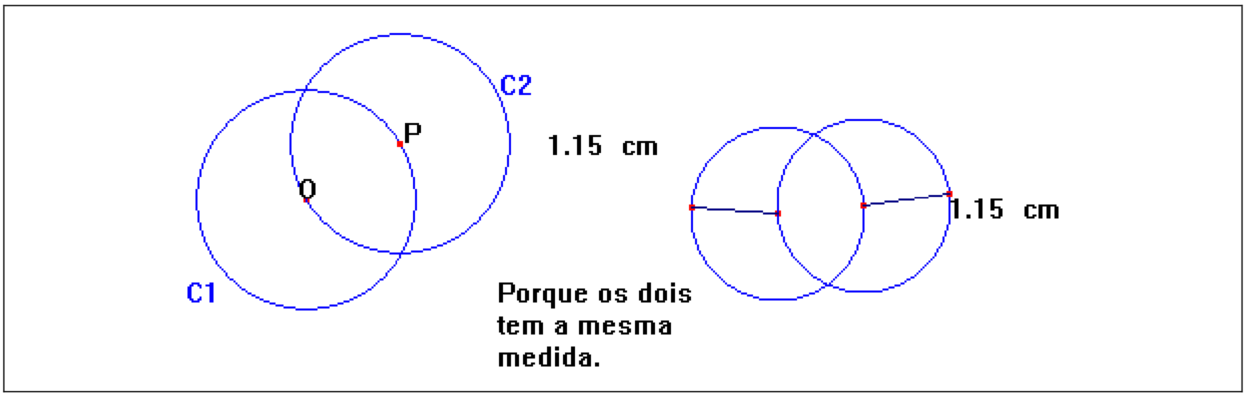


Figura a.107 -- Resp. da ativ.3 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

Atividade 4

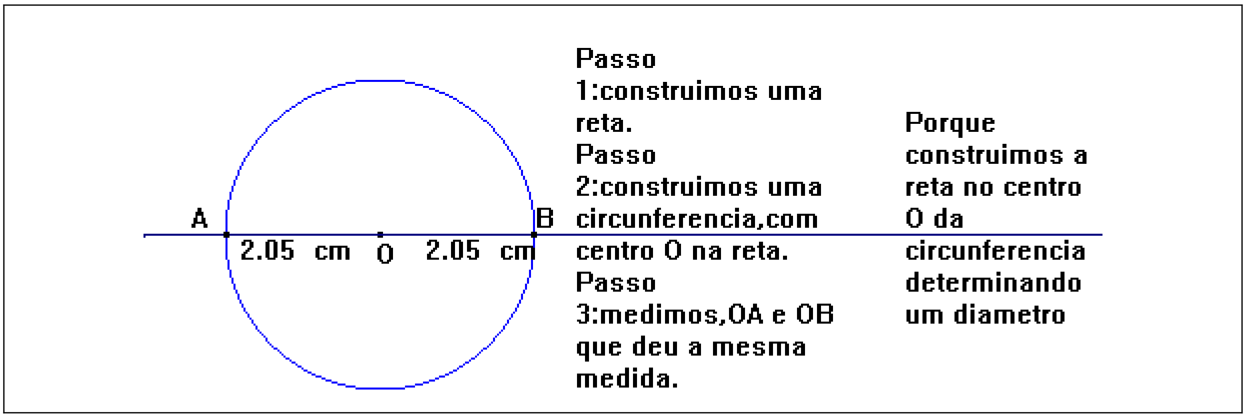


Figura a.108 -- Resp. da ativ.4 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

Atividade 5

1ª resolução

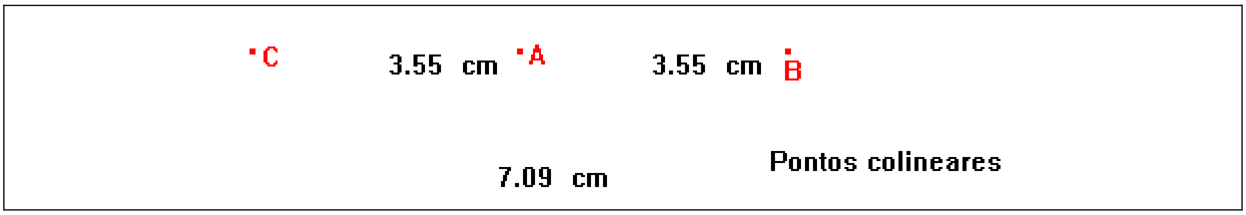


Figura ª109 -- Resp. da ativ.5 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

2ª resolução

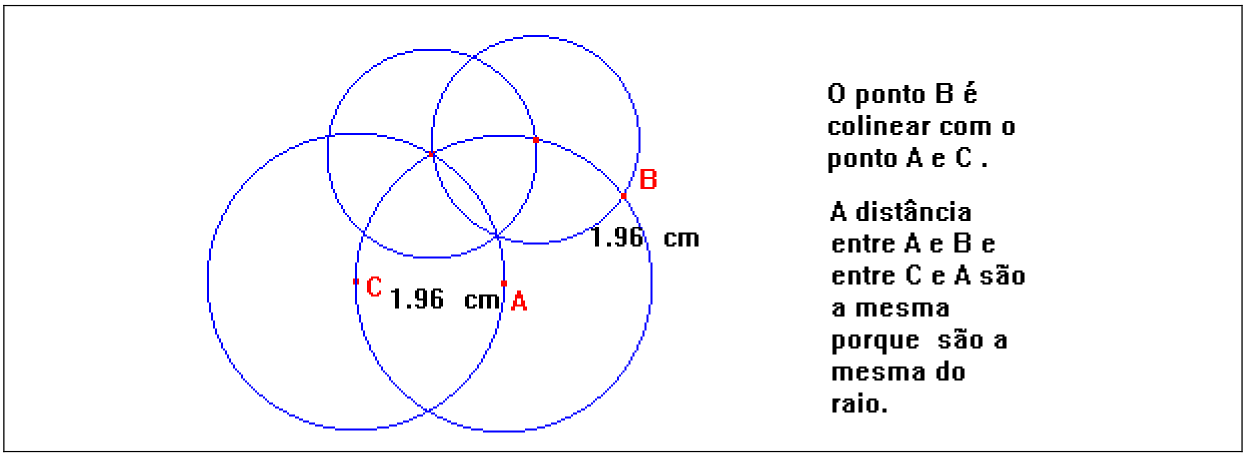


Figura a.110 -- Resp. da ativ.5 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

Atividade-6

1ª resolução

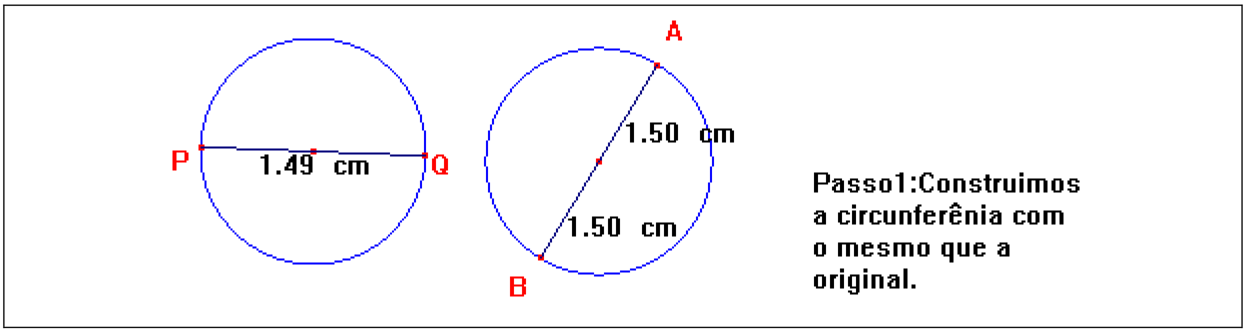


Figura a.111 -- Resp. da ativ.6 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

2ª resolução

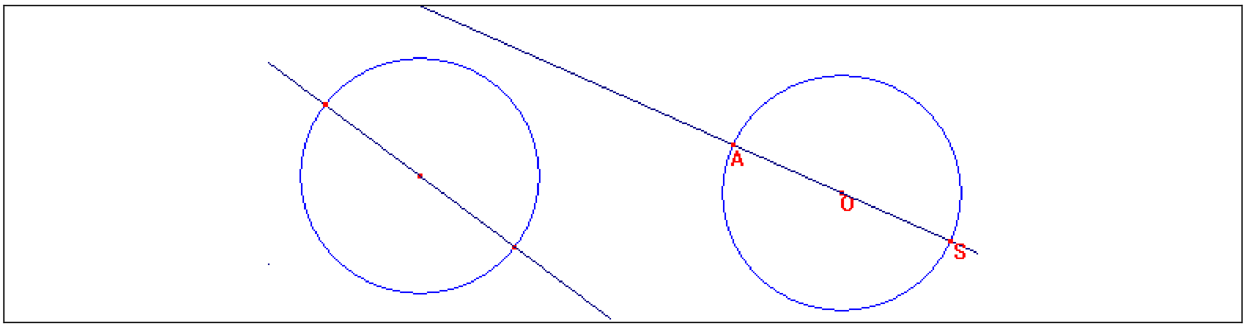


Figura a.112 -- Resp. da ativ.6 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

3ª resolução

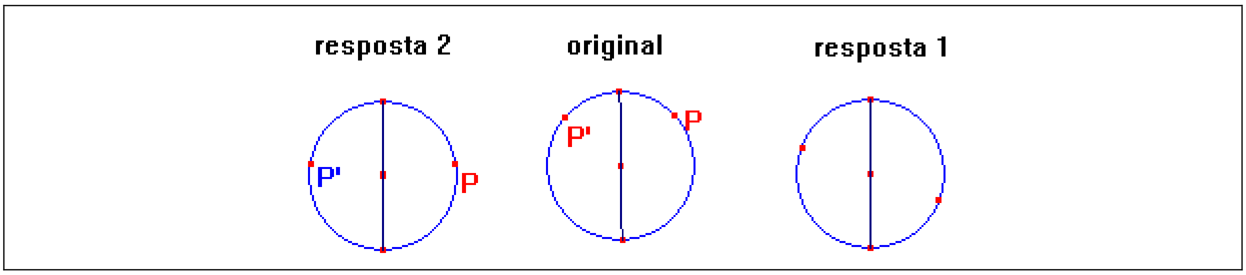


Figura a.113 -- Resp. da ativ.6 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

Atividade 7

1ª resposta

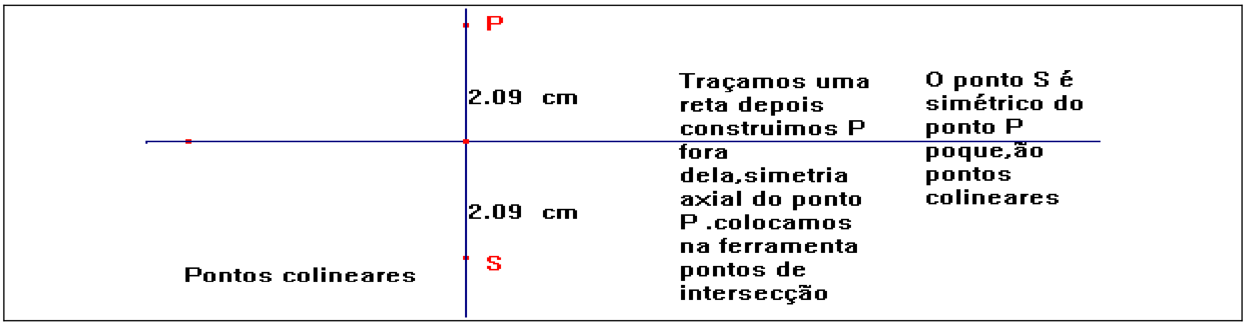


Figura a.114 - Resp. da ativ.7 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

2ª resposta

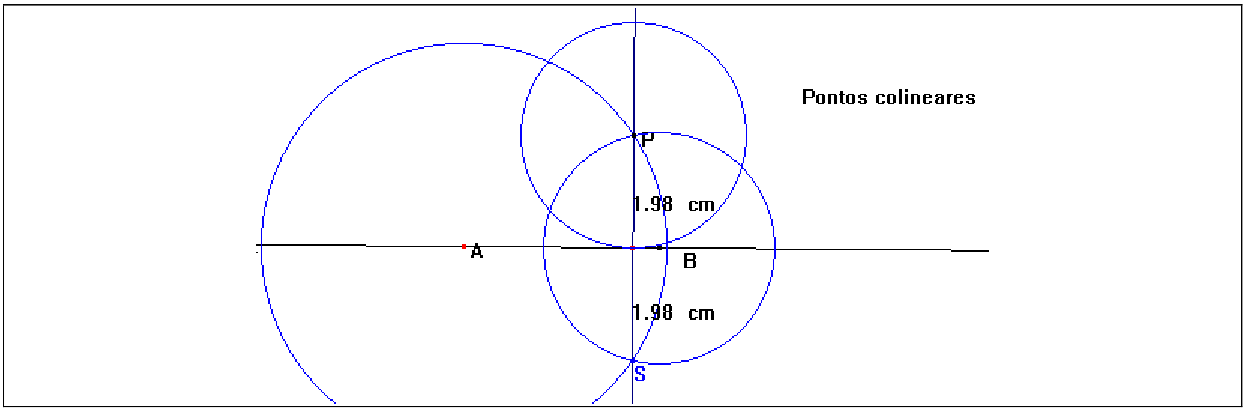


Figura a.115 -- Resp. da ativ.7 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

3ª resposta

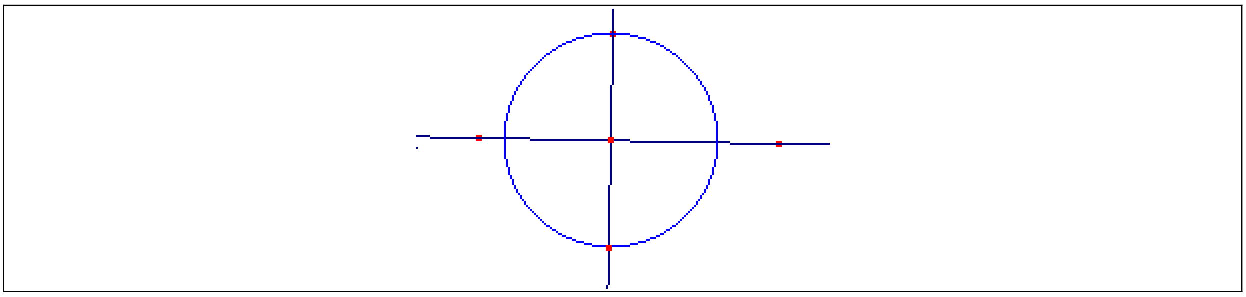


Figura a.116 -- Resp. da ativ.7 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

4ª resposta

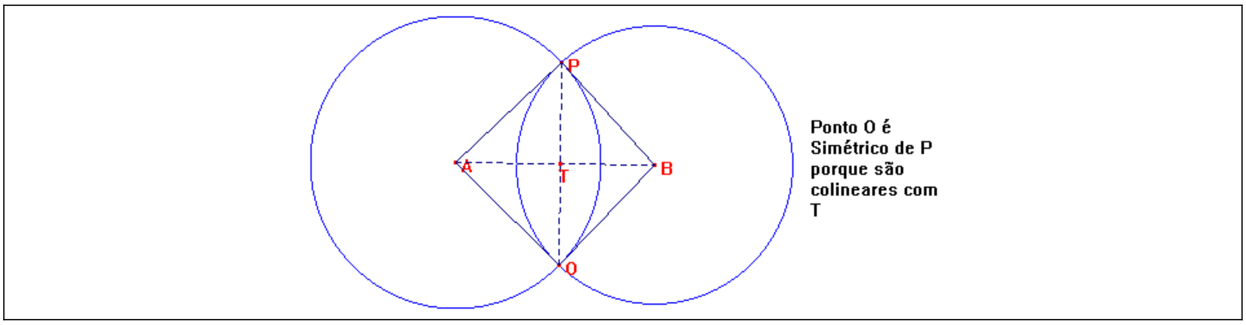
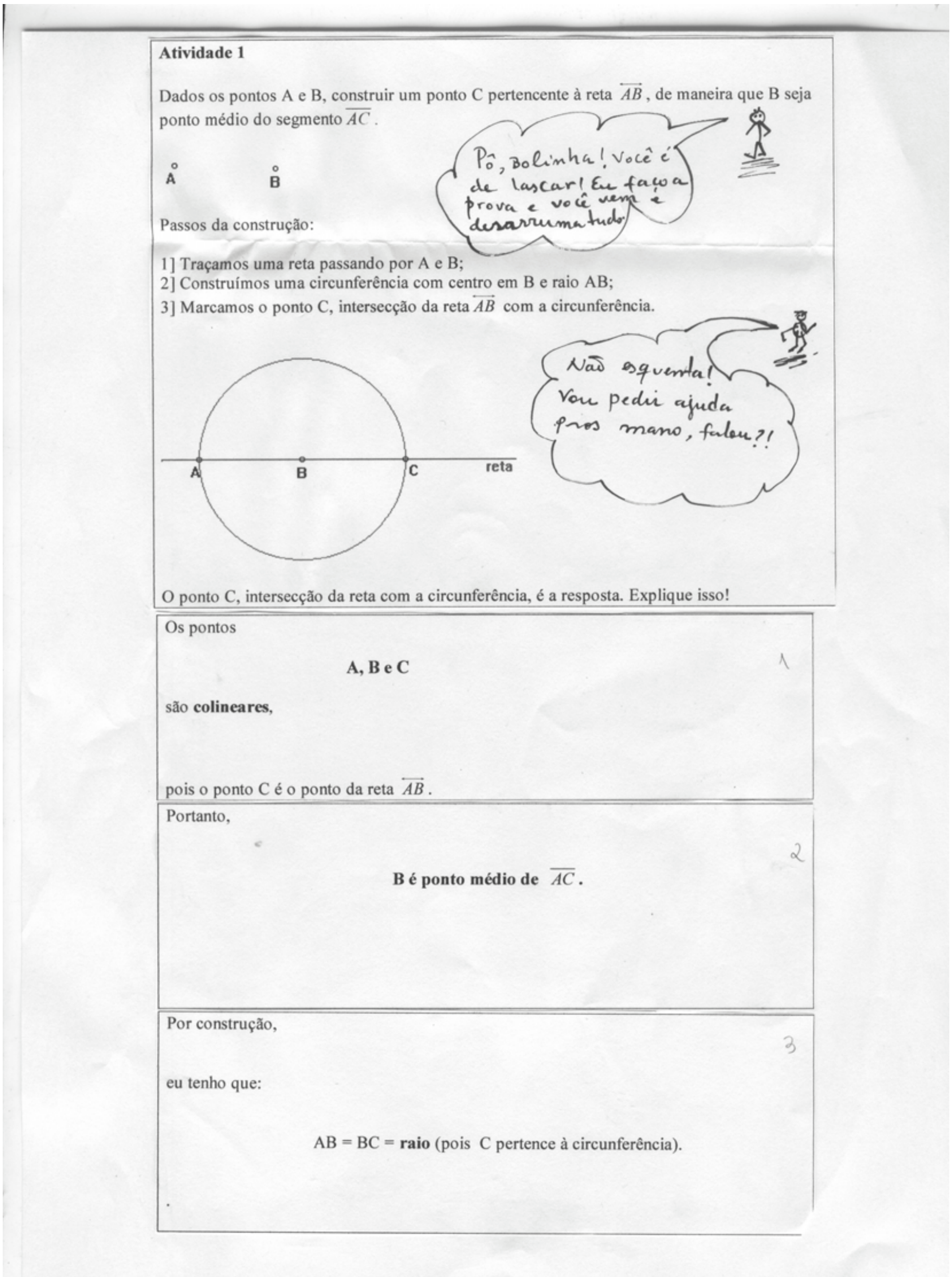


Figura a.118 -- Resp. da ativ.7 (Conjunto 1), por Bárbara/Suzane

ANEXO 14

Conjunto 2 – Respostas das atividades do "jogo" de prova e do Pós-teste, pela dupla Bárbara/Suzane

Atividade 1



Atividade 1

Dados os pontos A e B, construir um ponto C pertencente à reta $\overleftrightarrow{AB}$, de maneira que B seja ponto médio do segmento $\overline{AC}$.

A B

Passos da construção:

1] Traçamos uma reta passando por A e B;
2] Construímos uma circunferência com centro em B e raio AB;
3] Marcamos o ponto C, intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a circunferência.

O ponto C, intersecção da reta com a circunferência, é a resposta. Explique isso!

Os pontos

A, B e C

são **colineares**,

pois o ponto C é o ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

1

Portanto,

B é ponto médio de $\overline{AC}$ **.**

2

Por construção,

eu tenho que:

AB = BC = **raio** (pois C pertence à circunferência).

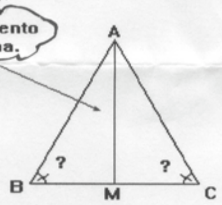
3

Atividade 2

Atividade-2

A figura abaixo é um triângulo isósceles. Veja!

Este segmento é a mediana.



Mediana? O que é mesmo uma mediana?

Em qualquer triângulo, é um segmento que vai de um vértice até o ponto medio do lado oposto.

Fininho explica!

AB = AC. Isso faz parte da hipótese.

$$\begin{cases} AB = AC \\ M \text{ é ponto médio de } \overline{BC} \end{cases}$$

Bolinha e Fininho estão tentando provar que $\sphericalangle\hat{B} = \sphericalangle\hat{C}$. Será que você pode dar uma força prá eles? – É que eles são meio atrapalhados!

Temos:

$\boxed{\begin{array}{l}\Delta ABC \\ AB \equiv AC\end{array}}$

Hipótese
(O que é dado)

Queremos provar que:

$\boxed{\sphericalangle\hat{B} \equiv \sphericalangle\hat{C}}$

Tese
(Conclusão)

Eu sei que nos dois triângulos, AMB e AMC, temos:

$$AB = AC$$
$$AM = AM$$
$$BM = CM$$

$\boxed{\text{do } \triangle \text{ AMB}}$ $\boxed{\text{do } \triangle \text{ AMC}}$

Ah! Então posso imaginar um triângulo se sobrepondo ao outro. E daí?

O fato de os triângulos AMB e AMC serem congruentes quer dizer que eles têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Consequentemente,

Os lados correspondentes são iguais. Os ângulos correspondentes também!

$$\sphericalangle\hat{B} \equiv \sphericalangle\hat{C}$$

O critério

LLL (Lado, Lado, Lado)

nos garante que

$$\Delta AMB \equiv \Delta AMC$$

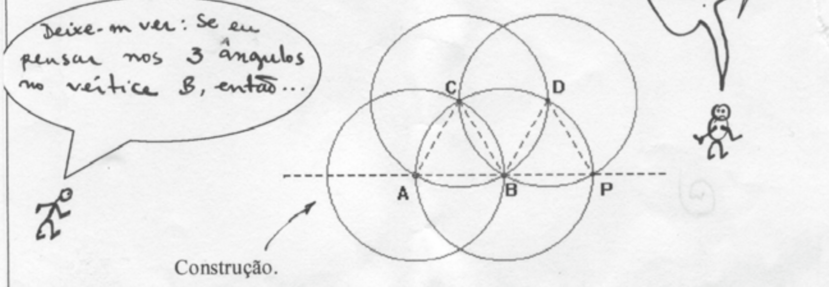
(Os dois triângulos são congruentes)

Atividade 3

Construir um ponto P na reta $\overleftrightarrow{AB}$, de forma que B seja ponto médio do segmento $\overline{AP}$.

A B

Nesta construção não usamos retas, apenas o compasso.



As partes pontilhadas são para ajudar a "ver" as retas.

Eu sei que (1)

os triângulos **ABC, CBD e DBP**

são equiláteros (pois foram construídos com a mesma medida AB).

Logo, todos os três ângulos no vértice B medem 60° (60 graus), ou seja: 1

Logo, somando esses três ângulos vem o resultado:

Com este resultado, posso concluir que os três pontos A, B e P são colineares. (3)

$$\sphericalangle A\hat{B}C + \sphericalangle C\hat{B}D + \sphericalangle D\hat{B}P =$$
$$60° \quad + \quad 60° \quad + \quad 60° \quad = 180°$$

(A soma dos 3 ângulos no vértice B é 180 graus.) 2

E como (4)

AB = BP (= raio), 3

Chegamos à conclusão de que:

B é ponto médio de AB

---

(2)

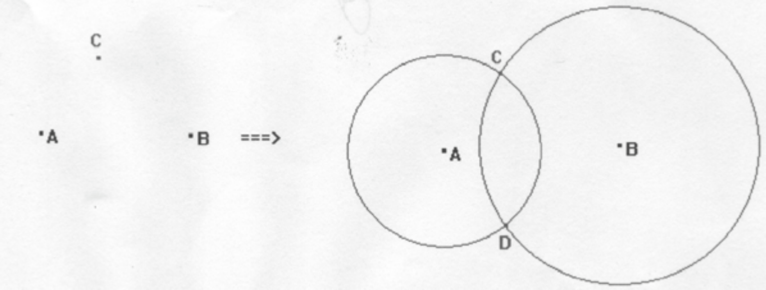
$$\sphericalangle A\hat{B}C = \sphericalangle C\hat{B}D = \sphericalangle D\hat{B}P = 60°$$ 4

Atividade 4

Atividade-4

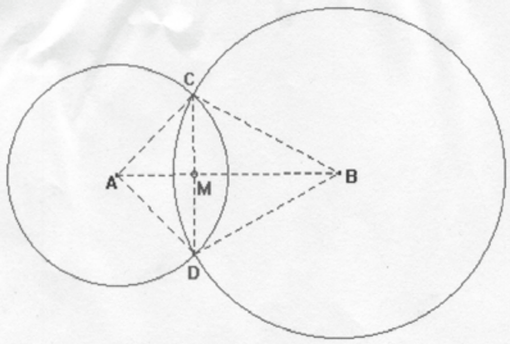
Dados os pontos A, B e C, construir o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Nesta construção não usamos retas, apenas o compasso.



Passos da construção:

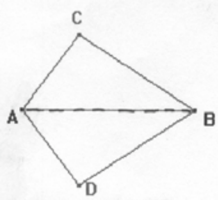
1] Construímos uma circunferência de centro B e raio BC;
2] Construímos outra circunferência, de centro A e raio AC
3] Marcamos o ponto D, que intersecção das duas circunfrências traçadas. E pronto!



As partes tracejadas são apenas para ajudar a "ver" as retas!

Então, o ponto D é a resposta procurada. Como vou mostrar agora que a construção está correta?

Podemos desenhar dois triângulos, ABC e ABD:



Será que sobrepondo...

Sabemos que:

AC = AD (raio)

CÂB = DÂB (Por causa da congruência dos triângulos ABC e ABD).

AM = AM (lado comum)

Atividade 4 (Continuação...)

(continuação...)

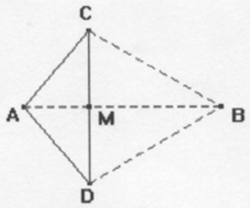
O triângulo **ABC**

é congruente ao

triângulo **ABD**,

pelo caso **LLL** 3

Seja M o ponto de intersecção dos segmentos CD e AB. Podemos, assim, desenhar dois triângulos, ACM e ADM 4



Por construção, eu sei que: 5

AC = AD (mesmo raio) → **L**

BC = BD (mesmo raio) → **L**

AB = AB (lado comum aos 2 triângulos) → **L**

E posso dizer então que…

Qual é mesmo a consequência desses dois triângulos serem congruentes? **Hum!** A resposta me ajudaria bastante!

Então, pelo critério LAL

$\Delta ACM \equiv \Delta ADM$

(o triângulo ACM é congruente ao triângulo ADM) 6

Conseqüentemente (pela congruência dos dois triângulos), chegamos à igualdade: 7

CM = DM

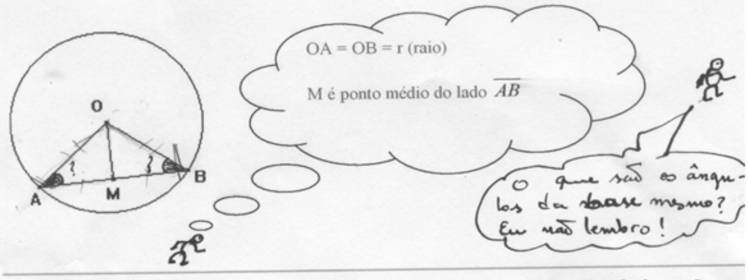
Portanto, 8

D é o simétrico de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$

Pós-teste

Pré-teste_3 Pós - teste

Na figura, O é o centro da circunferência e o triângulo OAB é isósceles (que tem dois lados iguais).



Ajude *Bolinha* e *Fininho* a provar que **num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.**

ΔOAM ΔOBM

AM = BM

AO = BO

OM = OM

Os triângulos são congruentes pelo caso LLL.

Portanto, os ângulos A, e B são congruentes porque