PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Marcia Aparecida Nunes Mesquita

Ensinar e aprender funções polinomiais do 2.º grau, no ensino médio: construindo trajetórias

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Marcia Aparecida Nunes Mesquita

Ensinar e aprender funções polinomiais do 2.º grau, no ensino médio: construindo trajetórias

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Prof(a). Dr(a). Célia Maria Carolino Pires.***

São Paulo
2009

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

Dedico este trabalho ao meu irmão Marcelo Nunes Mesquita, que me incentivou a estudar, mas em especial à minha mãe Marlene Nunes Mesquita, pelo amor, apoio, incentivo, compreensão e principalmente por acreditar e valorizar meu esforço e dedicação.

AGRADECIMENTO

À Professora Dra. Célia Maria Carolino Pires, não só pela competência e sabedoria na orientação, mas pelo carinho, incentivo e, principalmente, pela confiança que depositou em mim.

À Professora Dra. Edda Curi e à Professora Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, por aceitarem fazer parte da banca examinadora e pelas valiosas contribuições que enriqueceram este trabalho.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, pelo que representaram na minha formação para concretização deste sonho.

Ao meu noivo Edson Kegel Silva, pelo amor, companheirismo, apoio, incentivo e compreensão nesta fase em que estive tão ausente.

Ao meu pai João dos Santos Mesquita, que sempre torceu por mim.

Às minhas amigas Solange Ap. Cataldi M. Campos, Rosana de Fátima P. Carnavale, Neide Bosnic e Kátia Cristina de Araújo, por estarem sempre ao meu lado compartilhando momentos bons, assim como momentos difíceis.

Ao meu amigo e Professor Carlos Augusto Coelho Andreotti, pelas lições de convivência, amor e solidariedade, e por estar sempre me incentivando a não desistir de meu objetivo.

Ao meu amigo e Professor Clécio Rodrigues de Souza, pela vida estar sempre nos aproximando nos estudos desde a Graduação, seguindo pela Especialização e agora na Pós-Graduação. Amigo, conseguimos transformar nosso sonho em realidade.

Aos meus amigos do Mestrado, pelo convívio e amizade que pretendo preservar, em especial, Osmar Antônio de Lima e José Manoel Vitolo.

Aos colegas do grupo de pesquisa, especialmente Alexandra Garrote Angiolin e Antônio Celso Tommetti.

Aos meus colegas de trabalho, assim como aos alunos que participaram e colaboraram para o desenvolvimento desta pesquisa.

À coordenação e à direção da escola em que trabalho, que me apoiaram e auxiliaram no que foi necessário.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos, sem a qual não teria condições financeiras para a concretização deste curso.

A todos aqueles que acreditaram e torceram para que eu conseguisse concluir esta grande tarefa.

À minha mãe, pois, se não fosse ela, nada disso seria possível.

Muito Obrigada!

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo investigar como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino, no caso particular do ensino e da aprendizagem de funções polinomiais do 2.º grau, e analisar a atuação de professores de Matemática no que se refere às atividades de planejamento e desenvolvimento do ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem. Fundamenta-se nos trabalhos de Simon (1995) sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que envolve dois professores de Matemática de uma escola pública estadual de São Paulo e sua atuação junto a 62 alunos da 1.ª série do Ensino Médio. Inicialmente, elaboramos a primeira versão da trajetória hipotética de aprendizagem levando em consideração os objetivos que selecionamos e as hipóteses de aprendizagem dos estudantes que indicamos, de acordo com o planejamento do ensino. Apresentamos essa primeira versão aos professores para que eles pudessem, por meio do conhecimento atual que possuem de seus alunos, realizar sugestões, modificações ou alterações e assim elaborarmos juntos com eles a segunda versão da THA. No entanto, os professores apresentaram uma atitude passiva diante da análise, não realizando nenhuma modificação na primeira versão da THA. Em seguida acompanhamos todo o desenvolvimento da trajetória em sala de aula, avaliamos e discutimos os resultados do trabalho com os professores e indicamos mudanças na THA inicial. Os resultados obtidos nos levaram a concluir que compatibilizamos perspectivas construtivistas de ensino-aprendizagem com o planejamento ao propormos tarefas envolvendo resolução de problemas, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações em situações do cotidiano e em outras áreas do conhecimento, de modo que o aluno pudesse interagir e realizar experimentos, levantar hipóteses, construir estratégias de resolução, esboçar conjecturas, argumentar, relacionar e analisar, porém concluímos que isso não garante uma aprendizagem com perspectivas construtivistas, sua efetivação depende de como o professor vai atuar em sala de aula.

Palavras chave: Educação Matemática. Currículo de Matemática. Ensino médio. Funções polinomiais do 2º grau. Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

ABSTRACT

The present work has like objective to investigating how to make constructivist perspectives of learning compatible with the planning of the teaching-learning process, in the particular case of the teaching and of the learning of polynomial functions of the second degree and to analyze the performance of Mathematic teacher with refer to the activities of the planning and development of teaching, in a way compatible with a constructivist perspective of learning. It is based on the Simon's works (1995) on hypothetical learning trajectories (HLT). It is treated of a qualitative research that it involves two Mathematic teachers of a state public school of São Paulo and their work with 62 students in the first year of Junior High School. Initially we elaborated the first version of the hypothetical learning trajectories taking into account the objectives that we selected and the hypotheses of the students' learning that we indicated in agreement with the planning of the teaching. We presented that first version for the teachers to that they were able to through the current knowledge that they possess of their students, to accomplish suggestions, modifications or alterations and this way we elaborate like this together with them the second version of THA, but the teachers presented a passive attitude face to the analysis, not accomplishing any modification in the first version of THA. Afterwards we accompanied the whole development of the trajectory in classroom, we evaluated and we discussed the results of the work with the teachers and we indicated changes in initial THA. The obtained results left ourselves to conclude that became compatible perspectives teaching-learning constructivist with the planning to the we propose tasks involving resolution of problems, use of technologies, interdisciplinary approaches and applications in situations of the daily and in other areas of the knowledge, so that the student could interact and to accomplish experiments, to lift hypotheses, to build resolution strategies, to sketch conjectures, to argue, to relate and to analyze, but we concluded that this doesn't guarantee a learning with constructivist perspectives, its accomplishment depends what manner the teacher will act at the classroom.

Keywords: Mathematical education. Mathematic curriculum. High School. Functions polynomial of the second degree. Hypothetical Learning Trajectories.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

I. Inserção deste trabalho no projeto de pesquisa

Esta dissertação está inserida na linha "A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores" do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Faz parte do grupo de pesquisa intitulado "Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores", que tem como coordenadora a Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires, orientadora deste trabalho.[1]

O grupo está desenvolvendo o projeto de pesquisa denominado "Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio", que tem como motivação a necessidade de desenvolver propostas de apoio à inovação curricular na área de Matemática para o Ensino Médio.

O projeto reúne doutorandos[2] que têm como propósito investigar e elaborar fundamentos teóricos sobre diferentes aspectos dos currículos de Matemática, tais como: caracterização histórica dos currículos de Matemática, eleição de critérios de avaliação de currículos, polarização entre aplicações práticas e especulações teóricas, contextualização e interdisciplinaridade.

---

[1] O Professor Dr. Armando Traldi Júnior também integra o grupo e orienta dissertações de Mestrado.

[2] Doutorados: Márcio Antonio da Silva – Currículos de Matemática no Ensino Médio: estabelecendo critérios para escolha e organização de conteúdos; Arlete Aparecida Oliveira de Almeida - Da polarização entre aplicações e especulações teóricas nos currículos de matemática do ensino médio, às possibilidades de articulação. Harryson Junior Lessa Gonçalves – A Interdisciplinaridade no Currículo de Matemática de Ensino Médio; Márcia Maioli – Contextualização no Currículo de Matemática de Ensino Médio; Denise Franco Capello Ribeiro – Trajetória histórica dos livros didáticos de geometria editados para os primeiros cursos do ensino médio brasileiro; Maryneusa Cordeiro Otone Silva. Currículos de Matemática do Ensino Médio no período de 1930 a 1960.

No caso dos mestrados,[3] o propósito é o de que cada um se dedique a construir, discutir e avaliar, para diferentes expectativas de aprendizagem do ensino médio, trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA), que consistem de objetivos para a aprendizagem dos estudantes, de tarefas matemáticas que serão usadas para promover a aprendizagem dos estudantes e do levantamento de hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, segundo Simon (1995).

O projeto pretende contribuir para o conhecimento sobre as aprendizagens dos alunos do Ensino Médio em tarefas que envolvem resolução de problemas, investigação, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações de conceitos e procedimentos matemáticos a situações do cotidiano e em outras áreas de conhecimento, conforme prescrições curriculares atuais.

Nossa dissertação de mestrado focaliza as Funções Polinomiais do 2.º grau, tema que tem presença "obrigatória" nos currículos do Ensino Médio e que é geralmente trabalhado no 1.º ano.

Na sequência, descrevemos o projeto de pesquisa "Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio" e, em seguida, caracterizaremos a nossa participação.

II. Motivações e relevância do Projeto de Pesquisa

Segundo Pires (2009b), nos últimos anos, a discussão curricular no Brasil foi impulsionada especialmente pelo processo desencadeado pelo Conselho Nacional de Educação e pelo Ministério da Educação, de proposição de Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNEM) e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM). Imerso em muitas polêmicas, esse processo revelou inúmeras divergências e dúvidas referentes à organização e à implementação de currículos em nosso país.

[3] Mestrados: Alexandra Garrote Angiolin – Funções exponenciais; Américo Augusto Barbosa – Funções trigonométricas; Ana Lucia Viveiros de Freitas – Isometrias e Geometria Plana; Antonio Celso Tonnetti – Estatística; Maria de Fátima Aleixo de Luna – Geometria Plana; José Manoel Vitolo – Variação de Grandezas e funções, funções polinomiais do 1º grau e funções constantes; Márcia Aparecida Nunes Mesquita – Funções polinomiais do segundo grau; Patrick Oliveira de Lima – Funções logarítmicas; Vivaldo de Souza Bartolomeu – Dos números naturais aos números reais; Denílson Gonçalves Pereira – Geometria Analítica; Rubens de Souza Cabral Junior – Combinatória e probabilidade.

A autora destaca:

> Uma das questões em debate refere-se à própria competência para definição de currículos. Embora não seja consensual, há uma tendência a se considerar a importância da participação ampla de setores da sociedade na discussão curricular. Também se concebe como tarefa dos diferentes níveis do sistema educacional – união, estados, municípios – a busca de acordos sobre o que ensinar às novas gerações. Em qualquer circunstância uma questão sempre presente é a seguinte: qual o papel e qual a participação dos professores no processo de organização e desenvolvimento curricular?

Buscando respostas a essa questão, Pires comenta que elas estão localizadas muitas vezes em pólos totalmente opostos:

> [...] de um lado há uma defesa de que cabe a cada professor, individualmente, em sua sala de aula, definir o que, porque e como ensinar e avaliar; de outro, há uma concepção de que o professor deve ser tão somente, aplicador de atividades elaboradas por supostos especialistas e que chegam às escolas por meio de pacotes apostilados.

E ressalta que, há muitas décadas, internacionalmente essa questão vem sendo discutida. Em seu texto, Keitel e Kilpatrick evidenciam um ponto bastante importante sobre a participação dos professores, quando fazem referência à "currículos planejados" e "currículos implementados":

> Uma tentativa para lidar com a complexidade curricular foi a de distinguir entre o currículo planejado e o currículo implementado. Uma distinção entre o currículo planejado (tal como está representado em documentos oficiais, manuais, ou em ambos) e o currículo implementado (normalmente medido através de questionários aos professores) foi feita no Second International Mathematics Study — SIMS (Travers e Westbury, 1989). A distinção já tinha sido antecipada no First International Mathematics Study — FIMS (Husén, 1967) — pela utilização de classificações dos professores das oportunidades de aprendizagem dos conteúdos relativos a cada item testado. Apesar dos termos planejado e implementado transportarem a infeliz conotação de que as únicas intenções que contam são as oficiais, e de que os professores não passam de meros executores que implantam no terreno planos de outras pessoas, esta distinção foi útil, na medida em que ajudou a distinguir o planejado do que é a realidade curricular (apud PIRES, 2009).

No âmbito da pesquisa, Pires (2009a) considera que são poucas as fontes teóricas no campo específico da organização e desenvolvimento curricular em Matemática.

> Nas investigações que conduzimos no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, inicialmente nos apoiamos em trabalhos como os de Bishop (1991) e Doll (1997), que

> apresentam alguns princípios orientadores e que podem sustentar a construção de critérios de avaliação, mas que ainda estão pouco discutidos entre nós.

A autora prossegue comentando que, na área de Educação Matemática, parte bastante significativa das pesquisas que foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas situa-se no campo da Didática da Matemática e se inscreve no campo de influência das abordagens construtivistas, colocando o foco na construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes. No entanto, os resultados dessas pesquisas não têm influência direta na elaboração ou ressignificação de propostas de ensino compatíveis com o que indicam as pesquisas a respeito das formas de aprendizagem.

Também considera que é bastante frequente a explicitação de um certo desconforto na discussão sobre currículo entendido como planejamento de uma trajetória a ser realizada por alunos, seja ao longo da educação básica ou do ensino superior, desconforto causado por uma ideia bastante comum de que numa perspectiva construtivista esse percurso deve ser ditado por interesses dos alunos e sem definições prévias de conteúdos.

É no âmbito dessas discussões que Pires situa as motivações do projeto de pesquisa em andamento que possibilita analisar a participação de professores, incluindo os professores pesquisadores, na tarefa de construir, analisar e avaliar situações de aprendizagem em relação a diferentes expectativas de aprendizagem do ensino médio, a partir da construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA).

Pires retoma que alguns artigos traduzidos pelo grupo,[4] em especial o artigo de Simon (1995), estimularam as reflexões do grupo e forneceram subsídios teóricos para o desenvolvimento da pesquisa.

Nos estudos realizados coletivamente pelo grupo de pesquisa, as prescrições curriculares oficiais tiveram lugar de destaque e a finalidade era captar o que os

---

[4] Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145. Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98.

documentos oficiais sugerem para a organização de currículos para essa etapa da escolaridade.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM)[5] propõem que o currículo para o Ensino Médio seja organizado a partir de três áreas do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias; Linguagens, Códigos e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias. No entanto, essa proposição, potencialmente rica no sentido de apontar para as conexões entre diferentes campos do conhecimento, com destaque para a abordagem interdisciplinar, precisa ser implementada com muita clareza para que a especificidade e a contribuição de cada um desses campos não se percam.

Outra ideia central é a da importância de exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas e/ou da modelagem. Esta perspectiva de trabalho, embora tenha o apoio teórico e uma gama considerável de experiências, é certamente muito "desconhecida" dos professores, que tiveram uma formação exatamente na direção oposta. É, portanto, aprofundar a discussão sobre o que significa "contextualizar" em Matemática, para que não caiamos na mera simplificação do "fazer parte do cotidiano ou da realidade". Há outras formas de contextualização igualmente ricas e importantes, como as que são feitas a partir da própria história da matemática, de sua aplicação em outras áreas e as internas à própria Matemática, como as que relacionam aspectos numéricos, geométricos, algébricos, entre outros, de um mesmo conceito.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)[6] enfatizam que o papel da Matemática no Ensino Médio não é apenas formativo (que ajuda a estruturar o raciocínio dedutivo) ou instrumental (ferramenta que auxilia em todas as atividades humanas), mas que ela também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. Nesse sentido, destaca a importância do aluno perceber que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Defendem que cabe apresentar ao aluno o conhecimento matemático de modo que

[5] Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, 1998.
[6] Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1999.

ele possa buscar novas informações e instrumentos necessários para que seja possível continuar aprendendo. Essas diferentes funções da Matemática devem ser discutidas e estimuladas para que sejam equilibradamente trabalhadas.

Além da seleção de conteúdos, é fundamental discutir a sua organização. Tradicionalmente, a organização é linear, guiada por prerrequisitos internos que dificultam uma abordagem interdisciplinar. Além disso, há uma tradição de organização em que um dado tema é visto uma única vez, extensivamente. As propostas de organização curricular em espiral ou rede, já razoavelmente incorporada inclusive pelos livros didáticos, ainda não estão presentes nas propostas para o Ensino Médio. Por esse motivo, essa é uma temática interessante e desafiadora.

Ainda nesse artigo, Pires também faz uma analogia apontando suas investigações sobre Currículos em Rede (2000), em que apresentou um modelo de organização curricular que buscava trazer alternativas de superação de mitos como os da linearidade/acumulação, na construção do conhecimento. Assim, em vez de compor-se por uma sucessão de pontos que devem ser dados numa certa ordem e que têm conduzido a uma prática educativa inadequada, os currículos de matemática podem ter como modelo a rede, num desenho curricular, composto por uma pluralidade de pontos, ligados entre si por uma pluralidade de ramificações/caminhos, em que nenhum ponto (ou caminho) é privilegiado em relação a um outro, nem univocamente subordinado a qualquer um.

Nessa proposta, Pires aponta que é possível imaginar um desenho curricular básico, mas que não seja rígido, nem inflexível. Ele deve representar também, a cada instante (ou a cada período de tempo), uma situação móvel. Desse modo, permitirá concretizações específicas diferenciadas, favorecerá abordagens interdisciplinares e a realização de projetos de professores e alunos.

Pires destaca que os caminhos percorridos, embora lineares, não devem ser vistos como os únicos possíveis. Com isso, deve-se garantir que o estudo de qualquer conteúdo seja significativo para o aluno, e não justificado apenas pela sua qualidade de “prerrequisito” para o estudo de outro conteúdo. Sabemos que o estudo de um assunto não se torna significativo para o aluno apenas porque eventualmente lhe será útil no futuro, na profissão ou nos cursos que fará posteriormente.

Outro aspecto que merece atenção, de acordo com as DCNEM, são os chamados conteúdos atitudinais. Integrando o currículo, com o mesmo peso que os conceitos e os procedimentos, o desenvolvimento de valores e atitudes é fundamental para que o aluno aprenda a aprender. Omitir ou descuidar do trabalho com esse aspecto da formação pode impedir a aprendizagem inclusive da própria Matemática. Entre esses valores e atitudes, podemos destacar que ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, fundamentar suas ideias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender, se comunicar, perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade e possa estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho. A questão dos professores é: como fazer isso?

Nas DCNEM defende-se a ideia de que o Ensino Médio não deve ter como objetivo principal a preparação dos exames vestibulares. Concebem a aprendizagem como construção de competências em torno do conhecimento. Tal aspecto é sempre questionado pelos professores, que identificam um descompasso entre essa proposta curricular e a sistemática de acesso ao ensino superior. Assim, é importante discutir esse impasse, que tem implicações tanto para a seleção de objetivos e de conteúdos como também para a avaliação de desempenho dos alunos do Ensino Médio.

Além da discussão sobre os documentos oficiais, outra reflexão importante realizada no grupo foi aquela referente ao processo de implementação de inovações curriculares, particularmente no caso do Ensino Médio, e à chamada “resistência” dos professores às pretendidas “inovações curriculares”.

Uma das questões relacionadas a esse problema pode ser a forma muito burocrática pela qual é conduzido o processo de planejamento na escola, com o preenchimento de formulário em que devem ser descritos objetivos, conteúdos, metodologia e avaliação, que na maior parte das vezes pouca utilidade tem para o professor, pois se trata de uma organização curricular desarticulada em que muitas vezes é utilizado apenas para o professor seguir uma ordem de conteúdos listados.

Em função dessas constatações, justifica-se a proposição de projetos de pesquisa que envolvam professores pesquisadores e professores que estão atuando na educação básica, no nosso caso, no Ensino Médio, com o intuito de vivenciar situações que indiquem possibilidades de implementação de uma proposta curricular na prática, mais condizente com pressupostos curriculares inovadores.

III. Apresentação do presente trabalho

Como já mencionamos anteriormente, nosso trabalho focalizará a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Funções Polinomiais do 2.º grau.

Pela nossa experiência, sabemos que esse assunto é abordado no primeiro ano do Ensino Médio em propostas que priorizam a apresentação de definições, propriedades, roteiro de construção de gráficos e exercícios.

Tal fato nos desafia a trabalhar na perspectiva de discutir situações contextualizadas e interdisciplinares, com uso de resolução de problemas que tenham a intenção de que o aluno possa aplicar seu conhecimento em situações do cotidiano, em outras áreas de conhecimento e internas à própria matemática.

Assim, buscaremos responder às seguintes questões:

- Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Polinomiais do 2.º grau?

- Como as pesquisas na área de Educação Matemática que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem podem contribuir para a organização do ensino de Funções Polinomiais do 2.º grau que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos?

- Como é a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Polinomiais de 2.º grau, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

IV. Procedimentos metodológicos

Nossa pesquisa é de natureza qualitativa, em que a estratégia utilizada é o estudo de caso, pois tendo em conta a natureza das questões e o fato de se pretender uma descrição dos fenômenos educativos, assim como a sua interpretação; essa investigação possui características básicas, além de ter se desenvolvido no seu contexto real por meio do contato direto entre o pesquisador e os professores, segundo Ludke e André (1986, p. 11-13), como descreveremos a seguir.

Temos como objetivo investigar como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino e da aprendizagem de Funções Polinomiais do 2.º grau e analisar a atuação de professores de Matemática no que concerne às atividades de planejamento e desenvolvimento de ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem. Dessa forma, buscamos convidar professores que gostariam de participar do projeto na própria instituição de ensino em que atuamos como professora.

Desenvolvemos um estudo de caso com dois professores que aceitaram o convite.

Entramos em contato com a direção da instituição de ensino e obtivemos autorização para desenvolver nossa pesquisa, junto aos dois professores e 62 alunos da 1.ª série do Ensino Médio.

Realizamos uma entrevista inicial com os professores, buscando levantar principais características pessoais como: tempo de experiência no magistério, formação acadêmica, concepções sobre o ensino de funções, etc.. Estas informações serão apresentadas no terceiro capítulo deste trabalho.

As aulas em que ocorreu o desenvolvimento da trajetória hipotética de aprendizagem foram filmadas, e em algumas aulas atuamos como observadora e realizamos registros escritos sobre os diálogos estabelecidos no grupo.

O desenvolvimento das THA na sala de aula, as entrevistas e discussões com os professores aconteceram no seu local de trabalho, e o ambiente escolar é a fonte direta dos dados.

Os dados coletados são predominantemente descritivos: foram feitos os relatórios de todas as aulas e discussões com professores, que também serão analisados no terceiro capítulo deste trabalho.

A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto: o interesse principal da investigação não era mostrar que a THA elaborada funciona, mas sim verificar qual a atuação do professor e sua interação com os alunos, tendo como base uma THA elaborada por um professor que é o pesquisador, mas debatida junto com ele.

Houve uma grande preocupação em capturar a perspectiva dos professores, ou seja, compreender sua prática e os conhecimentos profissionais que têm a respeito do tema ensinado.

A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo: não procuraremos buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos, mas o compromisso de capturar evidências que vão emergindo.

Nossa pesquisa, como as demais pesquisas do grupo, foi desenvolvida em duas etapas:

Etapa I: Planejamento do Projeto de pesquisa, em reuniões com os pós-graduandos envolvidos e a coordenação. Estudos coletivos sobre referências teóricas que fundamentam o projeto, nas reuniões semanais do grupo de pesquisa. Estudos individuais sobre teses, dissertações e artigos concernentes ao tema de cada subgrupo. Elaboração das atividades que constituem a THA de cada subgrupo. Estudos do professor pesquisador com os professores do ensino médio que vão participar da pesquisa. Fechamento das propostas de THA com acordos entre pesquisador e professores. Elaboração, pelo pesquisador, de instrumentos para observação e coleta de dados durante a realização das propostas em sala de aula pelos professores do ensino médio.

Etapa II: Desenvolvimento das propostas de trabalho em sala de aula. Avaliação do andamento do projeto nas reuniões semanais do grupo de pesquisa. Realização de seminários para apresentação da produção e leitura crítica dos trabalhos, pelos participantes do grupo de pesquisa. Debates do pesquisador com os professores do Ensino Médio sobre os resultados do trabalho realizado nas salas de aula e indicações de possíveis mudanças nas THA. Escrita do material para qualificação. Elaboração de artigos. Escrita do material para defesa.

V. Estrutura do trabalho

Organizamos nosso trabalho em quatro capítulos.

No Capítulo 1, inicialmente descreveremos as formulações de Simon (1995) que constituem o referencial teórico de nosso trabalho. Na sequência, apresentamos uma revisão bibliográfica referente a pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Funções Polinomiais do 2.º grau e sobre o tratamento do assunto em documentos curriculares.

No Capítulo 2, descrevemos o processo de construção da primeira versão da THA, em que selecionamos objetivos de aprendizagem, indicamos hipóteses sobre aprendizagem dos alunos e escolhemos as tarefas que nos pareciam adequadas. Em seguida, apresentamos a análise da primeira versão da THA realizada por dois professores de escolas de ensino médio e as alterações por eles sugeridas.

No Capítulo 3, fazemos o relato do desenvolvimento da THA em sala de aula, em que atuamos como observadora e também apresentaremos alguns resultados de avaliação do conhecimento dos estudantes durante o desenvolvimento da THA.

No Capítulo 4, buscamos identificar como (e se) esse trabalho de realização da THA contribuiu para a constituição de novos conhecimentos tanto do professor pesquisador quanto dos professores que as desenvolveram com seus alunos, e indicaremos as modificações que faríamos na THA, dando continuidade ao ciclo descrito por Simon.

Finalmente, apresentamos as conclusões e considerações finais do nosso estudo.

CAPÍTULO 1
APORTES TEÓRICOS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No artigo Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon, Pires (2009) discute vários pontos das proposições feitas por esse autor e que serviram de base para os trabalhos realizados no âmbito do projeto de pesquisa.[7]

De acordo com Pires, para esse autor, o construtivismo epistemológico tem sido fonte de pesquisas no ensino da Matemática e tem oferecido bases para reformas na Educação Matemática. Ele considera, porém, que, embora o construtivismo tenha potencialidade para sustentar mudanças no ensino da Matemática, é necessário formular modelos de ensino baseados no construtivismo. Com tal preocupação, Simon propõe que se pense num ciclo do ensino da matemática, em que inclui a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA).

Na sequência, apresentamos a teoria de Simon, apoiando-nos no artigo ao qual fizemos referência.

1.1 Aporte teórico

Simon discute, em seu artigo, a tensão criativa entre a meta dos professores para o ensino e o compromisso de ser sensível ao pensamento matemático dos seus alunos e, além disso, inclui reflexões de outros temas, a saber:

- As atividades de ensino sendo estruturadas e implementadas tendo como ponto central a consideração do pensamento/entendimento dos alunos;

- O planejamento do ensino sendo gerado a partir de uma trajetória hipotética de aprendizagem dos alunos;

[7] Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145. Texto traduzido pelo grupo.
Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98.

- A formação continuada dos professores apoiada em reflexões sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem de seus alunos, num processo de permanente elaboração.

O autor destaca que a perspectiva construtivista no ensino tem sido foco para pesquisas na área da Educação Matemática e tem contribuído para inovações nas reformas do ensino da Matemática. Para ele, embora o construtivismo tenha apresentado aos professores de Matemática caminhos proveitosos para o entendimento de como se processam as aprendizagens, a tarefa da reconstrução de uma "Pedagogia da Matemática" baseada na visão construtivista de ensino é um desafio considerável, em que a comunidade de Educação Matemática tem apenas começado a trabalhar.

Pires aponta que na opinião de Simon: "O construtivismo pode contribuir com importantes caminhos para o ensino da Matemática em sala de aula, embora não estipule um modelo particular" (PIRES, 2009, p. 6).

Além disso, Pires faz referência à explicação de Simon para a expressão "Pedagogia Matemática":

> Ao referir-se à "Pedagogia da Matemática", Simon explica que o termo "Pedagogia" tem a intenção de significar todas as contribuições para a educação matemática na sala de aula. Dessa maneira, Simon inclui não apenas um trabalho multifacetado do professor, mas também o currículo a ser construído e o desenvolvimento de materiais de ensino. O foco específico de seu trabalho está na tomada de decisão a respeito de conteúdos matemáticos e nas tarefas de ensino da Matemática em sala de aula (PIRES, 2009, p. 7).

Segundo Pires, para expor sua proposta de Ciclo de Ensino de Matemática e de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, Simon busca situar sua posição em relação às perspectivas construtivistas e as relações entre construtivismo e pedagogia da Matemática, que resumimos nos dois próximos itens.

Recuperando aspectos da perspectiva construtivista

Simon destaca inicialmente que o interesse na difusão do construtivismo entre teóricos da Educação Matemática, pesquisadores e praticantes tem moldado o discurso para diferentes pretensões do construtivismo:

> De expressões como “Construtivismo Radical” e “Construtivismo Social” derivam algumas orientações, caracterizando a existência de uma diversidade de perspectivas epistemológicas semelhantes dentro dessas categorias. Consequentemente, parece importante uma descrição aprofundada da perspectiva construtivista na qual nossa pesquisa está baseada (SIMON, 1995, p. 4).

Ele retoma o fato de que, na perspectiva construtivista, nós, seres humanos, preferivelmente construímos nosso conhecimento de mundo, por meio de nossas percepções e experiências, mediadas pelo nosso conhecimento prévio. E prossegue:

> Nosso interesse está no trabalho (adaptação com a nossa experiência de mundo). Para esclarecer essa concepção de trabalho precisamos fazer uma extensão: construir nosso senso de percepção ou dados, construir um prognóstico adequado para resolver um problema ou para realizar uma meta (SIMON, 1995, p. 4).

Para o autor, a maior parte das informações que dividem os recentes debates epistemológicos sobre o conhecimento são, fundamentalmente, as que o identificam como um processo social e as que o tomam como um processo cognitivo.

Simon declara que sua posição evita qualquer extremo e busca construir um trabalho teórico baseado em trabalhos que cita: Blumer (1969), Bauersfeld (1988), Cobb, Yackel e Wood (1989) e Von Glasersfeld (1991).

O referir-se aos trabalhos de Cobb (1989), Simon destaca que para esse autor a coordenação das duas perspectivas construtivistas é necessária para entender a aprendizagem em sala de aula. Ela não está somente no social ou na dimensão cognitiva, mas, preferencialmente, na combinação da análise dessas duas perspectivas.

Simon formula uma analogia à luz das teorias psíquicas:

> Nenhuma teoria em particular acena um enfoque suficiente para caracterizar dados psíquicos. Porém, cada teoria tem construído uma contribuição significativa para basear teoricamente a pesquisa; considerando ser um enfoque particular e considerando ser um enfoque que acena também para cada teoria em particular, coordena a descoberta que se origina de cada perspectiva moldada para avanços neste campo (SIMON, 1995, p. 6).

De acordo com Pires, a organização do desenvolvimento do conhecimento em sala de aula afigura-se uma análise particular coordenada, baseada em perspectivas psicológicas (cognitivas) e sociológicas.

> A análise psicológica da aprendizagem da Matemática em sala de aula foca-se no conhecimento individual sobre a Matemática, seu entendimento para o outro, e seu senso de funcionamento na aula de Matemática. A análise sociológica toma como ponto de partida o conhecimento e as normas sociais da sala de aula. As "normas sociais" referem-se àquilo que está entendido como a construção do conhecimento com a efetiva participação dos alunos nas aulas de Matemática. Incluem também as expectativas que os membros da comunidade têm sobre os professores e os alunos, conceitos dos meios utilizados para a elaboração da aula de Matemática e o caminho utilizado para validar a aula de Matemática (PIRES, 2009, p. 9).

Pires aponta ainda que para Simon é proveitoso ter uma visão da Matemática como uma atividade cognitiva apreendida por processos culturais e sociais e como fenômenos sociais e culturais constituídos por uma comunidade altamente conscientizada.

Construtivismo e Pedagogia da Matemática

Para Simon, a aprendizagem é entendida como um processo de construção individual e social mediados por professores com a concepção de um trabalho estruturado no qual se entende a aprendizagem dos alunos. Compreender o desenvolvimento da aprendizagem é extremamente útil e tal fato leva à questão de como o construtivismo poderia contribuir para a reconstrução de uma Pedagogia da Matemática.

Pires enfatiza que Simon novamente faz referência a autores como Wood, Cobb e Yackel, para os quais os professores devem ter como finalidade a construção de uma prática que capacite seus alunos a percorrerem o caminho da aprendizagem matemática, e destaca ainda que:

> Este é o desafio fundamental que deve fascinar os professores de Matemática, o que implica na necessidade de reconstruir meios para fazer conhecer a Matemática na escola e, deste modo, meios para ensinar Matemática (PIRES, 2009, p. 10).

De acordo com Pires, o autor destaca mais uma vez que ao citar o construtivismo como uma teoria epistemológica pondera que ela não define uma orientação particular de ensino. O desenvolvimento do conhecimento está presente no professor ou no ensino realizado. Não existe uma simples função que mapeie a metodologia de ensino dentro de princípios construtivistas. Ou seja: o construtivismo epistemológico não determina a apropriação ou desapropriação de estratégias de ensino.

Para Bauerfied, citado por Simon (apud PIRES, 2009), a construção cognitiva, de natureza essencialmente humana, e a processual emergente dos temas, regularidades e normas entrecruzando Matemática, interação social, para trazer a cognição e o social juntos, não podem ser construídas com simples sumários prescritivos de ensino.

Assim, Pires destaca que:

> Não há referências a respeito da operacionalização de uma perspectiva construtivista social, sem contradizê-la. Comumente é usada a denominação “ensino construtivista”. No entanto, o construtivismo não oferece uma noção de como resolver os problemas de ensino ou de como efetivá-lo (PIRES, 2009, p. 10).

Simon propõe: Para uma perspectiva teórica a questão que precisa de atenção é a seguinte: “Em que o construtivismo contribui para o desenvolvimento de um proveitoso trabalho teórico estruturado pela Pedagogia da Matemática?”.

Pires concorda plenamente com Simon quando afirma que:

> Considera excessivamente simplista, aproveitar a conexão do construtivismo para o ensino com a romântica noção “deixe os alunos sozinhos e eles construirão seu conhecimento matemático”. Ou igualmente: “Colocar alunos em grupos e deixá-los socializar como eles resolvem seus problemas”. Nas experiências educacionais brasileiras ideias como essas foram veiculadas de forma maciça e ocasionaram grandes problemas no que se refere ao papel do ensino e do professor (PIRES, 2009, p. 11).

Simon conta que em sua experiência com alunos perguntava-se: como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos? E conclui que, nessas experiências com alunos, ficou bem nítida a relação entre o projeto de atividades do professor e a consideração do pensamento que os alunos podem trazer em sua participação nessas atividades e que conduzem à formulação da ideia de trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

Trajetória(s) hipotética(s) de aprendizagem, segundo Simon

Simon defende a ideia de que a consideração do objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e pensamento e conhecimento dos estudantes são elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem, parte-chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática.

No que se refere ao conhecimento dos professores de Matemática, além de suas hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais intervêm, por exemplo: teorias de ensino sobre Matemática, representações matemáticas, materiais didáticos e atividades e também teorias sobre como alunos constroem conhecimentos a respeito de um dado assunto, saberes esses derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente.

Durante o desenvolvimento de atividades pelos professores, um objetivo inicial planejado geralmente deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular. Quando os alunos começam a comprometer-se nas atividades planejadas, os professores deveriam "comunicar-se" com as observações dos alunos, nas quais eles formatam novas ideias sobre esse conceito. Assim, o ambiente de aprendizagem envolve resultados da interação entre o professor e os alunos e como eles se engajam em um conteúdo matemático.

Simon refere-se a um comentário de Steffe (2004) "um professor pode propor uma tarefa; contudo, como os alunos constroem suas tarefas e suas experiências é que vai determinar seu potencial de aprendizagem" (apud PIRES, 2009, p. 12). Assim, por exemplo, se um aluno dá uma resposta a um problema elaborado pelo professor e, no entendimento do professor, não foi uma compreensão adequada sobre conceitos ou procedimentos envolvidos, isso deve resultar num novo objetivo de ensino sobre o assunto. Este objetivo, temporariamente, substitui o original.

Simon afirma que, em suas experiências, a discussão na sala de aula o impulsionou a reexaminar diversos conhecimentos para favorecer a elaboração do seu "mapa conceitual" e destaca que o uso do termo "mapa" neste contexto é para enfatizar que o conhecimento do professor serve como um mapa que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem.

Ressalta que o que foi observando em seus alunos mudou suas perspectivas sobre o conhecimento dos alunos e sua perspectiva na concepção Matemática envolvida (seu mapa interno). Esta reorganização de perspectivas contribuiu para a modificação de seus objetivos, planos para atividades de ensino-aprendizagem que havia elaborado anteriormente.

O Ciclo de Ensino de Matemática, segundo Simon

A análise do episódio de ensino vivenciado por Simon contribuiu para o desenvolvimento do Ciclo de Ensino Matemático (Figura 1), como um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, pensamento, tomada de atitudes.

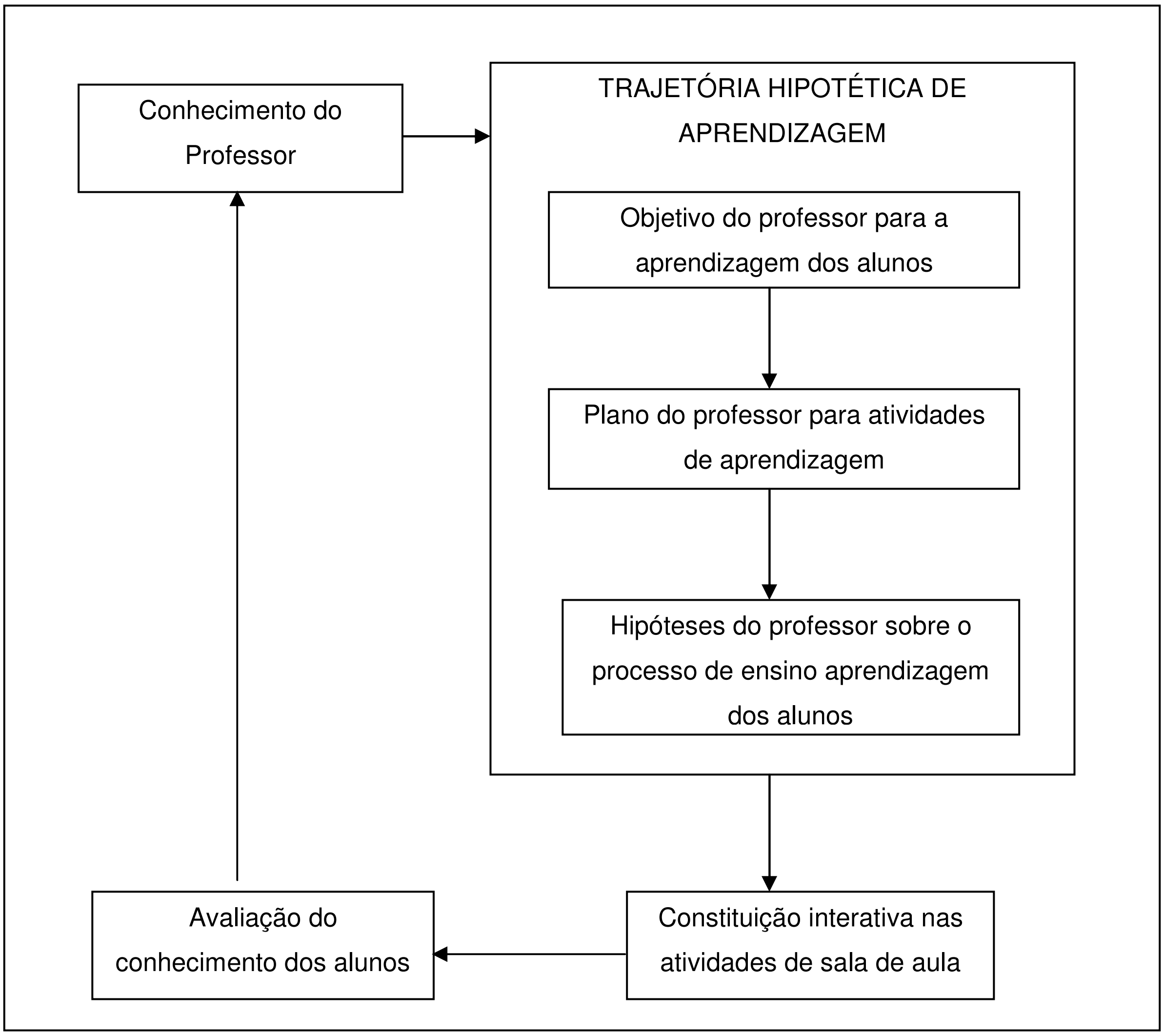


Figura 1: Ciclo de ensino de Matemática abreviado (SIMON, 1995).

Simon refere-se a *hipóteses* sobre o conhecimento dos alunos para enfatizar que não temos acesso direto ao conhecimento deles. E destaca:

> Como professor, minha concepção do conhecimento matemático dos alunos, está estruturada pelo meu conhecimento da Matemática em questão. Convenientemente, o que observei no gosto pelo pensamento matemático dos alunos e meu entendimento das ideias matemáticas envolveram interconexões. Estes dois fatos são interessantes na esfera do ensino do professor (SIMON, 1995, p. 29).

E faz uma referência a Steffe (2004), para o qual, usando seu próprio conhecimento matemático, os professores de Matemática devem interpretar a linguagem e as ações dos seus alunos e tomar decisões sobre possíveis conhecimentos matemáticos dos alunos e sua possibilidade de aprendizagem.

Para Simon é a meta de aprendizagem que o professor tem para seus alunos que possibilita uma direção para uma trajetória hipotética de aprendizagem.

> Usaremos o termo trajetória hipotética de aprendizagem tanto para fazer referência ao prognóstico do professor como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque caracteriza a propensão a uma expectativa. O conhecimento individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. O conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade (cf. Steffe, Von Glaserfield, Richards e Cobb, 1983), que em sala de aula adquire com atividades matemáticas frequentes em métodos prognósticos, e que muitos dos alunos em uma mesma sala de aula podem se beneficiar das mesmas tarefas matemáticas (SIMON, 1995, p. 34).

Para Simon, a trajetória hipotética de aprendizagem dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

Composição da Trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon

Uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) é composta por três elementos:

- o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;

- as atividades de ensino;

- o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades).

A criação das possibilidades de modificações da trajetória hipotética de aprendizagem é a parte central do modelo em que está diagramado na figura abaixo.

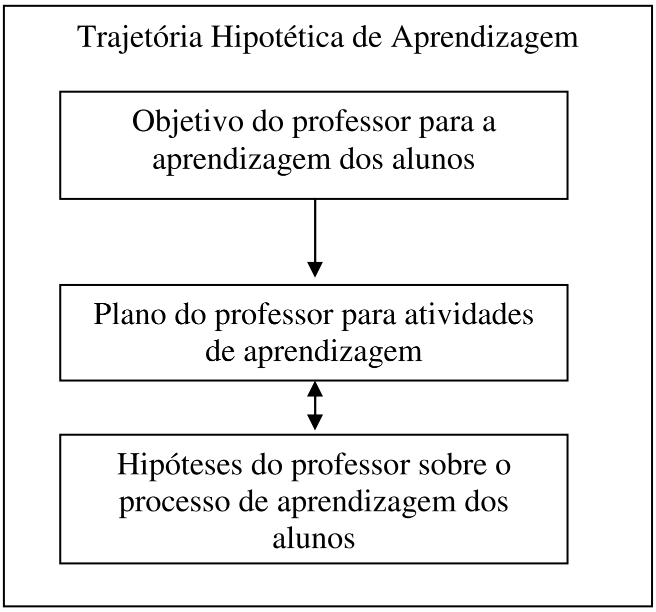


Figura 2: Parte do diagrama da figura 1
Ciclo de ensino de Matemática abreviado (SIMON, 1995).

Para Simon (apud PIRES, 2009, p. 15), a noção da trajetória hipotética de aprendizagem pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida e o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades de aprendizagem têm uma relação simbólica e a geração de ideias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos.

A escolha da palavra “trajetória” é significativa para designar um caminho. Simon convida a uma analogia.

> Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na sequência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus

> planos a respeito da sequência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua “trajetória”. O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua “trajetória hipotética” (SIMON, 1995, p. 35).

A geração de uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Simon destaca que a geração de uma THA prioriza buscar as formas pelas quais o professor desenvolve seu planejamento em atividades de sala de aula, mas também identificar como o professor interage com as observações dos alunos, coletivamente, constituindo uma experiência e construindo novos conhecimentos.

> Esta experiência pela essência da sua construção social é diferente das primeiras antecipações dos professores. Simultaneamente ocorre uma construção social de atividades em sala de aula e a modificação das ideias e conhecimento do professor, que ele vai construir em função do que está acontecendo ou do que aconteceu na sala de aula (SIMON, 1995, p. 36).

O diagrama da figura 1, mostrado anteriormente, indica que a avaliação do pensamento do aluno (com constantes idas no modelo de ensino apresentado) pode trazer muitas adaptações a respeito de qualquer conhecimento do professor, possibilitando uma nova ou modificada trajetória hipotética de aprendizagem.

Simon destaca a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a trajetória hipotética de aprendizagem e as interações com os alunos (figura 3). O conhecimento matemático do professor contribui para a identificação de um objetivo de ensino. Estes domínios de conhecimento, a meta de ensino e o conhecimento da representação das atividades matemáticas para o professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem individual do aluno, bem como a concepção de aprendizagem e ensino (ambos em geral dentro da Matemática), contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem e processos de aprendizagens hipotéticas.

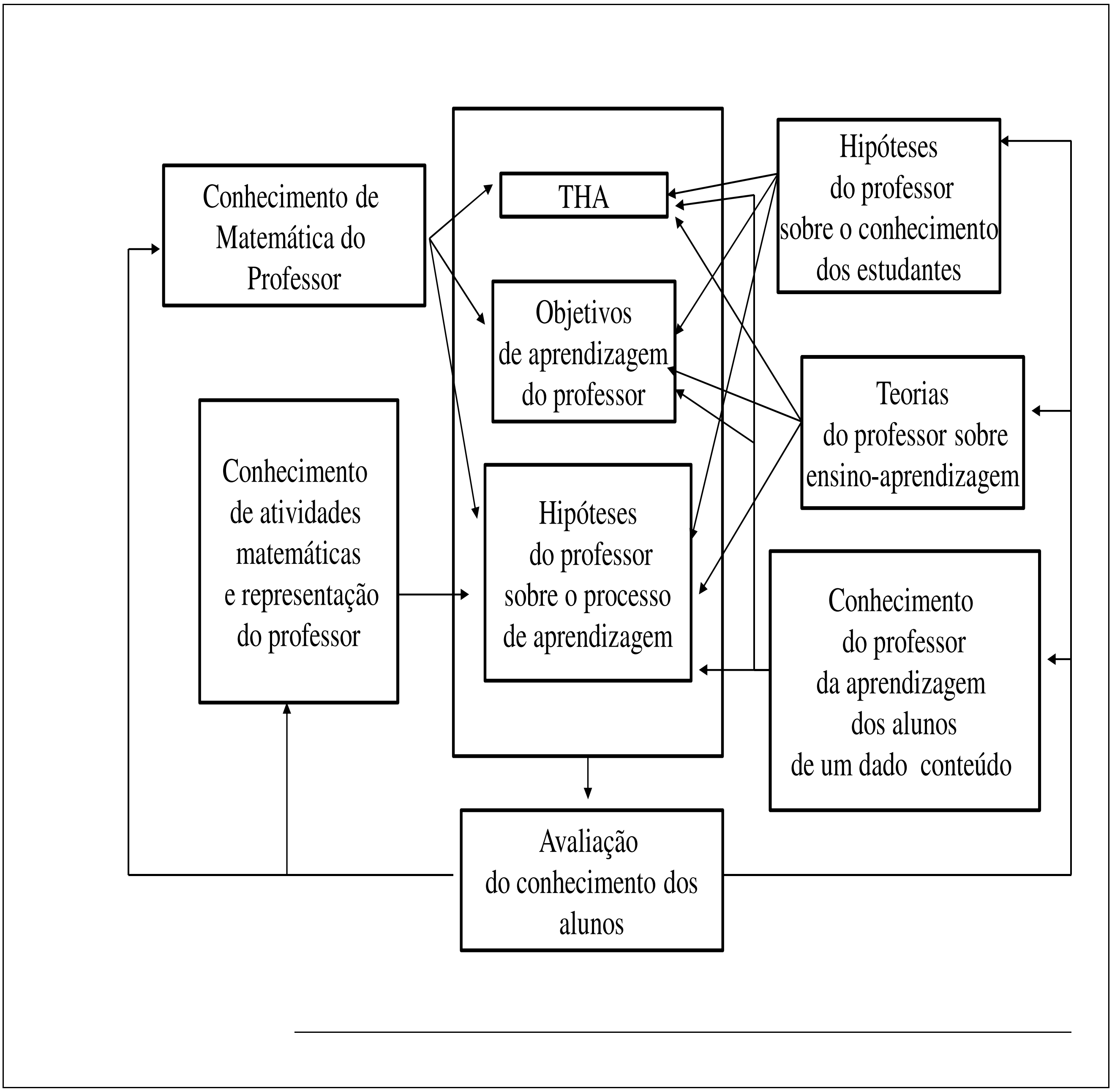


Figura 3: Domínios do conhecimento do professor, trajetória hipotética de aprendizagem e interações com os alunos (SIMON, 1995).

Simon ressalta que a modificação da trajetória hipotética de aprendizagem não é alguma coisa que somente ocorre durante o planejamento entre aulas. O professor está constantemente comprometido em ajustar a trajetória de aprendizagem que "hipotetizou", para melhor refletir sobre suas práticas e sobre as modificações em seu conhecimento de professor. Ele está constantemente percebendo a extensão das modificações e transformações que podem ser construídas por algum ou todos os componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: o método, as atividades e o processamento hipotético da aprendizagem e teria nesse processo possibilidades de compatibilizar naturalmente currículo prescrito e currículo praticado.

Outras contribuições para a reflexão sobre THA

De acordo com Pires (2009), no artigo de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez, de 2007, os autores fazem uma análise sobre o interesse de diferentes pesquisadores a respeito da noção de THA, especialmente no que se refere ao processo de formação inicial de professores.

Os autores começam destacando que o interesse pela THA foi reconhecido com a publicação de um número de *Mathematical Thinking and Learning*, dedicado à sua discussão (CLEMENTES Y SARAMA, 2004). Steffe (2004, apud GÓMEZ Y LUPIÁÑEZ, 2007) ressalta a relevância desta noção dentro da Educação Matemática da seguinte forma:

> A construção de THA é um dos desafios mais urgentes que a educação matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais apaixonantes, pois é ali onde podemos construir nossa compreensão da matemática dos alunos e, de que forma, nós professores, podemos influir nessa matemática (GÓMEZ Y LUPIÁÑEZ, 2007, p. 130).

Não obstante, revelam que, mesmo que os diversos investigadores reconheçam os três elementos centrais da THA (objetivos de aprendizagem, tarefas matemáticas e hipóteses sobre o processo de aprendizagem) e aceitem os quatro pressupostos mencionados anteriormente, cada um interpreta e usa a noção com propósitos e maneiras distintas. Para Gomez e Lupiáñez (2007) são perceptíveis dois usos claramente diferenciados: como ferramenta de investigação e como ferramenta para planejamento.

> Os trabalhos de Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) e Clements, Wilson e Sarama (2004) são trabalhos essencialmente de investigação nos quais se explora a THA para temas específicos.
> Por outro lado, os trabalhos de Gravemeijer (2004) e Simon e Tzur (2004) mesmo explorando também THA, preocupam-se com maior ênfase por seu uso no planejamento do professor. Finalmente, o trabalho de Batista (2004) centra-se na avaliação (GÓMEZ Y LUPIÁÑEZ, 2007, p. 81).

Gómez e Lupiáñez (2007) apontam que em todos os trabalhos desenvolveram-se exemplos de THA em temas específicos. Para tanto, os investigadores assumiram o papel de professores em aulas reais.

> Mesmo que haja professores que participam de alguns projetos, não são eles que produzem os resultados das explorações. De fato, alguns destes trabalhos, como o de Steffe (2004) e de Gravemeijer (2004), veem a construção de THAs como um trabalho do investigador, cujos resultados podem apoiar o trabalho do professor (GÓMEZ Y LUPIÁÑEZ, 2007, p. 82).

E destacam que uma das principais diferenças de interpretação da noção entre esses investigadores tem a ver com o nível de concretização com que a utilizam: desde o planejamento de várias aulas, até o trabalho com atividades específicas numa parte de uma aula. Vejamos algumas análises feitas por Gómez e Lupiáñez (2007) sobre alguns autores:

Gravemeijer (2004, p. 107) indica que sua proposta de teorias locais de ensino é a "descrição e a fundamentação para o caminho de aprendizagem prevista em sua relação a uma coleção de atividades de ensino para um tema".

Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) também utilizam a noção para descrever a aprendizagem dos estudantes ao longo de várias sessões nas quais se trabalha um tema.

Simon e Tzur (2004) veem a THA como uma ferramenta para o planejamento de atividades matemáticas no dia a dia de uma aula.

Finalmente Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) sugerem que a noção de THA pode ser utilizada para promover o "desenvolvimento micro conceitual", sendo esta a atividade central do ensino na aula.

Uma questão importante discutida por Gómez e Lupiáñez (2007) indaga sobre a relação que há entre a atividade diária do professor e a noção de THA. Para eles, um aspecto ligado à atuação do professor tem a ver com o caráter reflexivo inerente à noção de THA: "há uma relação reflexiva em que a THA é o subsídio de juízos e decisões locais que, por sua vez, modificam a THA (GRAVEMEIJER, COBB, BOWERS E WHITENACK, 2000, p. 249-250, apud GÓMEZ Y LUPIÁÑEZ)".

Gómez e Lupiáñez (2007) destacam que, em seus trabalhos, Simon e Tzur (2004, p. 93) também enfatizam o papel do professor na construção e revisão permanente da THA. Entretanto, apresentam um desafio: como fazer compatível o propósito de que seja o professor quem construa a revisão da THA com o fato de que a totalidade dos exemplos que se têm de THA foi desenvolvida por investigadores que assumiram o papel de professor?

Para Gómez e Lupiáñez (2007), propostas como as desenvolvidas por Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) são tão complexas e técnicas que acabam sendo pouco prático para os professores. Por outro lado, as propostas de Simon e Tzur (2004) e Gravemeijer (2004) têm um caráter essencialmente prático.

Gómez e Lupiáñez (2007) lembram que outro ponto essencial é referenciado por Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004, p. 233). Eles nos alertam para o fato de que a validade ecológica se conquista à custa da falta de universalidade: se é comprovado que uma THA é válida em uma circunstância particular (em um contexto e com alguns estudantes e um professor particular), isto não quer dizer que essa THA tenha sentido em outras circunstâncias.

Gómez e Lupiáñez (2007) trazem ao debate preocupações como as expressas por Gravemeijer (2004, p. 107), que reconhece a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras sequências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) sequências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mas questiona: porém, que pode fazer um professor com esta informação? Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos reais?

Tais questionamentos indicam, a nosso ver, a necessidade de discutir as questões sobre organização e desenvolvimento curricular já na formação inicial de professores, proporcionando-lhes experiências tematizadoras de trajetórias de aprendizagem.

Considerações e reflexões do nosso grupo de pesquisa

No tocante às questões de como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino e de como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos, o grupo encontrou no trabalho de Simon elementos importantes:

- A afirmação de que as visões construtivistas da aprendizagem têm dado sustentação a fundamentos teóricos na pesquisa no campo da Educação Matemática;

- Sugestões importantes para que os professores possam compreender e antecipar a forma de construção dos conhecimentos matemáticos de seus alunos.

Mas o grupo considera particularmente importante o alerta de Simon no sentido de que o construtivismo também aponta um desafio para a Educação Matemática, qual seja o de desenvolver propostas de ensino em que a construção de conhecimentos seja tomada como perspectiva teórica.

No entanto, adverte também que a Educação Matemática não produzirá métodos com ideias fixas ou plataformas para as ações docentes, e as estruturas metodológicas deverão sempre suportar transformações experimentais. Segundo Simon, o Ciclo de Ensino Matemático retrata uma visão das resoluções construídas pelo professor, a respeito do conteúdo e das tarefas, modeladas pelo encontro de uma perspectiva do construtivismo social com o desafio das aulas de Matemática. Nesse Ciclo, são particularmente importantes algumas premissas:

> (a) O pensamento/entendimento dos estudantes é especialmente considerado e tem o lugar central na formatação e implementação de instruções. O pensamento/entendimento é um processo contínuo do conjunto de dados e hipóteses construídas.
> (b) O conhecimento do professor envolve-se simultaneamente com o crescimento do conhecimento do aluno. Como os alunos estão aprendendo Matemática, o professor está aprendendo sobre Matemática, aprendendo, ensinando, a respeito do pensamento matemático dos seus alunos.
> (c) O planejamento das instruções é similar à criação de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Esta visão reconhece e valida o método de ensino do professor e a importância de hipóteses sobre o processamento da aprendizagem dos alunos (ideias nas quais eu espero ter demonstrado que não estão em conflito com o construtivismo).
> (d) A transformação continuada do conhecimento do professor cria mudanças contínuas na sua própria trajetória hipotética de aprendizagem (PIRES, 2009, p. 22-23).

Nosso grupo aponta que a leitura dos textos motivou a ampliação das discussões sobre a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino e que leve em conta que o aluno desempenha papel central na construção de suas aprendizagens.

A esse respeito, Simon destaca que indicações para o professor sobre a importância da interação de pequenos grupos e a manipulação de materiais, por exemplo, podem ser instrumentos valiosos nas mãos dos professores de Matemática. No entanto, estes instrumentos não são suficientes para permitir que os professores sejam arquitetos da produção de situações de aprendizagens que resultem num crescimento conceitual de seus alunos. Professores novatos, por exemplo, muitas vezes questionam o conhecimento de seus alunos, consciente ou inconscientemente, esperando que no mínimo um aluno esteja habilitado a explicar sua ideia para os outros. E perguntam o que devem fazer com um grupo de alunos para que construam conceitos matemáticos.

O grupo considerou que essas situações são bastante comuns em termos de Brasil e tempos atuais. Nos cursos de formação inicial a chamada "Prática de Ensino" e mesmo as atividades de estágio, de modo geral, estão bastante defasadas no que se refere a estudos sobre os elementos que possibilitem ao futuro professor a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, tanto em termos teóricos como em termos práticos.

Desse modo, o jovem professor tende a usar modelos em geral ultrapassados sem perceber a necessidade de conhecer e de construir modelos de ensino que sejam consistentes e construídos de forma coerente com teorias, como é o caso das teorias de perspectiva construtivista.

Nosso grupo concluiu que, para mudanças significativas, os jovens professores precisam saber identificar o conhecimento dos alunos, ter conhecimentos para gerar trajetórias hipotéticas de aprendizagem e realizar análises conceituais para que possam ensinar Matemática. Enfim, é fundamental que se apropriem efetivamente de resultados de pesquisas relevantes sobre o conhecimento matemático de crianças e jovens, inovações curriculares, planejamento, construções de atividades e que se apropriem da ideia de que suas hipóteses e metas sobre as aprendizagens de seus alunos e as próprias formatações de atividades mudam continuamente e promovem novos conhecimentos e seu efetivo envolvimento na cultura matemática em sala de aula.

1.2 Revisão Bibliográfica

Como vimos em Simon (1995), o objetivo de aprendizagem, as atividades de aprendizagem e pensamento e conhecimento dos estudantes são elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem; além disso, outros conhecimentos dos professores intervêm na construção da THA, como os conhecimentos de resultados de pesquisa em literatura ou da própria experiência docente.

Portanto, realizamos uma revisão bibliográfica e analisamos os documentos curriculares oficiais. Ao efetuarmos a revisão bibliográfica encontramos diversos trabalhos com estudos voltados ao ensino de Funções. Nesse tópico, ressaltaremos alguns deles. Escolhemos os mais atuais com inovações curriculares, ou seja, selecionamos pesquisas que utilizavam uma abordagem computacional relevante ao tema Funções Polinomiais do 2.º grau, bem como uma pesquisa sobre a abordagem de Função em Livros Didáticos, por meio dos trabalhos de Pelho (2003), Santos (2005), Maia (2007) e Silva (2007).

As principais dificuldades dos alunos com o ensino de Funções apontadas por esses autores e o processo de ensino-aprendizagem utilizados por eles para sanar essas dificuldades, e como é abordado o tema nos livros didáticos, nos trouxeram subsídios para a construção de nossa THA.

- Pelho (2003) desenvolveu a dissertação de mestrado *Introdução ao conceito de função:* a importância da compreensão das variáveis, cujo objetivo foi introduzir o conceito de função aos estudantes do segundo ano do Ensino Médio, que já haviam estudado este conteúdo na série anterior, por meio da compreensão das variáveis dependentes e do relacionamento entre elas.

A sequência de ensino inclui atividades para serem desenvolvidas com o uso do *software* Cabri-Géomètre II, e a principal contribuição é a capacidade de os gráficos apresentarem um caráter dinâmico, podendo se deslocar um ponto sobre o eixo das abscissas (variável independente), observar a variação e o relacionamento com um ponto do eixo das ordenadas (variável dependente), sem modificar as relações previamente estabelecidas, podendo propiciar uma melhor compreensão das variáveis de uma função e do relacionamento entre elas. As funções utilizadas foram as lineares, as afins e as quadráticas. Tal sequência de atividade foi aplicada a seis duplas de alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Araçatuba, interior do Estado de São Paulo.

Pelho concluiu que o uso do *software* deixou os alunos motivados e empolgados e, além disso, a dinâmica do *software* propiciou aos alunos uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. Verificou em seu trabalho que os alunos apresentaram dificuldades nas construções gráficas, mas concluiu que houve uma melhora durante o desenrolar das atividades.

- Santos (2005) defendeu sua dissertação de Mestrado intitulada: *Revisando as funções do 1.º grau e do 2.º grau com a interatividade de um hiperdocumento.*

O trabalho constitui-se em uma proposta de atividades apresentadas num *software* informático para a revisão e recuperação dos alunos do Ensino Médio dentro do estudo das funções do 1.º grau e do 2.º grau, explorando-se as situações-problema.

O autor produziu um software educativo apresentado como produto final num CD ROM que, além de apresentar atividades exploradas por meio de situações-problema, engloba ajudas específicas nas atividades, teorias sobre diversos conteúdos envolvidos nas funções e aulas-filme sobre funções e gráficos.

O investigador constatou por meio de um questionário investigativo com 27 professores, que lecionam para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e para o Ensino Superior, que, ao serem interrogados sobre as dificuldades dos alunos no estudo das funções, apontam existir uma grande dificuldade por parte dos estudantes quando são solicitados a construir um gráfico de função do 1.º grau, aumentando significativamente essa dificuldade na construção do gráfico de função do 2.º grau. Isto implica considerar que o aluno tem dificuldades de encontrar valores numéricos da função, ou possui dificuldades na potenciação, ou talvez não consiga determinar o vértice da parábola, nem encontrar os zeros da função por dificuldades em resolver uma equação do 2.º grau.

Diante disso, Santos procura apresentar um estudo via resolução de problemas, esperando contribuir para uma aprendizagem mais significativa e promovendo um avanço qualitativo no seu aprendizado.

Assim, desenvolveu sua pesquisa aplicando um teste com atividades de funções a 20 alunos de uma escola técnica da cidade de São Paulo, a serem resolvidas com lápis e papel e, posteriormente, com o *software* produzido, com o intuito de fazer uma análise comparativa das duas situações apresentadas.

Santos concluiu que os alunos conseguiam resolver os problemas sem a aplicação de conceitos ou fórmulas prontas. Ao usar o *software*, houve aceitação e até melhoria nas resoluções, pois os alunos, enquanto não acertavam a atividade proposta, buscavam novas formas de resolvê-las, baseadas na ajudas disponíveis no *software* e nos conhecimentos construídos anteriormente em sala de aula ou em outro momento de sua vida escolar (chamado conhecimento disponível).

- A Dissertação *Função quadrática:* um estudo didático de uma abordagem computacional, de Maia (2007), constituiu-se numa importante contribuição para a área da Educação Matemática. Esta pesquisa tem por objetivo, complementar estudos já realizados a respeito da função quadrática e a utilização do *software* para este fim, abordando a questão da análise das características das funções, utilizando-se de um *software* gráfico, que traz o caráter lúdico para introduzir noções como intervalo e domínio da função.

Dessa maneira, as atividades propostas na pesquisa de Maia são para construir no *software* winplot[8], gráficos num mesmo plano cartesiano. Ela destaca que a relevância principal do trabalho é permitir que os alunos descubram a forma canônica da função do 2.º grau $\left[y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ pois essa expressão fornece todas as informações necessárias para comparar as representações gráficas da função $y = ax^2 + bx + c$, em que a é diferente de zero, com a representação mais simples $y = x^2$, de modo que percebam que as modificações na escrita algébrica produzem modificações na representação gráfica e vice-versa. E, ainda, introduzir a noção de intervalo de função, sendo o uso do computador uma motivação.

[8] Winplot – É um programa gráfico de propósito geral, inteiramente gratuito, criado pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. Acesso ao programa: http://math.exeter.edu/rparris.

Participaram da pesquisa oito alunos da 8.º série do Ensino Fundamental e uma professora de Matemática de uma escola particular situada em São Bernardo do Campo. As atividades foram realizadas em duplas, fora do horário de aula, no próprio laboratório da escola.

Para Maia, a dinâmica do *software* propiciou aos alunos maior interação com os gráficos e suas respectivas fórmulas, pois com a utilização de cores diferentes para a representação gráfica de cada uma das funções conseguiam observar o que estava acontecendo com os gráficos cada vez que modificavam a escrita algébrica.

Maia concluiu que os alunos se apropriam do processo de construção gráfica da função quadrática como um conjunto de variáveis visuais e que estas se modificam quando realizamos mudanças na escrita algébrica e vice-versa. O principal indicador dessa conclusão é destacado pela autora pelo interesse dos alunos em descobrir algo novo a cada atividade da sequência, pois verificavam que, ao digitar a expressão algébrica de cada uma das funções e por meio das respostas dadas às questões, o gráfico se modificava.

Enfim, a autora concluiu que a participação efetiva dos alunos na realização de todas as atividades, as discussões realizadas levaram a um crescimento na compreensão de construção e análise de gráficos de função quadrática.

- A pesquisa de Silva (2007) sobre *Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de matemática da Educação Básica* tem por objetivo verificar quais são as estratégias utilizadas pelos autores de livros didáticos para apresentar a noção de função. Se a relação discreto/contínuo fica evidente (ou seja, se as funções cujo domínio é formado por um conjunto de números discretos ou se é formado por um conjunto de números reais), e se existe uma relação entre as representações gráficas e algébricas.

O trabalho é fundamentado em uma análise documental de caráter qualitativo, e os dados foram obtidos por meio do estudo de cinco livros didáticos, sendo dois da 8.ª série do Ensino Fundamental e três da 1.ª série do Ensino Médio. São eles:

- *Matemática*: uma aventura do pensamento – 8.ª série – EF - Oscar Guelli – Ática – 2005;

- *Educação matemática* – 8.ª série – EF – Célia Carolino, Edda Curi e Ruy Pietropaolo – Atual – 2002;

- *Matemática* – 1.ª série – EM – Edwaldo Bianchini e Herval Paccola – Moderna – 2004;

- *Matemática* – 1.ª série – EM – Luiz Roberto Dante – Ática – 2005;

- *Matemática Ensino Médio* – 1.ª série – EM – Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz – Saraiva – 2004.

Silva adotou critérios para analisar as abordagens de função adotada nos livros selecionados, que apresentaremos a seguir:

Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?

Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em sequências numéricas, ou padrões geométricos?

Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?

Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o procedimento global das propriedades da figura-forma, ou somente os procedimentos por pontos e por extensão do traçado efetuado?

Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação discreto/contínuo é explicitada satisfatoriamente?

Critério 6 – São propostas atividades constituídas por tarefas de articulação entre as representações gráfica e algébrica?

O pesquisador, após analisar cada um dos livros selecionados por meio desses critérios, constatou que a maioria dos livros analisados adotou como ponto de partida para a construção do conceito de função a exploração da relação de dependência entre grandezas mediante a resolução de problemas. No entanto, Silva aponta que ainda existe certa preocupação de alguns autores com o conceito formal de função como um caso particular de relação.

Silva conclui ainda que a relação do discreto ao contínuo nos gráficos de funções é feita de maneira bastante automática e insuficiente na maioria dos livros didáticos que analisou. A ideia de que é suficiente obter alguns pares (x, y) de números inteiros, em uma tabela, em que y = f(x), sua localização no plano cartesiano e o desenho de um traçado contínuo ligando esses pontos, sem discutir a representatividade do gráfico nos intervalos em que os pontos não foram calculados, aparece com bastante frequência.

E finalmente conclui que os livros examinados não enfatizam as questões relacionadas especificamente à representação gráfica e algébrica, ou seja, as variáveis visuais pertinentes não são levadas em consideração. Silva destaca que o esboço de gráficos é tratado exclusivamente por meio da junção de alguns pontos marcados no plano cartesiano, obtidos por meio da substituição de valores inteiros de x na expressão y = f(x) da função, em que o aluno não consegue fazer uma leitura global do gráfico, mas apenas uma leitura pontual.

Enfim, a pesquisa de Silva contribuiu para verificarmos o que os livros didáticos não estão enfatizando no ensino da função quadrática. Ademais, os outros autores relataram algumas dificuldades que os alunos apresentam como construir gráficos, analisar crescimento e decrescimento, reconhecer zeros ou raízes da função, reconhecer e analisar as variáveis visuais relacionadas à representação algébrica e gráfica, etc. Com isso, identificamos também o processo de ensino-aprendizagem adotado por esses autores para sanar essas dificuldades dos alunos, como a utilização de um *software* para propiciar uma melhor compreensão das variáveis de uma função e do relacionamento entre elas, a resolução de problemas que contribuem para uma aprendizagem mais significativa, o desenvolvimento com a forma fatorada da função do 2.º grau e a análise das características da função por meio de um *software* de construção de gráficos, entre outras. Usaremos esses resultados na construção de nossa trajetória.

1.3 As Inovações Curriculares no Ensino de Função de Acordo com os Documentos Curriculares Oficiais

Neste tópico iremos analisar algumas orientações didáticas relativas ao conceito de função, sugeridas em documentos curriculares oficiais, uma vez que essas orientações também podem ser elementos importantes para a construção de nossa trajetória hipotética de aprendizagem.

O documento (PCNEM, 1999) enfatiza que o papel da Matemática no Ensino Médio não é apenas formativo ou instrumental, mas também deve ser visto como ciência, com características estruturais específicas, destacando a necessidade de o aluno perceber definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos, com a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros para servir de validação de intuições, dando sentido às técnicas aplicadas.

Em relação ao ensino de função, o documento afirma que:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas, por meio de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (PCNEM, Brasil, 1999, p. 255).

Observamos que o documento aponta para a necessidade de desenvolver o conceito de função relacionado a outros conteúdos dentro da própria Matemática, bem como de pôr em prática a interdisciplinaridade, ou seja, desenvolver o conceito de função em situações-problema provenientes de outras disciplinas, procurando relacionar conteúdos escolares com assuntos do cotidiano dos alunos.

Além disso, os PCNEM enfatizam a resolução de problemas, o processo histórico e o uso das novas tecnologias como eixos organizadores no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Ao tratar da natureza do Ensino Médio, os PCN+ (2002) declaram que o Novo Ensino Médio deixa de ser apenas profissionalizante ou preparatório para o Ensino Superior, para assumir a responsabilidade de completar a educação básica, e apontam a resolução de problemas como peça central para o ensino da Matemática.

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido (PCN+, Brasil, 2002, p. 113).

Podemos observar que uma das preocupações no ensino da matemática que os documentos oficiais apontam é a leitura e interpretação de texto que envolve a Matemática, e ressaltam a importância de desenvolver no aluno a capacidade de compreender, fazer analogias e construir estratégias para resolver uma situação-problema.

Em relação ao estudo das funções, o PCN+ sustenta que:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (PCN+, Brasil, 2002, p.121).

Segundo o documento, tradicionalmente o ensino de funções estabelece como prerrequisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função que descreve relações de dependência entre duas grandezas em diferentes situações contextualizadas, descrita algébrica e graficamente.

O documento destaca ainda que os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final do assunto, portanto devem ser trabalhados durante todo o processo do desenvolvimento desse conteúdo.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio vem apresentar um conjunto de reflexões que alimente a prática docente e que levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do Ensino Médio, segundo o documento, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teorema e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, BRASIL, 2006, p. 69).

O documento recomenda ainda que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas de conhecimento, por exemplo, os modelos lineares, quadrático e exponencial. Lembrando que os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento e decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.

As Orientações Curriculares apresenta uma análise específica sobre o estudo da função quadrática:

> O estudo da função quadrática, como posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/ mínimo, zeros da função, deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o “aspecto” do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada $\left(f(x) = a.(x-m)^2 + n\right)$ pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, BRASIL, 2006, p. 73).

Tratando-se das Tecnologias para o ensino da Matemática, o documento aborda que há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar, fazer experimentos, testar hipóteses, esboçar conjecturas, criar estratégias para resolução de problemas e construir diferentes conceitos matemáticos.

E para o estudo específico das funções afirmam que os recursos disponíveis nos *softwares* facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação-inequação.

Concluímos que as orientações didáticas sugeridas nos documentos curriculares oficiais são elementos importantes na construção de nossa trajetória hipotética de aprendizagem. Nesse sentido, em nosso trabalho evitamos repetir o modelo curricular das famosas listas de exercícios “siga o modelo”, realizadas de maneira mecânica e sem significado nenhum para os alunos.

Seguindo as orientações dos Documentos Curriculares Oficiais, buscamos em nossa trajetória hipotética de aprendizagem destacar a realização de uma abordagem interdisciplinar dos conhecimentos e a exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas e/ou da modelagem, com recursos de simulações por meio de *softwares* para a construção de gráficos.

CAPÍTULO 2
A CONSTRUÇÃO DA PRIMEIRA VERSÃO DA THA

Neste capítulo vamos descrever o processo de construção da primeira versão da THA, em que selecionamos objetivos de aprendizagem, indicamos hipóteses sobre aprendizagem dos alunos e escolhemos as tarefas que nos pareciam adequadas. Em seguida, apresentaremos a análise da primeira versão da THA realizada por dois professores de escolas de ensino médio e as alterações por eles sugeridas.

2.1 Objetivos do professor pesquisador relativamente à aprendizagem que pretende que seus alunos construam sobre o assunto.

Como o tema Função Polinomial do 2.º grau é extenso, resolvemos definir apenas o que acreditamos que sejam os principais objetivos de aprendizagem para os alunos do 1.º ano do Ensino Médio:

- Reconhecer a expressão algébrica da função do 2.º grau.
- Identificar e construir gráficos de funções polinomiais do 2.º grau.
- Resolver situações-problema envolvendo situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.
- Analisar graficamente crescimento e decrescimento, máximo ou mínimo.
- Determinar graficamente a ordenada do vértice sem a utilização da fórmula, a partir da abscissa do vértice encontrada por meio do eixo de simetria no gráfico.
- Reconhecer a forma fatorada da função quadrática e relacioná-la com o vértice da parábola e as raízes da função.
- Compreender as translações que ocorrem no gráfico quando se variam os coeficientes na representação algébrica.

2.2 Hipóteses do professor pesquisador sobre o processo de aprendizagem dos alunos

Apoiando-nos nas leituras realizadas na revisão bibliográfica e nas orientações didáticas sugeridas nos documentos oficiais, acreditamos que as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos na THA sejam:

- Contemplar situações de aprendizagem contextualizada e interdisciplinar, de maneira que o aluno possa relacionar conhecimentos em diferentes contextos da realidade.

- Envolver tarefas, como a resolução de problemas e a de exercícios, com a finalidade de dar significado ao estudo, sistematizar e treinar alguns procedimentos.

- Explorar diferentes representações como a gráfica, a algébrica e a tabular.

- Articular a passagem de uma representação algébrica para a outra (no caso, da forma desenvolvida da função polinomial do 2.º grau para a forma fatorada).

- Utilizar recursos tecnológicos com o intuito de contribuir com a formulação de conjecturas e validação de hipóteses.

Como já mencionamos anteriormente, verificamos que Santos (2005) apontou em sua pesquisa as maiores dificuldades dos alunos como: construir um gráfico, analisar crescimento e decrescimento de uma função do 2.º grau e reconhecer os zeros ou raízes da função. Diante disso, ele apresentou um estudo via resolução de problemas e concluiu que os alunos conseguiam resolver os problemas sem a aplicação de conceitos ou fórmulas prontas.

Verificamos também a ênfase dada na resolução de problemas nos documentos curriculares oficiais.

Com base nessa revisão, acreditamos que uma das hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos seja propor situações de aprendizagem contextualizadas e interdisciplinares por meio da resolução de problemas e, espera-se, favorecer possibilidades para que os alunos atribuam significado ao estudo das funções polinomiais do 2.º grau.

Supomos ainda que, ao propormos tarefas de aprendizagem que envolvam diferentes articulações de representações das funções (língua natural, tabular, gráfica e algébrica), poderemos beneficiar as relações das propriedades da função como crescimento e decrescimento, máximo ou mínimo e vértice da parábola.

Além disso, observamos que Maia (2007) em sua pesquisa sugere que se trabalhe com a forma canônica:

> Sugerimos para trabalhos posteriores que se desenvolvam atividades que articulem a passagem de uma representação algébrica a outra (forma canônica para a forma desenvolvida e vice-versa), por não ter sido prioridade em nosso trabalho (MAIA, 2007, p. 138).

As Orientações Curriculares apontam que o trabalho com a forma fatorada da função quadrática auxilia na compreensão da posição do gráfico, das coordenadas do ponto de máximo/mínimo e dos zeros da função, evitando memorização de regras.

Diante disso, outra hipótese que temos é propormos em nossa trajetória situações de aprendizagem para articular a passagem da forma desenvolvida para a forma fatorada da representação algébrica da função quadrática, com o intuito de auxiliar a compreensão e análise da posição do gráfico.

Silva (2007) aponta que os livros didáticos por ele analisados não enfatizam as questões relacionadas especificamente à representação gráfica e algébrica, ou seja, as variáveis visuais pertinentes não são levadas em conta.

Considerando as pesquisas de Maia (2007) e Silva (2007) e as Orientações Curriculares, supomos que, ao propormos em nossa trajetória situações de aprendizagem que envolvam a representação algébrica e gráfica, por meio da utilização de um *software* gratuito, podemos favorecer a compreensão e a análise das variáveis visuais.

Enfim, com essas hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos esperamos que ao final do tema eles possam reconhecer que a representação gráfica da função do 2.º grau é uma parábola, resolver situações-problema contextualizadas que envolvam funções polinomiais do 2.º grau; compreender as translações que ocorrem no gráfico dessas funções quando se variam os coeficientes na representação algébrica por meio da utilização de um *software*; e reconhecer graficamente máximos e mínimos dessas funções a partir de um entendimento global da relação entre as variáveis.

2.3 Elaboração do plano do professor pesquisador para tarefas de aprendizagem

Foi por meio de nossos conhecimentos como professora, das pesquisas e dos objetivos de aprendizagem que construímos as tarefas de aprendizagem.

A inspiração para a construção das tarefas de aprendizagem surgiu principalmente das leituras realizadas com as pesquisas e com os documentos oficiais e também da experiência em que tivemos em um curso, no qual participamos em 2002, denominado “Construindo Sempre Matemática para Professores do Ensino Médio”, realizado na cidade de Águas de Lindóia, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, em convênio com a Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. O curso era composto por aulas presenciais e a distância, via internet, por meio de um programa desenvolvido para o projeto, que possibilitava discussões entre nós professores e os formadores sobre as atividades abordadas nos encontros presenciais no qual estávamos desenvolvendo em sala de aula.

Com base no conhecimento construído no curso como professora, resolvemos utilizar algumas dessas atividades abordadas nas apostilas do curso em nossa THA. Além dessas atividades adotamos outras fontes de referência como alguns livros didáticos citados na pesquisa de Silva (2007) e a internet.

Para elaborarmos as tarefas de aprendizagem, partimos do pressuposto de que os alunos possuíam alguns conhecimentos sobre funções, pois segundo os professores eles já haviam visto anteriormente a função polinomial do 1.º grau que representa a variação de uma grandeza de acordo com a variação de outra, e que estão presentes nos fenômenos da natureza e em problemas deste tipo.

Portanto, nossa trajetória hipotética de aprendizagem tem como finalidade trazer diferentes situações em que a variação de grandeza vai estar representada por determinadas leis que expressam a função polinomial do 2.º grau.

Optamos por iniciar as tarefas de aprendizagem com a resolução de problemas, como contexto para explorar situações que representam leis que podem ser expressas por igualdades do tipo: $y = ax^2 + bx + c$ em que $a \neq 0,$ e esperamos que o aluno identifique a função polinomial do 2.º grau em situações do cotidiano, bem como naquelas que envolvam outras áreas do conhecimento. Assim, organizamos as tarefas de aprendizagem em cinco partes com diferentes expectativas, as quais iremos descrever.

A primeira parte das tarefas de aprendizagem trata-se da introdução e com ela temos por objetivo fazer com que o aluno reconheça a expressão desenvolvida da função polinomial do 2.º grau por meio da área do retângulo. Está atividade é uma adaptação de um exercício retirado do jornal do aluno – (2.ª e 3.ª séries – ensino médio, aula 15, p. 46).

A segunda parte da THA cuida de situações-problema contextualizadas que envolvem a construção de gráficos e a exploração das ideias de crescimento e decrescimento, máximo ou mínimo das funções quadráticas. Nosso objetivo nesta parte é fazer com que o aluno saiba que a representação gráfica de funções como $y = ax^2 + bx + c, com\ a \neq 0$ é um tipo de curva denominado parábola. Além disso, os alunos terão que interpretar a situação proposta e representá-la por meio de tabelas e gráficos, possibilitando aos estudantes desenvolver habilidades para resolver problemas aplicando e analisando as propriedades das funções. As atividades propostas nesta segunda parte são adaptações dos exercícios do livro *Educação matemática*, 8.ª série do Ensino Fundamental (PIRES ET AL., 2002, módulo 15, p. 171).

A terceira parte destina-se a determinar graficamente o vértice da parábola por meio do eixo de simetria sem a utilização de fórmulas, cujo objetivo é ainda explorar algumas propriedades da função quadrática e de sua representação gráfica. Esta atividade foi retirada da apostila do curso Construindo Sempre Matemática para Professores do Ensino Médio, módulo da 1.ª série, p. 15.

A quarta parte da trajetória tem como objetivo reconhecer a forma fatorada da função quadrática $f(x) = a.(x + m)^2 + n$ e relacioná-la com o vértice da parábola e as raízes da função. A ideia é articular a passagem de uma representação algébrica a outra, ou seja, passar da forma desenvolvida $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma fatorada $f(x) = a.(x + m)^2 + n$, pois a correspondência entre coeficientes e variáveis visuais não é tão evidente na forma desenvolvida, e a forma fatorada da função quadrática auxilia na compreensão da posição do gráfico, das coordenadas do ponto de máximo/mínimo e dos zeros da função, evitando memorização de regras. Desse modo, procuramos também contar um pouco da história da matemática e de como surgiu a fórmula de Bhaskara. Esta parte da THA foi retirada da apostila do curso Construindo Sempre Matemática para Professores do Ensino Médio, módulo da 1.ª série, p. 23, e do livro *Matemática 1.ª série do Ensino Médio*, Dante, 2005, p. 120-123.

Finalmente na última parte da nossa trajetória é proposto um estudo relacionando a representação gráfica da função quadrática do tipo f(x) = x^2, com a representação gráfica do tipo:

- $f(x) = ax^2$, em que o coeficiente a determina a concavidade da parábola e ainda, quando positivo e diferente de um, produz mudanças na abertura do gráfico em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$, e quando negativo o gráfico mostrará uma reflexão em relação ao eixo das abscissas;

- $f(x) = x^2 + n$, em que o coeficiente n diferente de zero é a ordenada do ponto da parábola que intercepta o eixo y e ainda produz uma translação vertical em relação ao gráfico $f(x) = x^2$, se *n* for positivo, ocorre uma translação vertical para cima, e se, *n* for negativo se dá uma translação vertical para baixo;

- $f(x) = (x + m)^2$, em que o coeficiente *m* diferente de zero produz uma translação horizontal em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$; se *m* for positivo se dá uma translação horizontal para a esquerda, e, se *m* for negativo, ocorre uma translação horizontal para a direita;

- $f(x) = a(x + m)^2 + n$, em que ocorre uma translação horizontal e uma translação vertical e ainda mudança na abertura da parábola.

O nosso objetivo nessa atividade é favorecer a compreensão das variáveis visuais de modo que os alunos possam observar as translações que ocorrem nos gráficos, as raízes e as coordenadas do vértice da parábola. Esta atividade foi retirada da internet (artigo: Funções quadráticas: abordagem computacional. Francisco Orlando Fernandes Ribeirinha, 2005).

Por meio de nossa experiência como professora, temos como hipótese que serão necessárias 11 aulas de 50 minutos para o desenvolvimento das quatro primeiras partes da THA em sala de aula e mais duas aulas no laboratório de informática para o desenvolvimento da quinta parte da THA. Planejamos também realizar duas avaliações durante o desenvolvimento da THA, e, por hipótese, consideramos que seriam necessárias duas aulas para cada avaliação, uma aula para realizar a avaliação e outra para a correção. Então supomos que no total serão necessárias 17 aulas para realizar todo o desenvolvimento da trajetória.

A primeira versão da THA com o plano para orientar o professor em sala de aula, contendo o tempo previsto em cada parte da THA, os objetivos, as estratégias, as atividades de aprendizagem e a resolução das atividades, consta no Anexo 1 deste trabalho.

2.4 Análise da primeira versão da THA pelos professores, com base em sua avaliação do conhecimento atual dos estudantes, aos quais serão oferecidas as atividades da THA

Após a elaboração das atividades que constituem a THA, convidamos três professores de Matemática do Ensino Médio para participar da nossa pesquisa. Esses três professores foram escolhidos pelos seguintes motivos: estavam atuando como professores do 1.º ano do Ensino Médio; faziam parte do quadro de funcionários da mesma escola estadual em que lecionamos e, além disso, havia a possibilidade de abordarem o conteúdo função polinomial do 2.º grau com suas turmas.

Dois deles que lecionavam para o período diurno aceitaram o convite, e, a terceira professora que lecionava no período noturno não aceitou, alegando que seus alunos estudavam à noite e eram fracos em relação aos alunos do diurno e que não conseguiriam acompanhar.

Apesar da insistência, mesmo com a possibilidade de modificar a trajetória de acordo com o conhecimento de seus alunos, ela não aceitou, justificando ainda que seus alunos faltavam muito às aulas. Percebemos que a professora não estava disposta a participar da pesquisa, principalmente quando comunicamos que suas aulas seriam filmadas e que em algumas delas atuaríamos como observadora.

Assim, realizamos um estudo junto a dois professores do Ensino Médio que aceitaram participar da pesquisa. Esse estudo ocorreu na própria unidade escolar, fora do horário de aula.

Inicialmente, realizamos uma entrevista conforme consta no anexo 2, em particular com cada professor, com o propósito de conhecê-los melhor. As informações com o perfil de cada professor serão apresentadas no próximo capítulo.

Após a entrevista, marcamos com os professores dois encontros para o estudo da 1.ª versão da THA, cujo intuito seria apresentar o projeto de pesquisa para os professores e, em seguida, analisarmos em conjunto cada atividade que constitui a THA, a fim de que eles pudessem, por meio do conhecimento atual que possuem de seus alunos, realizar sugestões, modificações ou alterações.

Portanto, no primeiro encontro apresentamos as quatro primeiras partes da THA, as atividades com as respectivas resoluções, estratégias e o número de aulas proposto.

Ao analisarem as atividades em que eram propostas situações-problema, os professores avaliaram que os alunos não encontrariam dificuldades para realizar. Disseram que as atividades eram interessantes e que não era necessário fazer nenhuma alteração ou modificação.

Na quarta parte da atividade, os professores alegaram que nunca tinham utilizado em suas aulas a forma canônica da função polinomial do 2.º grau, pois desconheciam.

Nesse momento, atuamos como formadora de professores; explicamos e realizamos juntos cada atividade proposta na quarta parte da trajetória. Após a formação, um dos professores achou bem interessante; o outro, achou que os alunos poderiam não querer aceitar essa nova forma, pois estavam habituados a utilizar fórmulas para resolver equações polinomiais do 2.º grau. Então, explicamos ao professor que o aluno está acostumado a usar a fórmula de uma maneira mecânica, sem compreender o seu significado. E em nossa trajetória estávamos propondo uma maneira diferente para que o aluno pudesse compreender o significado e entender como surgiu a fórmula.

Perguntamos aos professores se eles gostariam de dar alguma sugestão, ou realizar alguma modificação nesta parte; eles disseram que não.

Deixamos para apresentar no segundo encontro as atividades em que era necessário o auxílio do *software* winplot, pois os dois professores já haviam declarado anteriormente na entrevista que nunca tinham utilizado o *software*. Assim, nesse segundo encontro, novamente atuamos como formadores de professores, apresentando o *software* e realizando em conjunto, no laboratório de informática da escola, as atividades da quinta parte que foram propostas na THA.

Notamos que eles ficaram empolgados com o *software* e também com as atividades em que se propõe a exploração das variáveis visuais da representação algébrica (forma fatorada) com a representação gráfica; disseram que eram atividades simples e de fácil manuseio para os alunos.

Ao final, esclarecemos aos professores a necessidade de obter instrumentos para observação durante a realização das atividades propostas em sala de aula. Então, informamos que algumas aulas seriam filmadas, e em outras, atuaríamos como observadora. Além disso, para coletarmos dados realizaríamos duas avaliações do conhecimento dos estudantes durante o desenvolvimento da THA.

Com esse estudo concluímos que os professores fizeram uma análise superficial das atividades e percebemos que eles não conseguiram levantar ou identificar exatamente quais dificuldades seus alunos poderiam encontrar com a proposta que apresentamos. Acharam que tudo estava bom; porém consideramos que houve uma falta de protagonismo total por parte dos professores, uma vez que eles poderiam discutir, criticar ou analisar em função de seus alunos.

Devemos deixar claro que realizamos uma formação que não se estava esperando, tanto em termos de conteúdos matemáticos como no tocante ao uso do *software*.

Enfim, os professores não realizaram nenhuma alteração na 1.ª versão da THA, e acreditamos que tenha sido por falta de conhecimento didático sobre o tema funções polinomiais do 2.º grau.

CAPÍTULO 3
AS THAS EM SALA DE AULA

Neste capítulo nosso objetivo é relatar o desenvolvimento da THA em sala de aula, em que filmamos e atuamos como observadora e, além disso, apresentaremos alguns resultados de avaliação do conhecimento dos estudantes durante o desenvolvimento da THA. Antes, porém, apresentaremos algumas informações sobre a escola e os professores identificados como Miguel e Gabriel,[9] obtidas por meio de uma entrevista que se encontra no anexo 2, e sobre os 62 alunos que participaram da pesquisa.

3.1 A escola, os professores e alunos envolvidos na investigação

(A) A escola

Realizamos nossa pesquisa em uma Escola da rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo localizada na Zona Leste. Iniciamos nosso projeto em agosto de 2008 e recebemos todo o apoio da direção da instituição no sentido de desenvolver o trabalho com os professores e os alunos.

O laboratório de informática da escola havia sido inaugurado recentemente, tendo sido instalados 17 computadores novos com acesso a internet, assim como bancadas com divisórias, duas cadeiras por computador, lousa branca, entre outros. Além disso, contamos com três monitores que são responsáveis pela sala. Tais monitores são alunos da escola em que cursam o Ensino Médio e foram selecionados por meio de uma prova e contratados pelo Governo para trabalhar fora do horário de aula, por um período de 4 horas.

Os monitores de sala têm como função apenas coordenar o laboratório de informática da escola para o uso de alunos, professores e da comunidade.

[9] Nome fictício

Desse modo, não encontramos nenhum problema para utilizar o laboratório de informática da escola; agendamos com cinco dias de antecedência para os professores desenvolverem as aulas no laboratório com os seus alunos.

(B) Professor Gabriel

O Professor Gabriel tem 31 anos de idade e há sete anos leciona matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio na rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo e há dois anos, para o Ensino Superior numa Instituição Particular.

Segundo o professor Gabriel, ele está em constante aperfeiçoamento participando de cursos; o último realizado foi o Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, concluído em 2007.

Levando em consideração a sua experiência e o seu conhecimento profissional, Gabriel declara na entrevista que aborda o ensino de funções do 2.º grau de modo a reforçar o entendimento e o aprendizado por parte dos alunos no Ensino Médio, retomando o conteúdo de equação do 2.º grau a fim de que os alunos identifiquem os coeficientes *a*, *b* e *c* da equação quadrática, retomando também os cálculos para determinar as raízes utilizando a fórmula de Bhaskara ou usando a forma de soma e produto. O professor declara ainda que não aborda o assunto função do 2. º grau por meio de situação-problema.

Professor Gabriel: *Começo retomando o que o aluno sabe e muitas vezes não sabe sobre a equação do 2.º grau, sobre os coeficientes, quem são os coeficientes a, b e c.*

Professor Gabriel: *Depois passo para o cálculo das raízes pelo Bhaskara ou pela soma e produto, o que são as raízes, antes de entrar em função.*

Professor Gabriel: *A princípio, eu não começo por uma situação-problema, porque em muitos casos o aluno chega no 1.º ano do Ensino Médio e não lembra da equação e de como encontrar as raízes da função e os que lembram de como faz para encontrar a raiz não sabem o que elas significam.*

Professor Gabriel: *Então eu começo a esclarecer algumas coisas, começo a falar do gráfico, como é o formato do gráfico da função do 2.º grau, porque seria uma coisa que eles (alunos) no 1.º ano do Ensino Médio deveriam ter aprendido. Então, e que as raízes são os pontos em que o gráfico corta o eixo x, coisas desse tipo, deixar algumas coisas mais claras para depois querer entrar em função mesmo*.

O professor declara ainda que, no momento de interpretar o gráfico da função quadrática, ele costuma ressaltar para os alunos as suas principais características.

Professor Gabriel: *Uma das coisas que mais faço é ressaltar os principais pontos básicos como o vértice, as raízes, o c da equação que é o termo independente que representa o ponto em que o gráfico corta o eixo y, para que a gente possa chegar o mais rápido possível no esboço do gráfico.*

Pesquisadora: *Você faz relações do gráfico com os eixos de simetria?*

Professor Gabriel: *Geralmente eu não trabalho relacionando os gráficos com os eixos de simetria, só se tiver condições, muitas vezes eles (alunos) chegam com defasagem no 1.º ano do Ensino Médio*.

No tocante ao conhecimento de algum *software* de construção de gráficos, o professor Gabriel declara que já ouvira falar do *software* Graphmática, mas nunca o utilizou nem trabalhou com os alunos, mas acredita que o *software* possa auxiliar o aluno a entender melhor o gráfico, e, se houver condições de trabalhar com o *software* será o ideal.

Em relação à contextualização, aponta que, quando possível, costuma contextualizar o tema função do 2.º grau com outras disciplinas, como a Física.

(C) Professor Miguel

O Professor Miguel tem 49 anos de idade e há dezesseis anos leciona matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio na rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, bem como num Colégio Particular.

Possui Especialização e, além disso, como profissional, busca o aperfeiçoamento participando de alguns cursos oferecidos pela Secretaria da Educação, como a Teia do Saber, Ensino Médio em Rede e outros.

Levando em consideração a sua experiência e o seu conhecimento profissional, o professor Miguel declara na entrevista que aborda o ensino de funções do 2.º grau de modo a reforçar o entendimento e aprendizado por parte dos alunos no Ensino Médio, utilizando exemplos do dia a dia do aluno; destaca ainda que adota o livro didático em suas aulas.

Professor Miguel: *Começo com o modelo do gráfico e faço uma comparação com o que eles (alunos) conhecem e veem no seu dia a dia, como a antena parabólica, ou a trajetória da bola ao ser chutada por um jogador de futebol, ou a trajetória da bola ao ser lançada por um jogador de vôlei.*

No momento de interpretar o gráfico da função do 2.º grau, o professor declara que destaca para os alunos as raízes, os vértices, o ponto de máximo e mínimo da parábola.

Aponta também que já viu o *software* Winplot para construção de gráficos, mas que nunca utilizou, e em sua opinião o *software* auxilia muito na interpretação do gráfico.

Professor Miguel: *Eu conheci o software* Winplot *na outra escola em que trabalho da rede particular de ensino. Só que é assim, os alunos vão pra sala de informática e lá tem um professor de informática que dá essa aula pra eles. Então eu conheço só de olhar, mas nunca utilizei.*

Em relação à contextualização, diz que faz uso de exemplos do cotidiano do aluno.

Professor Miguel: *O futebol é o mais comum para eles, então faço a contextualização do jogador chutando a bola.*

(D) Alunos envolvidos na investigação

Realizamos a pesquisa de campo com duas turmas da 1.ª série do Ensino Médio da rede Estadual de Ensino, localizada na capital de São Paulo. Não estabelecemos nenhum tipo de critério para a seleção das turmas, portanto cada professor escolheu uma turma com que mais se identificava: a 1.ª série B é a turma do Professor Miguel e a 1.ª série C do Professor Gabriel.

A turma 1.ª série B é composta por 33 alunos frequentes, sendo 13 meninas e 20 meninos, todos na faixa entre 14 e 15 anos de idade.

A turma 1.ª série C é formada por 29 alunos frequentes, sendo 15 meninas e 14 meninos, todos na faixa entre 14 e 15 anos de idade.

Segundo os professores, seus alunos ainda não conheciam o novo laboratório de informática da escola, nunca tinham utilizado o computador nas aulas de matemática e não possuíam conhecimentos com o *software* Winplot. Resolvemos não realizar nenhuma familiarização com o *software*, por ser de fácil manuseio.

3.2 Relatórios sobre as aulas em que a THA se desenvolveu

Neste tópico apresentaremos nossas observações sobre as aulas em que a THA se desenvolveu nas duas turmas, a partir de algumas categorias que elegemos em função dos acontecimentos em sala de aula. Para tanto, baseamo-nos nos relatórios apresentados nos Anexos 4 e 5.

As categorias selecionadas são as seguintes:

(A) Papel assumido por professor e alunos durante a realização do trabalho (interação/ não interação, autonomia/ dependência etc.).

(B) Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos.

(C) Interesse despertado por situações contextualizadas e possíveis influências na aprendizagem.

(D) Interesse despertado por situações de uso de *softwares* e possíveis influências na aprendizagem.

3.3 Análise sobre as aulas da THA

A filmagem nos mostra a disposição dos alunos, alguns em duplas e alguns sentados individualmente, e essa disposição foi constante durante toda a trajetória. Os dois professores deixaram que os alunos ficassem sentados como queriam, não levando em consideração a nossa proposta nas atividades.

Em relação à quantidade de aulas utilizadas no desenvolvimento das atividades pelo professor Gabriel, ocorreu de acordo como tínhamos previsto em nossa THA, ou seja, 17 aulas. Já no desenvolvimento das atividades pelo professor Miguel foram necessárias duas aulas a mais do que o previsto em nossa THA, totalizando 19 aulas. Abaixo, apresentaremos as observações sobre as aulas do professor Gabriel e Miguel a partir de cada categoria que elegemos:

(A) Papel assumido por professor e alunos durante a realização do trabalho (interação/ não interação, autonomia/ dependência etc.)

A princípio, o procedimento adotado pelo professor Gabriel em cada parte da THA foi uma leitura compartilhada da situação-problema e, em seguida, o professor iniciou a explicação com questionamentos em busca da interação com os alunos, por meio das respostas às questões formuladas. Sempre após as explicações, os alunos realizavam as atividades propostas e o professor circulava pela sala para auxiliar e interagir com os alunos. Essa foi a forma que o professor utilizou para explicar o conteúdo de cada atividade.

Dessa maneira, por meio das filmagens observamos que o professor Gabriel questionava os alunos sobre o conteúdo no decorrer de suas explicações e, por algumas vezes, não esperava as respostas dos alunos, ele próprio respondia a seus questionamentos, como vamos mostrar abaixo:

Atividade 2.3: *O lucro em reais de uma empresa pela venda diária de x peças, é dado pela função:* $L(x) = -x^2 + 14x - 40$.

Professor Gabriel: *Normalmente indicamos a função por f(x) que é f em função de x, esse exercício é indicado por L(x) por que é o lucro L em função de x, que é a quantidade de peça vendida.*

Professor Gabriel: *Então conforme a gente coloca uma quantidade, um valor no lugar de x, a gente pode calcular o valor do lucro para aquelas peças que foram vendidas.*

Professor Gabriel: *Então vamos atribuir alguns valores para x para poder calcular o lucro e construir o gráfico dessa função. A primeira etapa é montar uma tabela como estou fazendo aqui na lousa, e jogar alguns valores para x, 4, 5, 6, 7, [...]. Vamos jogar valores de 4 a 10.*

Aluno: *Por que, professor, tem que ser do 4 ao 10?*

Professor Gabriel: *Porque com esses valores a gente vai obter valores de L; Quem é x? x não é a quantidade de peças? E L não é o lucro? Então eu vou fazer os primeiros para vocês verem como faz.*

Professor Gabriel: *Qual vai ser o lucro quando forem vendidas 4 peças? Então o lucro de 4 peças é* $L(4) = -(4)^2 + 14.4 - 40$. *Quanto vai dar isso?* $-(4)^2 = 16$ *e 14.4 = 56, então vai ficar* $L(4) = -16 + 56 - 40 = 56 - 56 = 0$. *Então, quando a empresa vender 4 peças, qual vai ser o lucro dela?*

Aluno: *Nenhum.*

Professor Gabriel: *Isso, zero; ela não vai ter lucro, também não vai ter prejuízo. Vocês estão observando que para uma venda de 4 peças a empresa não tem lucro nem prejuízo, então ela tem que fazer o quê? Vender mais de 4 peças, por isso não coloquei na tabela valores menores que 4, porque se ela vender menos que 4 peças a empresa terá prejuízo. Então provavelmente os próximos valores que são acima de 4 ela vai ter lucro. Vamos tentar encontrar os próximos valores pra ver o que ocorre.*

Professor Gabriel: *Vamos encontrar o valor do lucro quando forem vendidas 5 peças, como é que faz? O lucro para 5 peças é* $L(5) = -(5)^2 + 14.5 - 40$*. Então vamos tentar fazer, preencher a tabela toda e fazer o gráfico.*

Podemos observar neste trecho do relatório que o professor Gabriel algumas vezes era impaciente e não deixava seus alunos refletirem sobre as questões levantadas. Ele mesmo perguntava e automaticamente respondia a seus questionamentos, impedindo que seus alunos fizessem conjecturas em busca da solução. Além disso, como podemos notar no diálogo acima, o professor Gabriel pede para os alunos montarem uma tabela e ele mesmo já estabelece os valores para x, de 4 a 10. A nossa intenção para essa atividade era exatamente deixar que os alunos levantassem hipóteses sobre quais valores teriam que usar na tabela, e assim chegar a algumas conclusões, por exemplo, como seria o gráfico, o lucro e o prejuízo da empresa, etc.

Por seu turno, nas aulas do Professor Miguel, as atividades da THA foram apresentadas por meio de uma leitura compartilhada da situação-problema, seguida de poucos questionamentos com os alunos. Nas primeiras atividades percebemos que a sala toda estava interagindo, porém nas atividades seguintes percebemos que essa interação ocorreu apenas com um grupo de alunos que estavam dispostos na frente da sala.

Observamos nos relatórios que o professor Miguel, ao explicar o conteúdo, quase não levantava questões; com isso, os alunos não apresentavam hipóteses sobre os problemas e não faziam conjecturas, gerando desinteresse. Observem um trecho do relatório em que só tem a fala do professor Miguel:

Professor Miguel: *Vocês têm no desenho da apostila aí dois retângulos e um quadrado pequeno, então tem que relembrar o cálculo das áreas de figuras planas.*

Professor Miguel: *A área do retângulo é base vezes altura, 4 vezes x então dá 4x. Aqui no quadrado é x vezes x que dá* x^2*. Aí tem que calcular a área da figura pontilhada é fácil calcular né, é 4 vezes 4 que dá 16.*

Professor Miguel: *Somando as quatro áreas teremos* $x^2 + 4x + 4x + 16$*, e o lado do quadrado maior é 4 + x.*

Professor Miguel: *O exercício d pede para calcular a área do quadrado maior, então o quadrado maior tem lado 4 + x e a área é 4 + x vezes 4 + X, então* $A = (4+x).(4+x) = 16+4x+4x+x^2$*, que é a mesma expressão algébrica obtida quando somamos as quatro áreas do quadrado maior.*

Professor Miguel: *Somando a área L da figura com a área do quadrado pontilhado, temos A = 9 + 16 = 25, que é a área do quadrado maior, então o valor do lado do quadrado maior é 5, porque 5 vezes 5 dá 25, e x é igual a 1.*

Notamos que o professor Miguel pensa pelo aluno o tempo todo.

Observamos também que em várias atividades o professor Miguel deixava os alunos soltos, acreditava que eles poderiam construir seus próprios conhecimentos sozinhos, não interagindo com eles (uma falsa ideia de construtivismo). Essa falsa ideia do professor Miguel de que os alunos poderiam resolver as situações-problema sem ajuda acarretou a desmotivação dos alunos, pois muitos se sentiam inseguros para resolver as atividades propostas sem o auxílio do professor.

Apenas um determinado grupo de alunos, que o professor Miguel denominou como “CDFS”, o chamava e questionava a todo momento, pois queria aprender e cobrava a sua presença. Os outros alunos da sala não dialogavam entre eles, não realizavam as atividades e também não interagiam com o professor.

Acreditamos que o professor Miguel, ao chamar seus alunos interessados de “CDFS”, atribuía-lhes uma conotação depreciativa e acabava desvalorizando-os.

Consideramos que a maneira como as perguntas eram feitas pelo professor Gabriel permitia a participação dos alunos com respostas curtas e previsíveis, promovendo a interação com todos. Dessa maneira, o professor Gabriel estimulava mais a participação do grupo de alunos e, ao mesmo tempo, preocupava em saber se os alunos compreendiam o conteúdo proposto mais do que o professor Miguel. Ao final da parte II, no exercício 2.5, o professor Gabriel faz um comentário na aula sobre a participação dos alunos. Vejam:

Professor Gabriel: *É bom quando todo mundo está entendendo o que está acontecendo e respondendo junto. É sinal que esta situação está clara para todos.*

Além das perguntas simples, o professor Gabriel sempre elogiava os alunos em suas respostas, de maneira afetiva, dizendo: “ótimo, muito bem, parabéns, está certo”. Isso se tornou um estímulo para que os alunos continuassem a participar das aulas.

Notamos que o professor Gabriel permitia que, durante suas explicações, o aluno levantasse questões e dúvidas e sempre os auxiliava em sua compreensão. Após as explicações, no decorrer das atividades propostas, o professor Gabriel circulava pela classe, aproximando-se dos alunos, buscando verificar procedimentos e esclarecendo dúvidas.

Sempre ao final de cada atividade o professor Gabriel fazia um fechamento, corrigindo as atividades na lousa, esclarecendo as dúvidas que surgiam. Por sua vez, o professor Miguel não realizou um fechamento de todas as atividades desenvolvidas pelos alunos, deixando de esclarecer possíveis dúvidas.

Enfim, consideramos que os dois professores são meros aplicadores, sem reflexão, interagindo pouco com seus alunos. No entanto, concluímos que houve uma interação maior do professor Gabriel com os seus alunos durante as explicações, em comparação com as aulas do professor Miguel.

(B) Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos

Tanto o professor Gabriel como o professor Miguel declararam na entrevista que não tiveram dificuldades para desenvolver a THA em sala de aula. Ressaltaram ainda que seus alunos apresentaram algumas dificuldades para realizar as atividades; destacaremos abaixo algumas delas:

- Dificuldades com a escrita matemática (simbologia);

Professor Gabriel: *Alguns alunos tiveram dificuldades com a regra de sinal na hora de determinar o valor de y, quando o coeficiente do* x^2 *era negativo, por exemplo, quando era* $-t^2$*, o que eles faziam? Eles colocavam o valor de t, por exemplo, 5, eles faziam* $(-5)^2$*. Aí eu tive que intervir, e expliquei que o sinal não é do* *número, não é -5 é 5^2 e o valor que dê disso vai ficar negativo, porque a função é negativa. Isso eu tive que esclarecer, aí eles conseguiram fazer.*

Professor Miguel: *Tiveram dificuldades com o sinal negativo da função, aí tive que expor para eles que a função é negativa porque a parábola está com a concavidade para baixo, então no caso a bola no cesto está descrevendo uma parábola com a concavidade para baixo, por isso que é menos. Nesses exemplos aqui não envolve uma função que tem a concavidade para cima, porque não existe uma empresa que tem lucro e depois prejuízo, tive que intervir para explicar porque a função é negativa.*

*O aluno teimava que $-(5)^2$ dava 25**,** por ser ao quadrado, achava que todo número tem que ser positivo, eles ignoravam o sinal da função negativa $-t^2$.*

- Dificuldades com o crescimento e decrescimento da função;

Professor Gabriel: *Os alunos têm certa dificuldade em enxergar o gráfico como uma evolução, como um crescimento seguido de um decrescimento, então tem uma questão que fala sobre isso: qual o intervalo que o lucro aumenta em função da quantidade de peças vendidas? Eles não conseguem associar a subida da curva com o intervalo do eixo x, por exemplo, pra valores de 2 a 4 do eixo x o lucro aumenta e quando chega no ponto máximo o lucro começa a diminuir. Então eles não conseguem fazer essa associação da curva do gráfico com o eixo x ou com o eixo y. Tive que explicar, fazer uma intervenção, pedindo pra que eles analisassem o gráfico ou a própria tabela.*

- Dificuldades com a interpretação do texto;

Professor Miguel: *Os alunos fizeram confusão de instante para altura, eu falei não, instante vai lembrar o quê? Tempo e altura é o ponto máximo que a bola chegou, eles acharam que era a mesma coisa, é interpretação errada que eles fizeram, porque o texto está claro.*

- Dificuldades em localizar um ponto no plano cartesiano quando a ordenada ou a abscissa é igual a zero;

Professor Gabriel: *Os alunos têm dificuldades de localizar o ponto quando, por exemplo, o y for zero, porque o ponto fica em cima do eixo x ou y, tive que intervir também.*

- Dificuldades com os valores da abscissa na tabela;

Professor Miguel: *Tiveram problemas em saber quais números eles deveriam colocar no gráfico, queriam colocar números grandes. Aí eu falei assim, para fazer o gráfico não é aconselhável usar números grandes, agora para efeito de cálculos podem usar o valor que vocês quiserem, aí foi tudo bem.*

- Dificuldades com a escala no gráfico;

Professor Gabriel: *Eles sempre tiveram dificuldades com escala e continuam persistindo nesse erro, por mais que eu fale, eles acabam não deixando o mesmo espaço para todos os números do eixo x e y. Com o papel quadriculado amenizou um pouco o problema, mas eu expliquei pra eles, se vocês deixarem no eixo x, um quadradinho pra cada número e no eixo y, dois quadradinhos pra cada número tudo bem, mas tem que ser todos os números dois quadradinhos. Mas eles fazem sem critério nenhum, aí o gráfico acaba saindo torto, todo mal feito.*

- Dificuldades em completar quadrados na forma algébrica;

Professor Gabriel: *Tive que fazer várias intervenções aqui e explicar o produto notável, eles tiveram muitas dificuldades no início para realizar as atividades, mas depois que entenderam até comentaram porque outros professores não tinham ensinado assim pra eles, que era mais fácil do que usar fórmulas.*

- Dificuldades com os zeros da função;

Professor Miguel: *Outra dúvida foi quando falou do zero da função, a maioria conhecia como raiz da função, aí tive que explicar que era a mesma coisa.*

Professor Gabriel: *Os alunos apresentaram dificuldades na atividade 5, realizada no laboratório de informática, quando era pedido para eles identificarem no gráfico a raiz da função, eles enxergavam a raiz como tendo duas coordenadas por exemplo (0,0), tive que intervir e explicar que a raiz era somente o valor da abscissa, x = 0, ou seja, o ponto do eixo x em que a parábola tangencia.*

- Dificuldades com o conceito de translação.

Professor Gabriel: *Os alunos não conheciam o conceito de translação, talvez seja necessário nessa atividade mudar esse termo, ou deixar explícito o conceito antes da atividade.*

Professor Miguel: *Os alunos tiveram dificuldades com a atividade realizada no laboratório de informática na hora de comparar os gráficos e verificar se ocorreu uma translação vertical ou horizontal, eles não sabiam o que significava translação, aí eu expliquei que a translação é o movimento que modifica a posição da parábola. A parábola pode se movimentar na vertical ou na horizontal.*

Podemos perceber algumas semelhanças nas dificuldades apontadas pelos professores, como a dificuldade com a escrita matemática, com os zeros da função e com o conceito de translação. Neste sentido, os professores declararam que era difícil para eles diagnosticarem as causas de tais dificuldades, pois não conheciam a trajetória escolar do aluno nem sabiam como esses conceitos foram trabalhados anteriormente.

Observamos que os professores olham muito mais as atitudes dos alunos do que o crescimento no que tange ao conhecimento, aprendizagem, por exemplo, sobre a dificuldade apresentada pelo professor Miguel em que dá mais destaque à interpretação de texto do que à dificuldade do próprio conteúdo.

(C) Interesse despertado por situações contextualizadas e possíveis influências na aprendizagem

Os professores Gabriel e Miguel declararam em uma entrevista que a THA despertou interesse dos alunos, porque associaram os problemas com situações da própria rotina vivida por eles.

Professor Gabriel: *Começaram a comparar, por exemplo, o preço do refrigerante por litro que é vendido no supermercado com o preço do refrigerante por litro que é vendido no cinema. Além disso, quando eu falei do lucro, eu dei um exemplo da cantina, quando eles compram coxinha, aí um aluno começou a falar, que se comprasse farinha e fizesse em casa sairia mais barato, então sempre saíam discussões bem interessantes na aula. Eles gostaram muito e ficavam ansiosos pela aula.*

Professor Miguel: *Eles acharam interessante o valor máximo e a área máxima, teve até uma perguntinha dos "CDFS": Mas quer dizer que nesse espaço aqui eu posso plantar grama, então eu quero o máximo de área, então é só analisar por esse cálculo?*

O professor destacou que os alunos quiseram discutir quando é lucro e quando é prejuízo; isso despertou o interesse deles.

Professor Miguel: *Uma aluna até me disse que eles não davam tanta importância ao conteúdo, mas agora ela estava conseguindo ver ligação da função com problemas de rotina de uma empresa, por exemplo, aí expliquei que muitas vezes as empresas fazem gráficos para ver o lucro da empresa.*

O professor declarou que ele achou melhor trabalhar com situações contextualizadas, do que da maneira tradicional: dar a função e construir o gráfico.

Professor Miguel: *No geral eles gostaram mais desses exercícios do que a gente está acostumado passar em sala de aula, porque aqui eles ficam fazendo uma ligação como se fosse a vida real.*

Notamos que as atividades com abordagens contextualizadas causaram mais discussão entre os professores e os alunos. No entanto, parece-nos que os professores têm uma ideia errada sobre contextualização, por exemplo, se o aluno relacionar com o cotidiano, ele conseguirá resolver o problema, e nem sempre isso ocorre.

Observamos também que o professor Gabriel é mais entusiasmado, tem uma colocação melhor e aproveita o potencial dos alunos, e assim eles vão se envolvendo um pouco mais. O professor Miguel é mais impositivo; só um grupo de alunos se interessou, os outros não. Em alguns momentos ele deixava os alunos soltos demais nas aulas, em outros, ele não dava chances para eles pensarem e se envolverem nas atividades. Por isso seus alunos são menos interessados do que os do professor Gabriel, que tem um diálogo melhor.

(D) Interesse despertado por situações de uso de* softwares *e possíveis influências na aprendizagem

Tanto o professor Gabriel como o professor Miguel declararam que até então nunca tinham utilizado o laboratório de informática da escola nas aulas de Matemática, e declararam ainda que os alunos não conheciam o *software* Winplot para construção de gráficos.

Não realizamos com os alunos nenhuma familiarização com o *software* Winplot anterior a atividade.

Percebemos que todos os alunos envolvidos na pesquisa se sentiram motivados com a aula no laboratório de informática.

Professor Gabriel: *Os alunos não tiveram dificuldades com o* software*, eles participaram e se mostram empolgados em realizar as atividades.*

Professor Miguel: *Os alunos gostaram muito de conhecer o laboratório de informática. Eu achei interessante porque até aqueles alunos que não faziam nada na sala, aqueles alunos desinteressados, participaram muito.*

As aulas no laboratório de informática propiciaram um pouco mais de interação entre o professor Miguel e os alunos. Vejam:

Aluno: *Professor o que é simetria mesmo?*

Professor Miguel: *Lembram que eu expliquei na aula, simetria divide a parábola em duas partes iguais. Que eixo está dividindo a parábola em duas partes iguais?*

Aluno: *É o eixo y?*

Professor Miguel: *Isso, o eixo y é o eixo de simetria.*

Notamos que a maneira como o professor Miguel faz algumas colocações revela concepções inadequadas e pode prejudicar a construção de conceitos dos alunos, por exemplo, “a simetria divide a parábola”. Na verdade, o eixo de simetria na parábola é a reta vertical que passa pelo vértice da parábola, e nem sempre o eixo y é o eixo de simetria.

Observamos também que o professor Miguel relacionou essa parte da atividade do laboratório com o que os alunos tinham aprendido nas aulas. Mas percebemos que nas últimas questões os alunos responderam apenas analisando o gráfico na tela, não relacionando, por exemplo, a forma canônica, o vértice da parábola e as raízes com o que tinham aprendido nas aulas anteriores.

Já nas aulas do professor Gabriel, notamos por meio dos relatórios que os alunos conseguiram compreender as modificações que ocorriam no gráfico quando eles alteravam o parâmetro *a* da função polinomial do 2.º grau. Observem abaixo um trecho da aula:

Professor Gabriel: *Gente, de que forma o coeficiente* a *da função determina a concavidade da parábola?*

Alunos: *Se* a *for positivo é para cima, e se* a *for negativo é para baixo.*

Professor Gabriel: *Muito bem, e vocês perceberam também que o coeficiente de* x^2 *implica na mudança da abertura da parábola?*

Aluna: *Professor quanto maior for o coeficiente de* a*, mais fechada à parábola fica.*

Aluno: *É professor a parábola aumenta e diminui a concavidade, quando mudamos o valor de* a. *O aluno fazia gestos com a mão abrindo e fechando.*

O mesmo ocorreu com as translações verticais e horizontais. Podemos constatar que houve uma compreensão por parte dos alunos.

Professor Gabriel: *E o que acontece quando somamos ou subtraímos um número a função inicial* $f(x) = x^2$ *?*

Aluno: *É... A parábola sobe ou desce.*

Percebemos ainda que os alunos conseguiram relacionar o que tinham aprendido nas aulas anteriores com essa atividade proposta.

Aluno: *Sim, eu relacionei com a forma canônica, como vimos nas aulas, ficou fácil de ver o vértice da parábola no gráfico e na expressão também.*

Professor Gabriel: *A dinâmica do* software *propiciou aos alunos maior interação com os gráficos, pois cada representação gráfica era apresentada por uma cor diferente, o que facilitou para os alunos a visualização das modificações que ocorriam no gráfico associando a expressão algébrica da função.*

Concluímos que o professor Gabriel conseguiu realizar nosso objetivo que era fazer com que os alunos compreendessem o gráfico da função polinomial do 2.º grau como um conjunto de variáveis visuais e que estas se modificavam quando eles alteravam os coeficientes da expressão algébrica da função.

Por seu turno, o professor Miguel não realizou um fechamento dessa atividade com os alunos, não questionando o que eles tinham compreendido da atividade. Observamos por meio dos relatórios que os alunos conseguiram perceber a simetria, a reflexão e as translações entre as parábolas, mas não relacionaram com as atividades anteriores realizadas em sala de aula.

Enfim, a aula desenvolvida no laboratório de informática foi uma novidade tanto para os professores como para os alunos, e consideramos que a utilização do *software* foi significativa para a aprendizagem dos alunos.

3.4 Avaliações do conhecimento dos estudantes durante o desenvolvimento da THA

Neste tópico, vamos apresentar alguns resultados de avaliação do conhecimento dos estudantes, com a finalidade de verificar se os objetivos de aprendizagem foram alcançados.

Para a avaliação não se tornar muito extensa, resolvemos dividir os objetivos de aprendizagem em duas partes, ou seja, realizamos duas avaliações em dois momentos distintos do desenvolvimento da THA em sala de aula.

A primeira avaliação que consta no Anexo 6 ocorreu após o desenvolvimento da segunda parte da THA em sala de aula, e a segunda avaliação que consta no Anexo 7, ao final do desenvolvimento da trajetória.

Os procedimentos para a elaboração das avaliações se constituíram da mesma maneira que a primeira versão da THA, ou seja, elaboramos as avaliações e apresentamos para os dois professores para que pudessem dar opiniões, sugestões ou realizar alterações. Enfim, novamente os professores não procederam a nenhuma alteração, considerando que as avaliações estavam de acordo com o que tínhamos proposto na THA.

Primeira Avaliação

A primeira avaliação tinha como intuito avaliar os seguintes objetivos:

- Reconhecer a expressão algébrica da função do 2.º grau;

- Resolver situações-problema envolvendo situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento;

- Analisar graficamente crescimento e decrescimento, máximo ou mínimo.

Logo, a avaliação foi composta por quatro questões: a primeira e a segunda questão tratam-se de situações-problema em que é necessário reconhecer e determinar a expressão desenvolvida da função polinomial do 2.º grau e identificar a representação gráfica por meio da expressão algébrica como uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

A terceira e quarta questão constituem-se de situações-problema que envolvem a construção de gráficos para representar a interdependência de grandezas e a exploração das ideias de crescimento e decrescimento e máximo ou mínimo das funções quadráticas.

As questões da avaliação foram trabalhadas pelos alunos individualmente, no contexto de lápis e papel, e aplicadas em uma aula de 50 minutos.

Dois alunos do professor Gabriel faltaram no dia da avaliação e realizaram a avaliação no dia seguinte com a coordenadora pedagógica da escola. Dessa maneira, todos os alunos fizeram a avaliação: 33 alunos do professor Miguel e 29 alunos do professor Gabriel, totalizando 62 alunos.

Após a avaliação, reunimos-nos com cada professor, individualmente, para corrigir e analisá-las. Após essa análise, na aula seguinte, os professores entregaram as avaliações para os alunos e corrigiram na lousa os erros e as dificuldades apresentadas na avaliação.

Em seguida, apresentamos um gráfico com o desempenho dos estudantes em cada questão da avaliação e a análise realizada.

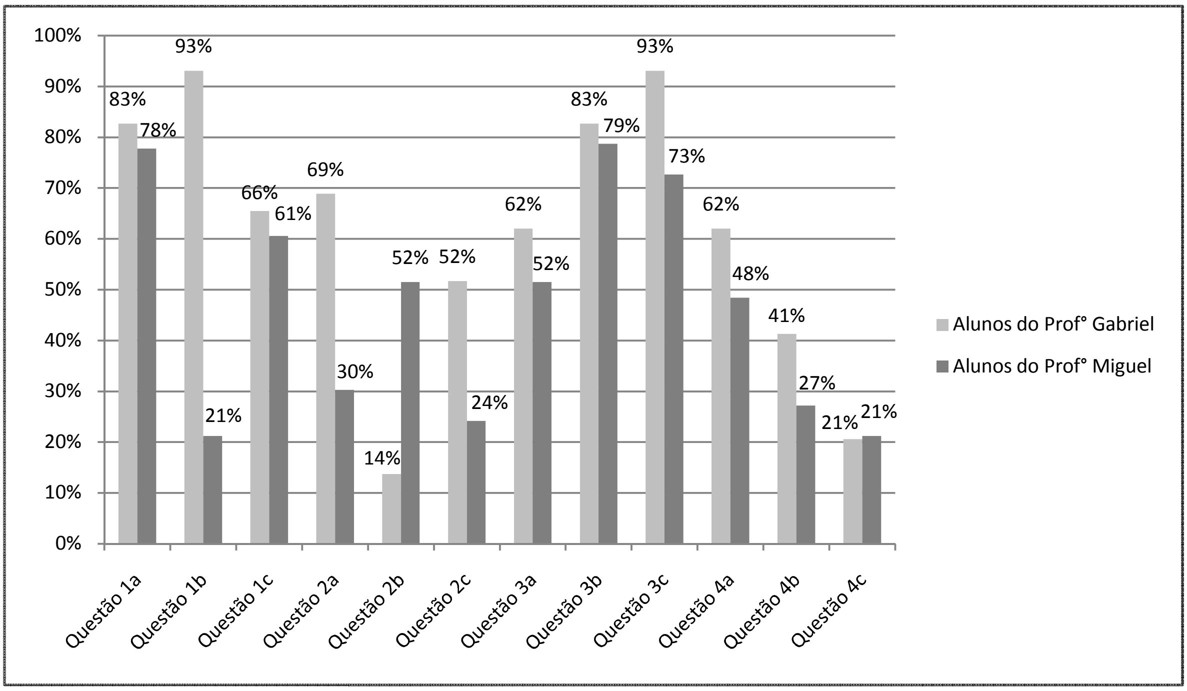
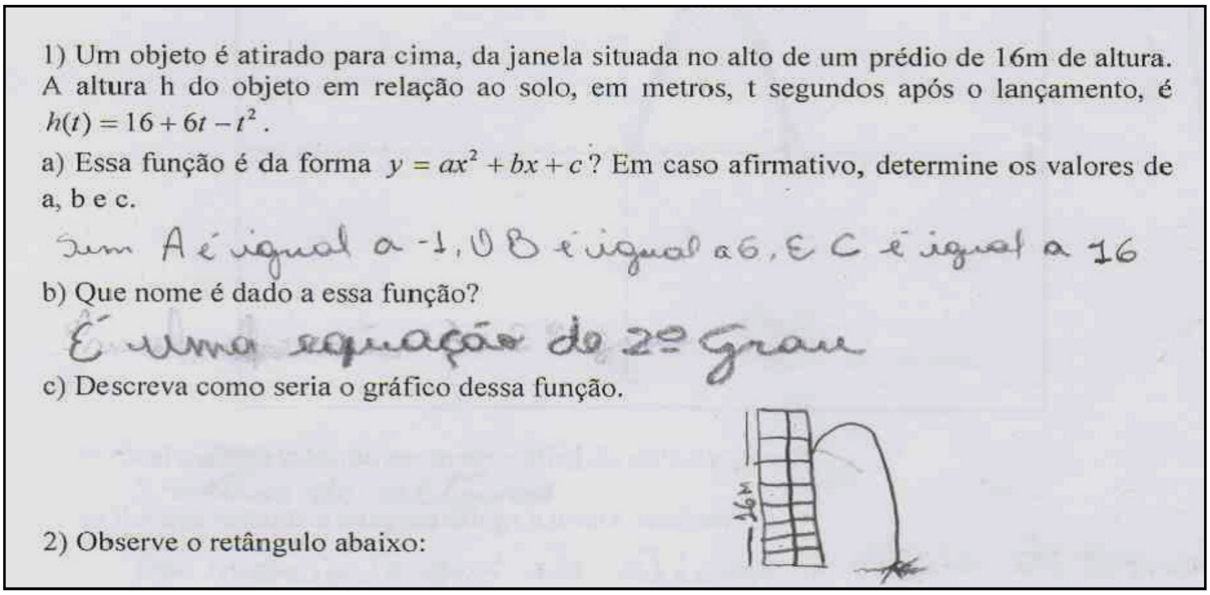


Figura 4: Gráfico do desempenho dos estudantes na primeira avaliação da THA.

Podemos observar pelo gráfico que grande parte dos alunos (83% dos alunos do professor Gabriel e 78% dos alunos do professor Miguel) reconhece na situação-problema da questão 1a a lei que expressa a função polinomial do 2.º grau, e, além disso, um número regular de alunos, cerca de 60% deles, descreveu que o gráfico dessa função é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. A maioria dos alunos do professor Miguel descreveu a parábola por meio de um traçado.

Portanto, concluímos que os alunos atingiram o objetivo pretendido para esta primeira questão, apesar de termos notado também um baixo índice de acertos dos alunos do professor Miguel na questão 1b, em que era perguntado o nome dado a função; dos 33 alunos, 25 deles responderam que o nome dado é equação do 2.º grau. Percebemos que os alunos não compreenderam e ainda confundem a equação com a função. Abaixo, expomos alguns protocolos.



1) Um objeto é atirado para cima, da janela situada no alto de um prédio de 16m de altura. A altura h do objeto em relação ao solo, em metros, t segundos após o lançamento, é $h(t) = 16 + 6t - t^2$.

a) Essa função é da forma $y = ax^2 + bx + c$? Em caso afirmativo, determine os valores de a, b e c.

Sim A é igual a -1, B é igual a 6, E C é igual a 16

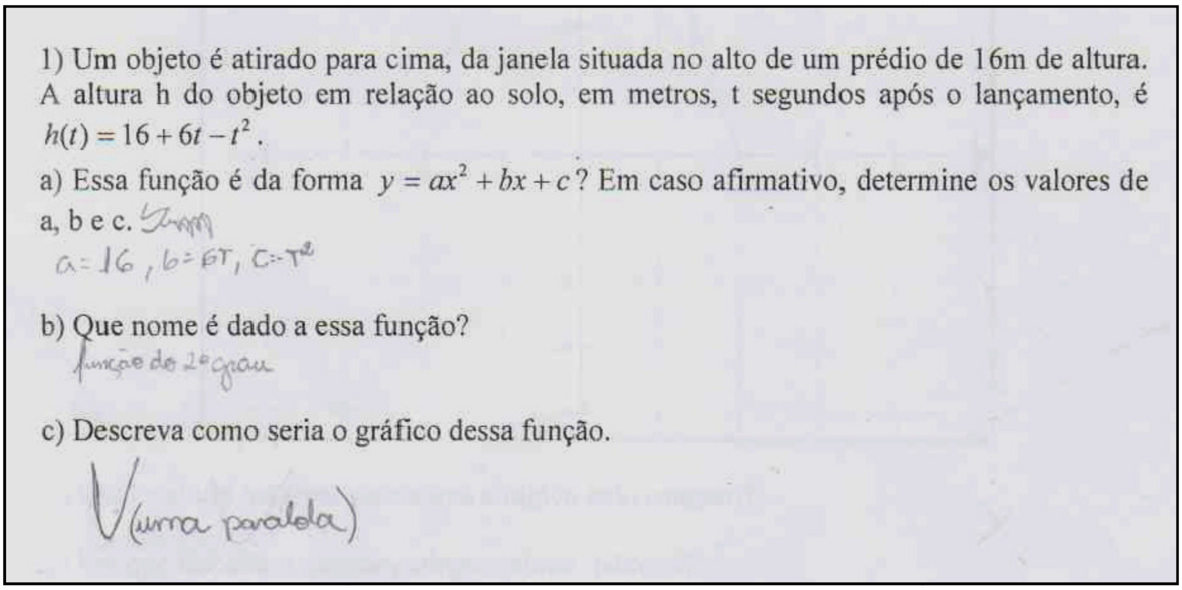
b) Que nome é dado a essa função?

É uma equação do 2º grau

c) Descreva como seria o gráfico dessa função.

2) Observe o retângulo abaixo:

Figura 5: Resposta da 1.ª questão da avaliação de um aluno do professor Miguel.



1) Um objeto é atirado para cima, da janela situada no alto de um prédio de 16m de altura. A altura h do objeto em relação ao solo, em metros, t segundos após o lançamento, é $h(t) = 16 + 6t - t^2$.

a) Essa função é da forma $y = ax^2 + bx + c$? Em caso afirmativo, determine os valores de a, b e c. Sim

a=16, b=6T, C=-T²

b) Que nome é dado a essa função?

função do 2º grau

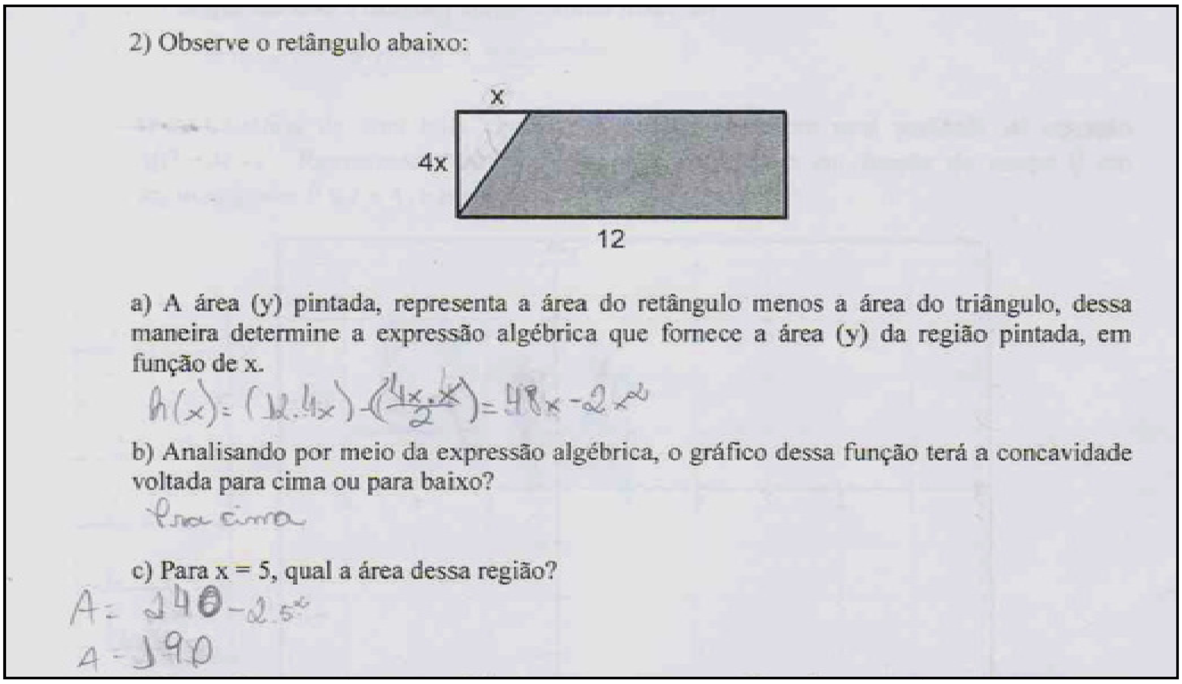
c) Descreva como seria o gráfico dessa função.

V (uma parabola)

Figura 6: Resposta da 1.ª questão da avaliação de um aluno do professor Gabriel.

Na segunda questão, podemos dizer que os alunos do professor Gabriel atingiram o objetivo pretendido, pois 69% deles conseguiram determinar a lei que expressa a função quadrática, mas apenas 14% dos alunos analisaram a questão 2b corretamente, ou seja, a concavidade da parábola voltada para baixo. Os outros 86% disseram que a concavidade era voltada para cima, pois os termos da expressão da função quadrática estavam trocados.

Por seu turno, os alunos do professor Miguel não conseguiram atingir o objetivo pretendido nesta questão; 18% dos alunos deixaram a questão em branco e 52% deles tiveram dificuldades para determinar a lei que expressa a área da região pintada em função da medida x. A seguir, apresentamos alguns desses protocolos.


2) Observe o retângulo abaixo:

a) A área (y) pintada, representa a área do retângulo menos a área do triângulo, dessa maneira determine a expressão algébrica que fornece a área (y) da região pintada, em função de x.

$h(x) = (12.4x) - \left(\frac{4x.x}{2}\right) = 48x - 2x^2$

b) Analisando por meio da expressão algébrica, o gráfico dessa função terá a concavidade voltada para cima ou para baixo?

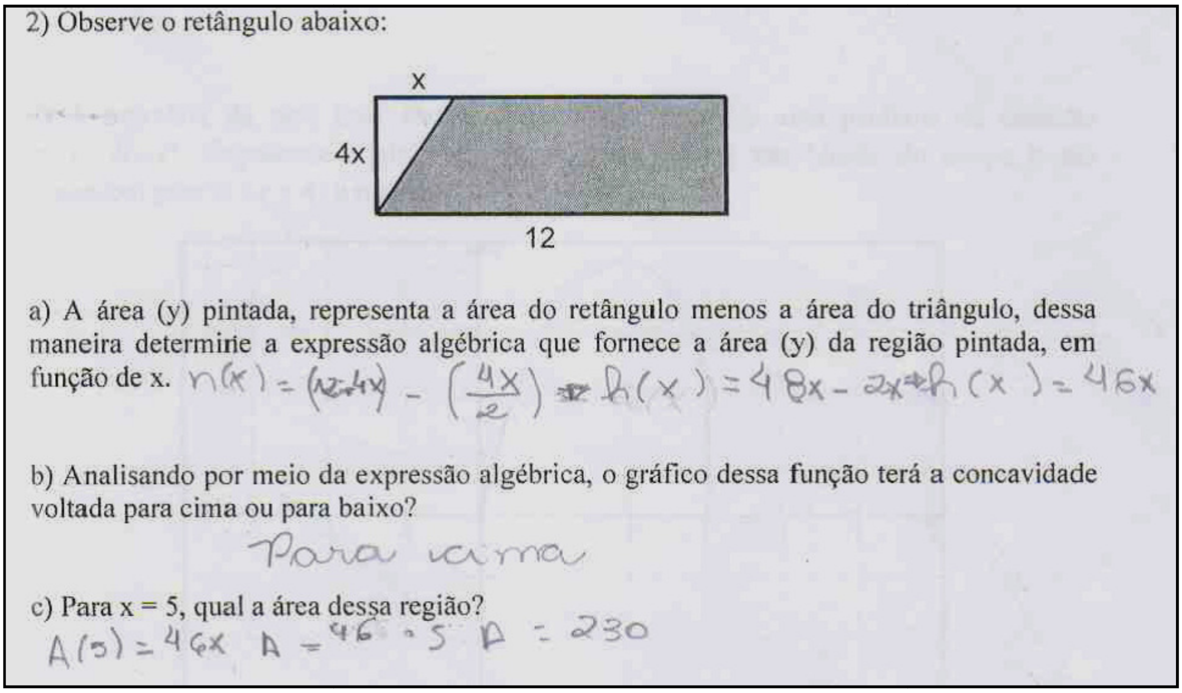
Pra cima

c) Para x = 5, qual a área dessa região?

$A = 240 - 2.5^2$

$A = 190$

Figura 7: Resposta da 2.ª questão da avaliação de um aluno do professor Gabriel.



2) Observe o retângulo abaixo:

a) A área (y) pintada, representa a área do retângulo menos a área do triângulo, dessa maneira determine a expressão algébrica que fornece a área (y) da região pintada, em função de x. $h(x) = (12 \cdot 4x) - \left(\frac{4x}{2}\right) \Rightarrow h(x) = 48x - 2x \Rightarrow h(x) = 46x$

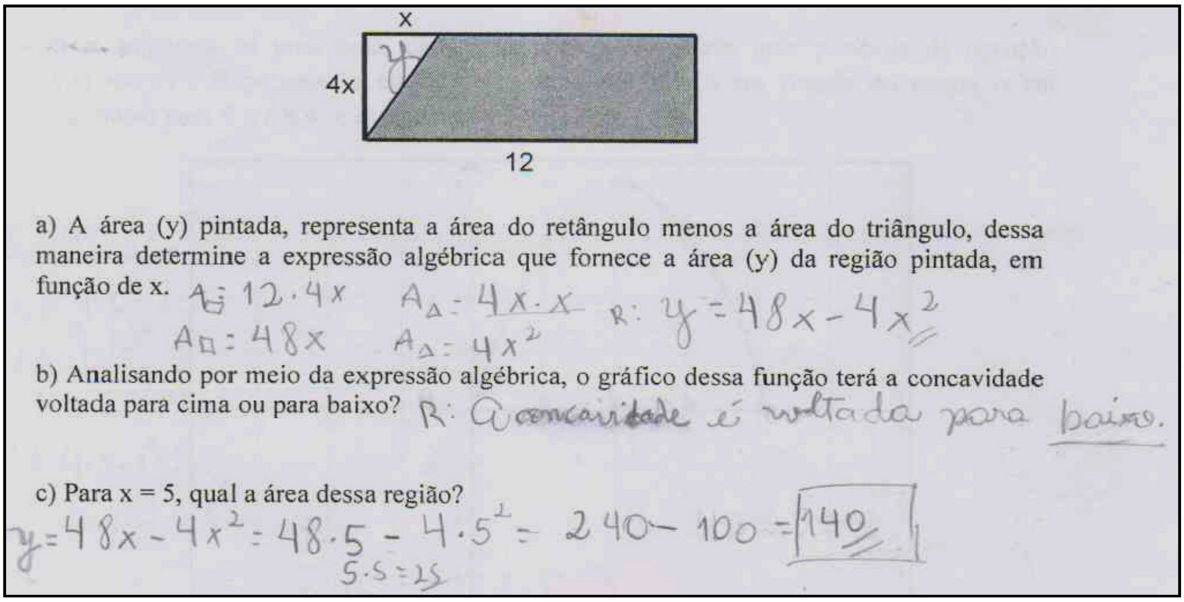
b) Analisando por meio da expressão algébrica, o gráfico dessa função terá a concavidade voltada para cima ou para baixo?

Para cima

c) Para x = 5, qual a área dessa região?

$A(5) = 46x \quad A = 46 \cdot 5 \quad A = 230$

Figura 8: Resposta da 2.ª questão da avaliação de um aluno do professor Miguel.



a) A área (y) pintada, representa a área do retângulo menos a área do triângulo, dessa maneira determine a expressão algébrica que fornece a área (y) da região pintada, em função de x. $A_\square = 12 \cdot 4x \quad A_\Delta = 4x \cdot x \quad$ R: $y = 48x - 4x^2$

$A_\square = 48x \quad A_\Delta = 4x^2$

b) Analisando por meio da expressão algébrica, o gráfico dessa função terá a concavidade voltada para cima ou para baixo? R: A concavidade é voltada para baixo.

c) Para x = 5, qual a área dessa região?

$y = 48x - 4x^2 = 48 \cdot 5 - 4 \cdot 5^2 = 240 - 100 = \boxed{140}$

$5 \cdot 5 = 25$

Figura 9: Resposta da 2.ª questão da avaliação de um aluno do professor Miguel.

Notamos que nas questões 3a e 4a um número regular (cerca de 50% a 60%) dos alunos conseguiu construir adequadamente os gráficos das funções, e cerca de 28% dos alunos deixaram a questão em branco, e, por meio das avaliações, identificamos algumas dificuldades dos alunos, como a localização dos pontos no plano cartesiano. As questões 4b e 4c apresentaram um baixo índice de acertos; os alunos que responderam corretamente, não justificaram sua resposta. Destacamos alguns protocolos.

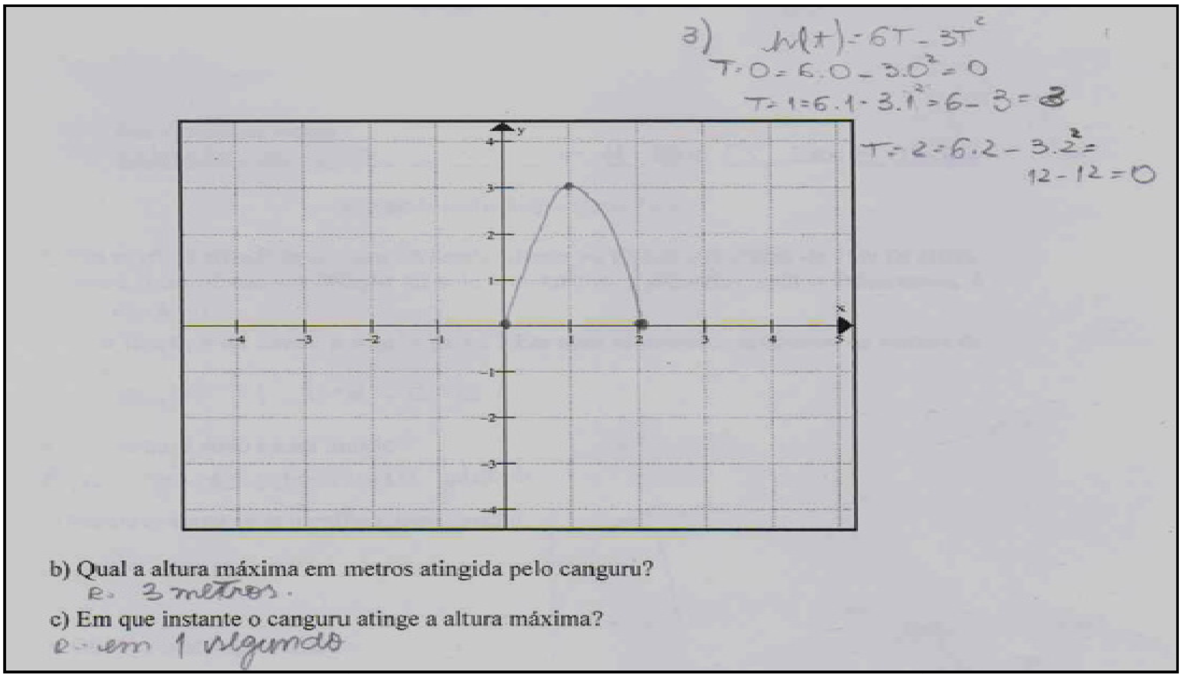


Figura 10: Resposta da 3.ª questão da avaliação de um aluno do professor Gabriel.

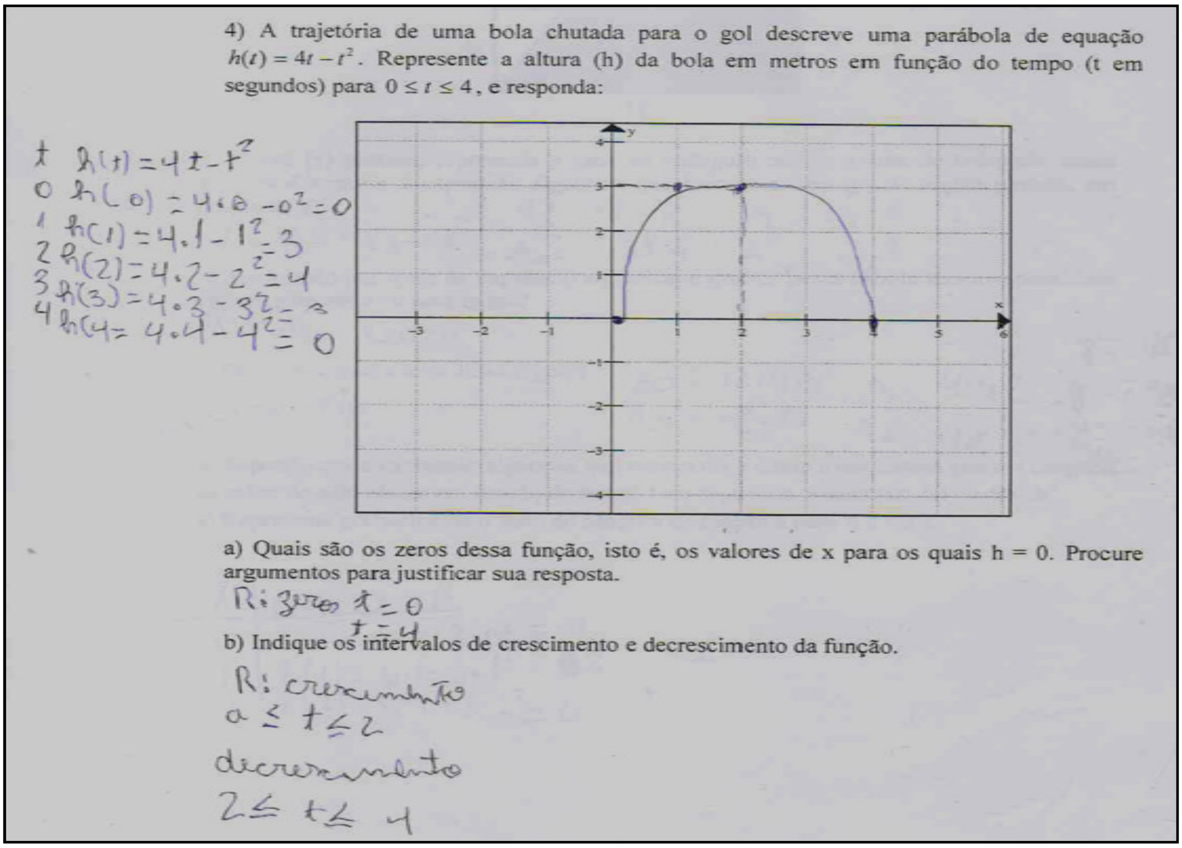
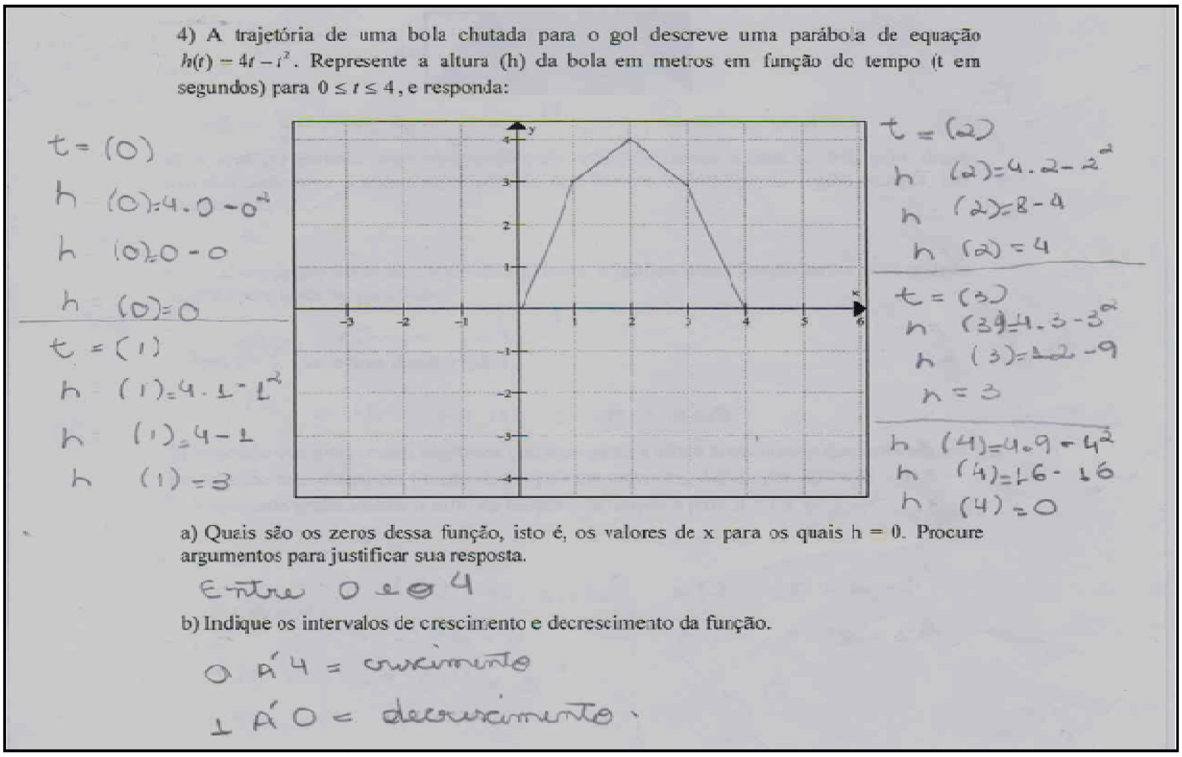


Figura 11: Resposta da 4.ª questão da avaliação de um aluno do professor Miguel.



4) A trajetória de uma bola chutada para o gol descreve uma parábola de equação $h(t) = 4t - t^2$. Represente a altura (h) da bola em metros em função do tempo (t em segundos) para $0 \leq t \leq 4$, e responda:

t = (0)
h (0)=4.0 − 0²
h (0)=0 − 0
h (0)=0
t = (1)
h (1)=4.1 − 1²
h (1)=4 − 1
h (1)=3

t = (2)
h (2)=4.2 − 2²
h (2)=8 − 4
h (2)=4
t = (3)
h (3)=4.3 − 3²
h (3)=12 − 9
h = 3
h (4)=4.4 − 4²
h (4)=16 − 16
h (4)=0

a) Quais são os zeros dessa função, isto é, os valores de x para os quais h = 0. Procure argumentos para justificar sua resposta.

Entre 0 e 4

b) Indique os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

0 á 4 = crescimento
1 á 0 = decrescimento.

Figura 12: Resposta da 4.ª questão da avaliação de um aluno do professor Gabriel.

Com essa avaliação, podemos constatar que a maior parte dos objetivos de aprendizagem foi alcançada pelos alunos, mas verificamos por meio do gráfico que os alunos do professor Gabriel apresentaram um melhor desempenho na avaliação do que os alunos do professor Miguel.

Segunda Avaliação

Como já mencionamos a segunda avaliação que consta no Anexo 7 ocorreu ao final do desenvolvimento da trajetória e tinha como intuito avaliar os seguintes objetivos:

- Determinar graficamente o vértice da parábola por meio do eixo de simetria;

- Reconhecer a forma fatorada da função quadrática e relacioná-la com o vértice da parábola e as raízes da função;

- Compreender as translações que ocorrem no gráfico quando se variam os coeficientes na representação algébrica.

Organizamos a avaliação em cinco questões e novamente os professores não realizaram nenhuma modificação. A primeira questão tratava-se de uma representação gráfica da função polinomial do 2.º grau, cujo objetivo é verificar se o aluno identifica o vértice da parábola, por meio do eixo de simetria.

Na segunda questão, é necessário que o aluno reconheça o método de completar quadrados e determine as raízes da função.

A questão 3 tem como objetivo articular a passagem da forma desenvolvida para a forma canônica. Na quarta questão, o aluno terá que reconhecer na forma fatorada o vértice da parábola.

E finalmente a última questão trata-se de uma representação gráfica em que o aluno terá que observar e justificar as translações que ocorrem no gráfico quando alteramos os coeficientes da representação algébrica.

Como a primeira avaliação os alunos realizaram individualmente, propomos para os professores que nesta segunda avaliação os alunos trabalhassem em duplas, e eles concordaram. Todos os alunos estavam presentes, portanto o professor Miguel organizou seus alunos em 16 duplas e um aluno quis fazer a avaliação sozinho. O professor Gabriel organizou seus alunos em 13 duplas e 1 trio. As questões da avaliação foram aplicadas em uma aula de 50 minutos.

Novamente após a avaliação, nos reunimos com cada professor para corrigir e analisá-la, e, na aula seguinte, os professores entregaram-na para os alunos e corrigiram na lousa os erros e as dificuldades apresentadas.

Em seguida, apresentamos um gráfico com o desempenho dos estudantes em cada questão da segunda avaliação e a análise realizada.

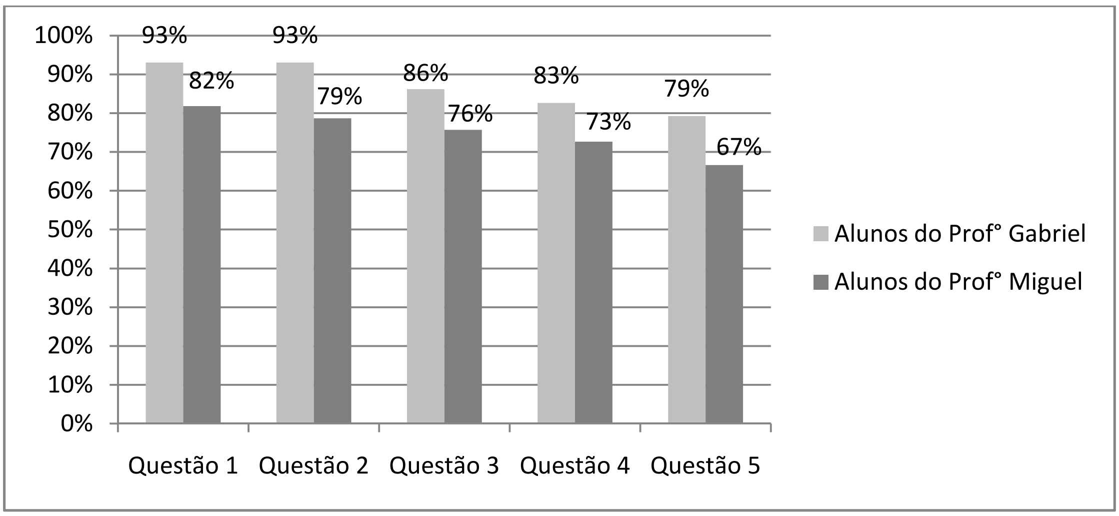


Figura 13: Gráfico do desempenho dos estudantes na 2.ª avaliação da THA.

Concluímos que os alunos atingiram os objetivos pretendidos nesta primeira questão, que era determinar o vértice da parábola por meio do eixo de simetria. Os erros surgidos eram comuns aos dois professores; alguns alunos inverteram as coordenadas do vértice, e outros não compreenderam o conceito de vértice, pois escreveram como resposta as raízes da função como um par ordenado. Abaixo destacamos alguns desses protocolos.

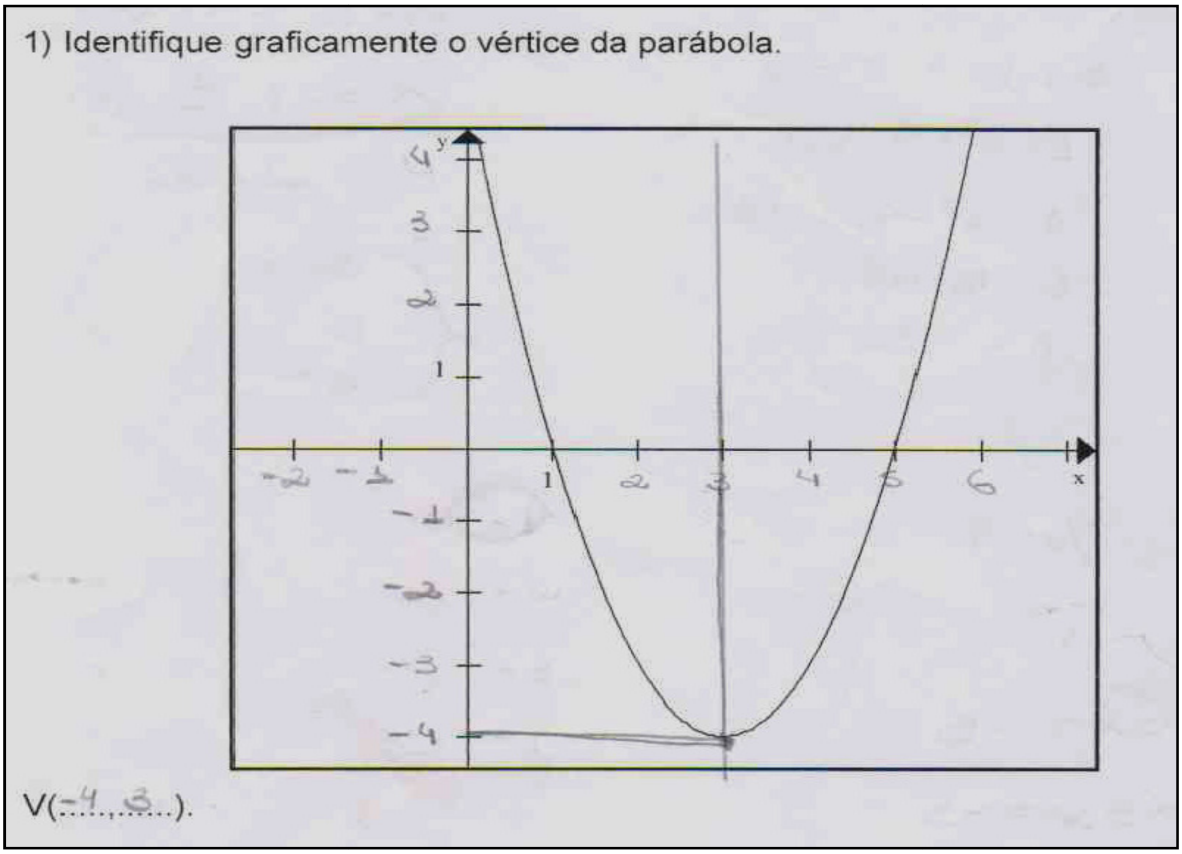


Figura 14: Resposta da 1.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Gabriel.

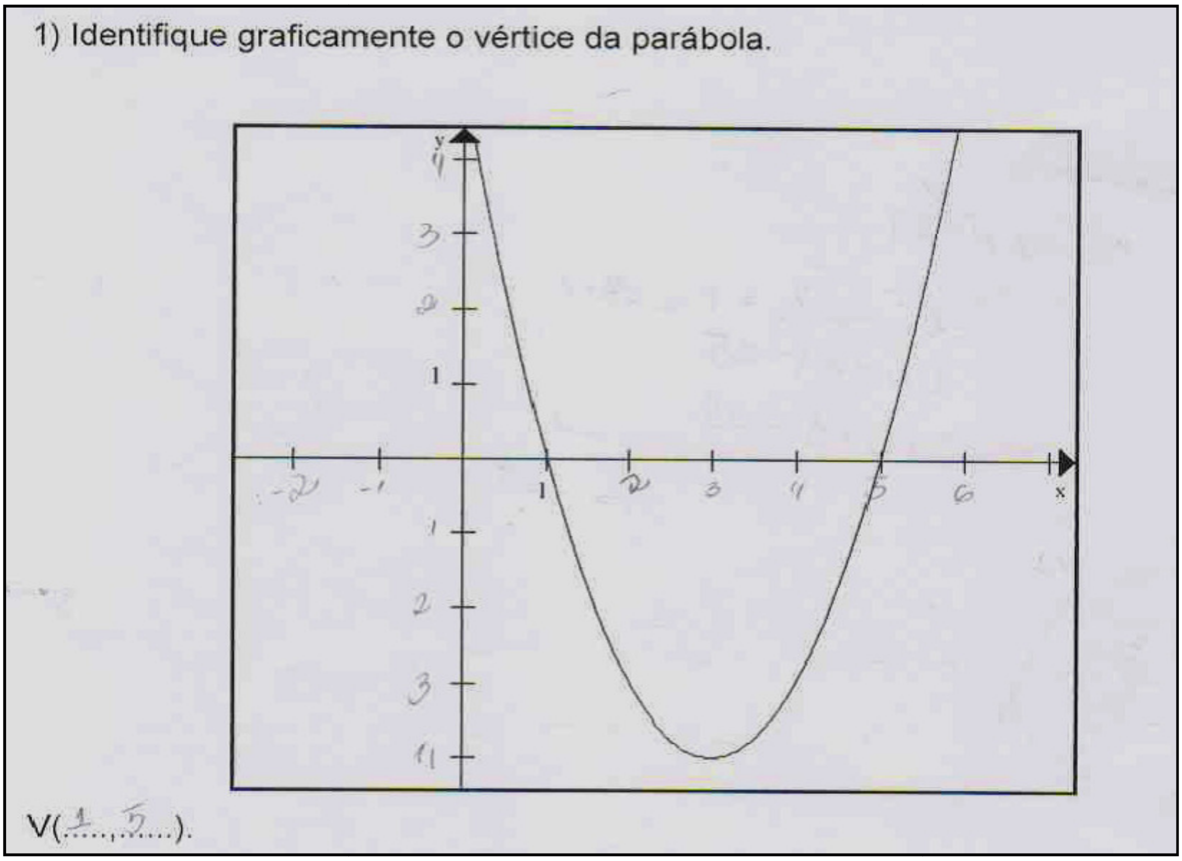


Figura 15: Resposta da 1.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Miguel.

Notamos que nas questões 2 e 4 tivemos um bom índice de acertos, o que nos leva a concluir que os alunos atingiram o objetivo pretendido para estas questões. Verificamos, outrossim, que o restante dos alunos que não souberam responder as questões deixou-as em branco.

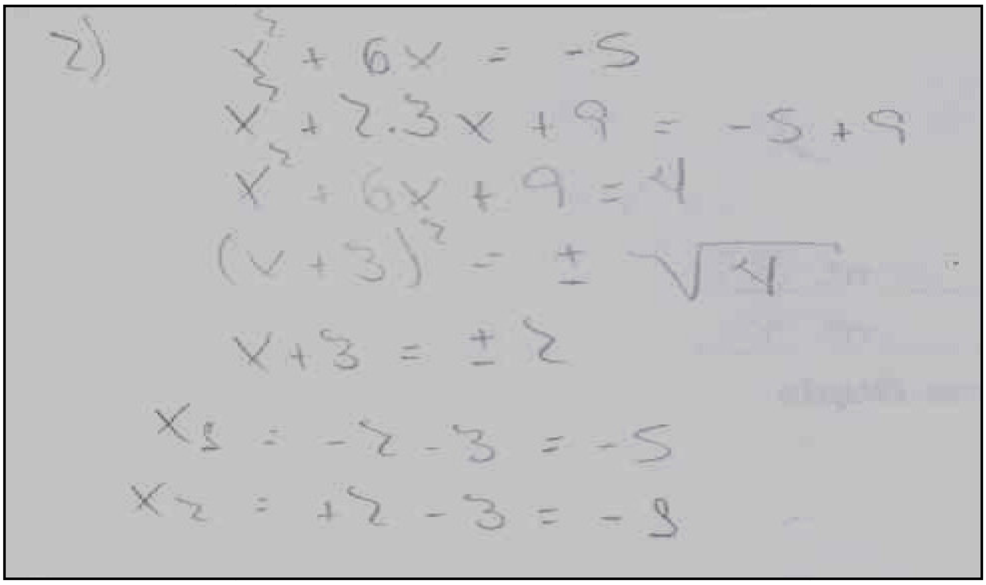


Figura 16: Resposta da 2.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Miguel.

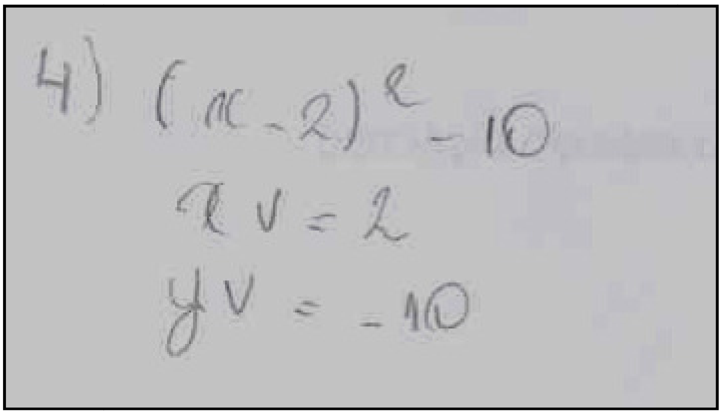


Figura 17: Resposta da 4.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Gabriel.

Na questão 3, tivemos 86% dos alunos do professor Gabriel que responderam adequadamente a questão e os outros 14% dos alunos deixaram a questão em branco. O mesmo ocorreu com os alunos do professor Miguel, 18% deles deixaram a questão em branco e uma dupla respondeu a questão errada, demonstrando dificuldades em escrever o trinômio quadrado perfeito e sua forma fatorada. Observem os protocolos abaixo:

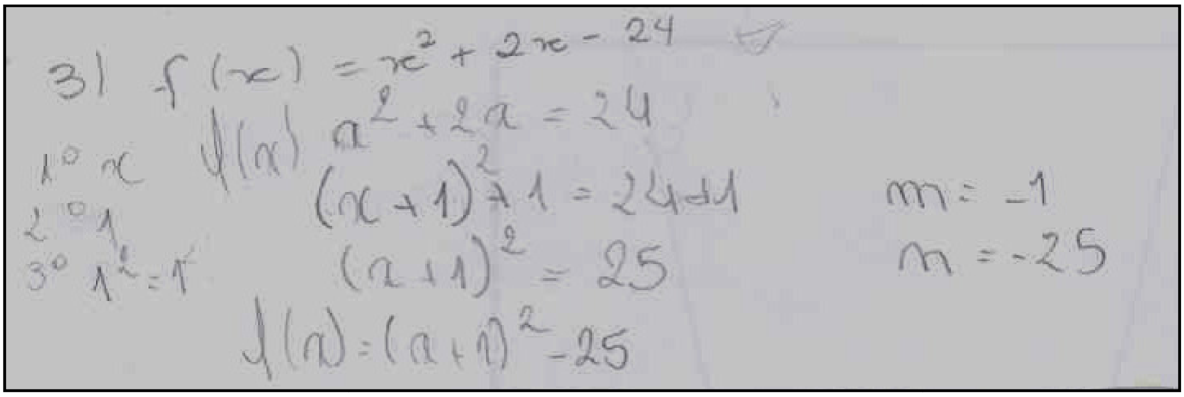
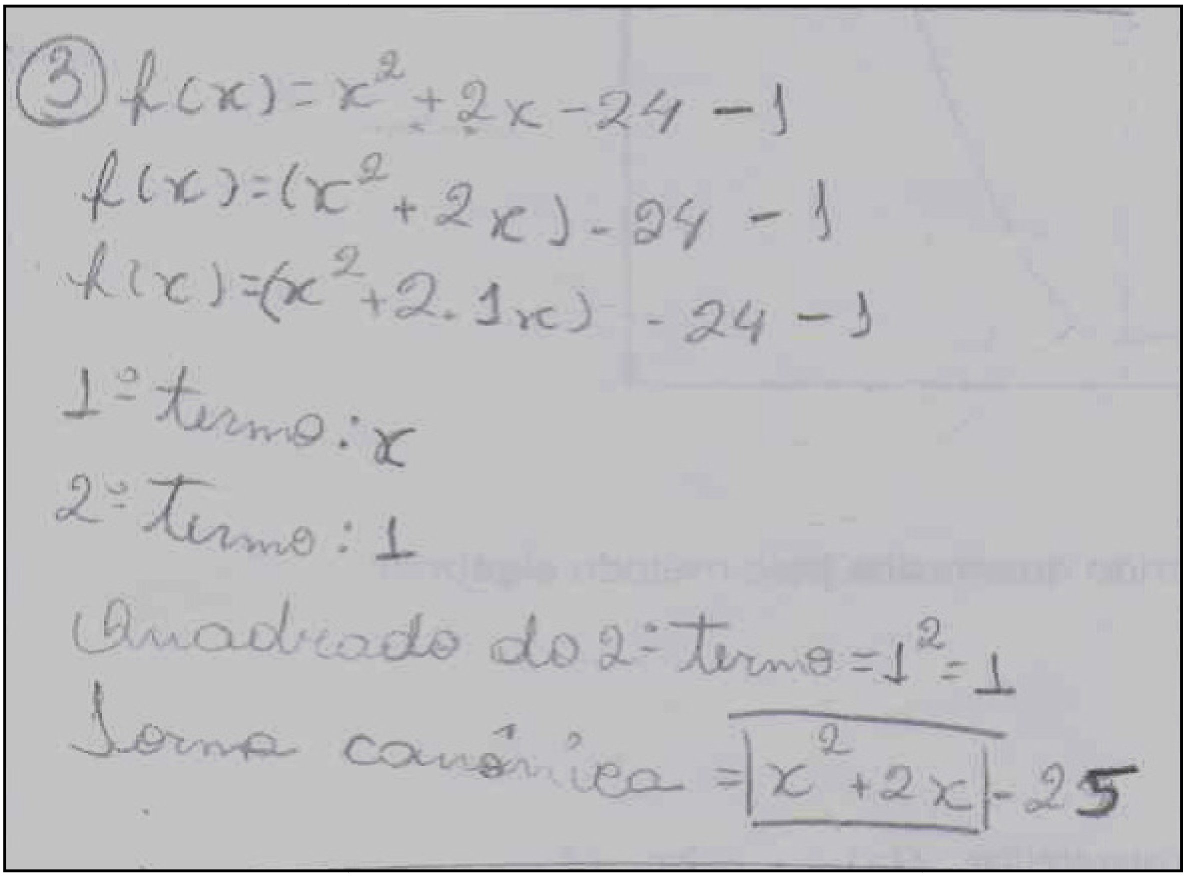


Figura 18: Resposta da 3.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Gabriel.



③ $f(x)=x^2+2x-24-1$

$f(x)=(x^2+2x)-24-1$

$f(x)=(x^2+2.1x)-24-1$

1º termo: x

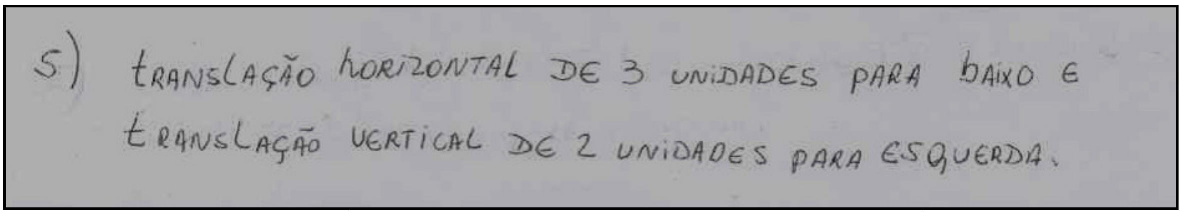
2º termo: 1

Quadrado do 2º termo $=1^2=1$

forma canônica $=\boxed{x^2+2x}-25$

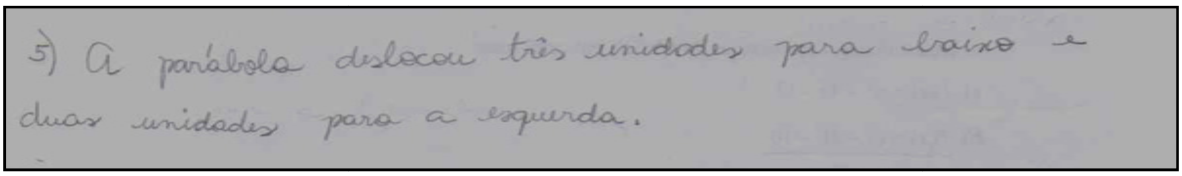
Figura 19: Resposta da 3.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Miguel.

Os alunos apresentaram um bom desempenho na questão 5, a qual foi trabalhada pelos professores no laboratório de informática. Três duplas de alunos do professor Gabriel e duas duplas do professor Miguel deixaram a questão sem resposta, e alguns alunos do professor Miguel demonstraram confusão com as translações verticais e horizontais.



5) TRANSLAÇÃO HORIZONTAL DE 3 UNIDADES PARA BAIXO E TRANSLAÇÃO VERTICAL DE 2 UNIDADES PARA ESQUERDA.

Figura 20: Resposta da 5.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Miguel.



5) A parábola deslocou três unidades para baixo e duas unidades para a esquerda.

Figura 21: Resposta da 5.ª questão da avaliação II de um aluno do professor Gabriel.

Concluímos com a segunda avaliação que os objetivos de aprendizagem foram alcançados pela maioria dos alunos. Notamos, por outro lado, que os alunos apresentaram um desempenho melhor nesta segunda avaliação do que na primeira, e acreditamos que seja porque eles estavam trabalhando em duplas.

Não ficamos surpresos com o alto índice de questões em branco. Como mencionamos anteriormente, alguns alunos se mostraram desmotivados, pois não havia uma interação do professor com todos os alunos durante o desenvolvimento da THA.

CAPÍTULO 4
NOVOS CONHECIMENTOS CONSTRUÍDOS APÓS A THA

Neste capítulo vamos apresentar os novos conhecimentos dos professores do Ensino Médio construídos após o desenvolvimento da THA em sala de aula e as nossas reflexões como professora pesquisadora sobre toda a trajetória segundo o Ciclo de Ensino de Matemática (SIMON, 1995). Em seguida exporemos as sugestões de modificações realizadas para compormos a segunda e última versão da THA.

4.1 Os novos conhecimentos dos professores do Ensino Médio e da pesquisadora

Após o desenvolvimento da THA em sala de aula e depois da análise dos resultados da avaliação, marcamos um encontro com os dois professores para procedermos a uma reflexão sobre todo o trabalho realizado durante a pesquisa.

Pedimos para os professores relatarem se durante o desenvolvimento da THA eles construíram algum conhecimento que tenha contribuído para seu desenvolvimento profissional.

O professor Gabriel disse que a pesquisa contribuiu sobremaneira, possibilitando um aprimoramento do conhecimento matemático, pois nunca tinha trabalhado com a forma fatorada da função do 2.º grau, nem com o *software* para a construção de gráficos. Destacou ainda que ele passou a ter uma preocupação maior com as atividades de articulação entre a representação gráfica e algébrica da função, a qual segundo o professor, não era abordada.

O professor Miguel relatou que gostou de abordar o conteúdo de uma forma diferente da habitual, como a iniciativa de propor situações-problema antes de explicar a definição. Disse ainda que não acreditava que os alunos conseguissem resolver utilizando seus conhecimentos prévios.

Ambos os professores comentaram que nunca haviam utilizado o laboratório de informática com os alunos e que ficaram muito satisfeitos com os resultados, pois possibilitaram um maior envolvimento dos alunos nas atividades.

Com esses comentários, podemos verificar que os professores construíram alguns conhecimentos com a pesquisa, mas há muitos aspectos que não foram levantados por eles e que se mostram distantes de suas reflexões, por exemplo, a importância de determinar objetivos que façam com que seus alunos construam sobre determinado assunto, a importância de levantar hipóteses sobre o processo de aprendizagem e hipóteses a respeito do conhecimento dos alunos, a importância de preparar atividades atendendo a esses objetivos e modificá-las quando necessário, a relevância de valorizar as ideias dos alunos e deixar que eles explicitem as suas opiniões, a importância de questioná-los e principalmente de questionar a si próprio sobre a sua prática em sala de aula.

No que se refere ao nosso desenvolvimento profissional, podemos afirmar que a THA contribuiu para mudarmos nossa postura profissional, não somente em sala de aula, mas principalmente na prática da elaboração de nossas aulas, pois passamos a ter a necessidade de construir trajetórias de aprendizagem levando em consideração os resultados de pesquisa e diferentes fontes de consulta.

Esta pesquisa nos propiciou uma grande reflexão sobre os objetivos, hipóteses e construção da THA e, além disso, estudamos, analisamos e realizamos uma formação para os professores, e acreditamos que isso nos possibilitou um grande benefício enquanto professora.

Enfim, consideramos que estamos em constante processo de aprendizagem, pois percebemos o quanto ainda temos para aprender e melhorar em nossa prática docente.

4.2 As sugestões de modificação na THA

Segundo Simon (1995), durante o desenvolvimento de atividades pelos professores, um objetivo inicial planejado geralmente deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular.

Entretanto, vimos que os professores não têm o hábito de construir trajetórias de aprendizagem, nem o costume de refletir sobre suas práticas e as modificações em seu conhecimento de professor. Desse modo, não realizaram sugestões, alterações ou modificações nem se comprometeram em ajustar a trajetória de aprendizagem na revisão da THA. Assim, resolvemos, por meio dos nossos conhecimentos construídos após o desenvolvimento da THA, modificar os planos para as atividades de ensino/aprendizagem que havíamos elaborado anteriormente, seguindo o ciclo de Simon (1995).

Inicialmente, em nossa primeira versão da trajetória hipotética de aprendizagem não levamos em consideração a relação discreto/contínuo. Ao querermos contextualizar uma situação-problema, utilizamos equivocadamente os procedimentos por pontos e por extensão de um traçado para representar graficamente uma função em que seu domínio se restringia apenas ao conjunto de números discretos.

Logo, pretendemos modificar a atividade do item 2.3, assim como acrescentar mais algumas atividades nesta parte da trajetória.

Notamos ainda a pouca ênfase que demos para articular as representações; adotamos apenas a articulação da passagem de uma representação algébrica à outra, e a articulação da passagem algébrica para gráfica. Na nova versão, pretendemos propor aos alunos tarefas que tratem os dois sentidos da conversão, ou seja, iremos apresentar atividades para o aluno passar da representação algébrica de uma função para sua representação gráfica e, em algumas situações, pedir que o aluno determine a expressão algébrica da função a partir de seu gráfico.

Desse modo, acreditamos que permitiremos que o aluno perceba conjuntamente modificações no gráfico e na expressão algébrica da função, por meio das variáveis visuais pertinentes.

E, por fim, pretendemos acrescentar mais uma atividade para ser desenvolvida no laboratório de informática com o *software* Winplot para que o aluno possa compreender a importância do tratamento dado à escrita algébrica da função quadrática, ou seja, queremos propor uma atividade para confrontar as duas representações (forma desenvolvida $f(x) = ax^2 + bx + c$ e a forma fatorada $f(x) = a.(x + m)^2 + n$), reforçando a idéia de visualização global do traçado.

Na organização da nova THA continuamos com os mesmos objetivos iniciais e sugerimos para cada situação de aprendizagem uma estratégia e o tempo previsto para a realização das atividades:

4.3 A segunda versão da THA

1.ª Parte:

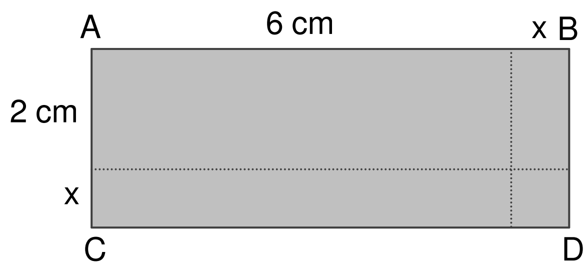
Tempo previsto: 1 aula

Objetivo: Reconhecer a expressão algébrica da função do 2.º grau.

Estratégia: Entregar uma folha para cada dupla de alunos, contendo a 1.ª parte das atividades, e propor para o professor que dê um tempo para que os alunos interpretem a situação proposta e possam representar por meio de uma expressão algébrica a função polinomial do 2.º grau. Em seguida, o professor poderá solicitar que algumas duplas exponham suas respostas no quadro-negro para que ele possa concluir a atividade discutindo com o grupo de estudantes.

Fonte: Adaptação de um exercício retirado do *Jornal do Aluno* – 2.ª e 3.ª séries – Ensino Médio, aula 15, p. 46.

Atividade 1.1 A área y do retângulo ABCD da figura é dada em função da medida x:



A função que representa a área y é $(x+2)\cdot(x+6)$

a) Essa função é da forma $y = ax^2 + bx + c$? Em caso afirmativo, determine os valores de a, b e c.

Atividade 1.2 Considerando como forma geral da função polinomial do 2.º grau a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, escreva as funções do 2.º grau com a incógnita x, em que:

a) a = 1, b = 2 e c = 3

b) a = 2, b = 0 e c = 32

c) $b = \frac{1}{2}$, c = -1 e a = 2

d) $c = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}\ e\ a = \frac{2}{3}$

2.ª Parte:

Tempo previsto: 4 aulas

Objetivos:

- Identificar e construir gráficos de funções polinomiais do 2.º grau;
- Resolver situações-problema envolvendo situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, como Física e Economia;
- Analisar graficamente crescimento e decrescimento;
- Identificar graficamente o valor de máximo ou mínimo.

Estratégia: Esta atividade deverá ser realizada individualmente; cada aluno irá receber uma folha contendo a 2.ª parte da atividade e uma folha de papel quadriculado para a construção dos gráficos. Também serão fornecidas aos alunos calculadoras para facilitar a execução de cálculos no desenvolvimento das atividades. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

Fonte: Adaptações e exercícios extraídos do livro *Educação Matemática*, 8.ª série do Ensino Fundamental. Pires et al, 2002, módulo 15, p. 171.

Atividade 2.1 Desenhe em seu caderno e descreva como seria a trajetória de uma bola arremessada para uma cesta de basquete.

Atividade 2.2 Supondo que a expressão algébrica que representa a altura h (em metros) de uma bola arremessada para a cesta de basquete em função do tempo t em segundos, é dada por $h = -t^2 + 6t$:

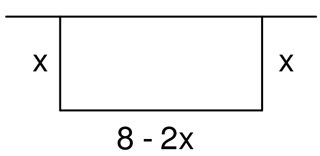
a) Dê alguns valores para t e determine a altura h da bola, e em seguida construa o gráfico em folha de papel quadriculado.
b) Você consegue perceber alguma semelhança entre o seu desenho realizado no exercício anterior e esse gráfico?
c) O gráfico de funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva denominada parábola. Observe o gráfico e responda:
i) a parábola tem concavidade para cima ou para baixo?
ii) Em que instante a bola atinge a altura máxima?
iii) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

Atividade 2.3 Um corpo é abandonado de certa altura. Sua trajetória de queda é vertical, e para calcular a distância d em metros percorrida em t segundos utiliza-se a lei: $d = 4{,}9t^2$.
a) Usando a calculadora, calcule a distância percorrida nos instantes indicados:

t (segundos)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
d (metros)										

b) Represente a trajetória de queda do corpo graficamente. Atenção: as escalas nos dois eixos podem ser diferentes, pois eles irão indicar a variação de grandezas diferentes.

Atividade 2.4 Deseja-se cercar um canteiro retangular dispondo de 8 metros de tela. O terreno já possui uma parede construída, então será necessário cercar apenas três lados do retângulo, como mostra a figura abaixo:



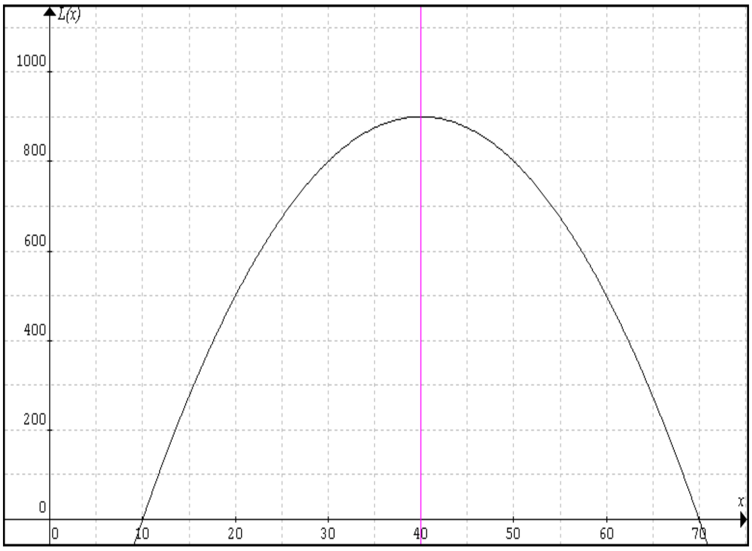
a) Qual é a fórmula que expressa a área desse canteiro em função de x, que é a medida de um dos lados do retângulo?

b) Dê alguns valores para x (medida de um dos lados do retângulo) e construa o gráfico da área do canteiro.

c) Verifique qual deve ser a medida do lado do retângulo para que a área do canteiro seja máxima. E qual é a área máxima?

Atividade 2.5 Rogério é empresário de um grupo de danças folclóricas; ele está "quebrando a cabeça" para determinar o preço x, em reais, do ingresso para o próximo *show* do grupo (se for alto, ele não conseguirá vender ingressos, e, se for baixo, pode ser que ele tenha prejuízo). Com base nos últimos espetáculos realizados pelo grupo, ele concluiu que o lucro L (ou prejuízo, se L < 0) de cada espetáculo, em reais, é dado por $l = -x^2 + 80x - 700$.

X	$L = -x^2 + 80x - 700$
10	$L = -(10)^2 + 80.10 - 700 = 0$
20	$L = -(20)^2 + 80.20 - 700 = 500$
30	$L = -(30)^2 + 80.30 - 700 = 800$
40	$L = -(40)^2 + 80.40 - 700 = 900$
50	$L = -(50)^2 + 80.50 - 700 = 800$
60	$L = -(60)^2 + 80.60 - 700 = 500$
70	$L = -(70)^2 + 80.70 - 700 = 0$



Responda as seguintes questões:

a) Qual é o lucro se o ingresso para o *show* for vendido a R$ 20,00?

b) Pode-se afirmar que o empresário tem prejuízo quando o valor do ingresso for um valor maior que R$ 40,00? Explique.

c) Para qual intervalo percebemos que o lucro cresce? E para qual intervalo é decrescente?

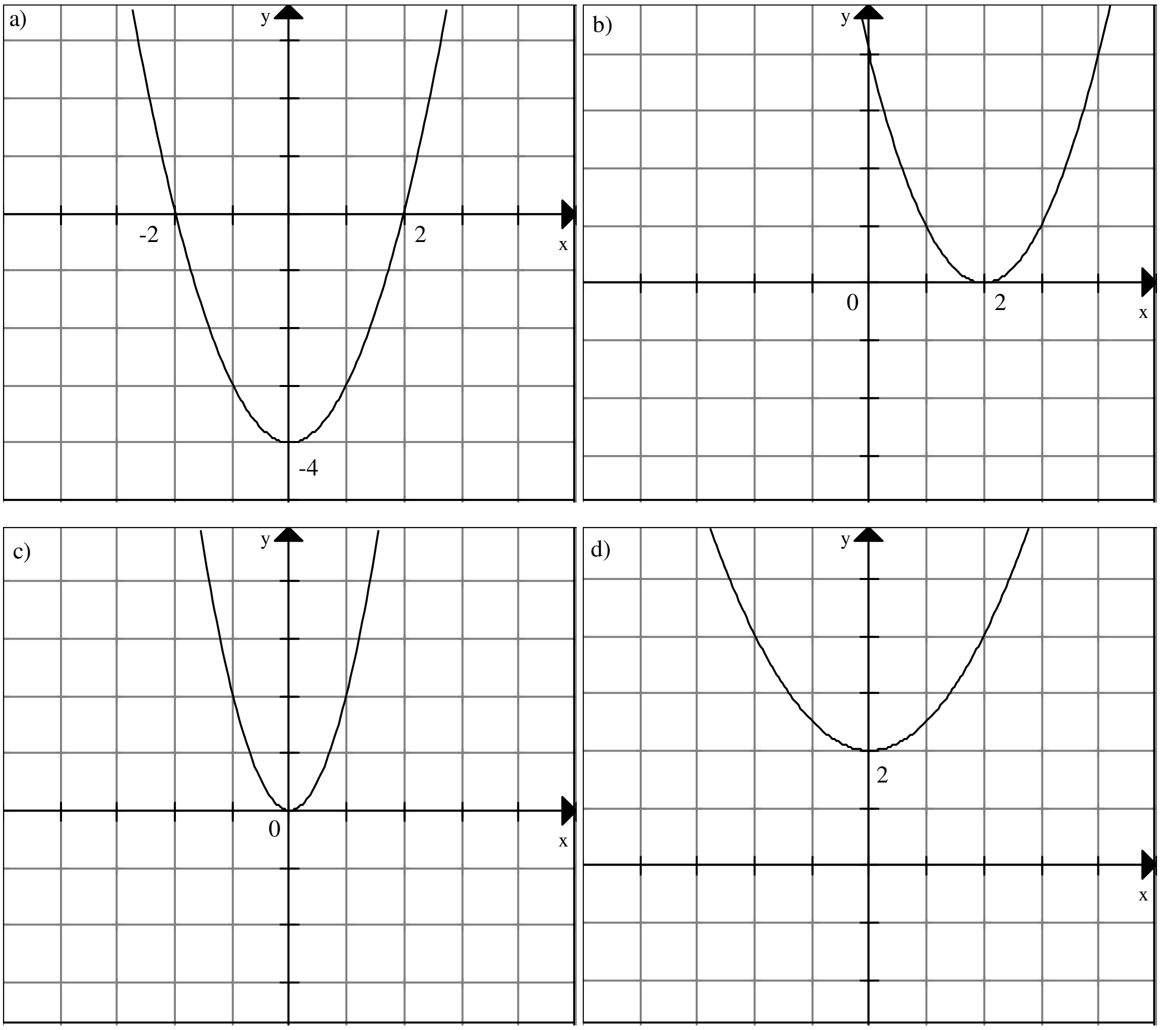
d) Qual é o valor do ingresso para que o empresário tenha lucro máximo? E qual é esse lucro?

e) O que acontece quando os ingressos são vendidos a um valor maior que R$ 70,00?

f) Qual é o lucro quando os ingressos forem vendidos a R$ 10,00 ou a R$ 70,00? Procure argumentos para justificar sua resposta.

g) Qual será o lucro se o ingresso for vendido a R$ 22,50?

Atividade 2.6 Analise os gráficos verificando o ponto em que a parábola intercepta o eixo y e relacione os gráficos com uma das funções abaixo indicadas:



( ) $f(x) = 2x^2$

( ) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

( ) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$

( ) $f(x) = x^2 - 4$

3.ª Parte:

Tempo previsto: 2 aulas

Objetivos: Determinar a ordenada do vértice sem a utilização da fórmula, a partir da abscissa do vértice encontrada por meio do eixo de simetria no gráfico.

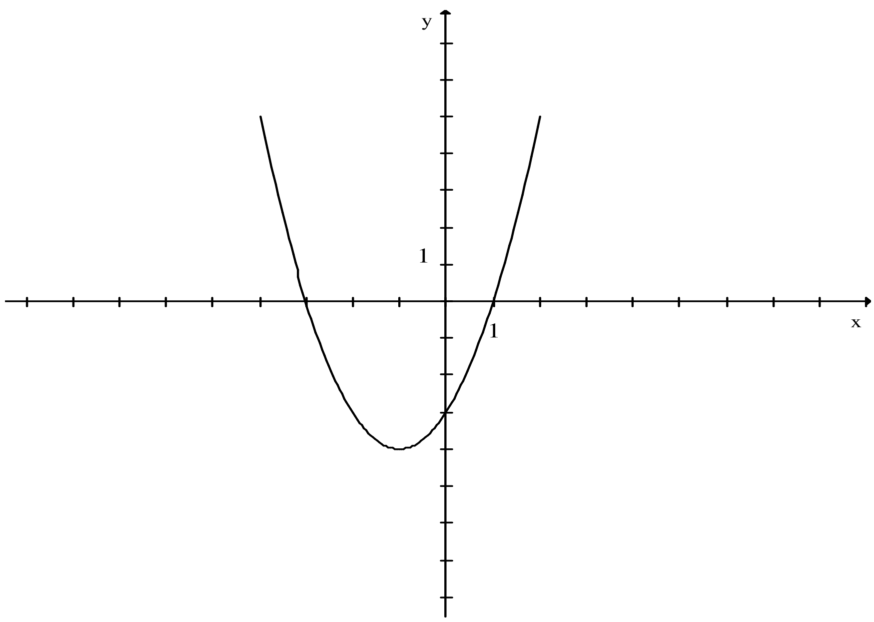
Estratégia: Essa atividade poderá ser realizada individualmente. Antes de iniciar a atividade, o professor deverá questionar os alunos sobre seus conhecimentos em relação ao eixo de simetria e em relação ao vértice da parábola e concluir com eles que o eixo de simetria na parábola é uma reta vertical paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo vértice da parábola e, que o vértice da parábola é o ponto do gráfico de uma função de 2.º grau, tal que a função atinge o maior valor (ponto máximo) ou o menor valor (ponto mínimo).

Fonte: Extraído da apostila do curso Construindo Sempre Matemática para Professores do Ensino Médio, módulo da 1.ª série, p. 15.

Atividade 3.1 O ponto em que a parábola encontra seu eixo de simetria tem o nome de Vértice da parábola. Observe as parábolas, desenhe o eixo de simetria e determine a abscissa e substitua na função para determinar a ordenada do vértice e em seguida complete o que se pede:

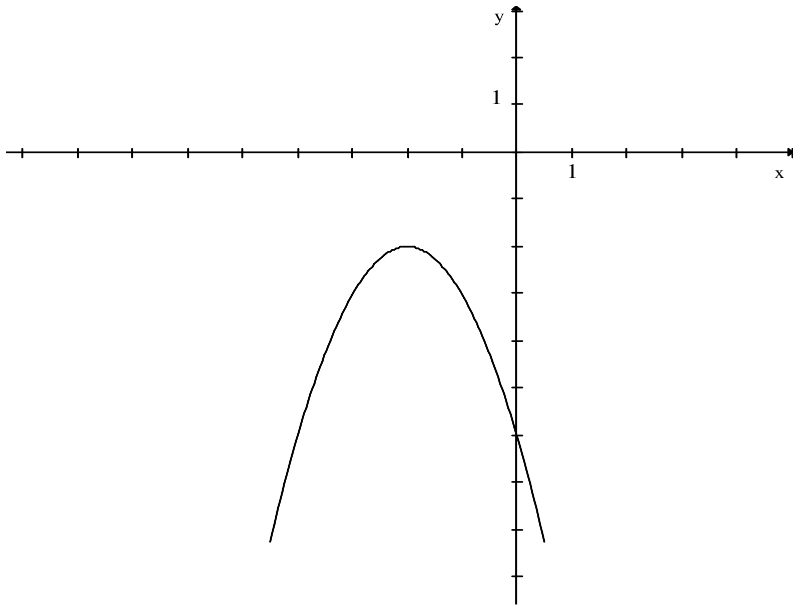
a) $y = x^2 + 2x - 3$

Vértice da parábola V(..... , ...).



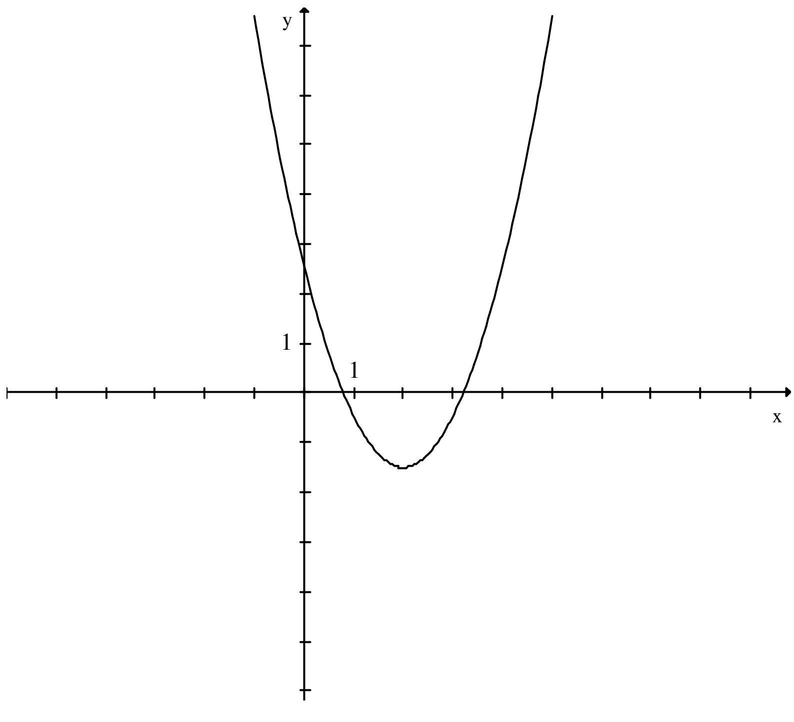
b) $y = -x^2 - 4x - 6$

Vértice da parábola V(..... , ...).



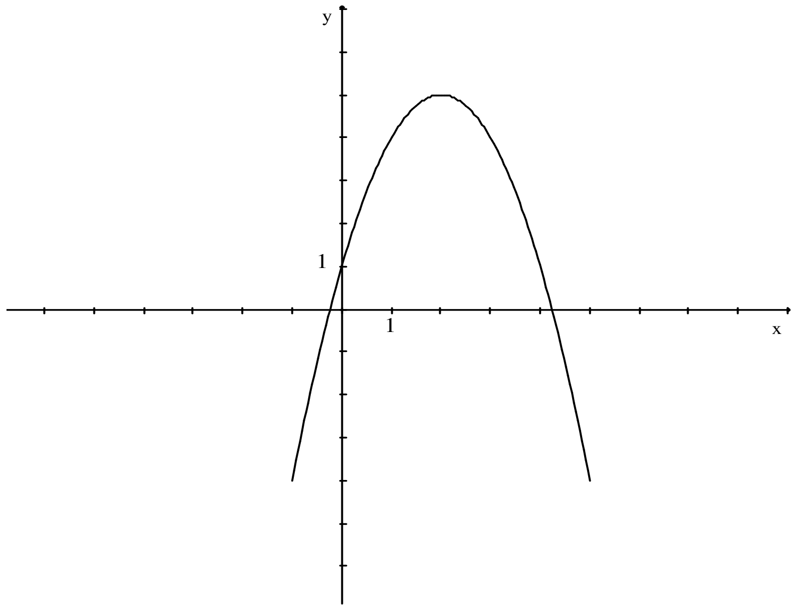
c) $y = x^2 - 4x + 2{,}5$

Vértice da parábola V(..... , ...).



d) $y = -x^2 + 4x + 1$

Vértice da parábola V(..... , ...).



4.ª Parte:

Tempo Previsto: 4 aulas.

Objetivos: Relacionar a forma desenvolvida de uma função quadrática com a forma canônica pelo método de completar quadrados. Reconhecer a forma canônica da função quadrática e relacionar a forma canônica com as raízes e o vértice da parábola.

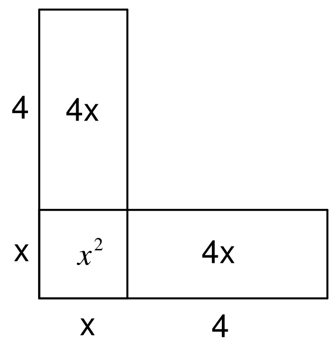
Estratégia: As atividades 4.1, 4.2 e 4.3 deverão ser realizadas em dupla para que os alunos possam levantar hipóteses e argumentar, e o professor deverá dar um tempo para que eles interpretem a situação proposta e apresentem as estratégias que utilizaram para escrever a forma canônica pelo método de completar quadrados. Em seguida, o professor poderá propor que algumas duplas exponham suas respostas no quadro-negro para que ele possa concluir a atividade discutindo com o grupo de estudantes. Nas questões 4.4, 4.5 e 4.6, o professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

Fonte: Extraído da apostila do curso Construindo Sempre Matemática para Professores do Ensino Médio, módulo da 1.ª série, p. 23, e do livro *Matemática 1.ª série do Ensino Médio*, Dante, 2005, p. 120-123.

Os Babilônios no século IX já conseguiam trabalhar com equações do 2.º grau pelo método geométrico de completar quadrados.

Atividade 4.1 Observe e complete o que se pede no processo realizado geometricamente, pelo método babilônio e determine a solução da equação $x^2 + 8x = 9$.

Fazendo a representação geométrica, temos: $x^2 + 8x = 9 \Rightarrow x^2 + 4x + 4x = 9$.



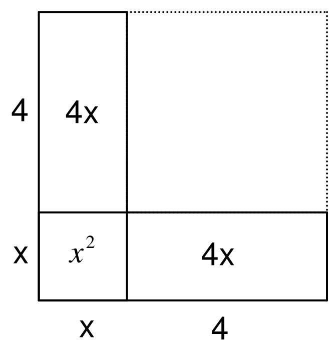
Temos um quadrado pequeno de lado x, e a área é x^2 *.*

Temos dois retângulos de lados 4 e x, e a área de cada retângulo é 4x.

A soma das áreas dessas três figuras é $x^2 + 4x + 4x$ *.*

A área de $x^2 + 4x + 4x$ *é igual a 9, chamaremos de área L.*

Completando a figura de L, de modo a obter um quadrado maior, teremos a figura abaixo. Observe e responda:



a) Qual é a área do quadrado pontilhado?

b) Some as áreas das quatro partes do quadrado maior.

c) Determine a medida do lado do quadrado maior.

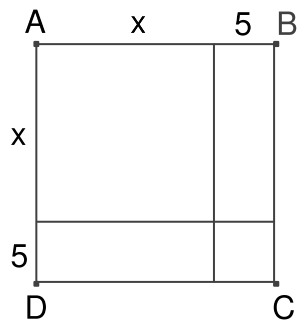
d) Escreva a expressão que fornece a área do quadrado maior, a partir da multiplicação dos lados.

e) Verifique se são iguais as expressões algébricas obtidas nos itens b e d.

f) Calcule a área do quadrado maior somando a área L da figura com a área do quadrado pontilhado da figura.

g) Se você já sabe o valor da área do quadrado maior, então responda: Qual o valor do lado do quadrado maior? E Quanto vale x?

Atividade 4.2 A área do quadrado ABCD abaixo é igual a 121 cm^2. Determine a área das quatro partes do quadrado ABCD e calcule o valor de x.



Atividade 4.3. $x^2 + 2.4x = 9$

x^2 (é o quadrado do 1º. termo x)

2. 4x (é duas vezes o 1.º pelo 2 º. termo $\Rightarrow$ então o 1.º termo é x e o 2.º termo é 4)

O que está faltando é o quadrado do 2.º termo. O quadrado do 2.º termo é:

Então, completando o quadrado teremos: $x^2 + 2.4x + ... = 9 + ...$

Portanto, fatorando o trinômio teremos: $(x + ...)^2 = ...$

A partir daí, calcule e obtenha os valores de x.

Atividade 4.4 Determine os zeros da função, completando quadrados pelo método algébrico:

a) $x^2 + 6x = -5$

b) $x^2 + 10x = 39$

c) $x^2 + 4x = 5$

e) $3x^2 + 2x = 1$

Três milênios mais tarde, no século XII, o matemático hindu Bhaskara, utilizando resultados já conhecidos na Índia, resolveu a equação do 2.º grau empregando o mesmo raciocínio dos babilônios, deixando a fórmula que todos nós conhecemos.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x = -\frac{c}{a}$$

1.º termo é igual a: x

2.º termo é igual a: $\frac{b}{2a}$

O quadrado do 2.º termo é: $\frac{b^2}{4a^2}$

Então teremos: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Completando os quadrados iremos relacionar a forma desenvolvida da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a forma canônica, que é dada por:

$$\boxed{f(x) = a.(x - m)^2 + n}$$

Atividade 4.5 Observe e complete o que se pede no processo do método de completar quadrados:

$$x^2 - 4x - 6 = (x^2 - 4x) - 6$$

Complete o quadrado da expressão $(x^2 - 4x)$; temos que:

x^2 (é o quadrado do 1.º termo, que é: .....).

2. 2x (é duas vezes o 1.º pelo 2.º termo $\Rightarrow$ então o 1.º termo é ... e o 2.º termo é ...).

O que está faltando é o quadrado do 2.º termo. O quadrado do 2.º termo é:.....

Então, completando o quadrado teremos: $(x^2 - 2.2x + ...) - ...... - 6$.

Portanto, fatorando o trinômio teremos: $(x - .....)^2 - ......$, logo m = ... e n = ...

Atividade 4.6 Escreva na forma canônica as seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

c) $y = 2x^2 - 4x + 2$

Atividade 4.7 Dada a função polinomial do 2.º grau $f(x) = x^2 + 4x + 3$, determine:

a) As coordenadas do vértice da parábola;

b) A forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + n$, e obtenha os valores de *m* e *n*;

c) Relacione *m* e *n* com as coordenadas do vértice;

d) Determine os pontos onde a parábola corta os eixos coordenados;

e) Esboce o gráfico dessa função.

Atividade 4.8 Determine as coordenadas do vértice em cada caso:

a) $f(x) = 2.(x - 1)^2 + 1$

b) $y = x^2 - 2x - 2$

c) $y = -2(x - 3)^2 - \frac{1}{2}$

5.ª Parte:

Para realizar essa atividade, será necessário usar o *software* Winplot (software gratuito e de fácil manuseio).

O aluno precisará traçar gráficos, clicando na seguinte sequência:

Janela $\Rightarrow$ 2-dim $\Rightarrow$ Equação $\Rightarrow$ 1. Explícita

Aparecerá uma janela na forma:

F(x) = $\boxed{}$

Onde deverá ser digitada a expressão da função.

Exemplo: $f(x) = x^2 + 10x + 25$, deverá ser digitado: x^2 +10x +25

Recomendamos que o professor se limite em explicar apenas os recursos do *software* necessários para a realização das atividades.

Tempo Previsto: 2 aulas

Objetivos: Compreender as translações que ocorrem no gráfico quando se variam os coeficientes na representação algébrica.

Estratégia: Esta atividade deverá ser realizada em dupla. O professor deve atuar como um orientador das atividades, estimulando que os alunos tirem suas próprias conclusões, e é fundamental que o professor oriente os alunos na construção e na observação de cada um dos gráficos, ressaltando suas principais características. O professor deve ainda trazer periodicamente as conclusões das duplas para o debate do grupo como um todo.

Fonte: Extraído da internet, artigo: Funções Quadráticas: Abordagem Computacional. Francisco Orlando Fernandes Ribeirinha, 2005.

Atividade 5.1 Trace o gráfico da função $f(x) = x^2$ e responda:

a) Qual é a raiz da função?

b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

c) O gráfico apresenta simetria em relação algum eixo? Qual?

Atividade 5.2 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$, $f_3(x) = 2x^2$, $f_4(x) = -2x^2$, $f_5(x) = \frac{1}{3}x^2$ e $f_6(x) = -\frac{1}{3}x^2$:

a) Quais são as funções cujos gráficos são parábolas com concavidade voltada para baixo?

b) Quais são as funções cujos gráficos são parábolas com concavidade voltada para cima?

c) De que forma o coeficiente *a* da função $f(x) = ax^2$ determina a concavidade da parábola?

d) Os gráficos das funções $f(x) = ax^2$ e $f(x) = -ax^2$, com $a \neq 0$, mostram uma reflexão em relação a que eixo?

Atividade 5.3 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$, $f_3(x) = 4x^2$, $f_4(x) = \frac{1}{2}x^2$, e $f_5(x) = \frac{1}{4}x^2$, e complete:

a) Aumentando o módulo de *a*, a abertura da parábola____________(aumenta ou diminui).

b) Diminuindo o módulo de *a*, a abertura da parábola _____________(aumenta ou diminui).

Atividade 5.4 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = 2x^2$, $f_2(x) = 2x^2 + 1$, $f_3(x) = 2x^2 - 2$:

a) Que coeficiente é diferente nas três funções: a, b ou c?

b) Em que ponto a parábola intercepta o eixo y na função $f_1(x)$, $f_2(x)$ e na $f_3(x)$? Qual o significado da ordenada desse ponto?

c) Comparando o gráfico de $f_2(x) = 2x^2 + 1$ com o gráfico de $f_1(x) = 2x^2$, observa-se uma translação ___________(horizontal ou vertical)? De ____ unidade, para ______.

d) Comparando o gráfico de $f_3(x) = 2x^2 - 2$ com o gráfico de $f_1(x) = 2x^2$, observa-se uma translação ___________(horizontal ou vertical)? De ______ unidades, para _____.

Atividade 5.5 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x+3)^2$, $f_3(x) = (x-2)^2$.

a) Quais são as raízes das funções f_1, f_2 e f_3?

b) Quais são os vértices das funções f_2 e f_3?

c) Comparando o gráfico de $f_2(x) = (x+3)^2$ com o gráfico de $f_1(x) = x^2$, observa-se uma translação horizontal ou vertical? De quantas unidades? Para que lado?

d) Comparando o gráfico de $f_3(x) = (x-2)^2$ com o gráfico de $f_1(x) = x^2$, observa-se uma translação horizontal ou vertical? De quantas unidades? Para que lado?

Atividade 5.6 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = (x-3)^2 + 2$, $f_3(x) = -2(x-3)^2 - \frac{1}{2}$ e $f_4(x) = 2(x+2)^2 - 1$.

a) Determine o vértice de f_1 , f_2, f_3 e f_4.

b) Comparando o gráfico de $f_2(x) = (x-3)^2 + 2$ com o gráfico de $f_1(x) = x^2$, observa-se uma translação ___________ de _______ unidades para __________ e uma translação__________ de _______ unidades para ____________.

Atividade 5.7 Você consegue prever o gráfico de $g(x) = x^2 + 6x + 4$? Explique.

a) Escreva uma função do 2.º grau genérica a essa em função dos coeficientes *a*, *m* e *n*, de modo que seja fácil a visualização de seu gráfico.

b) O que cada um dos coeficientes (*a*, *m* e *n*) faz com o gráfico da função inicial?

c) Relacione os coeficientes da função que vocês encontraram no item a com os coeficientes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. A quais conclusões vocês chegaram?

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa foi desenvolvida com o intuito de responder três questões que escolhemos como orientadoras.

A primeira delas foi: **Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Polinomiais do 2.º grau?**

A respeito dessa primeira questão, em primeiro lugar, ressaltamos que não foi nada fácil elaborar a THA, pois nós, professores de Matemática, não estamos acostumados a elaborar trajetórias de aprendizagem, ou seja, a estabelecer objetivos de aprendizagem e atividades de aprendizagem, considerando o pensamento dos nossos alunos, o que eles já sabem e o que pode trazer dificuldades no desenvolvimento das atividades.

A princípio, tivemos muitas dificuldades como por onde e como começar a THA, como propor atividades que envolvessem uma abordagem contextualizada e interdisciplinar e como propor uma THA com uma perspectiva construtivista de ensino-aprendizagem em que os alunos fossem colocados diante de situações problematizadoras para, a partir delas, construir seus conhecimentos, com apoio das intervenções do professor.

Com a participação no grupo de pesquisa fomos esboçando a trajetória: selecionamos objetivos de aprendizagem, indicamos hipóteses sobre a aprendizagem dos alunos e escolhemos as tarefas que nos pareciam adequadas de acordo com o planejamento do ensino de Funções Polinomiais do 2.º grau e acreditamos que compatibilizamos perspectivas construtivistas de ensino-aprendizagem com o planejamento, quando levamos em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e propomos tarefas que envolvem resolução de problemas, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações em situações do cotidiano e em outras áreas do conhecimento, de modo que o aluno pudesse interagir e realizar experimentos, levantar hipóteses, construir estratégias de resolução, esboçar conjecturas, argumentar, relacionar e analisar.

O que realmente nos ajudou a elaborar uma THA que atendesse uma perspectiva construtivista de ensino-aprendizagem foram os resultados de pesquisa e as orientações curriculares sugeridas nos documentos oficiais.

Nesse processo, construímos algumas aprendizagens que contribuíram para mudarmos nossa postura em sala e principalmente na elaboração de atividades de aprendizagem. O ganho principal foi utilizar os resultados de pesquisa a que tínhamos acesso para propor tarefas para a sala de aula. As pesquisas sempre nos parecem distante daquilo que temos que realizar cotidianamente.

Muitas vezes, escolhíamos uma atividade que nos parecia interessante, mas a formulação que fazíamos era bastante fechada, já apresentando respostas prontas para os estudantes. Também nem sempre tínhamos clareza do que poderíamos traduzir nas atividades, ideias veiculadas nos currículos de Ensino Médio como as de interdisciplinaridade, contextualização, uso de tecnologias.

Em todo o processo observamos como é difícil romper com paradigmas e práticas cristalizadas.

No tocante à segunda questão: **Como as pesquisas na área de Educação Matemática que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem podem contribuir para a organização do ensino de Funções Polinomiais do 2.º grau que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos?** – fazemos as seguintes observações:

Sem dúvida, aprender a utilizar resultados de pesquisa na nossa prática foi um enorme desafio e, ao mesmo tempo, uma grande aprendizagem.

Nesse processo, uma vez realizado o levantamento bibliográfico e feita a síntese de algumas pesquisas, pudemos logo observar que nos livros didáticos, de modo geral, não é possível identificar se alguns conhecimentos didáticos construídos ao longo dos últimos anos são levados em conta nas propostas apresentadas.

Algumas pesquisas mostram possíveis dificuldades que os alunos podem apresentar, seja na construção de gráficos, seja na análise do crescimento e decrescimento, do reconhecimento dos zeros ou raízes da função, entre outros aspectos. Portanto, deveriam ser propostas atividades que potencializem o surgimento de dúvidas e a problematização das hipóteses levantadas pelos alunos.

No entanto, ainda se tratam essas dificuldades ou dúvidas simplesmente como “erros” cometidos pelos alunos, que são corrigidos repetindo-se as mesmas atividades, as mesmas explicações.

No caso do ensino de funções, atualmente temos possibilidades de fazer com que os alunos reflitam sobre elas, particularmente sobre suas representações gráficas, com a utilização de *softwares* como o que utilizamos. Consideramos que esse recurso propiciou aos estudantes que participaram de nossa pesquisa, uma melhor compreensão das características da função estudada.

Se no tocante ao uso de tecnologias encontramos vários aportes para o trabalho com Funções Polinomiais do 2.º grau, isso já não aconteceu para outros aspectos: sentimos falta de pesquisas voltadas para abordagens interdisciplinares e contextualizadas envolvendo o tema.

Finalmente, a terceira questão: **Como é a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Polinomiais de 2.º grau, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?**

Na primeira etapa do trabalho, tínhamos a expectativa de que nossos colegas, que iriam desenvolver as atividades, pudessem fazer uma análise detalhada das propostas de atividades, baseados em seus conhecimentos experienciais, construídos na prática de sala de aula.

No entanto, eles tiveram uma atuação passiva ao realizarem a análise das tarefas de aprendizagem e não propuseram nenhuma alteração na 1.ª versão da THA. Embora não seja possível afirmar algo a respeito dessa passividade, acreditamos que ela se deve muito especialmente a uma “cultura” de não-questionamento e de não-protagonismo em que os professores estão imersos.

Os conhecimentos sobre o conteúdo “funções polinomiais do 2.º grau” não constituíram entrave, pois este é um tema sempre trabalhado por eles. Mas qualquer discussão que envolva o conhecimento didático desse conteúdo ainda é muito distante. Referem-se frequentemente ao fato de que os alunos não “têm conteúdo”, mas não conseguem dizer o que já sabem e o que precisam aprender, nem que dificuldades poderiam surgir no desenvolvimento da THA, na proposta que apresentamos. Acharam “tudo bom”, mas não discutiram, criticaram ou fizeram sugestões em função do conhecimento de seus alunos.

Na entrevista feita com eles para apresentação da primeira versão da THA, o único comentário foi o de que antes de abordar a função do 2.º grau, eles fazem uma revisão de equações do 2.º grau, que acaba sendo bem longa e por isso não avançam com o conteúdo. Mostraram que têm práticas que podem ser consideradas tradicionais, sempre apoiadas na apresentação de fórmulas prontas e modelos de exercícios para os alunos reproduzirem. Comentaram que nunca tinham utilizado a forma fatorada da Função Polinomial do 2.º grau e que jamais tinham usado tecnologias (*softwares*) em suas aulas.

Na etapa de realização das THA em sala de aula, a concepção dominante foi a de que o papel do professor é “transmitir” conhecimentos. Interagem pouco com os alunos. Quando se referem aos alunos, falam de comportamentos e atitudes (quem não presta atenção, quem não faz as tarefas, etc.) e não analisam como e se a aprendizagem está se desenvolvendo.

Não obstante, verificamos que houve uma interação maior do professor Gabriel com os seus alunos durante as explicações, do que nas aulas do professor Miguel. O professor que mais se interessou, se envolveu, se entusiasmou com a trajetória de aprendizagem, despertou mais interesse nos alunos.

No tocante às atividades, as que envolviam algum contexto não matemático causaram mais discussão entre os professores e os alunos, promovendo um pouco mais de interesse dos alunos nas aulas. A aula desenvolvida no laboratório de informática foi uma novidade tanto para os professores como para os alunos, e a utilização do *software* foi significativa para a aprendizagem, embora pudesse ser mais explorada.

Ao acompanharmos o desenvolvimento da THA, sentimos muitas vezes vontade de interferir nas aulas dos professores, pois conhecíamos os objetivos de cada atividade e os fundamentos didáticos que as sustentavam, e nem sempre concordávamos com a condução da atividade.

Entretanto, lembramos muitas vezes dos debates realizados em nosso grupo de pesquisa a respeito do que Gómez e Lupiáñez (2007) trazem em seus trabalhos, destacando que Simon e Tzur (2004) apresentam um desafio: como fazer compatível o propósito de que seja o professor quem construa a revisão da THA com o fato de que a totalidade dos exemplos que se têm de THA foi desenvolvida por investigadores que assumiram o papel de professor?

Não seria tarefa dos professores elaborar THA para seus estudantes? Não teriam eles condições de analisar, rever, adaptar THA preparadas por outros?

Essas questões estão ligadas a uma polêmica atual relativamente ao papel do professor na condução do currículo em sala de aula, preocupação de Gómez e Lupiáñez (2007), que trazem ao debate opiniões como as expressas por Gravemeijer (2004), que reconhece a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores.

Gravemeijer (2004) considera que isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras sequências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) sequências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Todavia, questiona: o que pode fazer um professor com esta informação? Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos reais?

Estas questões são de fundamental importância diante do problema crucial da área de Educação Matemática, de fazer chegar aos alunos da Educação Básica contribuições que garantam melhores aprendizagens.

Nosso trabalho mostra que sem o professor se apropriar e participar do ciclo de aprendizagem esboçado por Simon, que parte do "conhecimento do professor" para organizar THA para seus alunos, identificando boas atividades (e que não necessariamente precise criá-las) a partir de objetivos claramente definidos e de atenção às hipóteses de aprendizagem de seus alunos; que as desenvolve em sala num processo interativo com os estudantes, estimulando seu envolvimento, sua curiosidade e, especialmente, observando e avaliando o que e como estão aprendendo e no que estão tendo dificuldades, não é possível avançar na qualidade da aprendizagem matemática. Não há recursos/materiais didáticos, por melhor que sejam, que garantam essas aprendizagens. Acreditamos que não basta o professor receber materiais prontos, para ser mero aplicador de tarefas propostas por outros, pois, como vimos em nossa pesquisa, o professor é a peça fundamental para o desenvolvimento de trajetórias em sala de aula.

Para tanto, é necessário que se coloquem em prática, com urgência, mudanças indicadas em pesquisas nos currículos de formação inicial e continuada de professores. Em particular, mudanças na “Prática de Ensino” e no “Estágio Supervisionado”, que mantêm uma concepção que não provoca mudanças significativas nem o acesso às investigações em Educação Matemática, fazendo com que o professor não assuma o protagonismo que deve ter na condução do processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BARRODY, A. J., Cibulskis, M., Lai, M. y Li, X. (2004). **Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 227-260.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural**. Barcelona: Paidós.1991.

BRASIL. Secretária da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2006.

______. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Mais (PCN +): Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 1999.

CLEMENTS, D. H. y Sarama, J. (2004). **Learning trajectories in mathematics education**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 81-89.

DANTE, L. R. **Matemática. V.1. 1ª série**. Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2005.

DOLL JR., W.E. **Currículo: uma perspectiva pós moderna**. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

GÓMEZ, P. y LUPIÁÑEZ, J. L. (2007). **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. PNA, 1(2), 79-98.

GRAVEMEIJER, K. (2004). **Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 105-128.

GRAVEMEIJER, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. W. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), **Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design** (pp. 225-273). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

LESH, R. y YOON, C. (2004). **Evolving communities of mind –In which development involves several interacting and simultaneously developing strands.** Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 205-226.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: E. P. U., 1986.

MAIA D. **Função Quadrática: Um Estudo Didático de uma abordagem computacional,** 2007, 141p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – SP, 2007.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao Conceito de Função: A Importância da Compreensão das Variáveis**, 2003, 146p. (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – SP, 2003.

PIRES, C. M. C.; CURI E.; CAMPOS, M. M. T. **Ensino Médio Módulos da 1ª Série**. São Paulo: Proem, 2002. (Apostila do curso Construindo Sempre Matemática – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC/SP – Secretária de Estado da Educação de São Paulo).

PIRES, C. M. C.; CURI E.; PIETROPAOLO, R. **Educação Matemática**. 8ª série. Ensino Fundamental. São Paulo: Atual, 2002.

PIRES, C. M. C. e TRALDI, A. **Implementação de inovações curriculares em matemática no ensino médio: ferramenta de investigação e ferramenta para planejamento**. Submetido ao encontro da Anpedinha. 2009b.

PIRES, C.M.C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações** de Martin Simon. Educação Matemática Pesquisa, v. 11, p. 06-24, 2009a (no prelo).

______. **Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil**. Bolema (Rio Claro), v. 1, p. 1, 2008.

______. **Implementação de inovações curriculares em matemática e embates com concepções, crenças e saberes de professores: breve retrospectiva histórica de um problema a ser enfrentado**. Revista Ibero-americana de Educación Matemática, v. 12, p. 53-72, 2007.

______. **Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da Matemática no currículo visando a superação do binômio máquina e produtividade**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 6, p. 29-61, 2004.

______. **Orientações Curriculares para a Educação Básica: qual o caminho?** Revista de educação PUC-Campinas, Campinas, v. 18, p. 25-34, 2005.

______. **Currículos de Matemática: da organização linear à ideia de rede**. São Paulo, FTD, 2000.

RIBEIRINHA, F. O. F. **Funções Quadráticas: Abordagem Computacional**, p. 1- 7, 2005. Disponível em: <http://www.ccmn.ufrj.br/curso/trabalhos/pdf/matematica-trabalhos/conceitos_tecnologias_funcoes/francisco.pdf>. Acesso em: 12 de Outubro de 2007.

SANTOS, A. **Revisando as funções do 1º grau e do 2º grau com a Interatividade de um Hiperdocumento**, 2005, 117p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – SP, 2005.

SÃO PAULO. Secretária de Estado da Educação. **Jornal do aluno: São Paulo faz a escola** (Ensino Médio 2ª e 3ª série). São Paulo: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, fev/2008, p.42-48.

SILVA, U. A. **Análise da Abordagem de Função Adotada em Livros Didáticos de Matemática da Educação Básica**, 2007, 110p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – SP, 2007.

SIMON, M. A. (1995). **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective**. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

SIMON, M. A. y Tzur, R. (2004). **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.

STEFFE, L. P. (2004). **On the construction of learning trajectories of children: The case of conmensurable fractions**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129-162.

ANEXOS

ANEXO 1: Primeira versão da THA

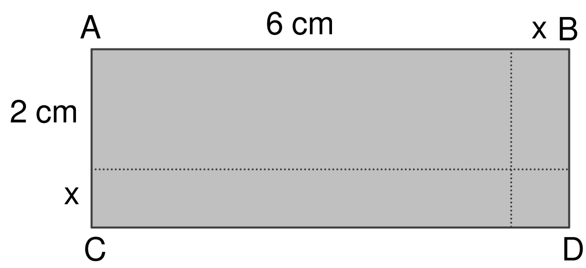
1.ª Parte:

Tempo previsto: 1 aula

Objetivo: Reconhecer a expressão algébrica da função do 2.º grau.

Estratégia: Entregar uma folha para cada dupla de alunos, contendo a 1.ª parte das atividades, e propor para o professo que dê um tempo para que os alunos interpretem a situação proposta e possam representar por meio de uma expressão algébrica a função polinomial do 2.º grau. Em seguida, o professor poderá solicitar que algumas duplas exponham suas respostas no quadro-negro para que ele possa concluir a atividade discutindo com o grupo de estudantes.

Atividade 1.1 A área y do retângulo ABCD da figura é dada em função da medida x:



A função que representa a área y é $(x+2)\cdot(x+6)$

a) Essa função é da forma $y = ax^2 + bx + c$? Em caso afirmativo, determine os valores de a, b e c.

Resolução:

A função que representa a área y = (x + 2). (x + 6)

y = $x^2 + 2x + 6x + 12$

y = $x^2 + 8x + 12$

Essa função é da forma $y = ax^2 + bx + c$, denominada como função do 2.º grau. Logo temos a = 1, b = 8 e c = 12

2.ª Parte:

Tempo previsto: 4 aulas

Objetivos:

- Identificar e construir gráficos de funções polinomiais do 2.º grau;
- Resolver situações-problema envolvendo situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, como Física e Economia;
- Analisar graficamente crescimento e decrescimento;
- Identificar graficamente o valor de máximo ou mínimo.

Estratégia: Esta atividade deverá ser realizada individualmente; cada aluno irá receber uma folha contendo a 2.ª parte da atividade e uma folha de papel quadriculado para a construção dos gráficos. Também serão fornecidas aos alunos calculadoras para facilitar a execução de cálculos no desenvolvimento das atividades. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

Atividade 2.1 Desenhe em seu caderno e descreva como seria a trajetória de uma bola arremessada para uma cesta de basquete.

Resolução:

Nesta questão esperamos que o aluno desenhe uma parábola com a concavidade voltada para baixo, representando dessa maneira a trajetória da bola arremessada.

Atividade 2.2 Supondo que a expressão algébrica que representa a altura h (em metros) de uma bola arremessada para a cesta de basquete em função do tempo t em segundos, é dada por $h = -t^2 + 6t$:

a) Dê alguns valores para t e determine a altura h da bola, e em seguida construa o gráfico em folha de papel quadriculado.

b) Você consegue perceber alguma semelhança entre o seu desenho realizado no exercício anterior e esse gráfico?

c) O gráfico de funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva denominada parábola. Observe o gráfico e responda:

i) a parábola tem concavidade para cima ou para baixo?

ii) Em que instante a bola atinge a altura máxima?

iii) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

Resolução:

a) Para t = 0, teremos $h = -(0)^2 + 6.0 = 0$

Para t = 1, teremos $h = -(1)^2 + 6.1 = -1 + 6 = 5$

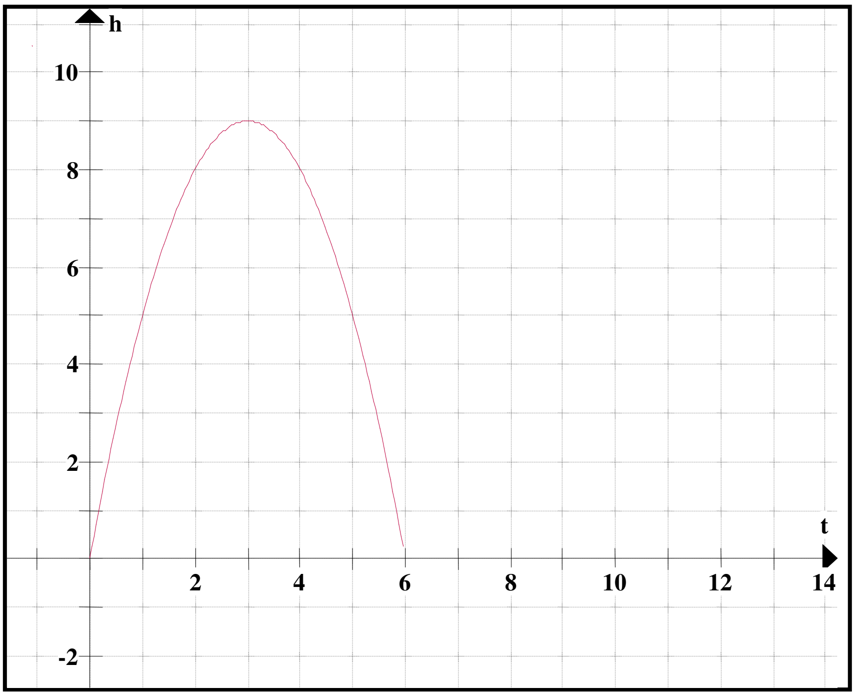
Para t = 2, teremos $h = -(2)^2 + 6.2 = -4 + 12 = 8$

Para t = 3, teremos $h = -(3)^2 + 6.3 = -9 + 18 = 9$

Para t = 4, teremos $h = -(4)^2 + 6.4 = -16 + 24 = 8$

Para t = 5, teremos $h = -(5)^2 + 6.5 = -25 + 30 = 5$

Para t = 6, teremos $h = -(6)^2 + 6.6 = -36 + 36 = 0$



b) Esperamos que o aluno observe que é uma curva semelhante ao seu desenho.

c) i. a parábola tem concavidade voltada para cima.

ii. a bola atinge a altura máxima no instante t = 3 segundos.

iii. a altura máxima atingida pela bola é de 9 metros.

Atividade 2.3 O lucro em reais de uma empresa pela venda diária de x peças, é dado pela função: $L(x) = -x^2 + 14x - 40$.

a) Dê alguns valores para x (quantidade de peças) e com o auxílio de uma calculadora determine os valores do lucro desta empresa (ou prejuízo se L > 0) e em seguida construa o gráfico no plano cartesiano.

b) Qual é o lucro da empresa quando são vendidas 5 peças e 8 peças?

c) Quantas peças devem ser vendidas diariamente para que o lucro seja máximo?

d) Determinem quais são os zeros dessa função, isto é, os valores de x para os quais L = 0. E justifique o que isso significa para a empresa?

e) Para qual intervalo percebemos que o lucro cresce? E para qual intervalo é decrescente?

Resolução:

a) Para x = 4, teremos $L(4) = -(4)^2 + 14.4 - 40 = -16 + 56 - 40 = 0$

Para x = 5, teremos $L(5) = -(5)^2 + 14.5 - 40 = -25 + 70 - 40 = 5$

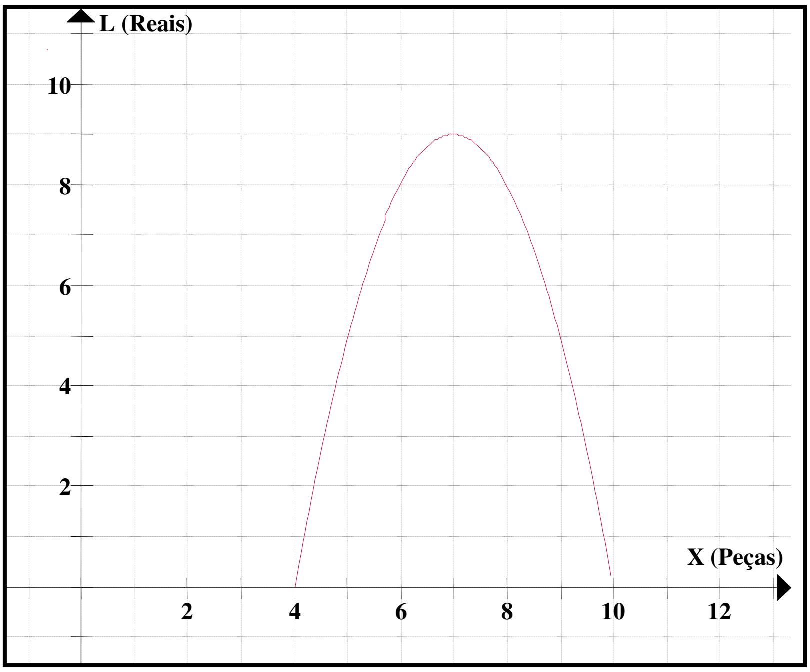
Para x = 6, teremos $L(6) = -(6)^2 + 14.6 - 40 = -36 + 84 - 40 = 8$

Para x = 7, teremos $L(7) = -(7)^2 + 14.7 - 40 = -49 + 98 - 40 = 9$

Para x = 8, teremos $L(8) = -(8)^2 + 14.8 - 40 = -64 + 112 - 40 = 8$

Para x = 9, teremos $L(9) = -(9)^2 + 14.9 - 40 = -81 + 126 - 40 = 5$

Para x = 10, teremos $L(10) = -(10)^2 + 14.10 - 40 = -100 + 140 - 40 = 0$



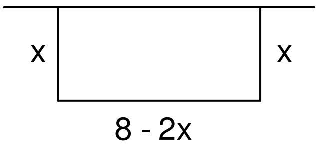
b) Quando são vendidas 5 peças a empresa tem um lucro de R$ 5,00 e quando são vendidas 8 peças a empresa tem um lucro de R$ 8,00.

c) Para a empresa obter um lucro máximo é necessário que venda 7 peças diariamente.

d) Os zeros da função são x = 4 e x = 10, ou seja, quando a empresa produzir 4 peças ou 10 peças não terá nem lucro e nem prejuízo.

e) Podemos perceber que o lucro da empresa cresce ao atingir vendas diárias superiores a 4 peças e decrescem ao atingir vendas diárias superiores a 7 peças.

Atividade 2.4 Deseja-se cercar um canteiro retangular dispondo de 8 metros de tela. O terreno já possui uma parede construída, então será necessário cercar apenas três lados do retângulo como mostra a figura abaixo:



a) Qual é a fórmula que expressa a área desse canteiro em função de x, que é a medida de um dos lados do retângulo?

b) Dê alguns valores para x (medida de um dos lados do retângulo) e construa o gráfico da área do canteiro.

c) Verifique qual deve ser a medida do lado do retângulo para que a área do canteiro seja máxima. E qual é a área máxima?

Resolução:

a) $A = (8 - 2x).x$

$A = -2x^2 + 8x$

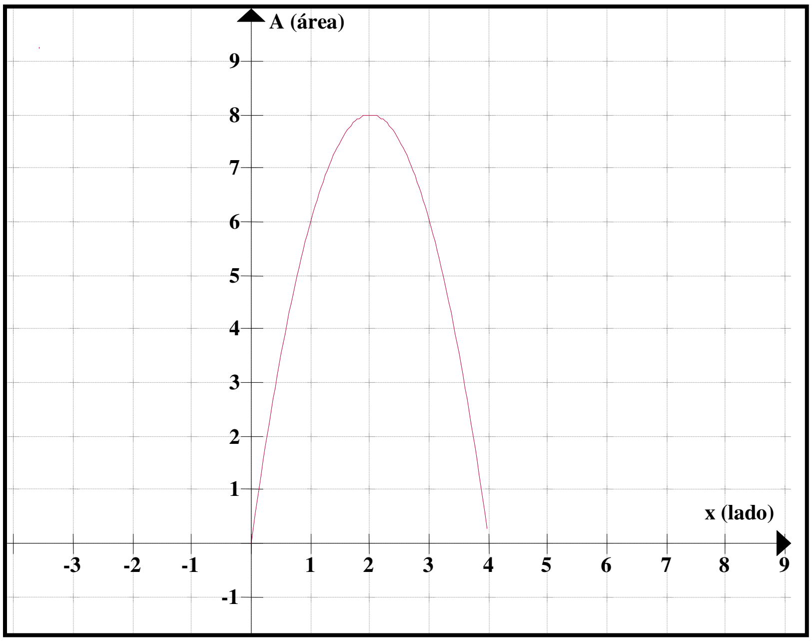
b) Para x = 0, teremos $A = -2.0^2 + 8.0 = 0$

Para x = 1, teremos $A = -2.1^2 + 8.1 = -2 + 8 = 6$

Para x = 2, teremos $A = -2.2^2 + 8.2 = -8 + 16 = 8$

Para x = 3, teremos $A = -2.3^2 + 8.3 = -18 + 24 = 6$

Para x = 4, teremos $A = -2.4^2 + 8.4 = -32 + 32 = 0$



c) Para que a área seja máxima o lado do quadrado deve ter 2 metros. E essa área máxima é de $8m^2$.

Atividade 2.5 Rogério é empresário de um grupo de danças folclóricas; ele está "quebrando a cabeça" para determinar o preço x, em reais, do ingresso para o próximo *show* do grupo (se for alto, ele não conseguirá vender ingressos, e se for baixo, pode ser que ele tenha prejuízo). Com base nos últimos espetáculos realizados pelo grupo, ele concluiu que o lucro L (ou prejuízo, se L < 0) de cada espetáculo, em reais, é dado por $l = -x^2 + 80x - 700$.

X	L= - x^2 + 80x – 700
10	L= -(10)^2 +80.10 -700 = 0
20	L= -(20)^2 +80.20 -700 = 500
30	L= -(30)^2 +80.30 -700 = 800
40	L= -(40)^2 +80.40 -700 = 900
50	L= -(50)^2 +80.50 -700 = 800
60	L= -(60)^2 +80.60 -700 = 500
70	L= -(70)^2 +80.70 -700 = 0

Responda as seguintes questões:

a) Qual é o lucro se o ingresso para o *show* for vendido a R$ 20,00?

b) Pode-se afirmar que o empresário tem prejuízo quando o valor do ingresso for um valor maior que R$ 40,00? Explique.

c) Para qual intervalo percebemos que o lucro cresce? E para qual intervalo é decrescente?

d) Qual é o valor do ingresso para que o empresário tenha lucro máximo? E qual é esse lucro?

e) O que acontece quando os ingressos são vendidos a um valor maior que R$ 70,00?

f) Qual é o lucro quando os ingressos forem vendidos a R$ 10,00 ou a R$ 70,00? Procure argumentos para justificar sua resposta.

Resolução:

a) Se o ingresso for vendido a R$ 20,00, o empresário terá um lucro de R$ 500,00.

b) Não podemos afirmar que o empresário terá prejuízo, mas sim que seu lucro irá decrescer ao vender o ingresso a um valor maior que R$ 40,00, e só passará a ter prejuízo quando o ingresso for vendido por um valor acima de R$ 70,00.

c) Percebemos que o lucro cresce quando os ingressos são vendidos de R$ 10,00 a R$ 40,00 e entre R$ 40,00 a R$ 70,00 o lucro decresce.

d) Para obter lucro máximo é necessário que o valor do ingresso seja de R$ 40,00 e terá como lucro R$ 900,00 por show.

e) O empresário terá prejuízo.

f) Quando os ingressos forem vendidos a R$ 10,00 ou a R$ 70,00 o empresário não terá nem lucro e nem prejuízo.

3.ª Parte:

Tempo previsto: 2 aulas

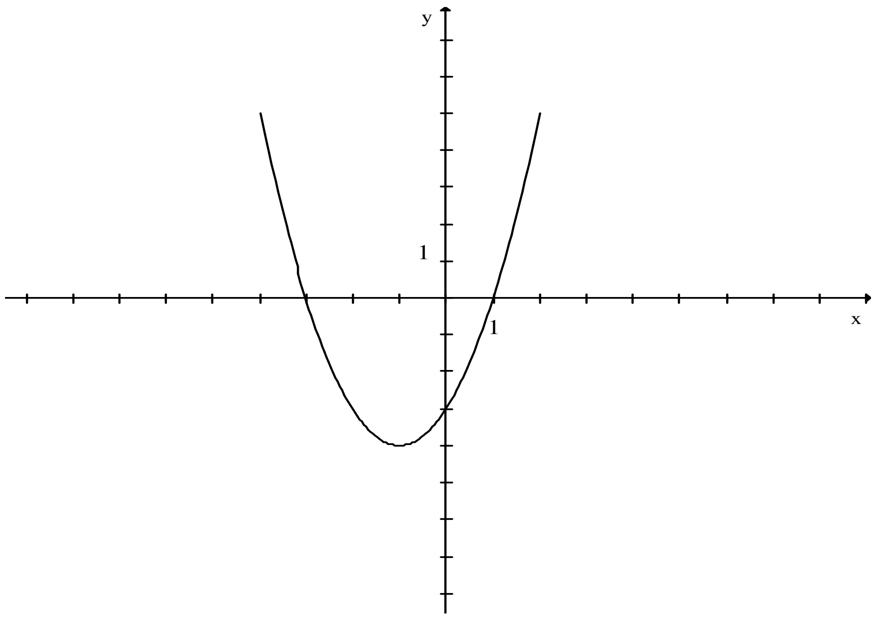
Objetivos: Determinar a ordenada do vértice sem a utilização da fórmula, a partir da abscissa do vértice encontrada por meio do eixo de simetria no gráfico.

Estratégia: Essa atividade poderá ser realizada individualmente. Antes de iniciar a atividade, o professor deverá questionar os alunos sobre seus conhecimentos em relação ao eixo de simetria e em relação ao vértice da parábola e concluir com eles que o eixo de simetria na parábola é uma reta vertical paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo vértice da parábola e, que o vértice da parábola é o ponto do gráfico de uma função de 2.º grau, tal que a função atinge o maior valor (ponto máximo) ou o menor valor (ponto mínimo).

Atividade 3.1 O ponto em que a parábola encontra seu eixo de simetria tem o nome de Vértice da parábola. Observe as parábolas, desenhe o eixo de simetria e determine a abscissa e substitua na função para determinar a ordenada do vértice e em seguida complete o que se pede:

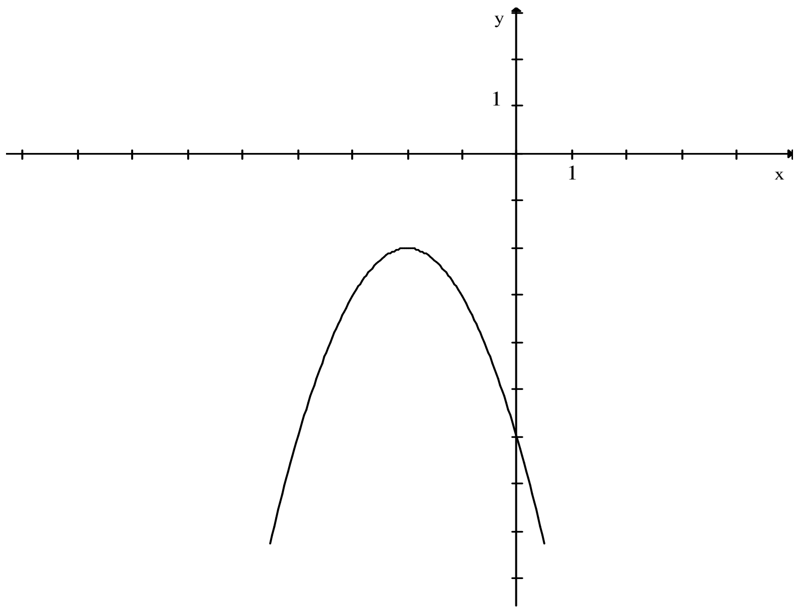
a) $y = x^2 + 2x - 3$

Vértice da parábola V(..... , ...).



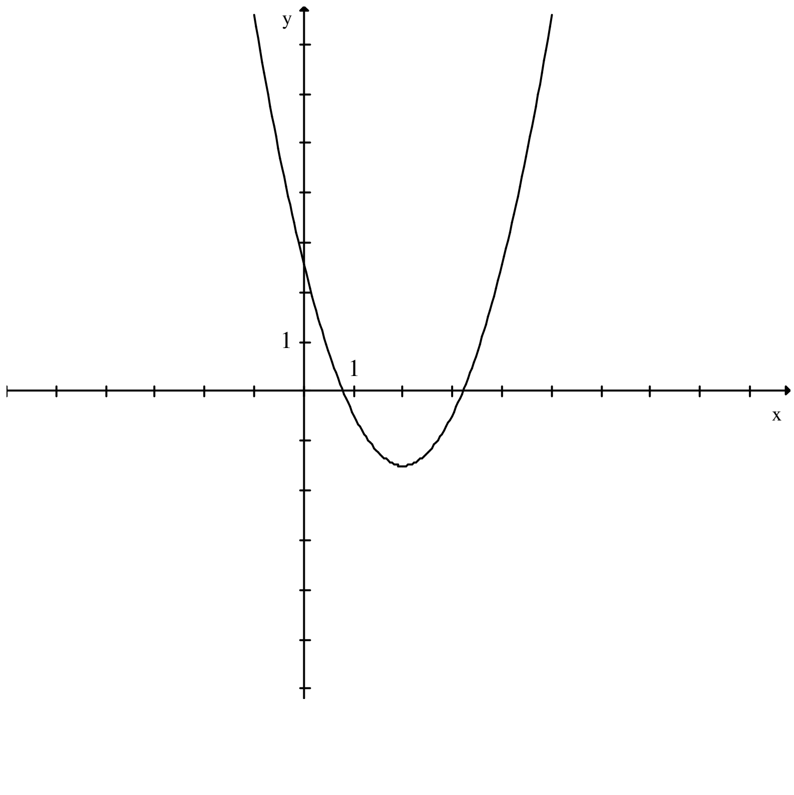
b) $y = -x^2 - 4x - 6$

Vértice da parábola V(..... , ...).



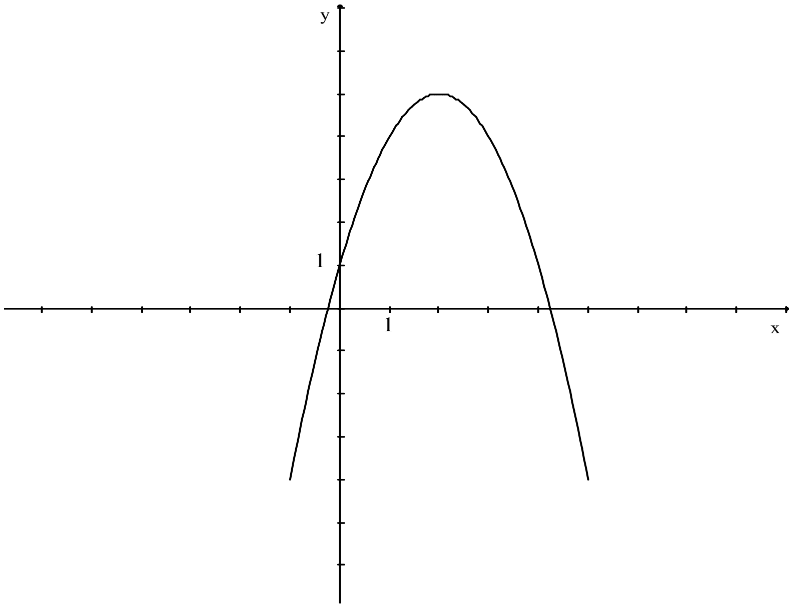
c) $y = x^2 - 4x + 2{,}5$

Vértice da parábola V(..... , ...).



d) $y = -x^2 + 4x + 1$

Vértice da parábola V(..... , ...).



Resolução:

a) x = -1

$y = (-1)^2 + 2.(-1) - 3 = +1 - 2 - 3 = -4$

V (-1, -4).

b) x = -2

$y = -(-2)^2 - 4.(-2) - 6 = -4 + 8 - 6 = -2$

V (-2, -2).

c) x = 2

$y = 2^2 - 4.2 + 2{,}5 = 4 - 8 + 2{,}5 = -1{,}5$

V (2, -1,5).

d) x = 2

$y = -2^2 + 4.2 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$

V (2, 5).

4.ª Parte:

Tempo Previsto: 4 aulas.

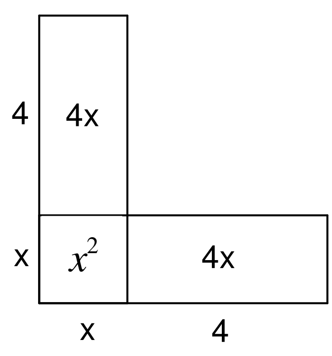
Objetivos: Relacionar a forma desenvolvida de uma função quadrática com a forma canônica pelo método de completar quadrados. Reconhecer a forma canônica da função quadrática e relacionar a forma canônica com as raízes e o vértice da parábola.

Estratégia: As atividades 4.1, 4.2 e 4.3 deverão ser realizadas em dupla para que os alunos possam levantar hipóteses e argumentar, e o professor deverá dar um tempo para que eles interpretem a situação proposta e apresentem as estratégias que utilizaram para escrever a forma canônica pelo método de completar quadrados. Em seguida, o professor poderá propor que algumas duplas exponham suas respostas no quadro-negro para que ele possa concluir a atividade discutindo com o grupo de estudantes. Nas questões 4.4, 4.5 e 4.6, o professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

Os Babilônios no século IX já conseguiam trabalhar com equações do 2.º grau pelo método geométrico de completar quadrados.

Atividade 4.1 Observe e complete o que se pede no processo realizado geometricamente, pelo método babilônio e determine a solução da equação $x^2 + 8x = 9$.

Fazendo a representação geométrica, temos: $x^2 + 8x = 9 \Rightarrow x^2 + 4x + 4x = 9$.



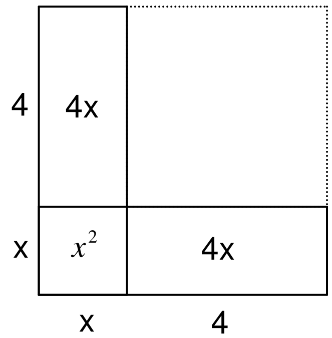
Temos um quadrado pequeno de lado x, e a área é x^2*.*

Temos dois retângulos de lados 4 e x, e a área de cada retângulo é 4x.

A soma das áreas dessas três figuras é $x^2 + 4x + 4x$*.*

A área de $x^2 + 4x + 4x$ *é igual a 9, chamaremos de área L.*

Completando a figura de L, de modo a obter um quadrado maior, teremos a figura abaixo. Observe e responda:



a) Qual é a área do quadrado pontilhado?

b) Some as áreas das quatro partes do quadrado maior.

c) Determine a medida do lado do quadrado maior.

d) Escreva a expressão que fornece a área do quadrado maior, a partir da multiplicação dos lados.

e) Verifique se são iguais as expressões algébricas obtidas nos itens b e d.

f) Calcule a área do quadrado maior somando a área L da figura com a área do quadrado pontilhado da figura.

g) Se você já sabe o valor da área do quadrado maior, então responda: Qual o valor do lado do quadrado maior? E Quanto vale x?

Resolução:

a) 4 x 4 = 16

b) $x^2 + 4x + 4x + 16$

c) x + 4

d) $(x+4).(x+4) = x^2 + 4x + 4x + 16$

e) As expressões algébricas contidas nos itens b e d são iguais.

f) $x^2 + 4x + 4x = 9$

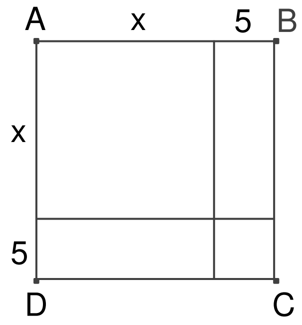
$x^2 + 4x + 4x + 16 = 9 + 16$

$x^2 + 4x + 4x + 16 = 25$

Logo a área do quadrado maior é 25.

g) O lado do quadrado maior é igual a 5, e o valor de x é igual a 1.

Atividade 4.2 A área do quadrado ABCD abaixo é igual a 121 cm^2. Determine a área das quatro partes do quadrado ABCD e calcule o valor de x.



Resolução:

$x^2 + 5x + 5x + 25 = 121$

O lado do quadrado é igual a 11, e o valor de x é igual a 6.

Esse processo não é geral, pois ele não se aplica, por exemplo, a equações incompletas e, além disso, obtivemos apenas a raiz positiva da equação, pois x representa o lado do quadrado. Uma outra forma de encontrar a solução da equação $x^2 + 8x = 9$, sem fazer a representação geométrica é a seguinte:

Atividade 4.3. $x^2 + 2.4x = 9$

x^2 (é o quadrado do 1.º termo x)

2. 4x (é duas vezes o 1.º pelo 2.º termo $\Rightarrow$ então o 1.º termo é x e o 2.º termo é 4)

O que está faltando é o quadrado do 2.º termo. O quadrado do 2.º termo é:

Então, completando o quadrado teremos: $x^2 + 2.4x + ... = 9 + ...$

Portanto, fatorando o trinômio teremos: $(x + ...)^2 = ...$

A partir daí, calcule e obtenha os valores de x.

Resolução:

$x^2 + 8x = 9$

$x^2 + 2.4x = 9$

1º termo é: x

2º termo é: 4

O quadrado do 2º termo é: 16

Então teremos: $x^2 + 8x + 16 = 9 + 16$

$$(x+4)^2 = 25$$

$$(x+4) = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5 - 4$$

$x' = 5 - 4 = 1$ e x" = -5 -4 = -9

Atividade 4.4 Determine os zeros da função, completando quadrados pelo método algébrico:

a) $x^2 + 6x = -5$

b) $x^2 + 10x = 39$

c) $x^2 + 4x = 5$

e) $3x^2 + 2x = 1$

Resolução:

a) $x^2 + 6x = -5$

$x^2 + 2.3x = -5$

1º termo é: x

2º termo é: 3

O quadrado do 2º termo é: 9

Então teremos: $x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$

$$(x+3)^2 = 4$$

$$(x+3) = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = -3 \pm 2$$

x' = -3 + 2 = -1 e x" = -3 -2 = -5

b) $x^2 + 10x = 39$

$x^2 + 2.5x = 39$

1º termo é: x

2º termo é: 5

O quadrado do 2º termo é: 25

Então teremos: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$

$(x+5)^2 = 64$

$(x+5) = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = -5 \pm 8$

x' = -5 + 8 = 3 e x" = -5 -8 = -13

c) $x^2 + 4x = 5$

$x^2 + 2.2x = 5$

1º termo é: x

2º termo é: 2

O quadrado do 2º termo é 4

Então teremos: $x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$

$(x+2)^2 = 9$

$(x+2) = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 - 2$

$x' = 3 - 2 = 1$ e x" = -3 -2 = -5

d) $3x^2 + 2x = 1$ Dividindo ambos os membros por 3, teremos:

$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 + 2.\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$

1º termo é: x

2º termo é: $\frac{1}{3}$

O quadrado do 2º termo é: $\frac{1}{9}$

Então teremos: $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$(x + \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}$

$(x + \frac{1}{3}) = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$

$x' = \frac{1}{3}$ e $x'' = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$

Três milênios mais tarde, no século XII, o matemático hindu Bhaskara, utilizando resultados já conhecidos na Índia, resolveu a equação do 2.º grau empregando o mesmo raciocínio dos babilônios, deixando a fórmula que todos nós conhecemos.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x = -\frac{c}{a}$$

1º termo é igual a: x

2º termo é igual a: $\frac{b}{2a}$

O quadrado do 2º termo é: $\frac{b^2}{4a^2}$

Então teremos: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Completando os quadrados iremos relacionar a forma desenvolvida da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a forma canônica, que é dada por:

$$\boxed{f(x) = a.(x - m)^2 + n}$$

Atividade 4.5 Observe e complete o que se pede no processo do método de completar quadrados:

$$x^2 - 4x - 6 = (x^2 - 4x) - 6$$

Complete o quadrado da expressão $(x^2 - 4x)$, temos que:

x^2 (é o quadrado do 1.º termo, que é:.....).

2. 2x (é duas vezes o 1.º pelo 2.º termo $\Rightarrow$ então o 1.º termo é ... e o 2.º termo é ...).

O que está faltando é o quadrado do 2.º termo. O quadrado do 2.º termo é:.....

Então, completando o quadrado teremos: $(x^2 - 2.2x + ...) - ...... - 6$.

Portanto, fatorando o trinômio teremos: $(x - .....)^2 - ......$, logo m = ... e n = ...

Resolução:

Complete o quadrado da expressão $(x^2 - 4x)$, temos que:

x^2 (é o quadrado do 1.º termo, que é: **x**).

2. 2x (é duas vezes o 1.º pelo 2.º termo $\Rightarrow$ então o 1.º termo é: **x** e o 2.º termo é: **2**).

O que está faltando é o quadrado do 2.º termo. O quadrado do 2.º termo é: **4.**

Então, completando o quadrado teremos: $(x^2 - 2.2x + 4) - 4 - 6$.

Portanto, fatorando o trinômio teremos: $(x-2)^2 - 10$, logo **m = 2** e **n = -10**.

Atividade 4.6. Escreva na forma canônica as seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

c) $y = 2x^2 - 4x + 2$

Resolução:

a) $y = x^2 + 2x - 3$

$y = (x^2 + 2x) - 3$

1.º termo é igual a: x

2.º termo é igual a: 1

O quadrado do 2.º termo é 1. Então podemos escrever a expressão na forma canônica como $y = (x^2 + 2.1x + 1) - 1 - 3 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 4$.

b) $y = x^2 - 6x + 5$

$y = (x^2 - 6x) + 5$

1.º termo é igual a: x

2.º termo é igual a: 3

O quadrado do 2.º termo é 9. Então podemos escrever a expressão na forma canônica como $y = (x^2 - 2.3x + 9) - 9 + 5 \Rightarrow y = (x-3)^2 - 4$.

c) $y = 2x^2 - 4x + 2$

$y = 2.(x^2 - 2x + 1)$

$y = 2.(x^2 - 2.1x + 1)$

1.º termo é igual a: x

2.º termo é igual a: 1

O quadrado do 2.º termo é 1. Então podemos escrever a expressão na forma canônica como $y = 2.(x-1)^2$.

Atividade 4.7 Dada a função polinomial do 2.º grau $f(x) = x^2 + 4x + 3$, determine:

a) As coordenadas do vértice da parábola;

b) A forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + n$, e obtenha os valores de *m* e *n*

c) Relacione *m* e *n* com as coordenadas do vértice.

d) Determine os pontos onde a parábola corta os eixos coordenados.

e) Esboce o gráfico dessa função.

Resolução:

$f(x) = x^2 + 4x + 3$

a) $x_v = -\frac{4}{2.1} = -2$ e $y_v = \frac{-(4^2 - 4.1.3)}{4.1} = \frac{-(16-12)}{4} = -\frac{4}{4} = -1$

V (-2, -1).

b) $y = x^2 + 4x + 3$

$y = (x^2 + 4x) + 3$

1.º termo é igual a: x

2.º termo é igual a: 2

O quadrado do 2.º termo é 4. Então podemos escrever a expressão na forma canônica como $y = (x^2 + 2.2x + 4) - 4 + 3 \quad \Rightarrow \quad y = (x+2)^2 - 1$.

c) m = -2, é a abscissa do vértice da parábola.

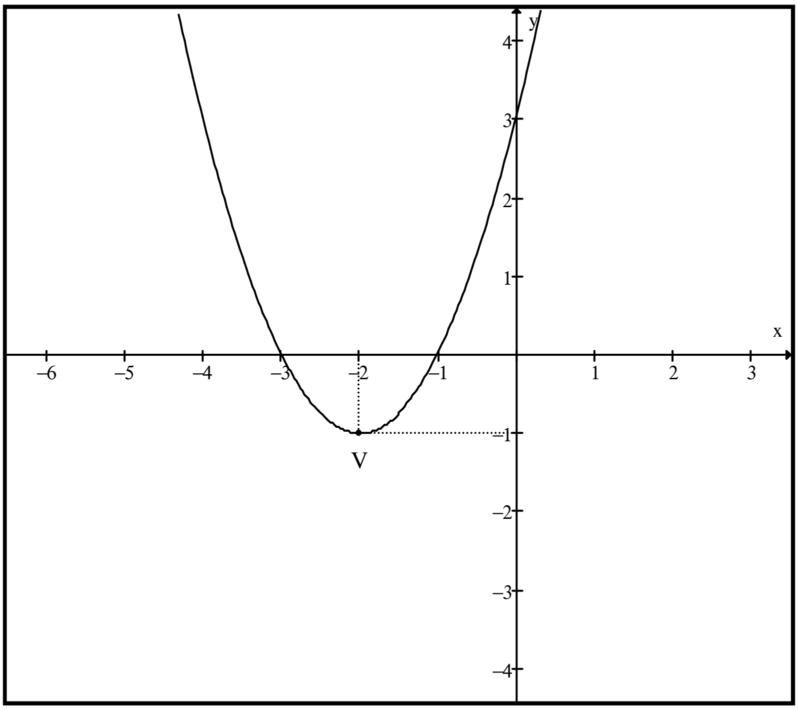
n = -1, é a ordenada do vértice da parábola.

d) $(x+2)^2 - 1 = 0$

$(x+2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x+2) = \pm\sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 - 2$

$x' = 1 - 2 = -1$ e $x'' = -1 - 2 = -3$

e)



Atividade 4.8 Determine as coordenadas do vértice em cada caso:

a) $f(x) = 2.(x-1)^2 + 1$

b) $y = x^2 - 2x - 2$

c) $y = -2(x-3)^2 - \dfrac{1}{2}$

Resolução:

a) V (1, 1)

b) $(x^2 - 2x) - 2 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 2.1.x + 1) - 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 - 3$

Logo, V (1, -3).

c) V (3, -1/2).

5.ª Parte[10]:

Para realizar essa atividade será necessário usar o *software* Winplot (*software* gratuito e de fácil manuseio).

O aluno precisará traçar gráficos, clicando na seguinte seqüência:

Janela $\Rightarrow$ 2-dim $\Rightarrow$ Equação $\Rightarrow$ 1. Explícita

Aparecerá uma janela na forma:

F(x) = ☐

Onde deverá ser digitada a expressão da função.

Exemplo: $f(x) = x^2 + 10x + 25$, deverá ser digitado: x^2 +10x +25

Recomendamos que o professor se limite em explicar apenas os recursos do *software* necessários para a realização das atividades.

Tempo Previsto: 2 aulas

Objetivos: Compreender as translações que ocorrem no gráfico quando se variam os coeficientes na representação algébrica.

Estratégia: Esta atividade deverá ser realizada em dupla. O professor deve atuar como um orientador das atividades, estimulando que os alunos tirem suas próprias conclusões, e é fundamental que o professor oriente os alunos na construção e na observação de cada um dos gráficos, ressaltando suas principais características. O professor deve ainda trazer periodicamente as conclusões das duplas para o debate do grupo como um todo.

Atividade 5.1 Trace o gráfico da função $f(x) = x^2$ e responda:

a) Qual é a raiz da função?

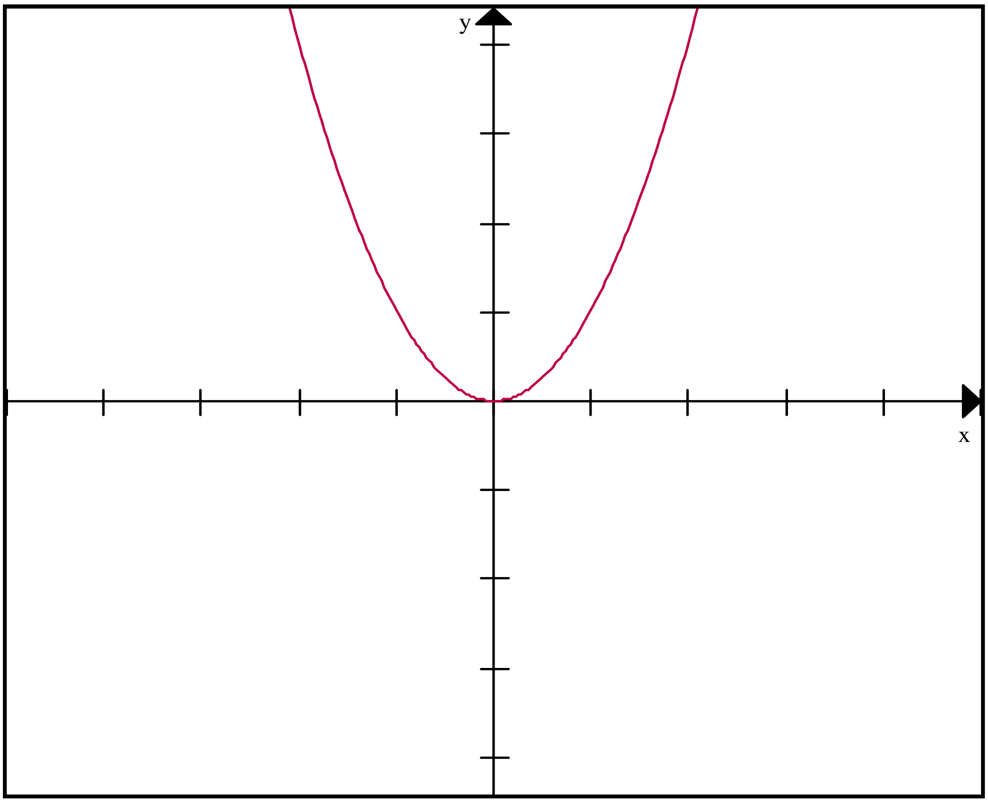
b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

c) O gráfico apresenta simetria em relação algum eixo? Qual?

Resolução:

---

[10] Adaptação do artigo Funções Quadráticas: Abordagem Computacional. Francisco Orlando Fernandes Ribeirinha. 2005.



a) a raiz da função é igual a zero.

b) V (0,0)

c) O gráfico apresenta simetria em relação ao eixo das ordenadas.

Atividade 5.2 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$, $f_3(x) = 2x^2$, $f_4(x) = -2x^2$, $f_5(x) = \frac{1}{3}x^2$ e $f_6(x) = -\frac{1}{3}x^2$:

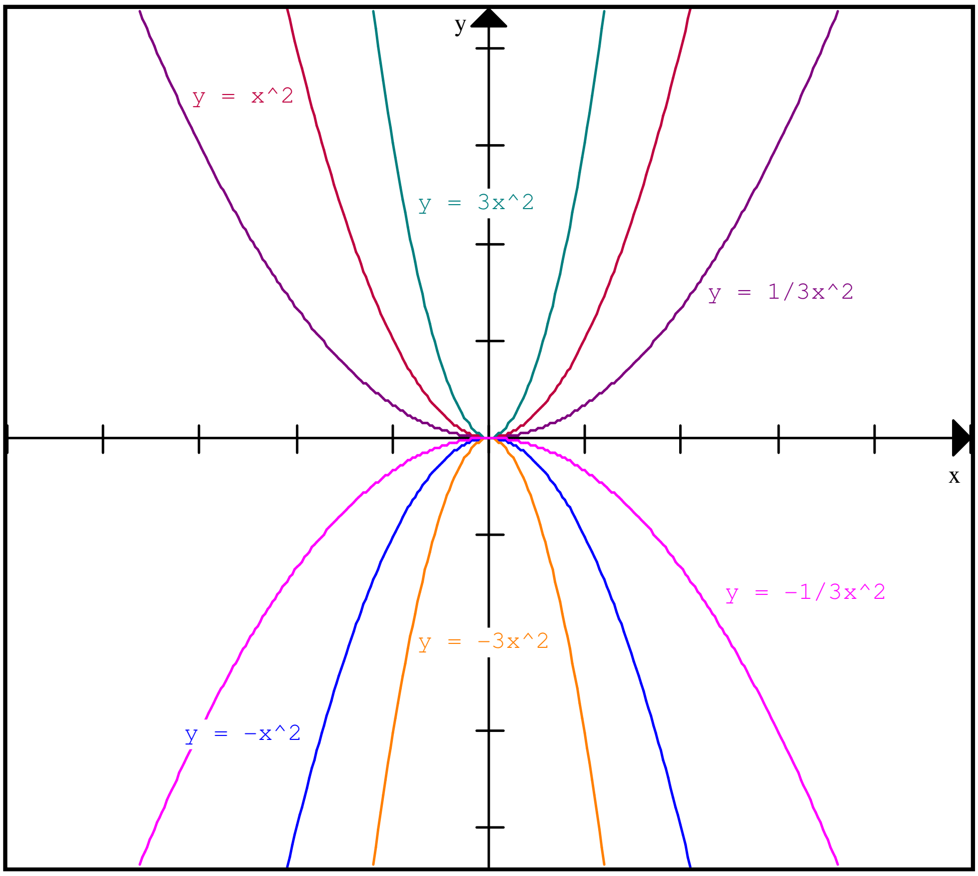
a) Quais são as funções cujos gráficos são parábolas com concavidade voltada para baixo?

b) Quais são as funções cujos gráficos são parábolas com concavidade voltada para cima?

c) De que forma o coeficiente *a* da função $f(x) = ax^2$ determina a concavidade da parábola?

d) Os gráficos das funções $f(x) = ax^2$ e $f(x) = -ax^2$, com $a \neq 0$, mostram uma reflexão em relação a que eixo?

Resolução:



a) $f_2(x) = -x^2$, $f_4(x) = -2x^2$, $f_6(x) = -1/3x^2$.

b) $f_1(x) = x^2$, $f_3(x) = 2x^2$, $f_5(x) = 1/3x^2$.

c) Se a for um número maior que zero, a concavidade será voltada para cima. Se a for um número menor que zero, a concavidade será voltada para baixo.

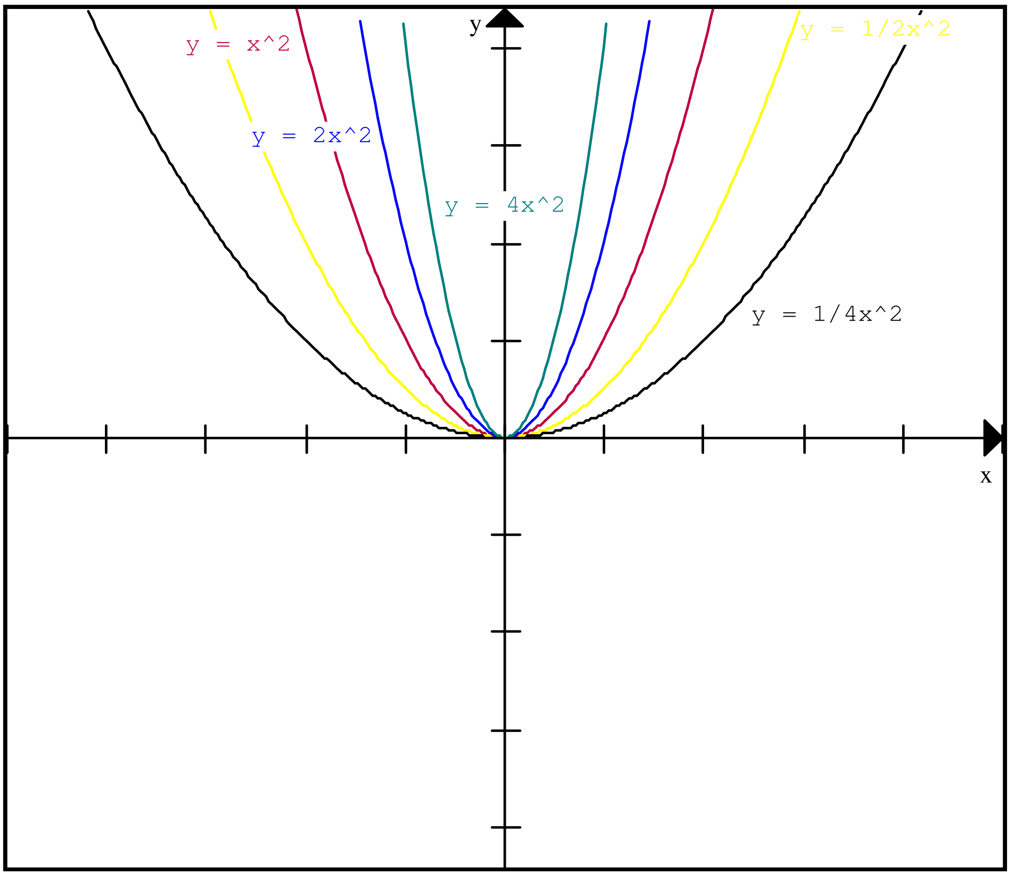
d) Reflexão em relação ao eixo das abscissas.

Atividade 5.3 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$, $f_3(x) = 4x^2$, $f_4(x) = \frac{1}{2}x^2$, e $f_5(x) = \frac{1}{4}x^2$, e complete:

a) Aumentando o módulo de *a*, a abertura da parábola____________(aumenta ou diminui).

b) Diminuindo o módulo de *a*, a abertura da parábola _____________(aumenta ou diminui).

Resolução:



a) Diminui

b) Aumenta

Atividade 5.4 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = 2x^2$, $f_2(x) = 2x^2 + 1$, $f_3(x) = 2x^2 - 2$:

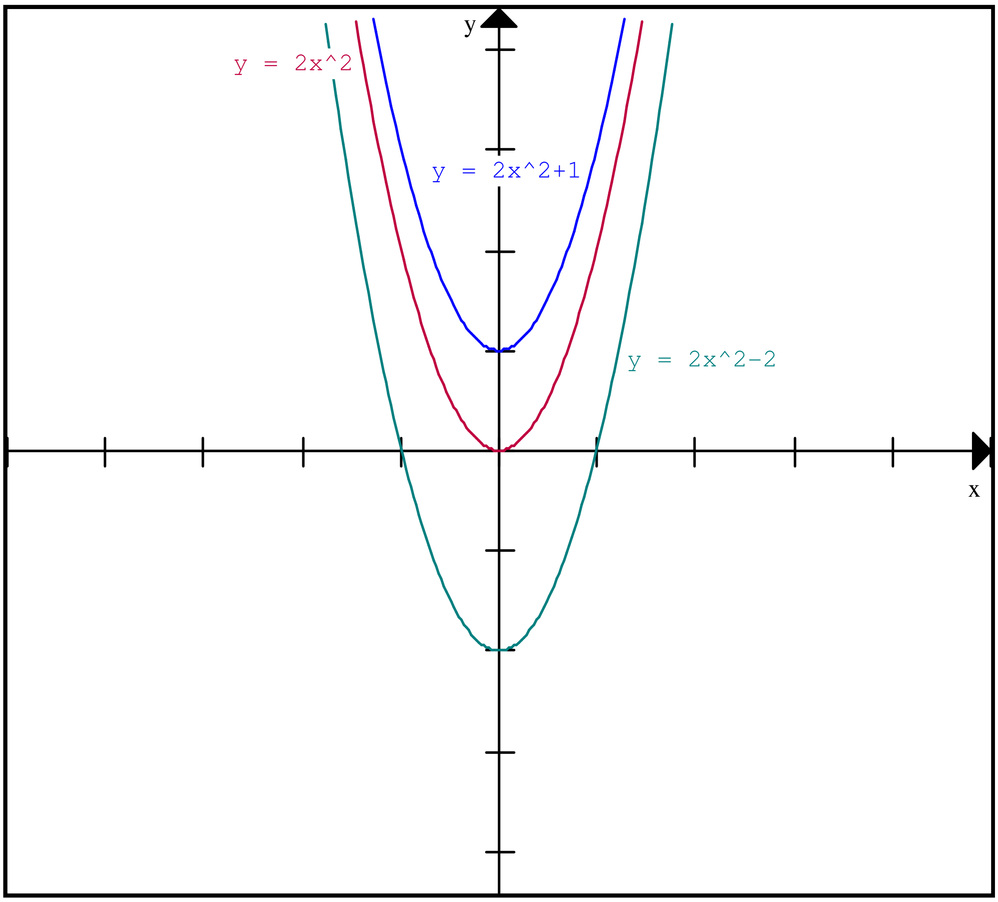
a) Que coeficiente é diferente nas três funções: a, b ou c?

b) Em que ponto a parábola intercepta o eixo y na função $f_1(x)$, $f_2(x)$ e na $f_3(x)$? Qual o significado da ordenada desse ponto?

c) Comparando o gráfico de $f_2(x) = 2x^2 + 1$ com o gráfico de $f_1\ (x) = 2x^2$, observa-se uma translação ____________(horizontal ou vertical)? De _____ unidade, para _______.

d) Comparando o gráfico de $f_3(x) = 2x^2 - 2$ com o gráfico de $f_1\ (x) = 2x^2$, observa-se uma translação ____________(horizontal ou vertical)? De _______ unidades, para ______.

Resolução:



a) O coeficiente c é diferente nas três funções.

b) A função $f_1(x)$ intercepta o eixo das ordenadas no y = 0. A função $f_2(x)$ intercepta o eixo das ordenadas no y = 1. E a função $f_3(x)$ intercepta o eixo das ordenadas no y = -2. A ordenada desses pontos é o coeficiente c de cada função.

c) Translação vertical de uma unidade para cima.

d) Translação vertical de duas unidades para baixo.

Atividade 5.5 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x+3)^2$, $f_3(x) = (x-2)^2$.

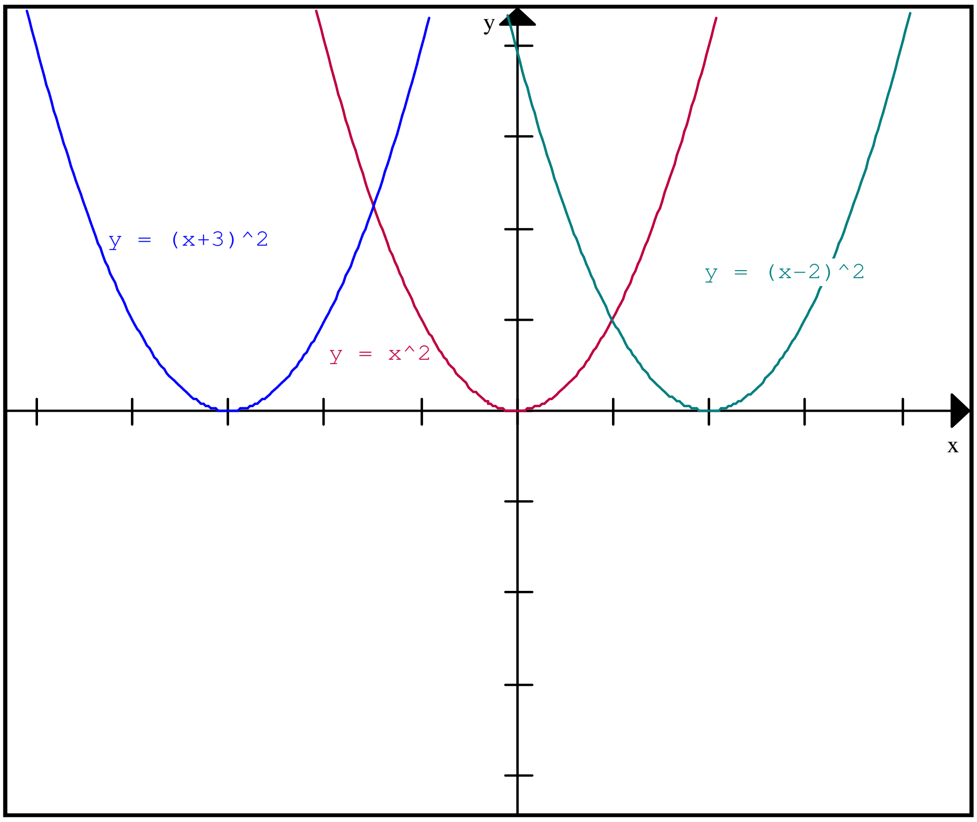
a) Quais são as raízes das funções f_1, f_2 e f_3?

b) Quais são os vértices das funções f_2 e f_3?

c) Comparando o gráfico de $f_2(x) = (x+3)^2$ com o gráfico de $f_1(x) = x^2$, observa-se uma translação horizontal ou vertical? De quantas unidades? Para que lado?

d) Comparando o gráfico de $f_3(x) = (x-2)^2$ com o gráfico de $f_1(x) = x^2$, observa-se uma translação horizontal ou vertical? De quantas unidades? Para que lado?

Resolução:



a) A raiz de f_1 é x = 0. A raiz de f_2 é x = -3 e a raiz de f_3 é x =+2.

b) O vértice da função f_2 é V(-3, 0), e o vértice da função f_3 é V(2, 0).

c) Translação horizontal de três unidades para a esquerda.

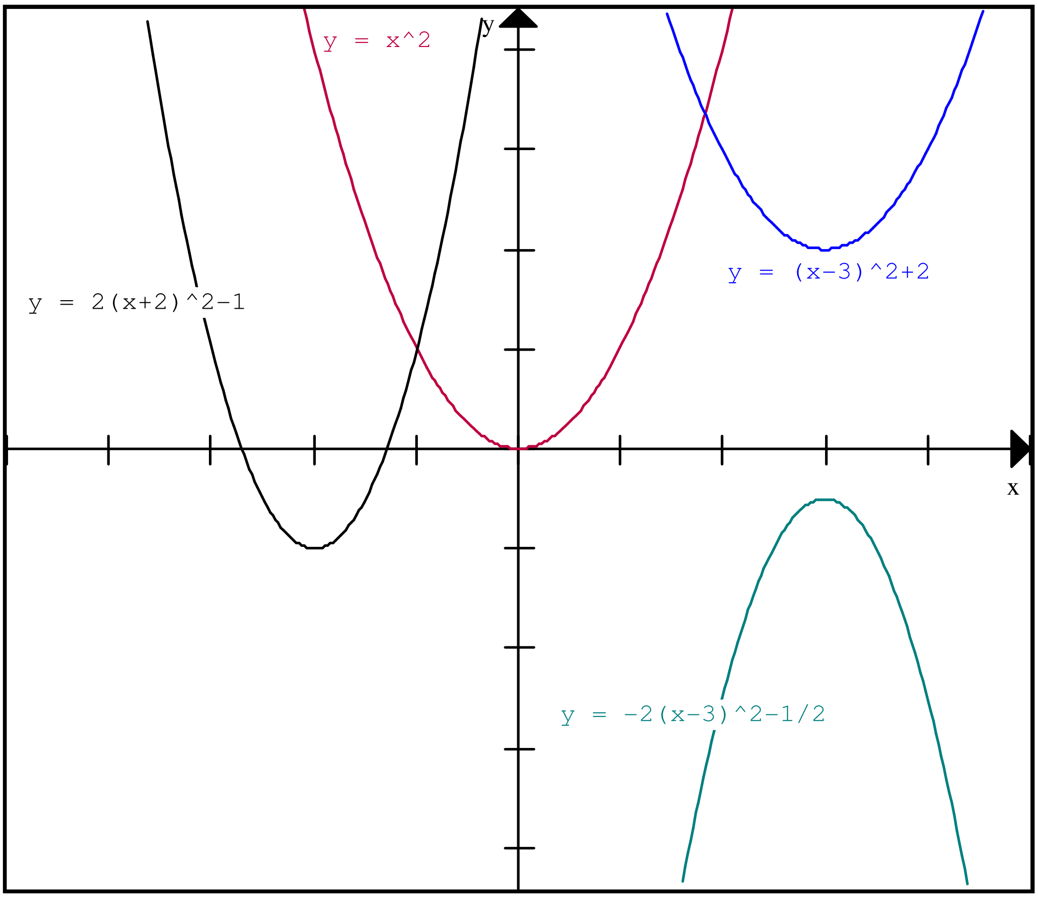
d) Translação horizontal de duas unidades para a direita.

Atividade 5.6 Trace, numa mesma tela, os gráficos das funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = (x-3)^2 + 2$, $f_3(x) = -2(x-3)^2 - \frac{1}{2}$ e $f_4(x) = 2(x+2)^2 - 1$.

a) Determine o vértice de f_1 , f_2, f_3 e f_4.

b) Comparando o gráfico de $f_2(x) = (x-3)^2 + 2$ com o gráfico de $f_1(x) = x^2$, observa-se uma translação ____________ de _______ unidades para ___________ e uma translação___________ de _______ unidades para _____________.

Resolução:



a) $f_1 \Rightarrow$ V(0, 0), $f_2 \Rightarrow$ V(3, 2), $f_3 \Rightarrow$ V$\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, $f_4 \Rightarrow$ V(-2, -1).

b) Translação horizontal de três unidades para a direita e uma translação vertical de duas unidades para cima.

ANEXO 2: Roteiro para a entrevista dos professores

1) Sexo: (   ) Masculino   (   ) Feminino

2) Idade:

(   ) de 21 a 30 anos

(   ) de 31 a 40 anos

(   ) de 41 a 50 anos

(   ) acima de 50 anos

3) Há quanto tempo leciona Matemática?

(   ) de 1 a 4 anos

(   ) de 5 a 9 anos

(   ) de 10 a 20 anos

(   ) mais de 20 anos

4) Em que grau(s) de ensino leciona?

(   ) Ensino Fundamental II

(   ) Ensino Médio

(   ) Ensino Superior

5) Em qual(is) escola(s) leciona?

(   ) Municipal

(   ) Estadual

(   ) Particular

6) Qual sua formação acadêmica?

(   ) Graduação

(   ) Extensão

(   ) Aperfeiçoamento

(   ) Especialização

(   ) Mestrado

(   ) Doutorado

7) Levando em consideração a sua experiência e o seu conhecimento, como você abordaria o ensino de funções do 2.º grau de modo a reforçar o entendimento e aprendizado por parte dos alunos no Ensino Médio?

8) No momento de interpretar o gráfico de uma função do 2.º grau, você costuma ressaltar para os alunos suas principais características?

( ) Sim. Quais?

( ) Não.

9) Você tem conhecimento de algum software que trata de construção de gráficos?

( ) Sim. Qual(is)?

( ) Não

10) Já trabalhou com alguma atividade que envolvesse seus alunos com *softwares* de construção de gráficos?

11) Na sua opinião um software pode ajudar o aluno a entender melhor um gráfico?

12) Você costuma contextualizar com a função do 2.º grau?

ANEXO 3: Roteiro de observação do desenvolvimento da trajetória

Professor Aplicador:
Atividade:
N.º de aulas utilizadas:

Dificuldades que o professor encontrou para desenvolver os conteúdos/atividades em sala de aula com os alunos.

Em qual parte da atividade foi necessária a intervenção do professor? Como realizou essa intervenção?

Essa atividade despertou o interesse dos alunos?

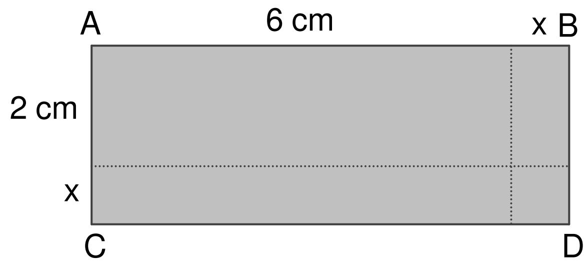
Os alunos apresentaram dificuldades para realizar as atividades? Quais?

O que o professor mudaria nessa atividade?

O professor está de acordo com a metodologia que o pesquisador sugeriu? Dê sugestões.

ANEXO 4: Relatório de observação das aulas do Professor Gabriel

Parte I – Atividade 1:



Professor Gabriel: Quanto mede cada um dos lados deste retângulo? Quanto mede o lado maior?

Aluno: 6.

Professor Gabriel: Não 6 é apenas esse pedaço, quanto mede o lado todo? Mede 6 + x, e quanto mede o outro lado do retângulo?

Aluno: 2 + X.

Professor Gabriel: Certo. O exercício pede para calcular a área do retângulo, como a gente calcula a área do retângulo? Qual é a fórmula, vocês lembram disso? O que temos que fazer?

Aluno: Nós temos que multiplicar os lados.

Professor Gabriel: Isso, para calcular a área deste retângulo temos que multiplicar a base vezes à altura do retângulo. Então a área deste retângulo vai ser o que, lado vezes lado, quanto mede os lados?

Aluno: (6+x).(2+x)

Aluno: Só que aqui na apostila está trocado a ordem, é a mesma coisa professor?

Professor Gabriel: Isso é a mesma coisa, mas vamos colocar igual ao da apostila de vocês (x+2).(x+6), a ordem não vai alterar em nada.

Professor Gabriel: Então fazendo essa multiplicação encontraremos uma expressão que nós dará a área deste retângulo em função da variável x.

Professor Gabriel: Então continuando, isso é o que está na apostila, a função que representa a área y é (x+2).(x+6), então vamos para a 1.ª pergunta. Essa função é da forma $y = ax^2 + bx + c$? Em caso afirmativo, determine os valores de a, b e c. Então que tipo de função é essa? Vocês lembram que tipo de função é essa?

Alunos: É uma função do 2.º grau.

Professor Gabriel: Isso, é uma função do 2.º grau. As funções do 2.º grau têm esse formato geral, em que o a, b e c são os coeficientes da função.

Professor Gabriel: Vocês acham que a área deste retângulo será uma expressão desse tipo? O que a gente deveria fazer para saber se a área deste retângulo é uma expressão deste tipo aqui, que tem o formato de uma função do 2.º grau?

Professor Gabriel: Dá para melhorar essa expressão (x+2).(x+6), o que pode ser feito aqui?

Aluna: Você faz... (a aluna fazia movimentos semicirculares com a mão, querendo se expressar).

Professor Gabriel: Tem uma operação aí, não tem?

Aluno: Tem uma multiplicação.

Aluna: Multiplica um por todos.

Professor Gabriel: Isso é uma propriedade. Qual é a propriedade da multiplicação que a gente usa?

Aluna: Distributiva.

Professor Gabriel: Distributiva, isso muito bem.

Professor Gabriel: Tentem fazer e vejam se a área deste retângulo é uma expressão deste tipo aqui. Façam a distributiva.

Professor Gabriel: Vamos, tentem fazer gente, a distributiva. Então a área do retângulo vai ser o que..., y é igual a: x vezes x, quanto que é?

Aluno: x^2.

Professor Gabriel: Então depois façam x vezes 6, depois 2 vezes x e 2 vezes 6. Tentem fazer e verifiquem se chegam a alguma conclusão, vocês não vão chegar num número, y vai ser uma expressão. Verifiquem se essa expressão é desse tipo, do formato da função do 2.º grau.

Professor Gabriel: Caso seja afirmativo, determinem o valor de a, b e c. Quem é o a, b e c? São os coeficientes, os números que acompanham o x^2, e o x, e o c é uma constante, o número não tem x. Conseguiram?

Aluna: Calma aí, professor.

Depois de um tempinho, o professor prosseguiu.

Professor Gabriel: Conseguiram gente, quanto deu?

Aluno: $y = x^2 + 8x + 12$ e essa expressão é uma função do 2º grau.

Professor Gabriel: Ótimo, então é uma expressão do tipo $y = ax^2 + bx + c$, então qual o valor do a, b e c?

Alunos: a = 1, b = 8 e c = 12.

Professor Gabriel: Muito bem. Alguma dúvida?

Alunos: Não.

Parte II – Atividade 2.1: Desenhe em seu caderno e descreva como seria a trajetória de uma bola arremessada para uma cesta de basquete.

Professor Gabriel: Trajetória é no caso de você ter jogado a bola, o caminho que ela irá percorrer até ela cair no chão. Vocês acham que essa trajetória se assemelha com o que?

Aluno: Uma curva.

Professor Gabriel: Isso uma curva, ou seja, a trajetória da bola arremessada se assemelha com o gráfico da função do 2.º grau, que é uma parábola.

Atividade 2.2: $h = -t^2 + 6t$

Professor Gabriel: Esse h é a altura e vocês irão encontrar a altura que a bola atinge em função do tempo t. Vocês irão tentar fazer sozinhos o gráfico que representa a trajetória da bola, o papel quadriculado vocês já tem.

Professor Gabriel: Primeiro vocês irão construir uma tabela e determinar os valores de t em segundos para calcular a altura em metros. Que valores a gente poderia jogar para t, o que vocês acham?

Aluno: Zero.

Professor Gabriel: Zero sim porque o tempo começa a ser cronômetrado no zero, e depois qual tempo?

Alunos: 1, 2,...

Professor Gabriel: Isso e assim por diante 3, 4,..., Então com cada um desses valores, o que vocês terão que fazer, por exemplo, quando o tempo for zero? Coloca o zero no lugar do t e faz a continha zero ao quadrado mais seis vezes zero...

Professor Gabriel: Agora encontra a altura quando o tempo for um segundo, fica menos um ao quadrado mais seis vezes um, faz a continha, tem que colocar o valor da altura na tabela quando o tempo for um.

Professor Gabriel: Agora tem que encontrar a altura em que a bola vai estar ao se passar dois segundos, então vamos pegar o 2 colocar aqui $h = -(2)^2 + 6.2$, eu vou fazer só esse cálculo para vocês verem como ficaria, porque muita gente pode ter dificuldades com esse sinal de menos que aparece no início da expressão. Então assim, esse sinal de menos ele não é do número, o sinal de menos é da expressão $-t^2$, então o dois está aqui dentro do parênteses $-(2)^2$, quanto é 2^2 ? É 4, vai ficar -4, seria diferente se a gente elevasse $(-2)^2$, que é (-2) x (-2) que dá 4.

Professor Gabriel: Nem poderia ser -2, por que não poderia ser -2?

Aluno: Porque é tempo, e não existe tempo negativo.

Professor Gabriel: Isso, então $h = -4 + 6.2$, qual vai ser a altura quando o tempo for 2 segundos? 12 – 4 = 8, então ao se passar 2 segundos a bola atingiu 8 metros.

Professor Gabriel: Vamos tentar fazer isso então, façam no caderno uma tabelinha, jogue alguns valores para t, calculem as alturas e a partir desses pares vocês irão encontrar alguns pontos no plano cartesiano para traçar o gráfico, vamos tentar fazer, mãos a obra então.

Aluna: Professor até 5 segundos está bom para calcular.

Professor Gabriel: Até 6 segundos é o suficiente.

Professor Gabriel: Atenção, para construir o gráfico, o eixo das abscissas será o tempo (t) e o eixo das ordenadas será a altura (h).

Professor Gabriel: Se alguém precisar de calculadoras, temos algumas calculadoras científicas da escola, podem utilizar para agilizar os cálculos.

Nesse momento o professor ficou caminhando pela sala e tirando as dúvidas dos alunos, enquanto eles realizavam o exercício.

Professor Gabriel: Vamos concluir o exercício. Como é o gráfico que vocês construíram?

Alunos: É uma curva.

Professor Gabriel: Que nome se dá a essa curva?

Aluno: É... (depois de alguns instantes) Parábola.

Professor Gabriel: Isso é uma parábola. A parábola pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo. A concavidade gente seria a boca da parábola, aberta para cima ou aberta para baixo. Nesse gráfico que vocês construíram a parábola tem concavidade voltada para cima ou para baixo?
Alunos: Para baixo.
Professor Gabriel: Isso muito bem, agora observem o gráfico e verifiquem em quantos segundos a bola atinge a altura máxima, ou seja, em que instante ela chega lá no topo?
Aluno: no t = 3 segundos.
Professor Gabriel: Ótimo, e que altura a bola atingiu nesse instante?
Aluna: 9 metros.
Professor Gabriel: Muito bem, alguém tem alguma dúvida? Todos conseguiram visualizar essas informações no gráfico?
Alunos: Sim, conseguimos.

Atividade 2.3: O lucro em reais de uma empresa pela venda diária de x peças, é dado pela função: $L(x) = -x^2 + 14x - 40$.

Professor Gabriel: Normalmente indicamos a função por f(x) que é f em função de x, esse exercício é indicado por L(x) por que é o lucro L em função de x, que é a quantidade de peças vendidas.
Professor Gabriel: Então conforme a gente coloca uma quantidade, um valor no lugar de x, a gente pode calcular o valor do lucro para aquelas peças que foram vendidas.
Professor Gabriel: Então vamos atribuir alguns valores para x para poder calcular o lucro e construir o gráfico dessa função. A primeira etapa é montar uma tabela como estou fazendo aqui na lousa e jogar alguns valores para x, 4, 5, 6, 7, [...], vamos jogar valores do 4 ao 10.
Aluno: Por que, professor, tem que ser do 4 ao 10?
Professor Gabriel: Porque com esses valores a gente vai obter valores de L; Quem é x? x não é a quantidade de peças? E L não é o lucro? Então eu vou fazer os primeiros para vocês verem como faz.

Professor Gabriel: Qual vai ser o lucro quando forem vendidas 4 peças? Então o lucro de 4 peças é $L(4) = -(4)^2 + 14.4 - 40$. Quanto vai dar isso? $-(4)^2 = 16$ e 14.4 = 56, então vai ficar $L(4) = -16 + 56 - 40 = 56 - 56 = 0$. Então, quando a empresa vender 4 peças, qual vai ser o lucro dela?

Aluno: Nenhum.

Professor Gabriel: Isso, zero; ela não vai ter lucro também não vai ter prejuízo. Vocês estão observando que para uma venda de 4 peças a empresa não tem lucro nem prejuízo, então ela tem que fazer o quê?

Professor Gabriel: Vender mais de 4 peças, por isso não coloquei na tabela valores menores que 4, porque se ela vender menos que 4 peças a empresa terá prejuízo. Então provavelmente os próximos valores que são acima de 4 ela vai ter lucro. Vamos tentar encontrar os próximos valores pra ver o que ocorre.

Professor Gabriel: Vamos encontrar o valor do lucro quando forem vendidas 5 peças, como é que faz? O lucro para 5 peças é $L(5) = -(5)^2 + 14.5 - 40$. Então vamos tentar fazer. Preencher a tabela toda e fazer o gráfico.

Professor Gabriel: Façam os cálculos no caderno e o gráfico no papel quadriculado e depois colem no caderno.

Nesse momento o professor ficou caminhando pela sala e tirando as dúvidas dos alunos, enquanto eles realizavam o exercício, até o final da aula.

Professor Gabriel: Gente, na aula de ontem, eu fiz os primeiros cálculos na lousa e vocês fizeram os outros, então vamos fazer a tabela novamente na lousa, fala pra mim os resultados que vocês obtiveram na tabela.

Alunos: 0, 5, 8, 9, 8, 5 e 0.

Professor Gabriel: Então, estes são os valores do lucro que vocês obtiveram para construir o gráfico. O gráfico que vocês fizeram ontem eu vou fazer aqui na lousa. Pronto, agora com o gráfico em mãos, observando o gráfico à gente vai poder responder algumas questões.

Professor Gabriel: Letra b, qual é o lucro da empresa quando são vendidas 5 peças? Olhem na tabela ou no gráfico.

Professor Gabriel: Quando eles fabricam 5 peças, faturam 5 reais e quando eles fabricam 8 peças?

Aluno: 8 reais.

Professor Gabriel: 8 né, só olhar a tabela e responder.

Professor Gabriel: A letra c, quantas peças devem ser vendidas para que o lucro seja máximo?

Aluno: 7 peças.

Professor Gabriel: Isso é 7. Então observando a parábola, o ponto máximo é o quê? É o lucro máximo. Para que a empresa obtenha o lucro máximo que é de 9 reais, ela tem que vender 7 peças.

Professor Gabriel: A letra d determine quais são os zeros da função, ou seja, os valores em que o lucro é zero.

Professor Gabriel: Olhando no gráfico são esses olhem, o 4 e o 10, lembram o que são os zeros da função? São as raízes da função, os locais onde a parábola corta o eixo x, o que significa isso? No 4 e no 10, o lucro é zero. Para a empresa isso significa que se ela vender 4 peças ou 10 peças não terá nem lucro e nem prejuízo.

Professor Gabriel: E a última, a letra e pergunta para qual intervalo que a empresa vende de peças, consegue obter um lucro crescente cada vez mais.

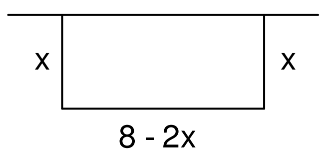
Para que os alunos observassem melhor, o professor traçou um eixo de simetria no gráfico construído na lousa, facilitando a visualização dos intervalos de crescimento e decrescimento.

Professor Gabriel: Então vendendo de 4 a 7 peças o lucro cresce, só observar a curva da parábola. E se ele produzir de 7 a 10 peças, o que ocorre?

Aluno: O lucro decai.

Professor Gabriel: Isso, então o intervalo em que o lucro é decrescente vai de 7 a 10 peças.

Atividade 2.4:



Professor Gabriel: A situação qual é? É um canteiro em que a pessoa tem 8 metros de tela para cercar. A cerca vai ficar só nesses três lados, por que nesse outro lado tem uma parede, então não tem a necessidade de cercar.

Professor Gabriel: A largura desse canteiro à gente não sabe quanto vai medir, mede x que é o valor desconhecido. Essa outra parte, que é o comprimento, quanto vai medir?

Professor Gabriel: Sabe-se que tem 8 metros inteiros para fazer esse canteiro, então o comprimento vai ficar o quê? 8 metros menos dois valores de x, que a gente usou aqui na largura. Esse x mais esse x, Quanto é x + x?

Alunos: 2x.

Professor Gabriel: 2x então, por isso que fica 8 – 2x.

Professor Gabriel: Agora nós vamos tentar chegar numa fórmula...

Aluno: Professor tenho uma dúvida, 8 é o tamanho do quê?

Professor Gabriel: 8 é o tamanho total de tela para cercar. Esse lado aqui mede 8 que é o valor total de tela menos esses pedaços que estão aqui, menos 2x.

Professor Gabriel: A gente vai tentar chegar numa função, uma fórmula que nos possibilite encontrar a área, ou seja, a área máxima desse canteiro em função de x, em função do lado.

Professor Gabriel: Conforme o lado vai variando, ou seja, conforme esse comprimento e essa largura vai variando a área também varia, pode ser que ela fique menor ou maior, conforme a variação da área.

Professor Gabriel: Como a gente chega nessa função da área? Através da fórmula da área do retângulo. Como a gente calcula a área do retângulo?

Aluno: Base vezes à altura.

Professor Gabriel: Isso, um exemplo: um terreno tem 10 x 25 metros, qual é a área desse terreno?

Aluna: 10 x 25 é... 250 metros quadrados.

Professor Gabriel: Certo, então vamos partir dessa fórmula para encontrar a área do retângulo. Qual vai ser a nossa área? A área em função da variação da largura, a área em função de x. Quanto é que mede os lados desse retângulo?

Alunos: x

Professor Gabriel: e o outro lado?

Aluno: 8 – 2x.

Professor Gabriel: Então vai ficar o quê? A = x. (8 – 2x), então essa vai ser a fórmula, a função utilizada pra gente calcular alguns valores de área conforme o valor de x for variando. Mas o que a gente tem que fazer nessa expressão, pra chegar na função final?

Professor Gabriel: Fazer uma...? Olha x. (8 – 2x), o que a gente faz?

Alunos: A distributiva.

Professor Gabriel: Isso temos que fazer aquela propriedade distributiva. Quanto que é 8 vezes x?

Alunos: 8x.

Professor Gabriel: E x vezes menos 2x? É menos dois x ao quadrado. Então a área em função de x vai ficar $A = -2x^2 + 8x$, essa é a função.

Professor Gabriel: Alguma dúvida?

Alunos: Não.

Nesse momento o professor ficou caminhando pela sala e tirando as dúvidas dos alunos, enquanto eles realizavam o exercício, até o final da aula.

Professor Gabriel: Na aula de ontem vocês fizeram o gráfico que representa a área de um canteiro. Então vocês encontraram os valores da área em função da largura do canteiro, lembrando que a área é a superfície ocupada.

Professor Gabriel: Qual que é o valor da área? É isso que a gente vai calcular aqui, pela fórmula $A = -2x^2 + 8x$. A cada valor de x essa fórmula vai nos dar um valor da área.

Professor Gabriel: Então vamos fazer, quando o x for zero, quando a largura do terreno for zero o que vai acontecer? Coloca o zero no lugar do x, vai ficar $A = -2.0^2 + 8.0 = 0$. Então quando a largura for zero, a área também é zero, é como se a cerca estivesse encostada ao muro, não vai ter canteiro.

Professor Gabriel: Agora quando o lado for um, o que vai acontecer? Coloca o um no lugar do x, vai ficar $A = -2.1^2 + 8.1$. Quanto é um ao quadrado?

Alunos: Um.

Professor Gabriel: Então vai ficar $A = -2 + 8 = 6$, e assim por diante.

Professor Gabriel: Então, quais foram os outros valores das áreas que vocês obtiveram? Qual foi o valor da área, quando o x for 2?

Alunos: 8.

Professor Gabriel: E quando o valor for 3?

Alunos: 6.

Professor Gabriel: E quando o valor for 4?

Alunos: zero.

Professor Gabriel: Então a gente está percebendo que quando a largura for muito pequena ou muito grande, a gente não tem área.

Professor Gabriel: Então vamos fazer o gráfico, qual o primeiro ponto?

Alunos: zero e zero.

Professor Gabriel: Zero do x e zero do y. O próximo ponto é?

Alunos: 1 e 6.

Professor Gabriel: 1 do x e 6 do y. O Outro?

Alunos: 2 e 8.

Professor Gabriel: 2 do x e 8 da área. O próximo?

Alunos: 3 e 6.

Professor Gabriel: 3 do x e 6 da área. E o último?

Alunos: 4 e zero.

Professor Gabriel: Juntando os pontos o que a gente obtém?

Aluno: Parábola.

Professor Gabriel: A parábola, certo, o gráfico dessa situação. O gráfico informa a área em função do comprimento. Então enquanto o valor do comprimento está subindo até 8, você obtém uma área cada vez maior.

Professor Gabriel: Chegou no 8, você obteve a maior área possível em função desse 2. O que é esse 2? É a largura do canteiro que você tem a maior área.

Professor Gabriel: A partir desse 2, quando começa a variar para o 3, a área vai diminuindo até chegar no zero.

Professor Gabriel: Então a partir do gráfico e a partir dos valores que nós obtivemos aqui, fica fácil a gente responder a essa pergunta: Qual a medida do lado x para que a área seja máxima? Quanto tem que medir o lado x para que você obtenha a maior área?

Alunos: 8.

Professor Gabriel: A maior área é 8, mas qual a medida do lado x para você obter esse 8?

Alunos: 2.

Professor Gabriel: Isso 2, então quando o lado medir 2 você vai ter a área 8, ou seja, a maior área possível. Então a resposta vai ser isso que vocês concluíram, para que a área seja máxima, ou seja, 8m^2, o lado x deve medir 2 metros. Dúvidas?
Alunos: Não.

Atividade 2.5: $l = -x^2 + 80x - 700$

Professor Gabriel: A última atividade que encerra a parte II, é um problema bem aplicado, é uma situação empresarial. Rogério é empresário de um grupo de danças folclóricas; ele está “quebrando a cabeça” para determinar o preço x, em reais do ingresso para o próximo show do grupo.
Professor Gabriel: Se for muito alto o valor dos ingressos, o que acontece? Ele não vai conseguir vender esses ingressos. Se o ingresso for a 50 reais, ninguém vai comprar ou poucas pessoas irão comprar. E se for baixo, ele vai ter prejuízo, se for muito baixo, ele não vai conseguir pagar o show que está fornecendo para as pessoas.
Professor Gabriel: Com base nos últimos espetáculos, ele concluiu que o lucro é dado por essa função $l = -x^2 + 80x - 700$. Na apostila de vocês já tem uma tabela com os valores de x e do L. O que é o x aí? Vamos Definir? X é o preço do ingresso e o L é o lucro.
Professor Gabriel: Olhem na tabela, os valores estão variando. Quando o ingresso custar R$ 10,00 qual vai ser o lucro dele? Foi colocado 10 no lugar do x e feito à continha, e deu um valor, qual o valor que ta aí na tabela? Quando o ingresso for R$ 10,00, qual vai ser o lucro?
Aluno: Zero.
Professor Gabriel: Zero, ele não vai ter lucro nenhum e nem prejuízo. Então se for R$ 10,00, o dinheiro que arrecadar será apenas para pagar o show e não irá obter lucro nenhum com isso, vai empatar o dinheiro.
Professor Gabriel: Se ele vender a R$ 20,00 vai faturar R$ 500,00 de lucro. Se o ingresso for R$ 30,00, o lucro é de R$ 800,00. Se o ingresso for R$ 40,00, o lucro é de R$ 900,00. Se o ingresso for R$ 50,00, o lucro começa a cair, vai ser de R$ 800,00. Se o ingresso for R$ 60,00, esta aumentando cada vez mais o ingresso e o

lucro vai ser só de R$ 500,00. Se ele vender o ingresso a R$ 70,00, quase ninguém vai comprar e o lucro dele vai ser zero. Com esses valores do preço do ingresso e do lucro foi feito o gráfico, que é uma parábola.

Professor Gabriel: Agora vamos responder algumas questões: letra a, qual é o lucro se o ingresso para o show por vendido a R$ 20,00.

Alunos: 500 reais.

Professor Gabriel: Letra b, pode-se afirmar que o empresário tem prejuízo quando o valor do ingresso for maior que R$ 40,00?

Alunos: Não.

Aluno: Até 70 reais ele não terá prejuízo.

Professor Gabriel: Isso, até 70 reais ele tem lucro, exatamente 70 reais ele não tem lucro e nem prejuízo e acima de 70 reais começa a ter prejuízo.

Professor Gabriel: A próxima, a letra c, para qual intervalo o lucro cresce? E para qual intervalo é decrescente?

Aluno: O lucro cresce no intervalo de 20 a 40 reais.

Professor Gabriel: Não de 10 a 40.

Aluno: Mas 10 ele não obteve lucro professor.

Professor Gabriel: É 10 ele não obteve lucro, mas o lucro dele começa a crescer a partir do 10. Dez é o valor mínimo do intervalo, se vender a 11 reais já vai ter lucro, 12 , 13 até 40 reais. Então o lucro é crescente de 10 a 40 reais.

Professor Gabriel: E o lucro decrescente?

Aluno: 40 a 70 reais.

Professor Gabriel: Isso é decrescente de 40 a 70 reais. Certo gente é só interpretação do gráfico e da tabela.

Professor Gabriel: E qual é o valor do ingresso para que o empresário tenha lucro máximo? E qual é esse lucro?

Professor Gabriel: Isso a gente já viu né, o valor do ingresso é de R$ 40,00 e o lucro máximo é de R$ 900,00.

Professor Gabriel: A letra e, o que acontece quando os ingressos são vendidos a um valor maior que R$ 70,00?

Aluno: Vai ter prejuízo.

Professor Gabriel: Pela lógica o valor do lucro vai ser negativo, o que indica um prejuízo.

Aluno: Vai ter um lucro menor que zero.

Professor Gabriel: É bom quando todo mundo está entendendo o que está acontecendo e respondendo junto. É sinal que está situação está clara para todos.
Professor Gabriel: A última pergunta: qual é o lucro quando os ingressos forem vendidos a R$ 10,00 ou a R$ 70,00?
Aluno: Nenhum lucro.
Aluno: Vai pagar o show só.
Professor Gabriel: Isso, nesses valores não terá lucro, nem prejuízo.

Parte III – Atividade 3.1

Professor Gabriel: Vamos lembrar o que é parábola? É o gráfico da função do 2º grau que pode ter a concavidade voltada...
Aluna: Para baixo ou para cima.
Professor Gabriel: Isso pode ter a concavidade voltada para baixo ou para cima.
Professor Gabriel: Quando a concavidade é para baixo, a parábola cresce, chegue no ponto máximo e depois começa a decrescer. E quando a concavidade é para cima, a parábola decresce, chega no ponto mínimo e depois começa a crescer.
Professor Gabriel: Então quando a parábola encontra o seu eixo de simetria...O que é eixo de simetria, vocês lembram?
Alunos: Não.
Professor Gabriel: Eixo de simetria é um eixo que divide uma figura geométrica em duas partes iguais.

Nesse momento o professor fez duas figuras geométricas na lousa como exemplo e traçou o eixo de simetria, dividindo as figuras em duas partes iguais.

Professor Gabriel: Então agora respondam, aonde seria o eixo de simetria da parábola?
Aluno: Passando pelo centro.
Professor Gabriel: Seria uma reta que passa justamente neste ponto de máximo ou de mínimo, e que divide a parábola ao meio. Então aonde a parábola chega num determinado ponto e encontra o seu eixo de simetria, esse ponto é chamado de vértice da parábola.

Nesse momento o professor desenhou na lousa uma parábola como exemplo.

Professor Gabriel: Observe as parábolas que estão desenhadas na apostila. O que está pedindo o exercício? Desenhe o eixo de simetria e em seguida determine a abscissa e a ordenada do vértice.

Professor Gabriel: Então vamos fazer um exemplo aqui na lousa, onde fica o eixo de simetria dessa parábola? O eixo é uma reta paralela ao eixo y que divide a parábola em duas partes iguais e passa pelo vértice, o que é o vértice? Nesse caso aqui, é o ponto de mínimo. Vejam.

Professor Gabriel: E depois encontrar a abscissa e a ordenada, o que é a abscissa e a ordenada mesmo? A abscissa é o valor de x desse ponto de vértice e a ordenada é o y, qual que é o valor de x?

Alunos: dois.

Professor Gabriel: Então esse vértice é dois do x e quanto do y?

Alunos: menos três.

Professor Gabriel: Então esse ponto V (2, -3) é o ponto de coordenadas do vértice. Quais são as coordenadas? Dois do x e menos três do y.

Professor Gabriel: O que é pra fazer então nos exercícios? Achar em cada desenho da apostila o ponto do vértice, traçar o eixo de simetria e encontrar as coordenadas do ponto do vértice, o que são as coordenadas? O número correspondente ao eixo x e o número correspondente ao eixo y. Podem fazer na própria apostila.

Nesse momento o professor ficou caminhando pela sala e tirando as dúvidas dos alunos, enquanto eles realizavam o exercício, até o final da aula.

Aluno A: Professor, aqui está certo, V (1, 4)?

Professor Gabriel: Não está errado, é -1 do x e -4 do y.

Aluno B: Como fica aqui professor, por que está bem no meio?

Professor Gabriel: Qual que é o valor? É o número que fica entre -1 e -2, provavelmente vais ser -1/2, mas pra você ter certeza do valor, você pega esse valor do x que é -1 e coloca no lugar do x da equação e calcula, você irá achar o valor de y.

Aluno C: Professor, aqui é o vértice?

Professor Gabriel: É ai mesmo.

Aluno C: Então é esse número, e esse número.

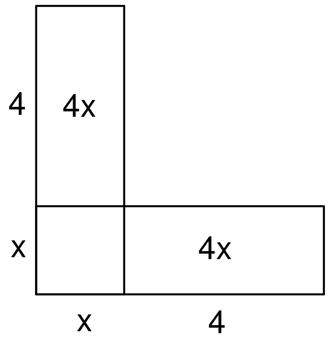
Professor Gabriel: Quais são as coordenadas?

Aluno C: V (-2, -2).

Professor Gabriel: Certo

Parte IV – Atividade 4.1

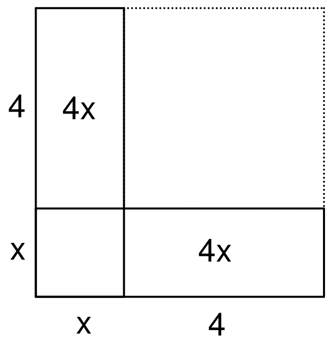
Professor Gabriel: Esse processo de completar quadrados é geométrico. Nós vamos usar as medidas das áreas dos quadrados. Vamos começar por essa área L.



Professor Gabriel: Qual é a área deste retângulo? Este lado mede 4 e esse mede x, então a área deste retângulo é 4x e deste quadradinho é x^2, porque lado vezes lado vai dar x^2 e desse outro retângulo também é 4x.

Professor Gabriel: Então se nós somarmos a área dessas três figuras vai ficar como? $x^2+4x+4x$. A soma das áreas dessas três figuras é igual a 9, é o que está ai na apostila. Chamaremos essa área de L, então: $L=x^2+4x+4x=9$.

Professor Gabriel: Vamos ver se a gente consegue determinar a área desse quadrado pontilhado. Quais são as dimensões dele? Quando mede?



Aluno: 4x.

Professor Gabriel: Só 4, 4x é a área deste retângulo, porque esse lado mede 4 e esse mede x, então lado vezes lado dá 4x.

Professor Gabriel: Então o lado do quadrado pontilhado mede 4, e esse outro lado também mede 4, então qual é a área do quadrado pontilhado?

Aluno A: 8.

Professor Gabriel: Não.

Aluno B: 16.

Professor Gabriel: Isso é lado vezes lado, então 4 vezes 4 dá 16, certo?

Alunos: certo.

Professor Gabriel: Está é a resposta da questão a, então vamos tentar responder as outras questões? A letra b, vamos tentar fazer a letra b: some as áreas das quatro partes do quadrado maior.

Professor Gabriel: Esse quadrado é o maior, então vamos somar as 4 áreas dele pra ver quanto vai dar: $x^2 + 4x + 4x + 16$.

Aluno: Professor, vai dar 25, porque 9 + 16 = 25.

Professor Gabriel: Isso, $x^2 + 4x + 4x + 16 = 25$. O que significa o valor 25?

Aluno: É o quadrado maior.

Professor Gabriel: É a área do quadrado maior. Vamos ver qual que é a próxima questão, quanto mede o lado do quadrado maior?

Aluno: 4.

Professor Gabriel: Esse pedaço mede 4 e esse x, ou seja, quanto mede?

Aluno: 4 + x.

Professor Gabriel: Então um lado é 4+x e o outro lado?

Aluno: 4+x.

Professor Gabriel: Isso é 4+x também, vamos para próxima questão: escreva a expressão que fornece a área do quadrado maior, a partir da multiplicação dos lados. Então se eu fizer lado (4+x) vezes lado (4+x), quanto vai dar? Qual é a área do quadrado maior?

Aluno: 25.

Professor Gabriel: Vocês concordam que (4+x).(4+x) = 25?

Alunos: Sim.

Professor Gabriel: Então o que vai acontecer se a gente desenvolver isso daqui (4+x).(4+x) = 25. Desenvolvam ai pra ver que expressão vai dar. A expressão é essa, só que tem uma multiplicação, e vocês tem que resolver essa multiplicação, aplicando a propriedade distributiva.

Nesse momento o professor deu alguns minutos para que eles resolvessem.

Professor Gabriel: Pronto, vocês tinham chegado em alguma coisa parecida anteriormente.

Aluno: Já.

Professor Gabriel: Já né, perceberam a semelhança disso que vocês chegaram com aquilo que estava anteriormente? Então é a mesma expressão, tem duas formas de vocês chegarem nessa mesma expressão, multiplicando lado vezes lado ou somando as áreas dos 4 pedacinhos.

Aluno: Ficou igualzinho professor!

Professor Gabriel: Igualzinho né, 4 vezes 4 é 16, 4 vezes x é 4x, x vezes 4 é 4x e x vezes x é x^2 igual a 25. Então é a mesma expressão $16+4x+4x+x^2=25$. Na verdade só está trocado os termos, mas a ordem não altera em nada.

Professor Gabriel: Verifiquem se são iguais as expressões algébricas obtidas no item b e d. São iguais?

Aluno: São iguais, só está trocado a ordem professor.

Professor Gabriel: Mas dá na mesma, a ordem dos termos não altera a expressão, então é a mesma expressão $x^2+4x+4x+16=25$. Então a resposta é o quê?

Alunos: São iguais.

Professor Gabriel: Vamos ver a letra f: calcule a área do quadrado maior somando a área L da figura com a área do quadrado pontilhado da figura.

Professor Gabriel: Qual que é a área do quadrado L? É $x^2+4x+4x$, que dá quanto? Quanto é a área dessa figura L?

Alunos: Dá 9.

Professor Gabriel: $x^2+4x+4x=9$ essa é a expressão que fornece a área da figura L. Vocês vão somar a área da figura L com a área do quadrado pontilhado. Quanto é a área desse quadrado pontilhado?

Alunos: 16.

Professor Gabriel: Então vai ficar $x^2 + 4x + 4x + 16 = 9 + 16 \Rightarrow (x^2 + 4x + 4x) + 16 = 25$. Então a área do quadrado L mais a área do quadrado pontilhado é igual à área do quadrado maior. Então qual é o valor da área do quadrado maior?

Alunos: 25.

Professor Gabriel: E qual o valor do lado do quadrado maior?

Alunos: 5.

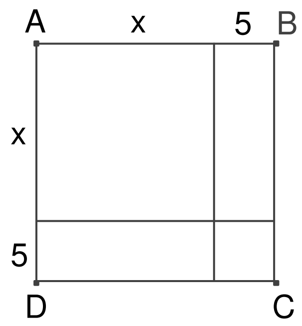
Professor Gabriel: Se a área do quadrado maior é 25, que dizer que o lado mede 5, porque 5 vezes 5 dá 25.

Professor Gabriel: Se o lado todo mede 5 e esse pedaço mede 4, então quanto vale x?

Alunos: 1.

Professor Gabriel: Esse pedacinho só pode ser 1.

Atividade 4.2



Professor Gabriel: Quanto mede o lado do quadrado?

Alunos: 5.

Professor Gabriel: O lado não mede 5, só esse pedaço mede 5. Então quanto mede o lado do quadrado?

Professor Gabriel: 5 + x, certo?

Alunos: Sim.

Professor Gabriel: A área do quadrado é 121, como a gente calcula a área do quadrado? Lado vezes lado, então quanto tem que medir cada lado do quadrado pra área ser 121?

Alunos: 11.

Professor Gabriel: 11 né, então quer dizer o quê? Que cada lado do quadrado dá 11 porque 11 vezes 11 dá 121. Será que já teria como encontrar o valor desse x ai?

Professor Gabriel: O lado do quadrado mede 5 + x, e esse 5 + x tem que valer o quê?

Alunos: 11.

Professor Gabriel: Qual que é o valor de x? Quanto vocês acham que é?

Aluno: É 5,5.

Professor Gabriel: É 5 + 5,5 dá quase 11, dá 10,5.

Alunos: Ah não é 6.

Professor Gabriel: É 6, muito bem. Então a gente vai chegar à conclusão que x é 6, porque se x + 5 = 11, então x só pode ser 6. Tudo bem gente?

Alunos: Sim.

Atividade 4.3: $x^2 + 2.4x = 9$

Professor Gabriel: Vocês têm ai uma equação do 2º grau. Vocês na 7ª série aprenderam algo chamado produto notável, vocês lembram de produto notável?

Alunos: Não.

Professor Gabriel: Produto notável é o desenvolvimento disso aqui por exemplo $(x+1)^2$, como resolve $(x+1)^2$? Tem uma regrinha, onde x é o 1º termo e 1 é o 2º termo, tem que fazer o quadrado do 1º termo que é x^2, mais duas vezes o primeiro pelo segundo que é 2.x.1, mais o quadrado do segundo que é 1^2, então vai ficar $x^2 + 2x + 1$. Quando vocês resolvem um produto notável, acabam chegando na equação do 2º grau.

Professor Gabriel: Então uma forma de vocês chegarem nas raízes da equação do 2º grau seria o quê? Transformá-las num produto notável, então como a gente poderia transformar essa equação $x^2 + 2.4x = 9$ num produto notável?

Professor Gabriel: Quem seria o 1º termo?

Aluno: x.

Professor Gabriel: Quem seria o 2º termo? Não é duas vezes o primeiro pelo segundo e não é 2.4x, então quem é o 2º termo?

Aluno: O 1º termo é x e o 2º termo é 4.

Professor Gabriel: Isso, mais o quadrado do segundo, qual seria o quadrado do 2º termo? O 16. Vocês perceberam que deveria ter um 16 aqui, teria que ser isso $x^2 + 2.4x + 16$, não tem o 16, tem um 9 do outro lado. Então na verdade esse 9 a gente pode somar com que número ou subtrair com que número para que seja 16. Que número?
Alunos: 7.
Professor Gabriel: 7 mais 9 é igual a 16, passando para o primeiro membro vai ficar negativo e tem que ser positivo, então não é.
Professor Gabriel: Tem que ser um número que junto com o 9 dê -16, 9 mais um número que dá -16, qual é?
Aluno: -7.
Professor Gabriel: Não, 9 – 7 dá 2. Vai ser o número menos vinte e cinco, por que o menos vinte e cinco?
Aluno: Porque -25 + 9...
Professor Gabriel: Quanto é 9 – 25?
Aluno: 16.
Professor Gabriel: Dá -16, passando para o primeiro membro vai ficar dezesseis positivo. O que é o dezesseis positivo? É o quadrado do segundo termo. Então vai ficar assim $(x+4)^2 = x^2 + 2.4x = 9 + (-25)$, certo?

Atividade 4.4:

Professor Gabriel: A atividade 4.4 é assim: determine os zeros da função, completando quadrados pelo método algébrico. Então como é o método algébrico para completar quadrados? É aquele que utiliza o produto notável, então vamos tentar fazer.
Professor Gabriel: A letra a é essa daqui $x^2 + 6x = -5$, como a gente poderia fazer isso? Qual seria o termo que dá origem a essa expressão. Lembram do quadrado do primeiro termo mais... Tentem desenvolver.

Depois de um tempinho dado, o professor percebeu a dificuldade dos alunos e prosseguiu.

Professor Gabriel: Quem é o primeiro termo? É o x, porque o quadrado do primeiro termo é x^2 mais 6x, 6x eu posso transformar em quê? Não é duas vezes o primeiro pelo segundo, então eu posso fazer o que para dar 6x? 6x é duas vezes?

Alunos: 3x.

Professor Gabriel: Então é duas vezes o primeiro termo pelo segundo, o primeiro termo não é o x, então quem pode ser o segundo? Quem?

Aluno: 3.

Professor Gabriel: Isso é o 3, então vai ficar o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo mais o quadrado do segundo, mais quem é o quadrado do segundo?

Aluno: É o 3.

Professor Gabriel: É o 3 ao quadrado que dá 9. Então a gente pode ter isso $(x+3)^2 = x^2 + 2.3x + 9$. Essa equação vai ficar assim: $x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$, por quê? Porque nove é o quadrado do segundo termo, então a gente pode acrescentar esse quadrado do segundo termo em ambos os lados da equação.

Professor Gabriel: Resolvendo, juntando esses dois números aqui, como fica? $x^2 + 6x + 9$ é igual a? Quanto é nove menos cinco?

Alunos: 4.

Professor Gabriel: Então gente, vai ficar $x^2 + 6x + 9 = 4$, isso daqui é o desenvolvimento de qual produto notável? É esse daqui, olha $(x+3)^2 = 4$, concordam?

Alunos: Sim.

Professor Gabriel: Como a gente pode resolver isso $(x+3)^2 = 4$? Como eu faço para encontrar o valor de x? Percebam que isso é uma equação do 2º grau e que nós podemos encontrar as raízes usando esse método de completar quadrados pelo método algébrico.

Professor Gabriel: Como eu faço para tirar esse quadrado daqui $(x+3)^2 = 4$? Como esse expoente dois passa para o lado de fora? Qual é a operação inversa da potenciação? Ao quadrado passa como?

Aluno: Passa como raiz.

Professor Gabriel: Isso raiz quadrada, fica assim então $x+3=\sqrt{4}$. Qual é a raiz de 4?

Alunos: 2.

Professor Gabriel: Então fica $x+3=\pm 2$, mais dois e menos dois, porque 2 x 2 dá 4 e (-2) x (-2) também dá 4. Então a partir disso aqui $x+3=\pm 2$, a gente pode encontrar os dois valores das raízes da equação. Quais são as duas raízes? Qual é o valor de x_1 e qual é o valor de x_2?

Professor Gabriel: x_1 vai ficar o quê?

Aluno: É $x+3$...

Professor Gabriel: x_1 é igual a $x+3=$ 2, a gente vai usar o dois positivo. E o valor de x_2? Vai ficar $x+3=$ -2. Então quanto vai dar o valor de x_1? Passa o 3 para o segundo membro com o sinal de menos, $x=2-3$, qual é o valor de x_1 então?

Alunos: -1.

Professor Gabriel: Então esse é o valor de x_1, e qual vai ser o valor de x_2? Passa o 3 para o segundo membro com o sinal de menos, $x=-2-3$, x_2 é igual a -5.

Professor Gabriel: Perceberam que nós encontramos as raízes da equação, e são raízes negativas -1 e -5. Então esse método de completar quadrados que é o método algébrico usando o produto notável, possibilita encontrar as raízes negativas.

Professor Gabriel: Da outra forma que a gente fez anteriormente pelo método geométrico, nós não conseguiríamos encontrar esses valores de x, porque são valores negativos. O método geométrico envolve medidas, e a gente sabe que não existe medida negativa, tudo bem? Vamos tentar fazer as outras então, a letra b, c e d.

Atividade 4.5:

Professor Gabriel: Gente a próxima parte da apostila, nós vamos ver a outra forma de encontrar a raiz da função do 2º grau, essa forma é chamada de forma canônica, o que seria a forma canônica? Seria encontrar o valor do m e do n a partir da equação do 2º grau. Para encontrar o valor de m e n nós temos que usar o princípio da fatoração, que nós utilizamos nos exercícios anteriores usando o produto notável.

Professor Gabriel: Vamos ver esse exemplo, para que vocês possam fazer os próximos exercícios sozinhos depois. Vamos transformar, ou seja, vamos passar para produto notável a equação $x^2 - 4x = 6$. Como ficaria?

Professor Gabriel: Ficaria como o quadrado do primeiro termo menos duas vezes o primeiro pelo segundo, então esse 4x tem que ser duas vezes alguma coisa, duas vezes o que vai dar 4x?

Alunos: 2 x 2.

Professor Gabriel: 2 vezes 2x, então vai ficar $x^2 - 2.2x = 6$.

Professor Gabriel: Qual seria o próximo passo? Encontrar o quadrado do segundo termo, qual é o quadrado do segundo termo?

Alunos: 4.

Professor Gabriel: Então vai ficar $(x^2 - 2.2x + 4) - 4 = 6$. Agora a gente faz o seguinte, esse não é o produto notável desenvolvido, como ficaria o produto notável?

Professor Gabriel: Ficaria $(x-2)^2$ e esse menos quatro passa para o segundo membro, vai ficar $(x-2)^2 = 4 + 6$. Quanto é quatro mais seis?

Alunos: É dez.

Professor Gabriel: Fica $(x-2)^2 = 10$, isso daqui tem alguma semelhança com essa forma canônica $f(x) = a.(x-m)^2 + n$. Se vocês relacionarem a forma canônica com essa expressão que nós chegamos, vocês teriam condições de localizar o m e o n? Quem seria o m e quem seria o n?

Professor Gabriel: Passando o 10 para o 1º membro vai ficar $(x-2)^2 - 10 = 0$, o que a gente conclui que m é 2 e o n é -10.

Atividade 4.6:

Professor Gabriel: Escreva na forma canônica as seguintes funções quadráticas, então a letra a é $f(x) = x^2 + 2x - 3$, vamos tentar escrever na forma canônica essa função, vamos ver se a gente consegue.

Professor Gabriel: Em primeiro lugar, qual seria o primeiro passo? Isolar essa parte, então ficaria $f(x)=(x^2+2x)-3$, qual seria o próximo passo? Completar o quadrado por meio do produto notável. Então gente que produto notável ficaria? Quem seria o primeiro termo e o segundo termo?

Professor Gabriel: Quadrado do primeiro mais..., 2x, duas vezes quanto dá 2x? Quem é o primeiro termo e quem é o segundo termo? A forma do desenvolvimento do produto notável é o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, então duas vezes o primeiro termo que é x vezes o segundo. Então qual que é o número que multiplicado por 2x vai dar o próprio 2x?

Aluno: 1.

Professor Gabriel: Então o 1º termo é x e o segundo termo é 1.

Professor Gabriel: E agora o que a gente faz aí? Vai ficar assim $(x^2+2.x.1+1)-1-3$, que produto notável ficaria aqui? A gente já não resolveu o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo, então ficaria assim o produto notável $(x+1)^2$, seria esse né o primeiro termo mais o segundo termo ao quadrado.

Professor Gabriel: Então isso daqui $(x^2+2.x.1+1)$ é o desenvolvimento do produto notável. Agora quanto é isso aqui -1-3? É $(x+1)^2-4$.

Aluna: Professor me fala uma coisa, -1-3 não tinha que diminuir?

Professor Gabriel: Quando os dois números são negativos, soma os dois números. Você deve um e deve três, então você deve uma dívida de quatro, então fica -4.

Professor Gabriel: Então chegamos nisso daqui $f(x)=(x+1)^2-4$.

Aluna: O f é da fórmula né?

Professor Gabriel: Isso f é da função, então essa função é que forma? É a forma canônica, quem é o m e o n?

Aluno A: m é -1 e o n é -4.

Aluno B: Professor dá onde você tirou esse +1 e -1 daqui $(x^2+2.x.1+1)-1-3$?

Professor Gabriel: Nós não completamos o quadrado pelo produto notável, esse 1 é o quadrado do segundo termo, mas esse 1 não tinha na expressão então colocamos o -1 para manter a mesma expressão que a anterior que era (x^2+2x).

Professor Gabriel: Então pessoal vamos tentar fazer a letra b e c e as questões 4.7 e 4.8 que encerraremos essa parte.

Atividade 5:

Professor Gabriel: Primeiro vamos conhecer o software, todo mundo junto, olhem no lado esquerdo da tela e clique 2-dimensão, depois em seguida em equação e em seguida clique em explícita e irá abrir uma telinha. Pronto gente, todo mundo está acompanhado?

Alunos: Sim.

Professor Gabriel: Bom agora, é só vocês digitarem a função, olhem a primeira atividade da apostila, é para traçar o gráfico da função $f(x) = x^2$, então vocês irão digitar essa função, como digitar ao quadrado? Primeiro coloquem x, depois chapeuzinho e o 2, assim como está aqui na lousa x^2, vejam. Conseguiram?

Alunos: Conseguimos professor.

Professor Gabriel: Então continuem e tentem responder as questões da apostila.

Nesse momento o professor ficou circulando pelo laboratório de informática, para verificar como os alunos estavam desenvolvendo as atividades, e também auxiliando em suas dúvidas. Ao final das duas aulas o professor fez um fechamento das atividades com os alunos.

Professor Gabriel: Gente de que forma o coeficiente a da função determina a concavidade da parábola?

Alunos: Se a for positivo é para cima, e se a for negativo é para baixo.

Professor Gabriel: Muito bem, e vocês perceberam também que o coeficiente de x^2 implica na mudança da abertura da parábola?

Aluna: Professor quanto maior for o coeficiente de a, mais fechada à parábola fica.

Aluno: É professor a parábola aumenta e diminuí a concavidade, quando mudamos o valor de a. O aluno fazia gestos com a mão abrindo e fechando.

Professor Gabriel: Isso quando a > 1, a abertura da parábola diminui, fica mais fechada e quando $0 < a < 1$, a abertura da parábola aumenta, fica mais aberta, em relação a função $f(x) = x^2$.

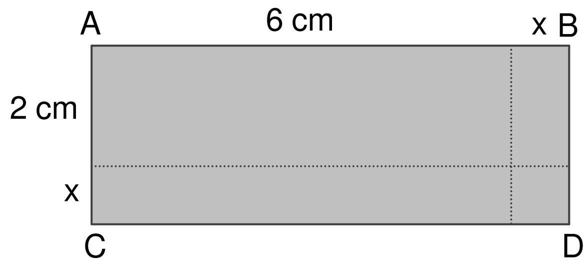
Professor Gabriel: E o que acontece quando somamos ou subtraímos um número a função inicial $f(x) = x^2$?

Aluno: É...A parábola sobe ou desce.

Professor Gabriel: Isso, nesse caso ocorre uma translação vertical. Agora quando somamos um número a variável independente, a parábola se movimenta para esquerda do eixo y em relação a função $f(x)=x^2$ e quando subtraímos um número a variável independente, a parábola se movimenta para a direita do eixo y em relação a função $f(x)=x^2$, então ocorre uma translação horizontal. Ficou claro isso? Vocês relacionaram com alguma coisa que viram nas aulas?
Aluno: Sim, eu relacionei com a forma canônica, como vimos nas aulas, ficou fácil de ver o vértice da parábola no gráfico e na expressão também.
Professor Gabriel: Isso, Ótimo. As últimas questões da atividade foram dadas na forma canônica não apenas para facilitar a visualização do vértice, mas também para que vocês observassem as translações verticais e horizontais que ocorrem no gráfico em relação a função $f(x)=x^2$. Ficou claro isso gente?
Alunos: Sim.

ANEXO 5: Relatório de observação das aulas do Professor Miguel

Parte I – Atividade 1:



Aluna: Professor é função ou não?

Professor Miguel: É função, vocês lembram da regrinha da distributiva. Então a área y é $(x+2).(x+6)$, vocês terão que aplicar a distributiva.

Professor Miguel: A distributiva não era assim que vocês faziam $x^2+6x+2x+12$ e isso é igual a $x^2+8x+12$, aí tem a perguntinha na apostila. Pergunta a: Essa função é desse tipo $y=ax^2+bx+c$?

Alunos: É.

Professor Miguel: É né, então a letra a responde sim, e nesse caso afirmativo qual é os valores de a, b e c?

Professor Miguel: O valor de a é 1, o valor de b é 8 e o valor de c é 12.

Aluna: Professor eu acertei.

Professor Miguel: Todo produto com fatores é só aplicar a distributiva que cai numa equação do 2º grau completa.

Parte II - Atividade 2.2: $h=-t^2+6t$

Professor Miguel: Dêem alguns valores para t que é o tempo, eu escolhi de 0 até 6. Então por exemplo, a hora que arremessa a bola ela descreve uma parábola, vocês desenharam aí o movimento da bola com um cestinho no exercício anterior, não foi?

Alunos: Foi.

Professor Miguel: Então aqui vocês aplicam alguns valores, valores positivos porque não tem tempo negativo, de 0 até 6. Ai vocês tem $h=-0^2+6.0$, quando é tempo inicial tudo é zero, o tempo é zero a altura também é zero.

Professor Miguel: Depois quando o tempo for igual a 1, ai vocês tem $h=-1^2+6.1$. Então façam a continuação do que vocês entenderam.

Nesse momento o professor deu alguns minutos para que eles resolvessem.

Professor Miguel: O próximo, o tempo é 2 então a altura vai ser quanto? $-t^2+6.t$, menos dois ao quadrado mais seis vezes dois, fazendo dois ao quadrado, $2^2=4$, x vai ficar -4, e seis vezes dois é doze, então -4 + 12 vai ficar 8. Quer dizer a altura aqui é 8. E assim por diante.

Nesse momento o professor ficou andando pela sala e alguns alunos vinham até ele para tirar as dúvidas.

Atividade 2.5: $l=-x^2+80x-700$

Professor Miguel: Qual é o lucro se o ingresso para o show for vendido a R$ 20,00? Qual é o lucro?

Professor Miguel: Olhem o gráfico na lousa, então o lucro é de R$ 500,00.

Professor Miguel: A pergunta b pode-se afirmar que o empresário tem prejuízo quando o valor do ingresso for um valor maior que R$ 40,00?

Professor Miguel: Maior que 40, valores maiores está decrescendo, mas não é que vai ter prejuízo.

Aluna A: Ele vai ter um custo a mais?

Professor Miguel: Vai só decrescer o lucro.

Aluna A: Mas professor por que ele vai diminuir depois de 40? Ele vai ter um custo a mais?

Professor Miguel: Aqui está mostrando no gráfico que quanto mais caro for o ingresso ele vai ter menor lucro.

Aluna A: Mas por que ele vai ter menor lucro?

Professor Miguel: Dependendo do valor do ingresso, diminui as pessoas que vão ver o show né.

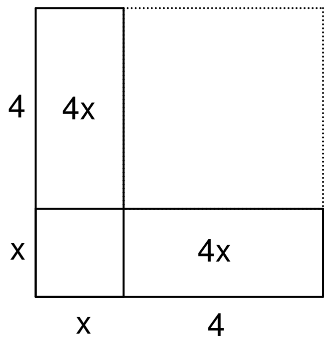
Professor Miguel: Na verdade não se pode afirmar que está tendo um prejuízo, cai o lucro, mas não prejuízo, prejuízo é quando ultrapassa R$ 70,00. Então do 40 até os 70 está decrescendo o lucro, mas não está tendo prejuízo. Agora valores acima de 70 têm prejuízo?
Alunos: Tem.
Professor Miguel: Tem né.
Professor Miguel: Para que valores o lucro começa a crescer?
Aluna B: A partir do 40, a partir do momento que é vendido por R$ 40,00.
Professor Miguel: Não, olha no gráfico o lucro está crescendo até aqui né, então para quais valores? Olha.
Aluna A: 10, 20, 30 e 40.
Aluna B: É de 10 até 40 reais.
Professor Miguel: Depois do 40 ele começa a decrescer.

Parte III – Atividade 3.1

Professor Miguel: O que vem a ser o vértice da parábola, graficamente é só olhar até onde vai a parábola. Esse ponto da parábola aqui é chamado vértice, aqui existe uma simetria. Esse eixo que eu coloquei perpendicular ao eixo x é a simetria, ela divide a parábola em duas partes iguais.
Professor Miguel: De acordo com a simetria vocês vão perceber que o ponto que vocês vão encontrar aqui é o vértice da parábola, primeiro o x e depois o y, nesse exemplo o vértice é V(2, -1).
Professor Miguel: Nesse outro exemplo que eu dei a parábola está com a concavidade para baixo, nós temos aqui a simetria e notamos que nesse ponto aqui o vértice fica sendo simbolicamente V(2, 1), primeiro o x e depois o y.
Professor Miguel: Na apostila vocês têm o primeiro e o segundo exercício para verificarem que são os vértices da parábola. Então eu vou fazer a letra b do exercício 1 na lousa, traçando o eixo de simetria podemos observar que o vértice é V(-2, -2), então -2 do eixo x e -2 do eixo y. Façam os outros.

Nesse momento o professor deu alguns minutos para que eles resolvessem.

Parte IV – Atividade 4.1



Professor Miguel: Vocês têm no desenho da apostila ai dois retângulos e um quadrado pequeno, então tem que relembrar o cálculo das áreas de figuras planas.

Professor Miguel: A área do retângulo é base vezes altura, 4 vezes x então dá 4x. Aqui no quadrado é x vezes x que dá x^2. Ai tem que calcular a área da figura pontilhada é fácil calcular né, é 4 vezes 4 que dá 16.

Professor Miguel: Somando as quatro áreas teremos $x^2 + 4x + 4x + 16$, e o lado do quadrado maior é 4 + x.

Professor Miguel: O exercício d pede para calcular a área do quadrado maior, então o quadrado maior tem lado 4 + x e a área é 4 + x vezes 4 + X, então $A = (4 + x).(4 + x) = 16 + 4x + 4x + x^2$, que é a mesma expressão algébrica obtida quando somamos as quatro áreas do quadrado maior.

Professor Miguel: Somando a área L da figura com a área do quadrado pontilhado temos A = 9 + 16 = 25, que é a área do quadrado maior, então o valor do lado do quadrado maior é 5, porque 5 vezes 5 dá 25, e x é igual a 1.

Atividade 4.3 – Completando quadrados: $x^2 + 2.4x = 9$

Professor Miguel: Então quando se fala em trinômio quadrado perfeito na 7ª série é o quadrado do primeiro termo mais duas vezes o primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo, esse é o nosso caso aqui.

Professor Miguel: Que número que eu vou colocar aqui $x^2 + 2.4.x + ... = 9 + ...$, para que ele fique um trinômio quadrado perfeito?

Professor Miguel: Se vocês lembrarem da regrinha, vai saber que esse produto aqui 2.4.x é duas vezes o primeiro pelo segundo, então aqui tem o primeiro que é x e o segundo ao quadrado aqui vai ser 16, porque a raiz de 16 dá 4. A raiz de 16 é?
Alunos: 4.
Professor Miguel: Então coloca 16 aqui $x^2+2.4.x+16=9+....$, e evidentemente se você acrescentou 16 lá, tem que acrescentar desse outro lado também $x^2+2.4.x+16=9+16$.
Professor Miguel: Agora transformando isso $x^2+8x+16=25$. Esse $x^2+8x+16$ é um trinômio quadrado perfeito, que é isso daqui $(x+4)^2=25$.
Aluna: Professor e o 16?
Professor Miguel: 16 já está aqui no $(x+4)^2$, o quadrado do primeiro é o x^2, duas vezes o primeiro pelo segundo é o 2. 4. x que é 8x e mais o quadrado do segundo que 4^2 é 16. É que vocês não lembram.
Professor Miguel: Isso vai ficar $x+4=\pm\sqrt{25}$.
Aluna: A gente não viu o trinômio perfeito na 7ª série.
Professor Miguel: Vocês tiveram é que não estão lembrando.
Professor Miguel: Continuando, $x+4=\pm 5$, vocês vão separar mais quatro com mais cinco e mais quatro com menos cinco.
Professor Miguel: Vai ficar $x_1=+5-4=1$ e $x_2=-5-4=-9$. As duas raízes são 1 e -9. Esse método aqui deveria ser ensinado antes de Bhaskara para vocês, mas só é possível se o coeficiente de b.x na expressão for positivo.
Professor Miguel: Olha esse exemplo ai, está na apostila de vocês 4.4: a) $x^2+6x=-5$. Vai completar a expressão $x^2+2.3.x+....=-5+....$, e o número que nós acrescentarmos no primeiro tem que ser acrescentado no segundo pra manter o equilíbrio.
Aluna: Professor como eu sei que número é esse que eu tenho que acrescentar?
Professor Miguel: Olha só, por que no exercício anterior você colocou 16 aqui $x^2+2.4.x+16=9+16$? Porque 4 vezes 4 é 16.
Aluna: Ah..., Vai ser 9.
Professor Miguel: Viu, não falei que você sabia.
Aluna: Professor eu posso colocar na lousa.
Professor Miguel: Coloca o 9 no primeiro e no segundo membro.

Professor Miguel: Isso, Agora você continua.

Aluna: Não, eu não quero.

Professor Miguel: Tudo bem então, $x^2+6x+9=4$, sempre dá raiz exata evidentemente é um trinômio quadrado perfeito.

Professor Miguel: A raiz quadrada de x^2 é x, mais a raiz quadrada de 9 é 3, então vai ficar $(x+3)^2=4$, que é um trinômio quadrado perfeito.

Professor Miguel: Ai vai dar $x+3=\pm\sqrt{4}$, raiz de 4 é?

Alunos: 2.

Professor Miguel: Isso, então $x+3=\pm 2$, logo $x_1=-2-3=-5$ e $x_2=+2-3=-1$. As duas raízes -5 e -1.

Aluna: É fácil.

Professor Miguel: Agora eu vou esperar vocês fazerem esses exercícios aqui, vou marcar no relógio meia hora.

Atividade 4.5:

Professor Miguel: A forma canônica é uma função desse tipo aqui $f(x)=a.(x-m)^2+n$, o m e o n são dois valores que na verdade são os vértices da parábola.

Professor Miguel: Vamos ver esse exemplo $x^2-4x-6=(x^2-4x)-6$ passo a passo.

Professor Miguel: Então (x^2-4x) nós separamos da função, o 4x é 2 vezes 2x e esse 2 aqui ao quadrado é 4, então vai ficar $(x^2-2.2x+4)$ subtraindo esse quatro que não estava na equação teremos $(x^2-2.2x+4)-4-6$, então isso daqui é um trinômio quadrado perfeito.

Professor Miguel: Ai nós vamos ter $(x^2-4x+4)-10$.

Professor Miguel: E isso é a mesma coisa que $(x-2)^2-10$, então m = 2 e n = -10.

Professor Miguel: Agora vocês vão tentar fazer os outros exercícios da apostila sozinhos.

Atividade 5:

Professor Miguel: Esse software chama-se Winplot, e vocês irão construir gráficos da função quadrática. Então peguem a apostila e sigam as primeiras instruções.

Aluna: Professor como eu digito x elevado ao quadrado?

Professor Miguel: Olhem aqui na lousa, para vocês escreverem a função tem que ser dessa maneira x^2.

Aluno: Professor o que é simetria mesmo?

Professor Miguel: Lembram que eu expliquei na aula, simetria divide a parábola em duas partes iguais. Que eixo está dividindo a parábola em duas partes iguais?

Aluno: É o eixo y?

Professor Miguel: Isso, o eixo y é o eixo de simetria.

Aluno: Professor eu não entendi o que significa aqui, que ponto a parábola intercepta o eixo y?

Professor Miguel: Em que número do eixo y a parábola está cruzando?

Aluno: É no zero?

Professor Miguel: Isso, e nas outras parábolas?

Aluno: É...No 1, e no -2.

Aluna: Professor, o que é translação?

Professor Miguel: Translação é o movimento que modifica a posição da parábola. A parábola pode se movimentar na vertical ou na horizontal.

Aluna: Professor vertical é assim? (a aluna fazia gestos com a mão, indicando o sentido vertical).

Professor Miguel: Isso é assim.

ANEXO 6 - **Avaliação dos estudantes**

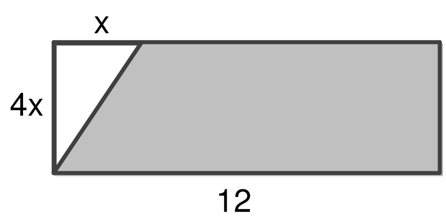
1) Um objeto é atirado para cima, da janela situada no alto de um prédio de 16m de altura. A altura h do objeto em relação ao solo, em metros, t segundos após o lançamento, é $h(t) = 16 + 6t - t^2$.

a) Essa função é da forma $y = ax^2 + bx + c$? Em caso afirmativo, determine os valores de a, b e c.

b) Que nome é dado a essa função?

c) Descreva como seria o gráfico dessa função.

2) Observe o retângulo abaixo:



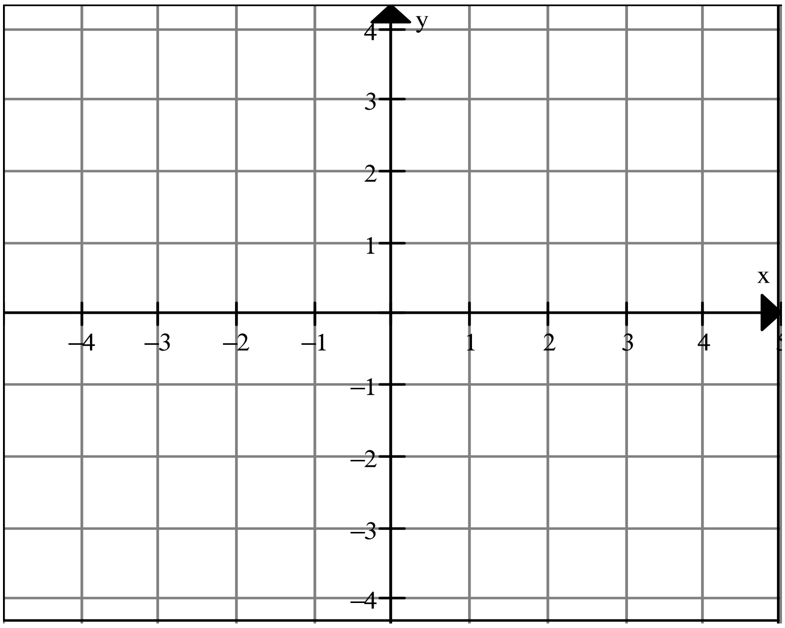
a) A área (y) pintada, representa a área do retângulo menos a área do triângulo, dessa maneira determine a expressão algébrica que fornece a área (y) da região pintada, em função de x.

b) Analisando por meio da expressão algébrica, o gráfico dessa função terá a concavidade voltada para cima ou para baixo?

c) Para x = 5, qual a área dessa região?

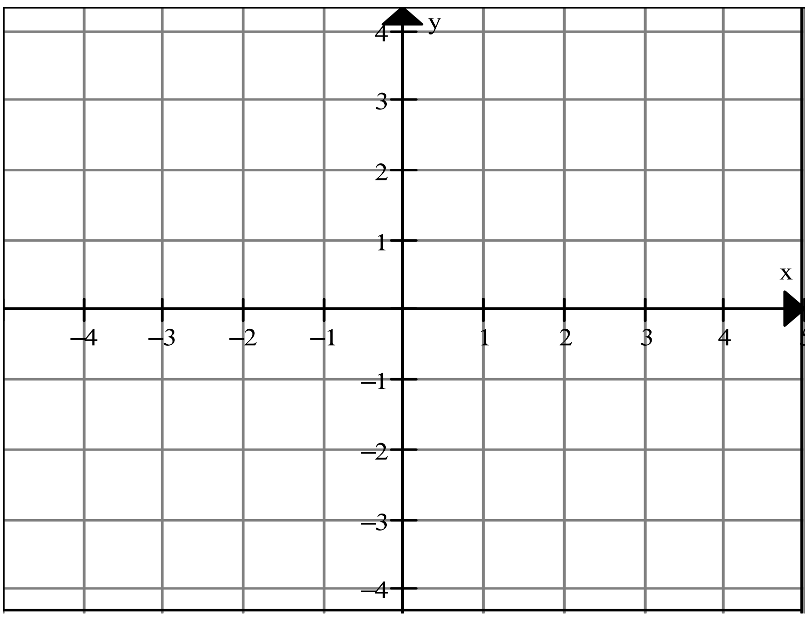
3) Supondo que a expressão algébrica que representa a altura h em metros que um canguru, ao saltar do solo obtém em função do tempo t em segundos, é dada por $h(t) = 6t - 3t^2$.

a) Represente graficamente o salto do canguru da função h.



b) Qual a altura máxima em metros atingida pelo canguru?
c) Em que instante o canguru atinge a altura máxima?

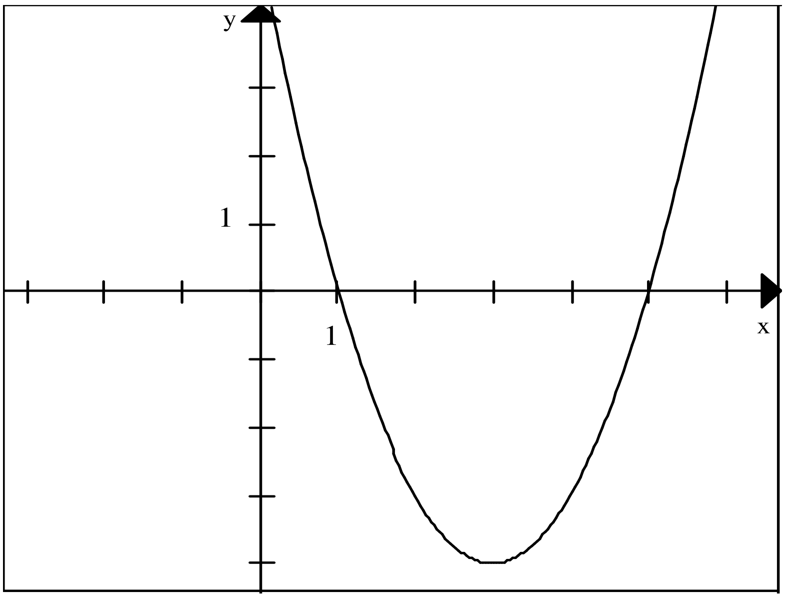
4) A trajetória de uma bola chutada para o gol descreve uma parábola de equação $h(t) = 4t - t^2$.
a) Represente a altura (h) da bola em metros em função do tempo (t em segundos), e responda:



b) Quais são os zeros dessa função, isto é, os valores de x para os quais h = 0. Procure argumentos para justificar sua resposta.
c) Indique os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

ANEXO 7 – Avaliação dos Estudantes

1) Identifique graficamente o vértice da parábola.



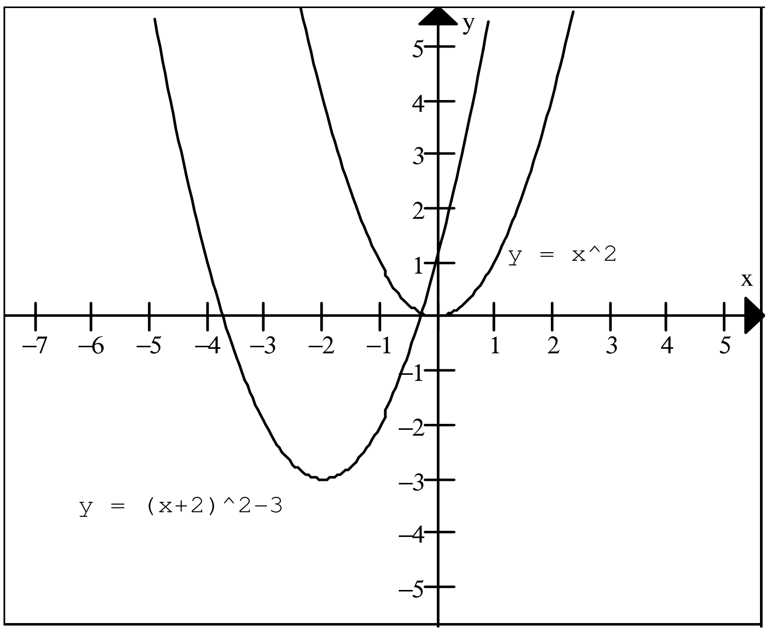
V(.....,......).

2) Determine as raízes da função, completando quadrados pelo método algébrico: $f(x) = x^2 + 6x - 5$

3) Escreva na forma canônica a seguinte função quadrática: $f(x) = x^2 + 2x - 24$.

4) Determine as coordenadas do vértice da função quadrática $f(x) = (x-2)^2 - 10$.

5) Observe os gráficos das funções quadráticas $f(x) = x^2$ *e* $f(x) = (x+2)^2 - 3$:



Como é o gráfico da função $f(x) = (x+2)^2 - 3$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$?