PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

Monique Matos de Oliveira Covi

O desenvolvimento do ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, por meio do quadro teórico de Bernard Parzysz

SÃO PAULO

2024

MONIQUE MATOS DE OLIVEIRA COVI

O desenvolvimento do ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, por meio do quadro teórico de Bernard Parzysz

Trabalho Final apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Elton de Andrade Viana.

SÃO PAULO

2024

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação de Mestrado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura ____

Data ___________________

e-mail ____

Covi, Monique Matos de OLiveira
O desenvolvimento do ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, por meio do quadro teórico de Bernard Parzysz. / Monique Matos de OLiveira Covi. -- São Paulo: [s.n.], 2024.
134p. il. ; cm.

Orientador: Elton de Andrade Viana.
Dissertação (Mestrado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Quadriláteros. 2. Livros Didáticos. 3. Geometria. 4. Ensino Fundamental. I. Viana, Elton de Andrade . II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

MONIQUE MATOS DE OLIVEIRA COVI

O desenvolvimento do ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, por meio do quadro teórico de Bernard Parzysz

Trabalho Final apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Elton de Andrade Viana.

Aprovado em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Elton de Andrade Viana – PUC-SP

____
Profa. Dra. Monica Souto da Silva Dias – IME -UFF

____
Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP

Ao meu amado filho, ao meu amado marido, à minha amada mãe, aos meus familiares e aos meus amigos pela compreensão, paciência, amor e por me incentivarem sempre.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 – Processo nº 88887.675797/2022-00.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001 – Process no 88887.675797/2022-00.

AGRADECIMENTOS

Primeiro agradeço a Deus por toda força e por conseguir concluir mais uma etapa importante da minha vida.

À querida Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva, pela orientação, apoio e amizade.

Aos membros da banca, Professores Doutores Elton de Andrade Viana, Maria José Ferreira da Silva e Monica Souto da Silva Dias, pelas importantes contribuições e sugestões para essa pesquisa.

Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, especialmente às Professoras Doutoras Bárbara L. Bianchini e Celina A. A. P. Abar.

A todos os funcionários do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, especialmente à Suzanne, pelas ajudas e pelo incentivo no final do processo.

Aos meus queridos amigos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, Daniel Mendes, Rogério Vedove, Cristine Moura, Alexandre Felicio, José Carlos da Silva e David Correia.

Ao meu tão esperado e amado filho, por ser um incentivo para que eu terminasse e não desistisse no final do processo.

Ao meu amado marido, pelo amor e por me apoiar e incentivar sempre.

À minha amada mãe, por ser um exemplo de mulher batalhadora e guerreira e por sempre acreditar em mim.

Ao meu pai, pelo apoio e carinho.

Aos meus familiares e amigos, pelo incentivo e por sempre estarem ao meu lado.

À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

À todas as pessoas que, de alguma maneira, acreditaram e contribuíram para a realização dessa pesquisa.

COVI, M. M. O. **O desenvolvimento do ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, por meio do quadro teórico de Bernard Parzysz**. 2024. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2024.

RESUMO

O estudo investiga como o ensino de quadriláteros é abordado em livros didáticos do Ensino Fundamental analisando duas coleções. Os objetivos são analisar a apresentação do tema nos livros e avaliar as transições entre volumes, tendo em vista as geometrias do quadro teórico de Parzysz. A pesquisa utiliza a revisão bibliográfica, focando em dissertações e teses da PUC-SP e da CAPES, e se baseia em autores como Jesus e Oliveira sobre o ensino de geometria. Constatou-se uma falta de pesquisas específicas sobre quadriláteros e Parzysz, além de lacunas em sugestões de materiais didáticos o que dificulta uma compreensão mais profunda do tema.

Palavras-chave: Quadriláteros; Livros Didáticos; Geometria; Ensino Fundamental; Materiais Didáticos.

ABSTRACT

The study investigates how the teaching of quadrilaterals is addressed in elementary school textbooks, analyzing two collections. The objectives are to analyze how the topic is presented in the books and assess transitions between the volumes, taking into account seen the geometries of Parzysz's theoretical framework. The research uses a literature review, focusing on dissertations and theses from PUC-SP and CAPES, and draws on authors such as Jesus and Oliveira on geometry teaching. It was found that there is a lack of specific research on quadrilaterals and Parzysz, as well as gaps in teaching materials that hinder a deeper understanding of the topic.

Keywords: Quadrilaterals; Textbooks; Geometry; Elementary Education; Teaching Materials

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DETABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

CP7 Se dois segmentos de reta são paralelos e congruentes então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

DT1 um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos que são chamados de bases do trapézio.

DR Um quadrilátero é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

K1 A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º.

K2 A soma dos ângulos externos também é igual a 360º.

DL Um quadrilátero é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes

DP Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui seus lados opostos paralelos.

DQ Um quadrilátero é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

L1 As diagonais de um losango são perpendiculares.

L2 Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

P1 Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

P2 Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

P3 Em todo paralelogramo dois lados opostos quaisquer são congruentes.

P4 Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.

P5 Em todo paralelogramo, as diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

P6 Todo quadrilátero convexo em que as diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

P7 Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

PUC-SP Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

R1 As diagonais de um retângulo são congruentes.

R2 Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

T1 em qualquer trapézio os dois ângulos nos extremos de cada lado não paralelo têm soma de medidas igual a 180°.

TI1 Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

T2 Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio então: (1) ele é paralelo às bases e (2) ele é igual à semissoma das medidas das bases.

TI2 As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

T3 Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então esta extremidade é ponto médio deste lado.

Q1 Todo quadrado é retângulo e também losango.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudante perpassa por momentos na aprendizagem em que deve tomar a iniciativa de buscar conexões e entender como o conhecimento que é ensinado pode ser aplicado. Essa autonomia está ligada a uma intencionalidade do estudante em relação ao processo de aprendizagem, no entanto, o que se observa em sala de aula é uma aprendizagem receptiva, ou seja, o estudante espera que o professor ensine o conteúdo, o que não favorece o processo de aprendizagem consciente.

Segundo Alberts e Kaenders (2005 *apud* Nagata, 2016, p. 25) embora a matemática seja o curso mais racional em toda a cultura, a intuição ainda desempenha seu papel, na maior parte do raciocínio, tem-se que confiar na intuição. No caso da geometria, essa precisão intuitiva torna-se mais fácil de ser verificada.

A tendência é pensar que a intuição em geometria deve ser aceita apenas no início da aprendizagem e não em todo o processo de aprendizagem, o que pode limitar o desenvolvimento do estudante.

A geometria tem papel fundamental na compreensão de tudo ao nosso redor. A paixão por ela tornou-se intensa ao iniciar aulas com as construções geométricas e a experiência ao longo dos anos em sala de aula proporcionou para esta pesquisa uma parte das análises e do interesse em trabalhar com essa área da matemática. Sabe-se que os motivos de isso ocorrer são os mais diversos possíveis como falta de recursos e materiais, falta de preparo do professor ou até mesmo falta de interesse pela área por parte do professor.

Esta pesquisa tem como objetivos analisar o ensino de quadriláteros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais e outra coleção dos finais do Ensino Fundamental; identificar as geometrias referenciadas em cada volume das coleções com base no quadro teórico de Parzysz; examinar as transições de conteúdo sobre quadriláteros dentro de cada volume e entre os volumes.

A pesquisa está estruturada em cinco capítulos, sendo esta introdução o Capítulo 1. No Capítulo 2 são abordados o referencial teórico, a revisão bibliográfica, o problema de pesquisa, a metodologia e os procedimentos para o desenvolvimento da dissertação. No Capítulo 3 são apresentados o estudo didático dos quadriláteros, suas propriedades e demonstrações. No Capítulo 4 são apresentadas as análises realizadas em cada um dos livros didáticos. Por fim, no Capítulo 5, ~~são apresentadas~~

as reflexões finais a respeito das análises realizadas e das perspectivas para pesquisas futuras.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo serão apresentados o referencial teórico que motivou esta pesquisa, a revisão bibliográfica, o problema de pesquisa, a metodologia e os procedimentos para o desenvolvimento da dissertação.

2.1 Referencial teórico

O desenvolvimento da aprendizagem no estudo dos quadriláteros pode ser analisado por meio de diferentes teorias e abordagens. Ao analisar a aplicação de alguns modelos teóricos, juntamente com estratégias de ensino relacionadas aos quadriláteros e a contribuição para o desenvolvimento efetivo do pensamento geométrico decidiu-se utilizar, neste trabalho, uma das teorias relevantes para o ensino e a aprendizagem de geometria, o quadro teórico de Bernard Parzysz[1].

O modelo de Parzysz (2006) articula quatro geometrias com base na natureza dos objetos em jogo (físico vs. teórico) e nos modos de validação (perceptivo vs. hipotético-dedutivo), além de destacar a importância da transição entre elas para uma compreensão mais profunda e abrangente de geometria.

Parzysz (2006) tem por objetivos: analisar como os estudantes apreendem conceitos geométricos e suas dificuldades; estabelecer uma distinção entre os diferentes paradigmas e como eles auxiliam no ensino e na aprendizagem; enfatizar a importância da formação dos professores para que possam investigar e melhorar o ensino de geometria; promover o desenvolvimento das habilidades geométricas e cognitivas dos estudantes. Assim, contribuir para uma formação mais sólida e crítica dos estudantes em relação à Geometria.

No Quadro 1 apresentamos um resumo da teoria baseado no autor, e nele pode ser observado quatro tipos de geometrias, geometria não axiomática (**concreta** e **espaço-gráfico**), em que os objetos são físicos e as validações são perceptivas, e

[1] Bernard Parzysz é um pesquisador renomado na área da didática da matemática, com contribuições significativas para o ensino da geometria e a formação de professores. É professor emérito. Bât. Sophie Germain – 8º andar – e-mail: parzysz.bernard@wanadoo.fr. Disciplinas: Formação de Professores, Métodos de Ensino e Educação em Ciências. Doutor em Ciências e Técnicas Comuns (Paris 7, 1989). Docente no IUFM da Lorena e na Universidade de Metz (em 1999). Disponível em: https://www.ldar.website/bernard-parzysz; https://www.researchgate.net/profile/Bernard-Parzysz; e https://www.persee.fr/authority/27978. Acesso em: 19 de maio de 2024.

a geometria axiomática (**proto-axiomática** e **axiomática**), em que os objetos são teóricos e as validações são dedutivas.

Quadro 1 - Quadro teórico de Bernard Parzysz

	Geometrias não axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipo de geometria	Concreta (G0)[2]	Espaço-gráfico (G1)	Proto-axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objetos	físicos		teóricos	
Validações	perceptivo-dedutivos		Hipotético-dedutivos	

Fonte: Adaptado de Parzysz (2006, p. 130).

Em **G0 – Geometria Concreta**, para Bongiovanni (2007) os estudantes devem se relacionar a uma situação real, concreta em que os objetos são materializados. No caso dos quadriláteros eles são identificados com base em características visuais quando os estudantes reconhecem características como ângulos e lados na manipulação de materiais concretos e por isso foi considerada a geometria da visualização por Dias (2009).

Por exemplo, os estudantes ao observarem um retângulo e um quadrado, notam que os lados opostos de um retângulo são paralelos e iguais em comprimento, enquanto os lados de um quadrado são todos iguais em comprimento.

Em **G1 – Geometria Espaço-Gráfico** é a geometria das representações figurais e gráficas, nesse nível os objetos são bidimensionais, como por exemplo, desenhos produzidos numa folha de papel ou em um computador. Para Bongiovanni (2007, p. 6) a justificativa de propriedades é feita pelo “olhar” e em Dias (2009), G1 é considerada a geometria da análise em que os estudantes começam a reconhecer propriedades dos quadriláteros que permitem representações gráficas e a comparação entre os diferentes tipos de quadriláteros.

Por exemplo, ao analisarem um retângulo e um quadrado, identificam que no retângulo tem ângulos retos e lados opostos paralelos, enquanto o quadrado é um retângulo com lados iguais.

Em **G2 – Geometria Proto-axiomática**, para Bongiovanni (2007, p. 6) os conceitos são:

> objetos teóricos e as demonstrações dos teoremas são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo; os objetos e o caminho da validação são “localmente” os mesmos que na geometria axiomática, mas não há necessidade de explicitar um sistema de axiomas. É possível que

[2] Em Parzysz (2006) a geometria G0 não é considerada uma geometria, propriamente dita.

> nesse nível elementos de G0 e G1 sejam incorporados no G2, ou seja, é possível que o sabido se apoie ainda no percebido.

De acordo com Dias (2009), essa é a geometria da dedução formal, os estudantes começam a fazer validações perceptivas para propriedades das figuras, se aprofundam nas propriedades dos quadriláteros e utilizam argumentos lógicos para justificar suas conclusões. Eles podem explorar teoremas e relações entre ângulos e lados.

Por exemplo, ao analisarem um quadrilátero utilizam o teorema dos ângulos internos, para provar que a soma dos seus ângulos internos é igual a 360 graus e demonstram que os ângulos de um retângulo são todos retos e que os lados opostos são paralelos.

Para Bongiovanni (2007) em **G3 – Geometria Axiomática** os axiomas são explicitados completamente. Considerada a geometria do rigor por Dias (2009), nela ocorrem validações dedutivas por meio de teoremas e demonstrações e os estudantes desenvolvem o pensamento abstrato quando aplicam suas habilidades de análise formal para deduzir propriedades gerais.

Por exemplo, os estudantes podem generalizar que todos os quadrados são retângulos, mas nem todos os retângulos são quadrados, podem explorar relações entre os lados e ângulos dessas figuras.

De acordo com Dias (2009), ao analisar as respostas é interessante observar o desenvolvimento dos estudantes. Em G0, os estudantes têm uma compreensão visual e intuitiva dos quadriláteros. Logo, reconhecem o quadrilátero como retângulo com base em suas características visuais, como ângulos e lados. Em geral, reconheceriam retângulos, quadrados, trapézios e paralelogramos com base nas mesmas características. Na transição para G1, os estudantes devem explorar as propriedades dos quadriláteros de forma mais sistemática, descrever as relações entre os lados e ângulos dos quadriláteros usando termos específicos. Assim, identificar que os lados opostos são paralelos.

Ainda em Dias (2009), na passagem para G2 os estudantes não conseguem responder, pois não tem informações suficientes sobre a figura e explicam quais afirmações seriam necessárias para que essa geometria fosse verificada. Em G2, os estudantes necessitam aprofundar-se nas propriedades dos quadriláteros e começam a justificar suas conclusões, utilizam-se de argumentos lógicos para provar teoremas relacionados aos quadriláteros. Por exemplo: o teorema dos ângulos internos (a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360 graus) e o teorema dos lados opostos paralelos. E finalmente, na transição para G3, os estudantes também não responderam e justificaram quais seriam os dados necessários para a verificação. Nessa geometria os estudantes deveriam aplicar suas habilidades de análise formal para deduzir propriedades gerais dos quadriláteros, fazer generalizações sobre todos os quadriláteros ou grupos específicos, como exemplo, afirmar que todos os quadrados são retângulos, mas nem todos os retângulos são quadrados.

Do ponto de vista didático, de acordo com Parzysz[3]:

> a distinção entre essas geometrias aparece nas rupturas de contrato que se produzem entre uma e outra, e mais precisamente:
> - passagem de G0 à G1: materialidade dos objetos em jogo (madeira, papel, palha, ...)
> - passagem de G1 à G2: largura dos traços, pontos, justificativa perceptiva.
> - passagem de G2 à G3: propriedades julgadas “evidentes”. (Parzysz, 2006, p. 130). Tradução nossa.

Ou seja, em G0 e G1 as justificativas são feitas pelo percebido, enquanto no nível G2 por propriedades evidentes e no nível G3 por um sistema de axiomas.

Em Parzysz (2006), a dialética entre o sabido e o percebido no ensino de geometria destaca a interação entre G1 e G2 que envolve uma alternância entre a geometria intuitiva (G1) e a geometria axiomática (G2) durante a resolução de problemas, em que o percebido guia as conjecturas e a verificação, enquanto o sabido é controlado e confirmado. A relação dinâmica entre o sabido e o percebido é essencial para a construção dos saberes geométricos pelos estudantes ao permitir a integração da observação, modelagem e demonstração na resolução de problemas geométricos. Essa dialética é considerada constitutiva e inevitável no processo de aprendizagem da geometria, especialmente no ensino obrigatório.

Uma das articulações entre as geometrias analisadas por Parzysz (2006) pode ser a passagem de G2 para G3 que pode envolver uma axiomatização completa ou parcial, com referência ao "real" que é opcional em G3, mas essencial em G2. A articulação entre G2 e G3 destaca a importância da formalização dos conceitos geométricos e da validação hipotético-dedutiva na construção de saberes geométricos. Essa articulação contribui para uma compreensão mais aprofundada e

---

[3] «Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les *ruptures de contrat* qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément: - passage de G0 à G1: matérialité des objets en jeu (bois, carton, paille...) - passage de G1 à G2: épaisseur des traits, des points; justification perceptive - passage de G2 à G3: propriétés jugées "évidentes". (PARZYSZ, 2006 – p. 130).

estruturada da geometria que permite uma transição gradual da intuição para a formalização no ensino de geometria.

De acordo com Parzysz (2006), sua teoria aborda a evolução do ensino da geometria, ao destacar a transição dos estudantes de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração e enfatiza a importância da figura na resolução de problemas geométricos e a necessidade de os estudantes compreenderem e integrarem os saberes geométricos nos processos de modelagem e demonstração.

> Uma das finalidades do ensino da geometria no ensino obrigatório é fazer com que os alunos passem de uma 'geometria de observação' para uma 'geometria da demonstração', e a noção de 'figura' - à qual voltarei – é um elemento central e incontornável nas práticas desse nível. (Parzysz, 2006, p. 129). Tradução nossa.

Para compreender a transição de uma geometria para outra nessa teoria, em Dias (2009, p.25) encontra-se um estudo de quadriláteros em que é apresentado um quadrilátero e questionado ao estudante o que ele pode dizer a respeito da figura e que justifique a sua resposta. A partir dos exemplos de respostas dadas pelos estudantes e de uma breve explicação da adequação à classificação é possível observar as passagens de G0 para G1, de G1 para G2 e de G2 para G3.

Assim é possível observar que um estudante no nível G0 responderia que a figura é um retângulo e justificaria sua resposta com base na percepção de atributos físicos do objeto. No nível G1, um estudante respondeu que é um retângulo, porque conferiu paralelismo com o par de esquadros e mediu os lados opostos com uma régua e usou justificativas baseadas em propriedades observadas por meio de instrumentos de construção geométrica. Em G2, o estudante poderia afirmar que não é possível responder sem mais dados, explicando que, se tivéssemos a garantia de que dois lados opostos eram paralelos e iguais, poderíamos afirmar que era um paralelogramo; para ser um retângulo, precisaríamos ter certeza de que pelo menos três ângulos eram iguais. Essa resposta demonstra que o estudante busca justificar suas observações com teoremas e definições, sem se render à evidência do desenho. Por fim, um estudante no nível G3 reconheceria que, na geometria euclidiana, a figura poderia ser um retângulo ou um paralelogramo, mas apenas se houvesse mais dados no enunciado que permitissem deduzir de que figura se trata. Esse estudante demonstra conhecimento de que cada geometria possui um sistema axiomático próprio, e é dentro desse sistema que se deve justificar a resposta.

Assim, essas repostas mostram a progressão do raciocínio geométrico dos estudantes, desde a percepção básica até a aplicação de conceitos teóricos mais complexos.

Em resumo, o quadro teórico de Bernard Parzysz (2006) fornece uma estrutura progressiva para o estudo dos quadriláteros, desde a visualização até a dedução de propriedades gerais. Essa abordagem ajuda os estudantes a desenvolverem uma compreensão mais profunda e significativa da geometria e auxilia os professores no ensino de geometria, especialmente quando não têm acesso a recursos de informática em sala de aula.

2.2 Revisão bibliográfica

Nesta pesquisa, a procura por referências bibliográficas foi conduzida em duas principais fontes, uma delas foi o acervo científico virtual brasileiro no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES)[4] e, a outra foi o repositório da PUC-SP[5] que foi realizada de acordo com as necessidades ao longo do processo da revisão bibliográfica.

Desde o início do Mestrado, um dos temas que despertou interesse e que foi mencionado até mesmo durante a entrevista de admissão foi a investigação da utilização de construções geométricas para o ensino de geometria. Nesse contexto, a dissertação de Jesus (2008) foi uma das primeiras a ser examinada. Durante as pesquisas iniciais, antes da definição do estudo do ensino de quadriláteros, também foi analisado o trabalho de Oliveira (2015), que abordava o ensino de geometria com o uso de régua e compasso.

Os orientadores da PUC-SP apresentaram as dissertações de Maioli (2002) e de Dias (2009), que se tornaram referências importantes para esta pesquisa após a definição do tema e do quadro teórico.

A seleção de outros trabalhos foi realizada no repositório da PUC-SP, com os termos de busca: Quadriláteros; Parzysz; Quadriláteros e Parzysz; Quadriláteros e livro didático; Parzysz e livro didático; e Parzysz e construções geométricas. Após cada termo ser inserido, foram analisados os resultados apresentados no painel de

[4] https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/ - !/. Disponível em: 19 maio 2024.

[5] https://repositorio.pucsp.br/. Disponível em: 29 abr. 2024.

informações quantitativas de teses e dissertações. Para cada termo foi conduzida uma análise com base no número total de documentos e de quais eram dissertações e quais eram teses, conforme os dados apresentados na Tabela 1.

Tabela 1- Documentos encontrados no repositório da PUC-SP

Termo pesquisado	Total	Dissertação (Mestrado)	Tese (Doutorado)	Outros[6]
Quadriláteros	587	333	217	37
Parzysz	58	45	11	2
Quadriláteros e Parzysz	30	22	8	-
Quadriláteros e livro didático	356	216	130	10
Parzysz e livro didático	56	43	11	2
Parzysz e construções geométricas	52	40	10	2

Fonte: https://repositorio.pucsp.br/. Acesso em: 19 maio 2024

Ao analisar a Tabela 1, contatou-se que havia 587 trabalhos que tratavam de Quadriláteros; 58 sobre Parzysz; 30 sobre Quadriláteros e Parzysz; 356 sobre Quadriláteros e livro didático; 56 sobre Parzysz e livro didático e 52 sobre Parzysz e construções geométricas. Além disso, observou-se que não havia muitas dissertações sobre Quadriláteros e Parzysz (22) e Parzysz e livro didático (43), assuntos específicos diretamente relacionados a essa pesquisa.

As duas últimas seleções foram realizadas com o filtro de busca do repositório. Inicialmente, ao inserir Parzysz e construções geométricas, foram encontrados 52 trabalhos. Em seguida, ao selecionar teses, restaram 10, e ao restringir o período de 2019 a 2023, por considerar um período dos 5 anos anteriores apenas a de Pontes (2021) foi identificada.

Posteriormente, ao incluir Parzysz (2006) na busca no repositório da PUC-SP, foram encontrados em 58 trabalhos, que após aplicar o filtro de dissertação, foram selecionados 45 trabalhos. Ao analisar o período de 2019 a 2023, três trabalhos foram identificados: um sobre formação continuada de docentes, outro sobre trigonometria

[6] Monografia de Especialização ou Trabalho de Conclusão de Curso.

e um terceiro sobre o uso das tecnologias digitais de informação e comunicação para o estudo dos quadriláteros.

Durante a análise do acervo da CAPES, os mesmos termos de busca empregados no repositório da PUC-SP foram utilizados: Quadriláteros; Parzysz; Quadriláteros e Parzysz; Quadriláteros e livro didático; Parzysz e livro didático; e Parzysz e construções geométricas. Em seguida, cada termo foi examinado em relação ao número total de documentos para identificar quais eram dissertações e teses, conforme detalhados na Tabela 2.

Tabela 2 - Documentos encontrados no acervo científico virtual brasileiro da CAPES

Termo pesquisado	Total	Dissertação (Mestrado)	Tese (Doutorado)	Outros[7]
Quadriláteros	796	564	171	59
Parzysz	15	7	-	7
Quadriláteros e Parzysz	-	-	-	
Quadriláteros e livro didático	1	1	-	-
Parzysz e livro didático	2	2	-	-
Parzysz e construções geométricas	2	1	-	1

Fonte: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/ - !/. Disponível em: 19 maio 2024.

Na Tabela 2, constatou-se que não foram encontrados trabalhos que tratavam de Quadriláteros e Parzysz, havia apenas um trabalho sobre Quadriláteros e livro didático, dois sobre Parzysz e livro didático, dois sobre Parzysz e construções geométricas, 15 sobre Parzysz e 796 sobre Quadriláteros. Desta forma, constatou-se apenas dois trabalhos de dissertação em Parzysz e livro didático, assunto específico relacionado a essa pesquisa.

Na seleção do único trabalho, ao filtrar as buscas para Quadriláteros e livro didático, a dissertação Menezes (2004) foi escolhida, porém para obtenção do texto foi necessário solicitar autorização ao autor por meio da plataforma ResearchGate, e até o presente momento o autor não o disponibilizou.

[7] Mestrado Profissional ou Profissionalizante.

Posteriormente, ao notar, no acervo da CAPES, o número limitado de trabalhos - dois em Parzysz e livro didático e dois em Parzysz e construções geométricas - foram encontrados, os trabalhos de Possani (2012), Souza (2010), Miranda (2006) e Secco (2007). No entanto, a dissertação de Miranda (2006) estava com acesso restrito. Aguarda-se retorno até o momento atual.

Ao analisar os 15 trabalhos que correspondiam às buscas por Parzysz, foram desconsiderados os trabalhos selecionados anteriormente e, inicialmente, que tivessem relação com quadriláteros, sendo escolhido o trabalho de Duarte (2007), pois ao analisar o título dessa dissertação, que se refere ao paralelogramo, chamou atenção, pois não há trabalhos classificados como Quadriláteros e Parzysz no acervo da Capes. Na sequência foi realizada a busca por Quadrilátero e Parzysz, com o termo Quadrilátero no singular e não foram encontrados resultados. A busca por Paralelogramo e Parzysz também não obteve sucesso, mas ao pesquisar somente Paralelogramo, a dissertação foi localizada.

Outra seleção referente ao termo Paryzys envolveu à exclusão de trabalhos da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e foram identificadas duas dissertações. A dissertação de Carvalho (2010) foi a escolhida, por abordar o ensino de representações planas de corpos geométricos tridimensionais.

Durante a seleção relacionada ao termo Quadriláteros, ao filtrar por teses, foram encontrados 171 trabalhos e ao restringir o período de 2019 a 2023, resultaram 44 trabalhos. Por último, ao restringir a de área de conhecimento para Ensino de Ciências e Matemática, foram identificadas três teses: Costa (2019), Gárcia-Cuellar (2021) e Vilaca (2023). Vale ressaltar que a tese de Vilaca (2023) não possui divulgação autorizada de acordo com o acervo da CAPES.

Destaca-se que foram realizadas as buscas pelos termos citados em diferentes momentos, por diversas vezes nos dois repositórios, e as quantidades de trabalhos encontrados foram sempre as mesmas. Também, é importante observar que a quantidade de trabalhados sugeridos no repositório da PUC-SP sempre foi superior aos sugeridos pelo acervo da CAPES e que as mesmas sugestões foram encontradas em ambas as fontes.

No final ficamos com 14 trabalhos que foram categorizados em: geometria plana, geometria espacial e formação de professores e são identificados nos Quadros 2, 3 e 4 na ordem descrita durante as seleções nas fontes mencionadas anteriormente, o autor, o título, o ano de publicação, a sigla da instituição em que foi realizado e a sigla[8] do termo utilizado na durante a pesquisa.

No Quadro 2 apresentamos todos os trabalhos selecionados relacionados à geometria plana.

Quadro 2 - Trabalhos selecionados relacionados à geometria plana

Autor	Título	Ano	Instituição	Termo utilizado
OLIVEIRA, L. M. S.	Ensinando geometria com régua e compasso, uma proposta para o 8º ano.	2015	UENF	Q
SANTOS, A. A.	Uma sequência de ensino para o estudo das propriedades dos polígonos via pavimentação.	2007	PUC-SP	PL e QL
CONCEIÇÃO, G. H.	Uso das tecnologias digitais de informação e comunicação para o estudo dos quadriláteros: uma configuração em tipos de prova e demonstração.	2022	PUC-SP	P
SECCO, A.	Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas.	2007	PUC-SP	PC
DUARTE, V. F.	Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova.	2007	PUC-SP	P
COSTA, A. P.	A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis.	2019	UFPE	Q

Fonte: Repositório da PUC-SP e acervo da CAPES.

A dissertação de Oliveira (2015) apresentou um estudo sobre o ensino de geometria para estudantes do 8º ano, com régua e compasso como ferramentas facilitadoras da aprendizagem. A pesquisa foi de natureza qualitativa e utilizou a modalidade de investigação-ação que envolveu a ação e a investigação de forma alternada para promover a reflexão crítica e o aperfeiçoamento de métodos de ensino. A dinâmica cíclica de ação-reflexão da investigação-ação permitiu ao professor explorar sua prática, resolver problemas e introduzir alterações com base nas reflexões realizadas.

No referencial teórico destacaram-se os teóricos Alan Hofer, Van Hiele e Crowley para a compreensão da relevância de propostas de ensino que tornassem a aprendizagem mais significativa e estimulassem a reflexão dos estudantes. Foram abordadas questões relacionadas ao pensamento geométrico dos estudantes, a importância do desenvolvimento de habilidades de desenho e construções

[8] As siglas utilizadas para os termos na tabela foram os seguintes: Q para Quadriláteros; P para Parzysz; QP para Quadriláteros e Parzysz; QL para Quadriláteros e livro didático; PL para Parzysz e livro didático; e PC para Parzysz e construções geométricas.

geométricas, bem como a necessidade de atividades que permitissem aos estudantes explorarem e descobrir conceitos por conta própria.

Estudantes do 8º ano foram os sujeitos dessa dissertação para os quais foi proposta uma abordagem de ensino de geometria com o uso de régua e compasso. O objetivo era avaliar o nível de pensamento geométrico desses estudantes e oferecer atividades adequadas que facilitassem a compreensão ~~dos~~ de conceitos geométricos para tornar a aprendizagem prática e estimulante.

Os principais aspectos abordados, para o ensino de quadriláteros com régua e compasso como facilitadores da aprendizagem em Oliveira (2015), forneceram uma visão eficaz e contribuíram para uma abordagem mais reflexiva durante os estudos realizados para esta pesquisa.

A dissertação de Santos (2007) teve como objetivo investigar uma abordagem relevante para o ensino e a aprendizagem de polígonos baseada na ~~a~~ exploração de pavimentações no plano. Os referenciais teóricos utilizados foram o quadro teórico de Parzysz, as quatro dimensões de Machado e os campos conceituais de Vergnaud. A metodologia empregada envolveu a concepção, realização, observação e análise de uma sequência de atividades para o ensino dos polígonos.

Amarildo Aparecido dos Santos, professor-pesquisador, que conduziu a pesquisa na E. E. Profª. Inah de Mello em novembro de 2006 de como os estudantes interagiam com conceitos geométricos, principalmente relacionados a polígonos. Os dados coletados durante a pesquisa, como atividades realizadas, transcrições e registros escritos, foram utilizados para compreender o processo de produção e significados relativos ao estudo dos polígonos via pavimentação. A identidade dos estudantes envolvidos foi preservada por meio da utilização de pseudônimos.

Na dissertação houve menção aos quadriláteros em relação aos conteúdos geométricos abordados em livros didáticos. Em uma análise dos livros da 7ª série, Santos destacou que o autor dedicou três tópicos para a geometria ao realizar um estudo aprofundado sobre triângulos, quadriláteros e círculos. Além disso, os livros apresentaram exercícios de geometria relacionados à álgebra, que poderiam ser resolvidos com o uso de régua e compasso. Também foram citadas as propriedades do paralelogramo, sem omitir o postulado de Euclides. Essa abordagem dos quadriláteros nos livros didáticos evidenciou a importância dada a essas figuras geométricas no ensino de geometria na 7ª série (atual 8º ano) e ressaltou a relevância dos quadriláteros para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Em resumo, a seleção da dissertação de Santos (2007) foi motivada pela abrangência de duas categorias de termos relevantes para a pesquisa, contribuindo para o ensino de quadriláteros, o embasamento do quadro teórico e a análise em relação aos livros didáticos. Assim, ofereceu exemplos práticos de como integrar o estudo dos quadriláteros com o modelo de Parzysz que auxiliou na criação de atividades e abordagens inovadoras para o ensino da geometria, contribuindo para essa pesquisa.

A dissertação de Conceição (2022) abordou a investigação das concepções de professores polivalentes do Ensino Fundamental dos anos iniciais em relação às provas e demonstrações matemáticas, com foco no estudo dos quadriláteros. Ao utilizar fundamentos teóricos da Teoria das Situações Didáticas, (é metodologia não é teoria) e da Teoria Antropológica do Didático, bem como os pressupostos de Balacheff e Parzysz, a pesquisa buscou identificar e analisar as concepções dos professores por meio da análise de um livro didático adotado. A estrutura da dissertação englobou a revisão da literatura, a análise do livro didático, a construção da fase experimental e a confrontação dos resultados com o quadro teórico adotado. Assim, a dissertação de Conceição (2022) reconhece a importância da análise do livro didático, mas sugere que essa análise deve ser parte de um conjunto mais amplo de métodos para investigar as concepções dos professores.

Os sujeitos da dissertação foram os professores polivalentes do Ensino Fundamental dos anos iniciais. A pesquisa visou analisar como esses professores articularam argumentos e demonstrações geométricas, bem como identificar como as orientações curriculares e os livros didáticos influenciaram na formação de suas concepções.

Nessa dissertação, a teoria de Parzysz (2006) possibilitou uma análise mais aprofundada das estratégias utilizadas pelos professores na construção de argumentos e na apresentação de provas matemáticas, especialmente no contexto do estudo dos quadriláteros.

Ao considerar as contribuições teóricas e metodológicas apresentadas em Conceição (2022), foi possível ampliar as investigações do ensino e da aprendizagem dos quadriláteros e da teoria de Bernard Parzysz.

Secco (2007) abordou o conceito de área com foco na composição e decomposição de figuras planas para tornar o aprendizado motivador para estudantes da 8ª série do Ensino Fundamental. O estudo investigou como a reconfiguração de figuras poligonais contribuiu para a compreensão da área de um polígono. A pesquisa propôs uma abordagem de ensino que envolveu ladrilhamento, composição e decomposição de figuras para desenvolver a noção de superfície e área nos estudantes. A diferenciação entre área e perímetro foi destacada, assim como o estudo das fórmulas para o cálculo da medida de área e perímetro em relação aos invariantes geométricos das figuras. A dissertação fundamentou-se em teorias de Parzysz, Duval, Vergnaud e Freudenthal. Uma sequência didática foi desenvolvida em três blocos para abordar o conceito de área de maneira a fazer sentido ao ser ensinada e aprendida. Além disso, foi realizada uma análise histórica do cálculo de medidas de áreas e revisão de coleções didáticas atuais. Esses elementos compuseram o estudo detalhado de Secco sobre o conceito de área.

A metodologia utilizada por Secco em sua dissertação envolveu a Engenharia Didática. Os sujeitos dessa dissertação foram os estudantes da 8ª série do Ensino Fundamental. Além dos estudantes, o próprio autor atuou como professor-pesquisador responsável pela pesquisa e elaboração da sequência didática.

Na dissertação, a relação das noções de Parzysz com a construção geométrica esteve presente na análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes ao utilizar a classificação proposta por Parzysz. O autor mencionou que os estudantes demonstraram um raciocínio matemático complexo em algumas atividades ao indicar- uma clara entrada no nível G2 de Parzysz. Isso sugeriu que a abordagem adotada na pesquisa, que envolveu a reconfiguração de figuras poligonais planas e a utilização do software Cabri-Géomètre, contribuiu para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes em um nível mais avançado, conforme proposto por Parzysz.

Assim, ao considerar as conclusões da dissertação de Secco foi possível fundamentar e enriquecer esta pesquisa, com referências e abordagens para desenvolvimento dos estudos relacionados a Parzysz e construções geométricas.

A dissertação de Duarte (2007) abordou a importância da argumentação e prova no ensino de matemática, com foco nas propriedades dos paralelogramos. O estudo baseou-se em teorias de Parzysz, Machado, Duval e Egret para investigar como os estudantes constroem o conhecimento matemático, especialmente em relação à geometria.

A metodologia utilizada foi a da Engenharia Didática e foi aplicada a estudantes do Ensino Fundamental e Médio a fim de desenvolver as noções de hipótese/tese e a habilidade de elaborar provas para propriedades dos paralelogramos. A análise das produções dos estudantes identificou dificuldades relacionadas à argumentação, aceitação de provas empíricas e interpretação de enunciados, mas também evidenciou avanços no processo de raciocínio lógico. Por meio de questionários e atividades práticas, a dissertação buscou compreender como os estudantes formam conceitos em geometria, representam figuras e constroem argumentos matemáticos. O estudo destacou a importância da articulação entre atividades perceptivas e momentos de elaboração conceitual para promover uma compreensão mais consistente entre o conhecimento empírico e sua sistematização.

A utilização das teorias de Parzysz permitiu ao autor embasar a metodologia de ensino e análise dos resultados relacionados à argumentação e prova na matemática escolar, especialmente no contexto do ensino de propriedades dos paralelogramos. Elas contribuíram para a compreensão das diferentes abordagens de prova matemática e destacou a importância de distinguir entre provas baseadas em evidências empíricas e provas formais.

Portanto, ao analisar a aplicação e importância de Parzysz nessa dissertação contribuiu para aprofundar e enriquecer o desenvolvimento do estudo desta pesquisa.

A tese de Costa (2019) propôs um modelo para identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico em estudantes do ensino básico ao resolverem atividades que mobilizavam quadriláteros notáveis. Baseada em uma pesquisa de mestrado anterior realizada por Costa em 2016, que analisou os efeitos de uma sequência didática com o uso do software GeoGebra na construção ~~do conceito~~ de conhecimentos de quadriláteros notáveis fundamentado no modelo de Van-Hiele e utilizou um teste desenvolvido por Câmara dos Santos em 2001.

Costa (2019) adotou uma abordagem qualitativa e quantitativa. O processo metodológico incluiu etapas como levantamento bibliográfico, projeto de pesquisa, preparação, coleta, análise e compartilhamento dos resultados. A pesquisa destacou a complexidade do estudo de caso ao ressaltar a importância de validar teorias e hipóteses em diversas áreas do conhecimento. A tese apresentou um modelo teórico a priori para identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico em relação aos quadriláteros notáveis, com base na teoria de Duval e em estudos anteriores sobre os níveis de pensamento geométrico.

Os sujeitos da tese de Costa (2019) foram estudantes brasileiros dos anos finais do ensino fundamental. A pesquisa foi realizada em uma escola pública na cidade de Recife, Pernambuco. Os participantes foram envolvidos em atividades relacionadas aos quadriláteros notáveis, incluindo a aplicação de testes e entrevistas de explicitação.

Costa (2019), concentrou a pesquisa nos quadriláteros notáveis, que são quadriláteros com propriedades específicas e importantes no ensino da geometria. A análise do pensamento dos estudantes ao lidar com esses quadriláteros permitiu identificar os diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme proposto no modelo teórico a priori da pesquisa. A compreensão da forma como os estudantes abordaram e resolveram questões envolvendo quadriláteros notáveis foi essencial para a validação do modelo proposto.

Ao integrar os conceitos e metodologias apresentados na tese de Costa (2019) é possível enriquecer esta pesquisa, com uma abordagem metodológica consistente para analisar o ensino de quadriláteros.

No Quadro 3 apresentamos todos os trabalhos selecionados relacionados à geometria espacial.

Quadro 3 - Trabalhos selecionados relacionados à geometria espacial

Autor	Título	Ano	Instituição	Termo utilizado
POSSANI, J. F.	Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.	2012	PUC-SP	PL
SOUZA, W. R. S.	Representações planas de figuras tridimensionais: um estudo envolvendo visualização.	2010	UNIBAN	PL
CARVALHO, M. L. O.	Representações planas de corpos geométricos tridimensionais: uma proposta de ensino voltada para a codificação e decodificação de desenhos.	2010	UFOP	P

Fonte: Repositório da PUC-SP e acervo da CAPES.

Na dissertação de Possani (2012) é abordada a aprendizagem de volume de um sólido geométrico de 20 arestas de mesma medida, ou seja, de um icosaedro regular, baseada em duas teorias, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1997) e a Teoria dos registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1999).

A metodologia utilizada foi a qualitativa em que envolveu a investigação de uma sequência didática de atividades mediadas pelo *software* Cabri 3D, visando facilitar a compreensão do cálculo do volume do icosaedro regular por estudantes do 3º ano do Ensino Médio. A pesquisa de Possani (2012) foi estruturada em fases: uma análise a priori para identificar conhecimentos prévios e dificuldades, a fase de experimentação com aplicação de atividades, e a posteriori a análise da coleta e interpretação de dados sobre o desempenho e as interações dos estudantes durante as atividades.

Os resultados dessa pesquisa indicam que a utilização do software e a abordagem didática proposta contribuíram para a compreensão dos estudantes sobre o volume do icosaedro, permitindo que as conversões e tratamentos necessários nos Registros de Representação Semiótica fossem realizados. A pesquisa destaca a relevância de ambientes de Geometria Dinâmica no ensino de matemática, especialmente na visualização e compreensão de sólidos geométricos.

Assim, a pesquisa de Possani (2012) enfatizou a importância da visualização e da representação de figuras geométricas, que é um aspecto central na abordagem de Parzysz. A compreensão de quadriláteros como figuras planas é fundamental para a transição para formas tridimensionais, e a dissertação oferece ideias sobre como essa visualização pode ser aprimorada no ensino.

A dissertação de Souza (2010) abordou a importância das representações planas na compreensão de figuras tridimensionais. O estudo teve como objetivo investigar as habilidades de visualização e compreensão de figuras tridimensionais por meio da análise de representações planas, destacando a influência da perspectiva cônica, cavaleira e axonométrica em livros didáticos e como essas perspectivas afetaram a visualização espacial dos estudantes.

Para alcançar esses objetivos, foram utilizadas a metodologia qualitativa e as teorias desenvolvidas por Parzysz (2006) e Gutiérrez (1998) sobre visualização e representações tridimensionais. Os sujeitos da pesquisa foram quatro estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública na cidade de Piedade-SP, que foram convidados a participar do projeto de pesquisa, que incluiu análises de textos de pesquisa e didáticos, além de entrevistas.

Os resultados indicaram que os estudantes tendem a se basear mais no que é visualmente percebido do que no conhecimento prévio ao analisar representações planas de figuras tridimensionais. Nessa dissertação, foi possível observar que a relação de Parzysz (2006) com o livro didático está relacionada à forma como as representações planas de figuras tridimensionais foram abordadas e interpretadas pelos estudantes. De acordo com Souza (2010), a perspectiva de Parzysz sobre a necessidade de explicitar as regras para representações planas pode ser relacionada à observação de que as representações presentes nos livros didáticos muitas vezes não foram acompanhadas de informações claras sobre como foram feitas, o que pode dificultar a compreensão dos estudantes.

Portanto, a pesquisa buscou investigar como os estudantes lidaram com essas representações planas e como a explicitação das regras pode contribuir para o desenvolvimento de suas habilidades de visualização e compreensão da geometria espacial. Além disso, a dissertação buscou contribuir para a melhoria do ensino da geometria e das habilidades matemáticas dos estudantes, destacando a importância da visualização na aprendizagem.

Assim, a pesquisa de Souza contribuiu para esta pesquisa ao explorar e ampliar as ideias de Parzysz, bem como sua relação com o uso de livros didáticos.

A dissertação de Carvalho (2010) investigou a importância do uso de materiais manuseáveis e recursos informáticos para a codificação e decodificação de desenhos de corpos geométricos tridimensionais por estudantes do Ensino Médio. Baseada em teorias de Parzysz, Mitchelmore e Gutiérrez, a pesquisa propôs uma abordagem pedagógica para o ensino de Geometria Espacial, focada nas representações planas de objetos tridimensionais. A metodologia qualitativa envolveu a concepção, implementação e análise de uma sequência de atividades com estudantes do Ensino Médio que resultou em uma proposta pedagógica para o ensino de Geometria Espacial. Os resultados indicaram melhorias na compreensão dos estudantes em relação à codificação e decodificação de desenhos de figuras tridimensionais ao destacar a importância da visualização espacial e das representações planas na aprendizagem da Geometria.

Os sujeitos dessa dissertação foram estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública na região metropolitana de Belo Horizonte.

Na dissertação de Carvalho, Parzysz contribuiu com fundamentos teóricos importantes para as representações planas de objetos tridimensionais que foram essenciais para embasar a proposta didática da dissertação, que visava melhorar a compreensão dos estudantes em relação às representações planas de corpos geométricos tridimensionais.

Assim, ao analisar a utilização de materiais manuseáveis e recursos informáticos pôde aprimorar a compreensão e a aplicação dos princípios discutidos por Parzysz é possível enriquecer e complementar a abordagem teórica de Parzysz nesta pesquisa.

No Quadro 4 apresentamos todos os trabalhos selecionados relacionados à formação de professores.

Quadro 4 - Trabalhos selecionados relacionados à formação de professor

Autor	Título	Ano	Instituição	Termo utilizado
JESUS, G. B.	Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada.	2008	PUC-SP	Q
MAIOLI. M.	Uma oficina para a formação de professores com enfoque em quadriláteros.	2002	PUC-SP	Q
DIAS, M. S. S.	Um estudo da demonstração da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico.	2009	PUC-SP	QP
PONTES, J.S.	Conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de geometria espacial elementar: uma engenharia didática com professores que ensinam matemática.	2021	PUC-SP	PC
GARCÍA-CUÉLLAR, D. J.	Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros.	2021	PUC-SP	Q

Fonte: Repositório da PUC-SP e acervo da CAPES.

Todos os trabalhos sugeridos de qualquer instituição foram examinados durante cada busca, conforme mencionado anteriormente.

Em seguida, são detalhadas e justificadas as referências bibliográficas selecionadas que auxiliaram na estruturação e elaboração deste projeto, ressalta-se a importância de identificar lacunas no conhecimento existente e de fundamentar teoricamente a proposta de pesquisa, conforme orientado por Creswell (2007, p. 43-63) em seu livro.

A dissertação de Jesus (2008) abordou a importância do ensino de Geometria, especialmente no Ensino Fundamental, com foco em construções geométricas e em demonstrações matemáticas. O estudo envolveu a participação de professores de Matemática em formação continuada, com o objetivo de investigar como uma sequência de atividades com enfoque em construções geométricas poderia contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos sobre demonstração em Geometria. A pesquisa fundamentou-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, além de autores especializados em formação de professores. A metodologia adotada foi a pesquisa-ação.

Os sujeitos dessa dissertação foram professores da disciplina de Matemática do Ensino Fundamental que participaram do projeto de formação continuada em que a pesquisa foi realizada. Onze professores participaram ativamente do estudo e contribuíram com suas experiências e reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de geometria, em especial no que diz respeito à demonstração e às construções geométricas.

A dissertação destacou a importância da correta representação visual de figuras geométricas, da necessidade de compreender as entrelinhas das demonstrações matemáticas e da distinção entre objeto matemático e sua representação. Ao abordar a evolução dos conhecimentos matemáticos e a importância dos registros de representação, a pesquisa contribuiu para uma importante abordagem para o ensino de geometria, especialmente no que se refere aos quadriláteros e às demonstrações matemáticas.

Em relação aos quadriláteros, o autor discutiu questões ligadas à definição de paralelogramo e apresentou um exercício em que os professores foram desafiados a darem diferentes definições de paralelogramo, foram levados a refletir sobre a equivalência dessas definições. Além disso, houve uma discussão da importância do uso de desenhos na representação de objetos geométricos, como no caso do losango, e a necessidade de atenção para distinções visuais entre figuras geométricas, como losango e quadrado.

A dissertação destacou a importância das construções geométricas como uma ferramenta essencial para o ensino de geometria, ressaltou seu papel no desenvolvimento de habilidades matemáticas, na compreensão de propriedades geométricas e na promoção do raciocínio lógico-dedutivo , tornando-se uma fonte para embasar essa pesquisa na temática dos quadriláteros e das construções geométricas.

Em Maioli (2002) foi abordada a realização de uma oficina de formação para professores com foco em quadriláteros, a fim de contribuir para a aquisição de conteúdos em geometria e aprimorar conhecimentos didáticos dos professores. As atividades da oficina envolveram exploração visual e teórica dos quadriláteros, trabalho em grupo, discussões, cometimento de erros e levantamento de conjecturas. Os resultados revelaram reflexões sobre definições, propriedades, teoremas e demonstrações, além de dificuldades na utilização de diferentes registros de representação em geometria. A discussão do referencial teórico despertou interesse por outras pesquisas e promoveu reflexões sobre a prática docente em geometria.

Os principais referenciais teóricos foram a Teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brousseau e os estudos sobre registros de representação semiótica de Raymond Duval. Essas teorias fundamentaram a elaboração da oficina e a análise dos resultados.

A oficina foi composta por situações-problema baseadas em sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em torno dos quadriláteros, para explorar diversos aspectos da geometria. Durante os encontros, foram discutidos os referenciais teóricos que embasaram a seleção das atividades para aprimorar conhecimentos didáticos e a forma de apresentação do conteúdo para contribuir com a aquisição de conteúdos em geometria.

Nessa pesquisa, os sujeitos foram professores convidados a participar da oficina de formação com enfoque em quadriláteros e estavam interessados em participar de um grupo para estudos de geometria. Os professores que aceitaram o convite preencheram um questionário inicial para traçar o perfil do grupo e direcionar as atividades da oficina de acordo com as necessidades e características dos participantes.

Portanto, a leitura e análise dessa dissertação contribuíram significativamente para o aprimoramento das práticas de ensino em relação aos quadriláteros, fornecendo embasamento teórico, orientações metodológicas e aprendizados com a prática descrita no trabalho no trabalho para professores e educadores no ensino de geometria. Servindo, assim, como um dos principais referenciais para esta pesquisa.

A tese de Dias (2009) abordou um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática baseada em e uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico como uma contribuição importante para a área de Educação Matemática e abordou a influência dos ambientes de geometria dinâmica na construção de argumentações por estudantes da licenciatura em matemática.

O referencial teórico apresentado na pesquisa incluiu teorias que subsidiaram a análise dos dados obtidos e destacou a importância da pesquisa qualitativa em Educação Matemática. A autora utilizou a teoria piagetiana como base para compreender a construção do conhecimento pelos estudantes, ao relacionar as fases do desenvolvimento da criança (sensório-motor, pré-operatório, operatório-concreto e operatório-formal) com os níveis de pensamento geométrico elaborados por Van Hiele (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor) e, também para entender a evolução do pensamento geométrico e análise dos resultados obtidos na investigação. Essa fundamentação teórica foi essencial para contextualizar a pesquisa e fornecer uma estrutura conceitual sólida para a análise dos dados relacionados à construção de argumentações em ambientes de geometria dinâmica pelos estudantes.

A escolha da metodologia qualitativa foi fundamentada na elaboração dos objetivos e das questões de pesquisa para submeter o objeto de estudo à influência de variáveis em condições controladas. A pesquisa foi caracterizada como um estudo diagnóstico que utilizou aspectos de estudo de caso com três duplas de estudantes como unidade de estudo.

Os sujeitos dessa tese foram estudantes de licenciatura em Matemática, que participaram do estudo sobre a construção de argumentações em ambientes de geometria dinâmica. A análise dos dados coletados visou contribuir para a compreensão do processo de demonstração na formação de futuros professores de matemática e fornecer *insights* para pesquisas futuras na área.

Durante o desenvolvimento da tese de Dias (2009) Bernard Parzysz foi mencionado como um autor que desenvolveu um quadro teórico para o estudo do raciocínio geométrico dos sujeitos para estabelecer uma articulação entre percepção e dedução. Parzysz baseou sua construção teórica em pesquisas realizadas por outros autores no domínio do ensino e da aprendizagem de geometria, como Van Hiele, Houdement & Huzniak e Henry.

A autora enfatizou que Parzysz fundamentou questões relacionadas à problemática da precisão e da dedução em diferentes níveis de estudo geométrico para enfatizar a importância da transição da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva das figuras geométricas. Suas contribuições teóricas foram relevantes para a compreensão do desenvolvimento do pensamento geométrico e da construção de argumentações nesse contexto educacional.

Assim, a tese de Dias (2009) tornou-se uma das principais referências para a pesquisa, por oferecer uma fundamentação teórica, baseada em teóricos como Parzysz, Van Hiele, entre outros, por explorar os níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico para melhor compreensão e argumentação dos estudantes, por oferecer direcionamentos para abordar o ensino dos quadriláteros e considerar a importância da percepção e da dedução no processo de aprendizagem geométrica. Por meio de seus resultados e das discussões apresentadas é possível adaptar e aplicar estratégias para trabalhar com quadriláteros para desenvolver, o raciocínio geométrico dos estudantes.

O estudo realizado na tese de Pontes (2021) discutiu e sistematizou as categorias de conhecimento para o ensino e aprendizagem de geometria espacial elementar, com foco nos professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental em Angra dos Reis. A pesquisa teve como objetivo identificar os tipos de conhecimentos geométricos mobilizados por esses professores ao trabalhar com figuras espaciais.

A tese seguiu uma engenharia didática dividida em fases que incluíram desde a análise preliminar até a experimentação, análise a posteriori e validação. Foram utilizadas a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o modelo de van Hiele e a teoria de Parzysz (2006) para fundamentar e embasar a pesquisa e contribuir para uma compreensão no ensino de geometria.

O foco da pesquisa esteve na investigação do conhecimento tecnológico e pedagógico desses professores em relação ao conteúdo de geometria espacial elementar. Por meio da interação com esses profissionais, o autor buscou compreender as dificuldades enfrentadas no ensino de geometria e identificar as necessidades de formação continuada nessa área específica da matemática.

Nessa tese, a construção geométrica desempenhou um papel fundamental para a investigação do conhecimento geométrico mobilizado pelos professores ~~dos~~ ao lecionarem figuras espaciais. A construção geométrica envolveu a manipulação e representação de figuras espaciais que permitiam aos professores explorarem e compreenderem as propriedades dessas figuras de forma prática e visual. Foram desenvolvidas habilidades importantes, como investigação, experimentação, exploração, classificação, descrição e representação de objetos e modelos geométricos. Ao aplicar a teoria de Parzysz (2006) nas construções geométricas realizadas pelos professores, Pontes pôde identificar em que nível de desenvolvimento geométrico essas atividades se encontravam. Isso permitiu uma análise mais profunda do conhecimento geométrico mobilizado pelos professores ao lidarem com figuras espaciais e ao realizarem atividades práticas de geometria.

Por meio da análise do desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores, da aplicação de teorias como a de Parzysz (2006) e da investigação das práticas de construção geométrica, a tese de Pontes ofereceu orientações e sugestões para aprimorar a abordagem do conteúdo de quadriláteros nas aulas de matemática dos anos iniciais. Isso incluiu estratégias de ensino mais eficazes, atividades práticas envolventes e formas inovadoras de promover a compreensão de conceitos relacionados aos quadriláteros.

Portanto, ao considerar os resultados e as conclusões da pesquisa de Pontes~~,~~ foi possível beneficiar-se das abordagens, metodologias e percepções apresentadas para contribuir com esta pesquisa.

A tese de García-Cuéllar (2021) abordou a formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros à luz da Teoria Antropológica do Didático e da Engenharia Didática como fundamentos teóricos e metodológicos. Foram propostos estratégias e dispositivos de ensino para aprimorar a compreensão e o ensino de quadriláteros para promover uma aprendizagem aos estudantes. As dimensões epistemológica, econômica e ecológica dos quadriláteros foram analisadas, resultando em um modelo epistemológico de referência e um modelo dominante do sistema educativo peruano. Foi desenvolvido um percurso de estudo e pesquisa a distância para a formação de professores, com módulos específicos para o ensino de quadriláteros que incluía um dispositivo didático contextualizado em um Tsunami em Lima, Peru.

Os sujeitos da pesquisa realizada por García-Cuéllar foram 10 professores de Matemática, sendo cinco professores e cinco professoras. Esses professores participaram voluntariamente da formação continuada proposta no estudo, cientes de que a experiência fazia parte da pesquisa de doutoramento da pesquisadora na PUC-SP. Durante a formação, os professores formaram livremente três grupos para trabalhar nos oito encontros propostos.

Nessa tese, os quadriláteros desempenharam um papel central na formação continuada de professores de matemática para o ensino desse tema específico. Essa importância estava relacionada à necessidade de aprofundar o estudo desse conteúdo geométrico para melhorar a prática docente e a aprendizagem dos estudantes. Por meio da Teoria Antropológica do Didático e da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, a autora buscou desenvolver estratégias e dispositivos de ensino que permitissem aos professores compreenderem e ensinarem os quadriláteros.

Dessa forma, a tese forneceu contribuições para esta pesquisa, sobre como abordar o ensino dos quadriláteros, considerando aspectos culturais, sociais e cognitivos envolvidos no processo de aprendizagem dos estudantes. Além de destacar a importância da formação continuada dos professores para promover uma educação matemática de qualidade, o que pode ser relevante para uma investigação futura sobre estratégias de ensino de quadriláteros.

Durante as análises dos trabalhos selecionados, pôde-se verificar a necessidade de investigar o desenvolvimento do ensino de quadriláteros e a organização de atividades em coleções de livros didáticos para os anos iniciais e finais fundamentada em uma série de considerações teóricas e práticas, conforme evidenciado na revisão bibliográfica.

Bernard Parzysz (2006) oferece um quadro teórico que articula a percepção e a dedução no raciocínio geométrico, o que é fundamental para a construção do conhecimento em geometria. Essa estrutura teórica permite que educadores identifiquem em que nível de raciocínio os estudantes se encontram e como as atividades podem ser organizadas para promover um avanço significativo. Além disso, a análise de livros didáticos é uma prática relevante, pois esses materiais são frequentemente utilizados como a principal fonte de conteúdo e atividades em sala de aula.

A revisão da literatura também revela que a articulação entre a geometria concreta e a geometria proto-axiomática, conforme discutido por Parzysz, é crucial para a validação das propriedades geométricas. Isso sugere que as atividades propostas nos livros didáticos devem ser cuidadosamente planejadas para facilitar essa transição, permitindo que os estudantes desenvolvam uma compreensão mais profunda e significativa dos quadriláteros.

Portanto, esta pesquisa proposta não apenas se justifica pela relevância do tema no contexto educacional, mas também pela necessidade de alinhar as práticas de ensino às teorias contemporâneas sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Ao analisar duas coleções de livros didáticos, esta pesquisa busca contribuir para a melhoria das práticas pedagógicas e para a formação de estudantes em suas habilidades geométricas.

2.3 Problema de pesquisa

O problema de pesquisa é baseado na experiência de 18 anos em sala de aula em escolas da rede particular nos anos finais no ensino fundamental e ensino médio e em cursos de pré-vestibulares da cidade de São Paulo e, também, na autoria e edição de materiais didáticos para editoras.

Ao longo dos anos a percepção da falta de preparo de alguns profissionais da área da matemática ao lecionarem geometria ou ao preferirem lecionar outra área da matemática, como por exemplo a Álgebra, me levou a observar a falta de conhecimento ou interesse desses profissionais.

Com base nessa observação e na paixão pela geometria, neste trabalho fizemos uma contribuição modesta, diante de toda a grandiosidade que a geometria representa, com o objetivo de incentivar o interesse dos profissionais da área a considerarem a geometria como um recurso para a compreensão do mundo, do universo, do espaço e da localização que contribuem para a resolução de problemas do mundo físico e de diversas áreas do conhecimento, conforme abordado na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018, p. 271):

> [...] estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. [...]

De acordo ainda com a BNCC (Brasil, 2018), a geometria está relacionada à construção, representação e interdependência, o estudo dos quadriláteros, como abordado nas análises anteriores, é um dos temas da geometria que possibilita e estimula a percepção das formas e estruturas geométricas que permitirão o desenvolvimento da abstração e das habilidades geométricas e cognitivas para resolução de problemas geométricos. No cotidiano, desempenha um papel fundamental na construção civil, na engenharia, na arquitetura, na computação, entre outros.

Assim, a BNCC (Brasil, 2018) destaca a necessidade de um ensino que promova a compreensão das propriedades geométricas e o raciocínio lógico, elementos que são fundamentais na proposta teórica de Parzysz, que diferencia os níveis de raciocínio geométrico e enfatiza a importância da articulação entre a percepção e a dedução. Ao investigar como as coleções de livros didáticos abordam os quadriláteros, a pesquisa pretende verificar se as atividades propostas estão alinhadas com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme categorizados por Parzysz, e se atendem às competências e habilidades estabelecidas pela BNCC (2018). Assim, busca-se avaliar a eficácia das práticas pedagógicas em geometria, promovendo um ensino que não apenas informe, mas que também estimule a curiosidade e a capacidade de investigação dos estudantes em relação às propriedades e aplicações dos quadriláteros no contexto escolar e cotidiano.

Durante o progresso do capítulo, será analisada e desdobrada a questão de pesquisa: *“Como está desenvolvido o ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, baseado as geometrias de Parzysz?”.*

O objetivo desta pesquisa é analisar a proposta de ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, baseado nas geometrias de Parzysz.

Os objetivos específicos desta pesquisa são: analisar o ensino de quadriláteros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais e outra coleção dos finais do Ensino Fundamental por meio da análise dos quadriláteros apresentados nas coleções, incluindo definições, propriedades e classificações e da análise das abordagens pedagógicas utilizadas para ensinar quadriláteros, como atividades práticas, exercícios e exemplos; identificar as geometrias referenciadas em cada volume das coleções com base no quadro teórico de Parzysz; examinar as transições de conteúdo sobre quadriláteros dentro de cada volume e entre os volumes.

De acordo com Carvalho (2010), o objetivo de utilizar Parzysz em uma pesquisa acadêmica é fundamentar os procedimentos de provas formais e empíricas que contribuem para a análise e compreensão do processo de argumentação e prova em contextos educacionais. Essa abordagem implica em uma metodologia de pesquisa que pode incluir a análise de atividades práticas, a observação do desempenho dos estudantes em tarefas relacionadas à geometria, e a aplicação de questionários ou entrevistas para captar as percepções dos estudantes sobre suas experiências de aprendizagem. Assim, a metodologia escolhida pode ser focada na interpretação dos dados coletados.

2.4 Metodologia e procedimentos

A metodologia abordada nesta pesquisa, devido ao problema de estudo, será pesquisa bibliográfica que envolve a busca, seleção e análise de fontes, como livros, artigos, teses, dissertações e periódicos, para embasar a construção da investigação.

De acordo com Severino (2014, p. 122), esse tipo de pesquisa:

> se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos.

Para o autor, após a reunião de informações e dados relevantes de fontes documentadas, a pesquisa bibliográfica permite ao pesquisador aprofundar-se no tema escolhido, traçar um histórico e identificar respostas e contradições anteriores.

Para Gil (2008), a seleção das fontes deve ser pautada pela relevância, atualidade e credibilidade das informações para garantir a solidez teórica do trabalho. É importante também manter um registro organizado das referências consultadas, para facilitar a recuperação e a análise dos dados.

De acordo com o autor, outro aspecto importante é a análise crítica das fontes, para avaliar sua consistência metodológica, coerência argumentativa e contribuição para o tema em questão, que exige do pesquisador um olhar reflexivo e questionador, capaz de identificar contradições, lacunas e perspectivas divergentes na literatura consultada. Além da importância de assegurar as condições para analisar a maior quantidade de material produzido, e garantir que as fontes pesquisadas e os dados obtidos sejam confiáveis e verossímeis.

Citar corretamente todas as referências utilizadas, de acordo com as normas técnicas e éticas da área de conhecimento em que se insere o trabalho, pois a integridade acadêmica e a honestidade intelectual são valores essenciais na prática da pesquisa científica para garantir o reconhecimento e a valorização do trabalho realizado.

A pesquisa bibliográfica é um processo complexo e enriquecedor, que demanda habilidades de busca, seleção, análise e síntese de informações, em que se realiza uma investigação rigorosa e fundamentada para a contribuição do avanço do conhecimento.

A escolha das coleções Ápis (Dante e Viana, 2021) e Teláris (Dante e Viana, 2022) para análise se justifica pela relevância e abrangência dessas obras no contexto do ensino de quadriláteros nos anos iniciais e finais. Ambas as coleções são amplamente utilizadas nas escolas e oferecem uma variedade de atividades que podem contribuir para a compreensão dos conceitos geométricos, especialmente no que diz respeito à representação e visualização de figuras planas.

A análise será fundamentada no quadro teórico de Bernard Parzysz (2006) enfatizando a importância de uma abordagem didática que minimize a perda de informações nas representações bidimensionais de figuras geométricas. A partir dessa perspectiva, será possível avaliar como as coleções abordam o ensino dos quadriláteros, considerando as dificuldades que os estudantes enfrentam ao transitar entre representações planas e espaciais.

A busca por informações em cada livro será realizada de forma sistemática. Primeiramente, serão pesquisados, por meio da ferramenta localizar texto nos respectivos volumes disponibilizados de maneira eletrônica (pdf), e verificada as quantidades de incidência dos termos: quadriláteros, quadrados, quadradas, retângulos, retangulares, paralelogramos, losangos e trapézios. Em seguida, será feita uma análise qualitativa das atividades propostas, observando a clareza das explicações, a variedade de representações utilizadas (como desenhos, diagramas e exercícios práticos) e a adequação das atividades ao desenvolvimento das habilidades geométricas dos estudantes. Além disso, serão identificadas as estratégias didáticas empregadas para facilitar a compreensão dos conceitos, levando em conta as contribuições teóricas de Parzysz (2006) sobre a visualização e a representação geométrica. Essa abordagem permitirá uma avaliação crítica das coleções e suas contribuições para o ensino de quadriláteros nos anos iniciais e finais do ensino fundamental.

A seguir serão realizados os estudos didáticos sobre os quadriláteros fundamentados na teoria de Bernard Parzysz, pois podem revelar lacunas nas abordagens pedagógicas atuais e promover práticas que favoreçam uma aprendizagem significativa e contextualizada, conectando a matemática à vida cotidiana dos estudantes. Assim, investigar a didática dos quadriláteros se torna fundamental para aprimorar o ensino da geometria e facilitar a compreensão dos estudantes.

3 ESTUDOS DIDÁTICOS DOS QUADRILÁTEROS E A TEORIA DE PARZYSZ

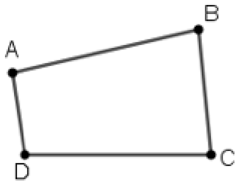
Neste capítulo abordamos os estudos didáticos dos quadriláteros baseados na teoria de Bernard Parzysz (2006), como já apresentado.

Neste capítulo abordamos as definições, propriedades e demonstrações dos quadriláteros para observar as geometrias propostas por Parzysz, inclusive as transições entre elas e, para isso apresentamos as seções: quadriláteros, paralelogramos, retângulos, losangos quadrados e trapézios.

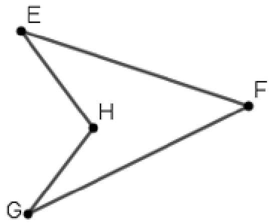
3.1 Quadriláteros

De acordo com Dolce e Pompeo (1993, p.99) dados *A, B,* C e *D*, quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero. Para os autores, "o quadrilátero é um polígono simples de quatro lados" e um polígono é convexo "se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina" (Doce e Pompeo, 1993, p. 134). A Figura 1 mostra um exemplo de quadrilátero convexo e outro para não convexo.

Figura 1 – Quadrilátero convexo e quadrilátero não convexo



ABCD convexo



EFGH não convexo

Fonte: Produção da autora

Quanto aos elementos, como mostra a Figura 1, o quadrilátero é um polígono que possui quatro lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, quatro ângulos: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ e duas diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ no caso do convexo.

Para demonstrar as propriedades dos quadriláteros que serão apresentados na sequência é necessário a mobilização de paralelismo, perpendicularismo, ângulos, casos de congruência de triângulos, além das relações entre os ângulos formados por paralelas e transversais entre outros conhecimentos geométricos mais gerais.

Considera-se as seguintes propriedades dos quadriláteros:

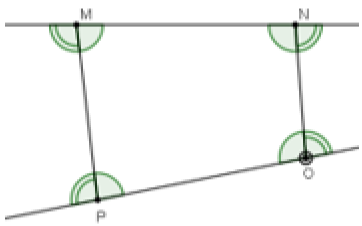
K1: A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º.

Tal resultado é evidente ao se constatar que um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.

K2: A soma dos ângulos externos também é igual a 360º.

Na Figura 2 que apoia essa demonstração é possível observar que a soma das medidas de um ângulo interno e um ângulo externo representados em torno de cada vértice é igual a 180°, porque eles são suplementares. Como a soma das medidas de todos esses ângulos é igual 720° e sabe-se que a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°, logo a soma das medidas dos ângulos externos de um quadrilátero é 360°.

Figura 2 – Soma dos ângulos externos de um quadrilátero



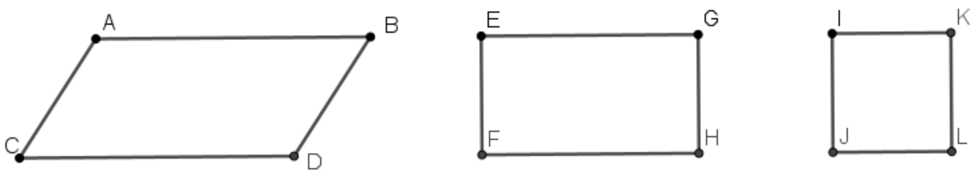
Fonte: Produção da autora

Alguns quadriláteros, por possuírem características específicas são denominados notáveis e, no que segue, tratar-se-á deles.

3.2 Paralelogramos

DP[9]: um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui seus lados opostos paralelos. Em linguagem matemática formal: ABCD é um paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overline{AB} \mathbin{//} \overline{CD}$ e $\overline{AD} \mathbin{//} \overline{BC}$. As representações apresentadas na Figura 3 são paralelogramos.

Figura 3 – Paralelogramos



Fonte: Produção da autora

Para esse objeto temos as seguintes propriedades:

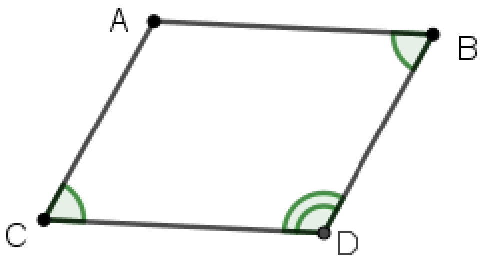
---

[9] Usamos DP para indicar "definição de paralelogramo".

P1: Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Para essa demonstração, no paralelogramo ABDC da Figura 4, sabe-se que os lados opostos são paralelos. Assim, a reta CA é paralela à reta DB e a reta CD é uma transversal e, por isso, a soma das medidas dos ângulos C e D é 180°, pois são ângulos colaterais internos. De maneira análoga tem-se que a soma das medidas dos ângulos D e B é 180° ao considerar as retas paralelas AB e CD e a transversal DB. Logo, se a soma das medidas dos ângulos C e D é igual a soma das medidas dos ângulos D e C então a medida do ângulo C é igual a medida do ângulo B.

Figura 4 – Ângulos opostos congruentes



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.103).

Em linguagem matemática formal tem-se que, baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104), ao considerar que "ABDC é um paralelogramo" é a hipótese e que "$\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{C}$" é a tese:

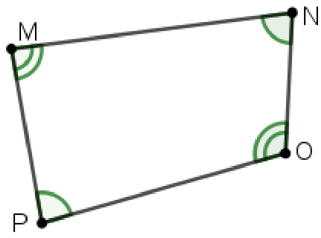
$$ABDC \text{ é } paralelogramo \Rightarrow \begin{cases} \overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 180° \\ \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180° \end{cases} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

De maneira análoga para $\hat{A} \equiv \hat{D}$

P2: Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

Para essa demonstração, baseada no quadrilátero PONM da Figura 5, sabe-se que os ângulos internos M e O são congruentes e, da mesma forma, os ângulos N e P. Pode-se ainda dizer que a soma das medidas dos ângulos P e O é igual a soma das medidas dos ângulos M e N, além disso a soma das medidas dos quatro ângulos internos do quadrilátero é igual a 360°. Logo se a soma das medidas dos ângulos P e O é igual a soma das medidas dos ângulos M e N e ambas são iguais a 180° então os segmentos PM e ON são paralelos e os segmentos PO e MN são paralelos e, portanto, PONM é um paralelogramo.

Figura 5 – Ângulos opostos congruentes em quadrilátero convexo



Fonte: Produção da autora

Em linguagem matemática formal tem-se que, baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104) quando consideram como hipótese "$\hat{P} \equiv \hat{N}$ e $\hat{O} \equiv \hat{M}$" e como tese "PONM é paralelogramo":

$$\left.\begin{array}{r} \hat{P} \equiv \hat{N}, \hat{O} \equiv \hat{M} \;\Rightarrow m(\hat{P}) + m(\hat{O}) = m(\hat{N}) + m(\hat{M}) \\ PONM \text{ é } quadrilátero \;\Rightarrow m(\hat{P}) + m(\hat{O}) + m(\hat{N}) + m(\hat{M}) = 360° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

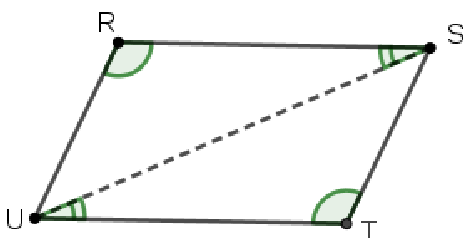
$$\Rightarrow m(\hat{P}) + m(\hat{O}) = m(\hat{P}) + m(\hat{M}) = 180° \Rightarrow \overline{PM}//\overline{ON} \; e \; \overline{PO}//\overline{NM}$$

$$\Rightarrow PONM \text{ é } paralelogramo$$

P3: Em todo paralelogramo dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Nessa demonstração, que se apoia na Figura 6, tem-se o paralelogramo RSTU em que se sabe que o ângulo R é congruente ao ângulo T e que a diagonal US determina os triângulos RSU e STU, que possuem o lado US comum. Como os segmentos UT e RS são paralelos então os ângulos RSU e TUS são congruentes por serem alternos internos, quando paralelas são intersectadas por uma transversal. Logo, nesses dois triângulos existe um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado congruentes e, com isso, os dois triângulos são congruentes, o que nos leva a concluir que o lado UT é congruente ao lado RS e o lado UR é congruente ao lado TS.

Figura 6 – Lados opostos de um paralelogramo são congruentes



Fonte: Produção da autora

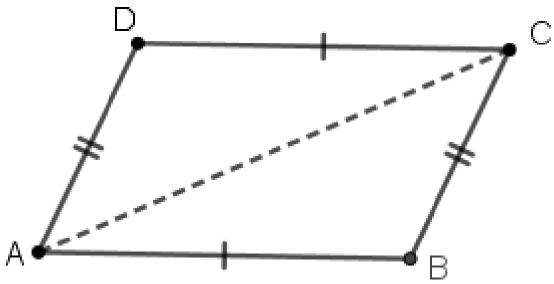
Em linguagem matemática formal tem-se que, baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104-105), quando consideram como hipótese "RSTU é paralelogramo" e como tese que "$\overline{UT} \equiv \overline{RS}$ e $\overline{UR} \equiv \overline{TS}$".

Na Figura 6 tem-se que: $RSTU\ \text{é}\ paralelogramo \Longrightarrow \begin{cases} \hat{R} \equiv \hat{T} \\ \overline{UT}//\overline{RS} \end{cases} \Longrightarrow T\hat{U}S \equiv R\widehat{SU}$. Ao considerar a diagonal $\overline{US}$ obtém-se os triângulos UTS e SRU em que: $\overline{US}$ é comum aos dois, $T\hat{U}S \equiv R\hat{S}U$, $\hat{T} \equiv \hat{R} \Longrightarrow \Delta UTS \equiv \Delta SRU \Longrightarrow \overline{UT} \equiv \overline{RS}$ e $\overline{UR} \equiv \overline{TS}$.

P4: Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.

Ao considerar essa demonstração, ancorada na Figura 7 em que, a diagonal AC do quadrilátero ABCD o divide em dois triângulos, ABC e ADC que têm o lado AC comum, além disso tem os lados AB e DC congruentes, assim como os lado AD e BC. Logo, pelo caso LLL os dois triângulos são congruentes. Como consequência, pode-se dizer que se os ângulos C e A são congruentes então os segmentos DC e AB são paralelos. Da mesma forma, se os ângulos B e D são congruentes então os segmentos AD e BC são paralelos e, portanto, ABCD é um paralelogramo.

Figura 7 – Quadrilátero com lados opostos congruentes é paralelogramo



Fonte: Produção da autora

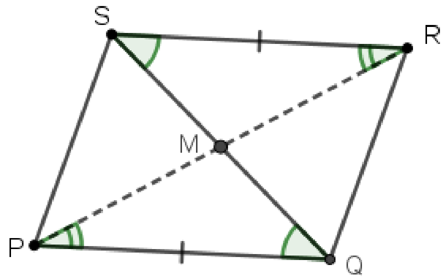
Em linguagem matemática formal tem-se, baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104-105), quando consideram o quadrilátero convexo ABCD, como hipótese "$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{DA}$" e como tese "ABCD é paralelogramo".

Ao considerar a Figura 7 observa-se os triângulos ABC e CDA em que $\overline{AB} \equiv \overline{CD},\ \overline{BC} \equiv \overline{DA}, \overline{AC}\ \text{é}\ comum \overset{LLL}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta CDA \Longrightarrow \begin{cases} B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \\ \frac{B\hat{C}A \equiv D\hat{A}C \Longrightarrow \overline{AD}}{\overline{BC}} \end{cases} \Longrightarrow$

$ABCD\ \text{é}\ paralelogramo$

P5: Em todo paralelogramo, as diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

Figura 8 – Diagonais se intersectam nos pontos médios em paralelogramos



Fonte: Produção da autora

Ao verificar a Figura 8, usada como apoio para a demonstração, observa-se que as diagonais do paralelogramo o dividem em quatro triângulos. Ao considerar os triângulos PQM e SRM sabe-se que os segmentos SR e PQ são congruentes e paralelos intersectados pelas diagonais. Dessa forma pode-se dizer que os ângulos SRP e RPQ são congruentes e também os ângulos RSQ e SQP e, portanto, pelo caso ALA os dois triângulos são congruentes. Logo os segmentos RM e PM são congruentes e os segmentos SM e QM são congruentes.

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104-105) considera-se o quadrilátero convexo PQRS, como hipótese "$PQRS\ \text{é}\ paralelogramo\ e\ \overline{PC} \cap \overline{QS} = M$" e como tese que "$\overline{PM} \equiv \overline{RM}\ e\ \overline{SM} \equiv \overline{QM}$".

$PQRS\ \text{é}\ paralelogramo \implies \overline{PQ} \equiv \overline{SR}\ (1)$

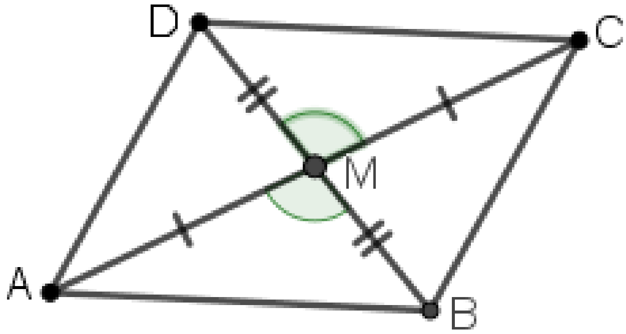
$PQRS\ \text{é}\ paralelogramo \implies \overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{SR} \implies Q\hat{P}R \equiv S\hat{R}P\ (2)\ \ e\ P\hat{Q}S \equiv Q\hat{S}R\ (3)$

$(2), (1), (3) \implies \Delta PQM \equiv \Delta SRM \implies \overline{PM} \equiv \overline{RM}\ e\ \overline{SM} \equiv \overline{QM}$

P6: Todo quadrilátero convexo em que as diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

A demonstração dessa propriedade, baseada na Figura 9 que representa um quadrilátero convexo cujas diagonais se intersectam em seus pontos médios, que permite dizer que os segmentos AM e CM são congruentes, os segmentos DM e BM são congruentes e os ângulos DMC e AMB são congruentes porque são opostos pelo vértice. Assim, os triângulos DMC e BMA são congruentes pelo caso LAL. Logo, os ângulos BAM e DCM são congruentes e, portanto os segmentos AB e CD são paralelos. Da mesma forma, pode-se mostrar que os triângulos DMA e BMC são congruentes e que os segmentos AD e BC são paralelos. Portanto, se o segmento AB é paralelo ao segmento DC e o segmento AD é paralelo ao segmento BC. ABCD é paralelogramo.

Figura 9 – Quadrilátero em que as diagonais se intersectam nos pontos médios



Fonte: Produção da autora

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104-105) quando consideram o quadrilátero convexo ABCD, como hipótese “ $\overline{AC} \cap \overline{BD} = M, \overline{AM} \equiv \overline{CM}\ e\ \overline{BM} \equiv \overline{DM}$ ” e como tese que “ABCD é paralelogramo”.

$$\overline{AM} \equiv \overline{CM}, A\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}D\ (o.p.v.),\ \overline{BM} \equiv \overline{DM} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta CDM \Longrightarrow B\hat{A}M \equiv D\hat{C}M \Longrightarrow \overline{AB}//\overline{CD}$$

Analogamente, considera-se $\Delta ADM\ e\ \Delta BCM, \overline{AD}//\overline{BC}, (\overline{AB}//\overline{CD}\ \ e\ \overline{AD}//\overline{BC}) \Longrightarrow ABCD\ \text{é}\ paralelogramo.$

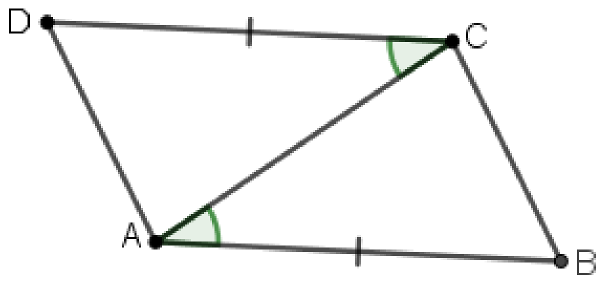
CP6[10]: Se dois segmentos de reta se intersectam nos respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

P7: Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Para essa demonstração, apoiada na Figura 10, sabe-se que os segmentos AB e DC são paralelos e congruentes. Ao traçar a diagonal AC e considerá-la uma transversal às paralelas pode-se dizer que os ângulos DCA e BAC são congruentes. Ao considerar os triângulos ACD e CBA observa-se que eles têm o lado AC comum, os ângulos DCA e BAC congruentes e os lados DC e AB congruente, portanto, eles são congruentes. Logo os lados AD e BC são congruentes. Como todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo, pode-se concluir que ABCD é paralelogramo.

[10] Usamos CP para indicar “consequência da propriedade”.

Figura 10 – Quadrilátero convexo paralelogramo



Fonte: Produção da autora

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104-105) quando consideram o quadrilátero convexo ABCD, como hipótese “ $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ” e como tese que “ABCD é paralelogramo”.

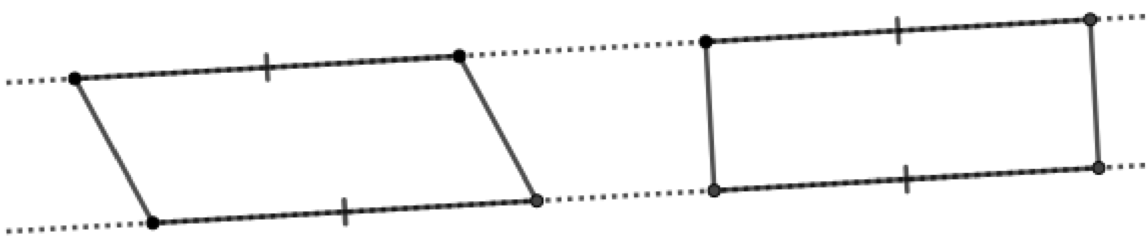
$\overline{AB}//\overline{CD} \implies B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$

$\left(\overline{AB} \equiv \overline{CD}, B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A, \overline{AC}\ comum\right) \overset{LAL}{\implies} \overline{BC} \equiv \overline{AD}$

Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ então, por P4 ABCD é paralelogramo.

CP7: Se dois segmentos de reta são paralelos e congruentes então suas extremidades são vértices de um paralelogramo (Figura 11).

Figura 11 – Paralelogramos por segmentos paralelos e congruentes



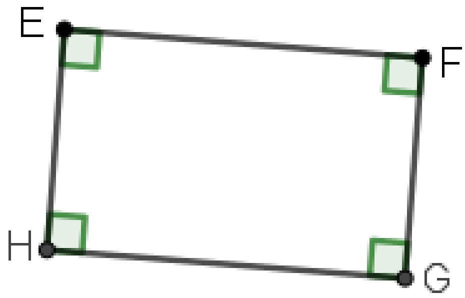
Fonte: Produção da autora

3.3 Retângulo

DR: um quadrilátero é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes (Figura 12).

Em linguagem formal EFGH é um retângulo $\Leftrightarrow \hat{E} \equiv \hat{F} \equiv \hat{G} \equiv \hat{H}$.

Figura 12 – Retângulo



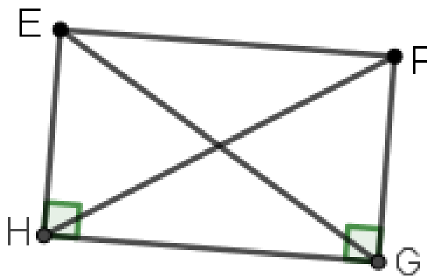
Fonte: Produção da autora

Como consequência de P1 e P2 pode-se dizer que todo retângulo é um paralelogramo. Logo todas as propriedades para paralelogramo são válidas para o retângulo, além das duas específicas que se apresenta no que segue.

R1: As diagonais de um retângulo são congruentes.

Na demonstração baseada na Figura13, se EFGH é um retângulo, EFGH é paralelogramo e, portanto os segmentos FG e EH são congruentes. Se os segmentos FG e EH são congruentes, se os ângulos H e G são congruentes e o segmento HG é comum aos triângulos HGF e GHE então eles são congruentes pelo caso LAL. Logo, os segmentos HF e GE são congruentes.

Figura 13 – Diagonais congruentes nos retângulos



Fonte: Produção da autora

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 104-105) quando consideram como hipótese que "EFGH é um retângulo" e como tese que " $\overline{HF} \equiv \overline{EG}$ ".

$EFGH \text{ é } retângulo \implies EFGH \text{ é } paralelogramo \implies \overline{FG} \equiv \overline{EH}$

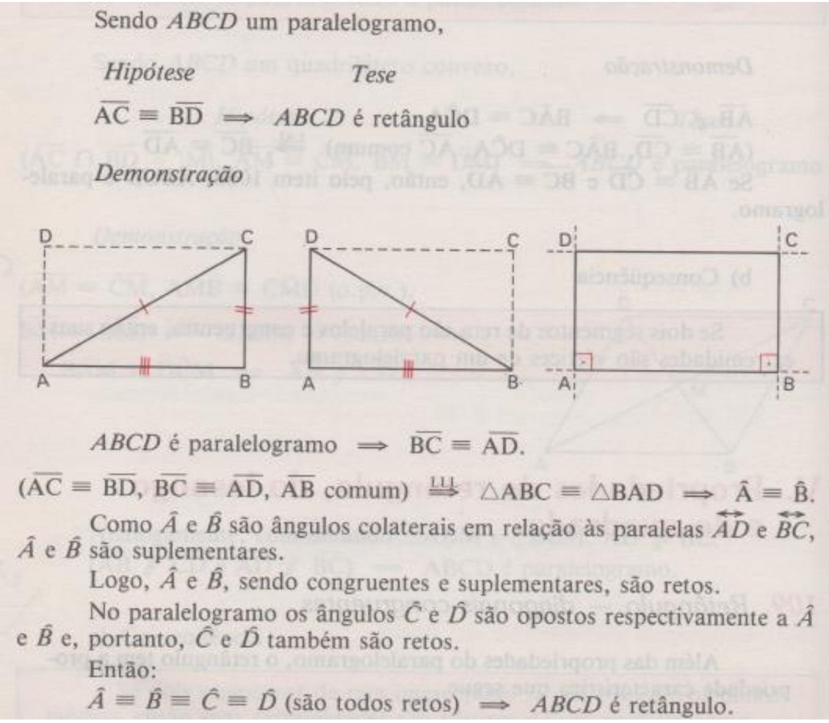
$\left(\overline{FG} \equiv \overline{EH}, \hat{H} \equiv \hat{G}, \overline{HG}\ comum\right) \overset{LAL}{\implies} \Delta HGF \equiv \Delta GHE \implies \overline{HF} \equiv \overline{EG}$

R2: Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Na demonstração, fundamentada na Figura 14, se HGFE é um paralelogramo então os segmentos FG e EH são congruentes. Ao considerar que as diagonais do paralelogramo, HF e GE, são congruentes e os triângulos HGF e GHE que têm o segmento HF comum, pode-se dizer que, pelo caso LLL, esses triângulos são congruentes. Ao observar que as retas HG e EF são paralelas e que a reta HG é transversal, pode-se dizer que os ângulos H e G são colaterais internos e suplementares e, por isso são retos. Como HGFE é um paralelogramo seus ângulos opostos são congruentes e, portanto os ângulos E e F também são retos. Logo, se todos os ângulos do paralelogramo são retos, então é um retângulo.

Em linguagem formal Dolce e Pompeo (1993, p. 108) apresentam a demonstração apresentada na Figura 14.

Figura 14 – Demonstração de R2



Sendo *ABCD* um paralelogramo,

Hipótese *Tese*

$\overline{AC} \equiv \overline{BD} \Rightarrow$ *ABCD* é retângulo

Demonstração

ABCD é paralelogramo $\Rightarrow \overline{BC} \equiv \overline{AD}$.

$(\overline{AC} \equiv \overline{BD}, \overline{BC} \equiv \overline{AD}, \overline{AB}$ comum$) \overset{LLL}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle BAD \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{B}$.

Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos colaterais em relação às paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares.

Logo, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sendo congruentes e suplementares, são retos.

No paralelogramo os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são opostos respectivamente a $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e, portanto, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ também são retos.

Então:

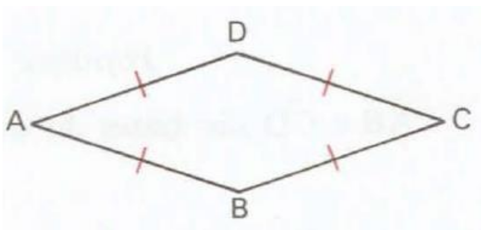
$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ (são todos retos) $\Rightarrow$ *ABCD* é retângulo.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.108).

3.4 Losango

DL: Um quadrilátero (Figura 15) é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes, ou ABCD é um losango $\Leftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$.

Figura 15 – Losango



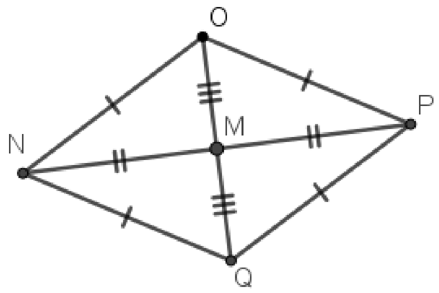
Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.101).

Como consequência de P3 e P4 todo losango é paralelogramo. Logo todas as propriedades que valem para paralelogramos também são válidas para os losangos, além de duas específicas.

L1: As diagonais de um losango são perpendiculares.

A demonstração abordada pela Figura 16 em que está representado um losango que, por ser paralelogramo, permite afirmar que os segmentos OP e NQ são congruentes e, ainda, que os segmentos NO e QP. As diagonais do losango o dividem em quatro triângulos que, pelo caso LLL são congruentes. Logo, os ângulos com vértice em M são congruentes e replementares, portanto, cada um é reto. Portanto, as diagonais do losango são perpendiculares.

Figura 16 – Diagonais perpendiculares no losango



Fonte: Produção da autora

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 109) considera-se o paralelogramo NOPQ (Figura 16), como hipótese que “NOPQ é losango” e como tese que “$\overline{OQ} \perp \overline{NP}$ ”.

$NOPQ$ é $losango \implies NOPQ$ é $paralelogramo \implies (\overline{NM} \equiv \overline{MP}, \overline{OM} \equiv \overline{MQ})$.

Pelo caso LLL há as congruências: $\Delta NOM \equiv \Delta OPM \equiv \Delta MPQ \equiv \Delta MQN$ e, então os ângulos de vértice em M são congruentes e suplementares. Logo, $\overline{OQ} \perp \overline{NP}$.

L2: Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Na demonstração, apoiada na Figura 16, se NOPQ é um paralelogramo cujas diagonais, perpendiculares, se intersectam no ponto médio M então. tanto os segmentos OM e MQ, quanto os segmentos NM e MP são congruentes. Pelo caso LAL os triângulos NMQ, NMO, PMO e PMQ são congruentes. Logo, os lados do paralelogramo são congruentes e portanto, esse paralelogramo é um losango.

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 109) considera-se o paralelogramo NOPQ (Figura 16), como hipótese que “$\overline{OQ} \perp \overline{NP}$ ” e como tese que “NOPQ é losango”.

$NOPQ$ é $paralelogramo \implies (\overline{OQ} \cap \overline{NP} = M, \quad \overline{NM} \equiv \overline{MP}, \quad \overline{OM} \equiv \overline{MQ})$

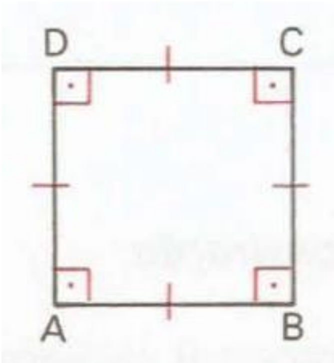
Pelo caso LAL há as congruências: $\Delta NOM \equiv \Delta OPM \equiv \Delta MPQ \equiv \Delta MQN$.
Daí, $\overline{NO} \equiv \overline{OP} \equiv \overline{PQ} \equiv \overline{QN}$ e então *NOPQ* é losango.

3.5 Quadrado

DQ: um quadrilátero é um quadrado (Figura 17) se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

Ou seja, ABCD é um quadrado $\Leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}\ e\ \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$.

Figura 17 - Quadrado



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.101).

Q1: Todo quadrado é retângulo e também losango.

Na demonstração a caracterização de um quadrado como um retângulo se dá por ele possuir todos seus ângulos retos. Como é retângulo possui as diagonais congruentes (R1). O quadrado pode ser caracterizado por um losango porque possui todos os lados congruentes e, portanto, têm suas diagonais perpendiculares (L1).

Para Dolce e Pompeo (1993, p. 110): $ABCD$ é $quadrado \Leftrightarrow (\overline{AC} \equiv \overline{BD},\ \overline{AC} \perp \overline{BD}$ ”.

Os autores concluem, para as diagonais de um quadrilátero convexo, que:

- Se elas se intersectam no ponto médio então é um paralelogramo;
- Se elas se intersectam no ponto médio e são congruentes então é um retângulo;
- Se elas se intersectam no ponto médio e são perpendiculares então é um losango;
- Se elas se intersectam no ponto médio, são congruentes e são perpendiculares então é um quadrado.

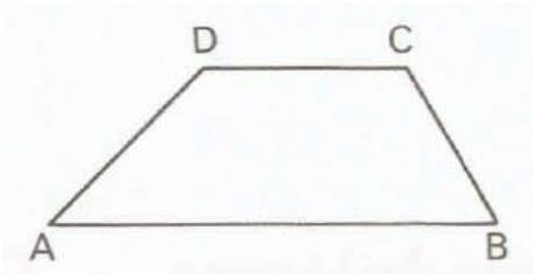
Como o quadrado tem as diagonais congruentes e perpendiculares, pode-se concluir que, todo quadrado é retângulo e é losango.

3.6 Trapézio

DT1: um quadrilátero plano convexo é um trapézio (Figura 18) se, e somente se, possui dois lados paralelos que são chamados de bases do trapézio.

Ou seja, ABCD é um trapézio ⇔ $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ ou $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$.

Figura 18 – Trapézio

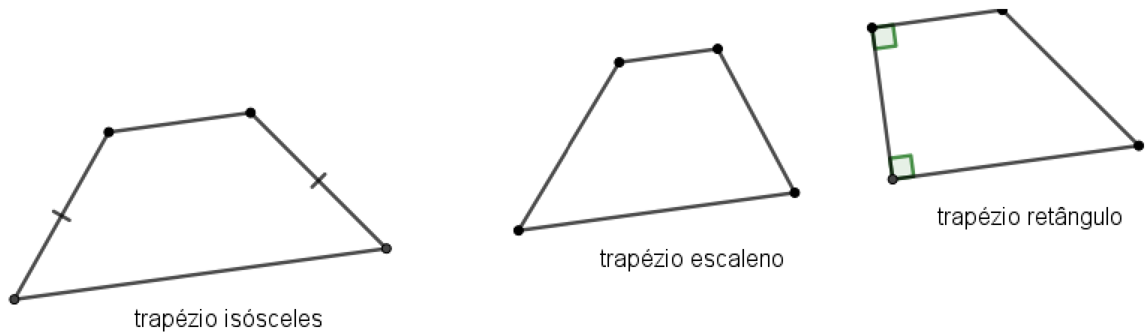


Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.100).

De acordo com os outros dois lados, não paralelos, do trapézio pode-se classificar os trapézios como isósceles, escaleno e retângulo.

Um trapézio é isósceles (Figura 19) se os lados não paralelos são congruentes; é escaleno se os lados não paralelos têm medidas diferentes e é retângulo se possui dois ângulos retos.

Figura 19 – Trapézio isósceles

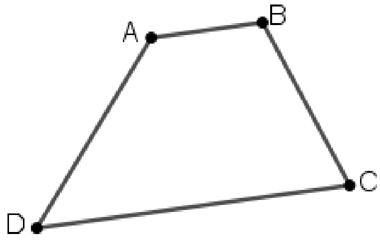


Fonte: Produção da autora

T1: em qualquer trapézio os dois ângulos nos extremos de cada lado não paralelo têm soma de medidas igual a 180°.

Na demonstração, apoiada na figura 20, existe os segmentos (bases) AB e DC paralelos. Ao considerar a reta AD como transversal obtém-se que os ângulos A e D são suplementares e com a reta BC como transversal e que os ângulos B e C são suplementares. Logo, a soma das medidas dos ângulos A e D é 180° e a soma das medidas dos ângulos B e C é 180°.

Figura 20 – Medidas dos ângulos de um trapézio



Fonte: Produção da autora

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 101-102) considera-se o trapézio ABCD (Figura 20), como hipótese que “$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases” e como tese que $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$”.

$$\left.\begin{array}{l}(\overleftrightarrow{AB})//\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AD}\ transversal \Rightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180° \\ (\overleftrightarrow{AB})//\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BC}\ transversal \Rightarrow m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°\end{array}\right\} \Rightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{D})$$

$$= m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$$

Há duas propriedades que são chamadas de base média do trapézio.

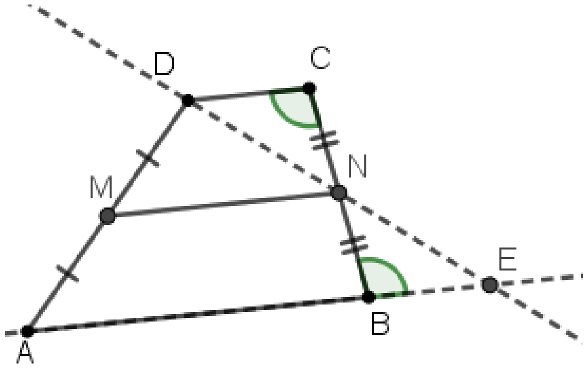
T2: Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio então: (1) ele é paralelo às bases e (2) ele é igual à semissoma das medidas das bases.

Para essa demonstração tem-se que mobilizar conhecimentos das propriedades relacionadas à base média do triângulo: se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo então: (1) ele é paralelo ao terceiro lado e (2) ele é metade do terceiro lado.

A base média de um trapézio é o segmento que tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos.

Ao considerar a demonstração, baseada na Figura 21, no trapézio ABCD sabe-se que os segmentos AB e DC são paralelos e que a reta CB é uma transversal, logo o ângulo interno C é congruente ao ângulo externo B. Ao traçar a reta que passa por D e N determina-se o ponto E na reta AB e os triângulos DCN e BEN que são congruentes pelo caso ALA, o que mostra a congruência entre os segmentos DN e NE, e BE e CD. No triângulo ADE, como NE e ND são congruentes o ponto N é médio do segmento DE então os segmentos MN é paralelo ao segmento AE e, portanto, o segmento MN é paralelo aos segmentos AB e CD. Como o segmento MN é base média do triângulo ADE então $MN = \frac{AE}{2} = \frac{AB+BE}{2}$. Como os segmentos BE e CD são congruentes vem que $MN = \frac{AB+CD}{2}$.

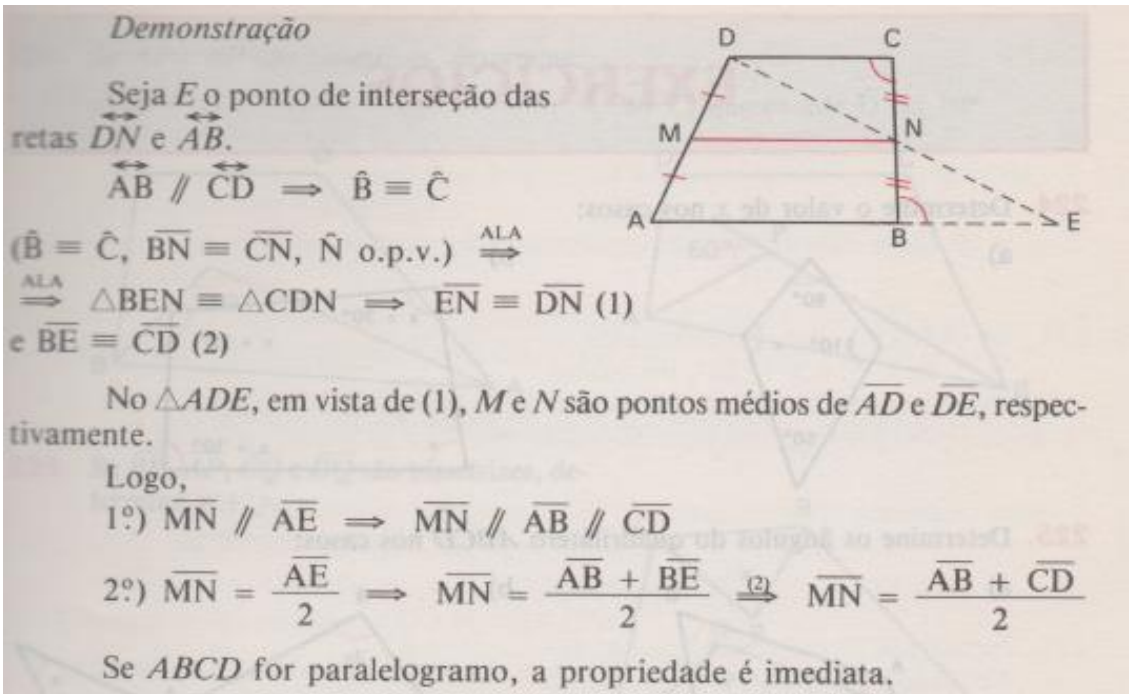
Figura 21 – Base média do trapézio (1)



Fonte: Produção da autora

Dolce e Pompeo (1993, p. 113) consideram o trapézio ABCD (Figura 22), como hipótese que "$(\overline{AM} \equiv \overline{BN} \equiv \overline{CN})$ e como tese: $\begin{cases} 1)\ \overline{MN} // \overline{AB} // \overline{CD} \\ 2)\ MN = \frac{AB+CD}{2} \end{cases}$.

Figura 22 - Demonstração para base média do trapézio



Demonstração

Seja E o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{DN}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$

$(\hat{B} \equiv \hat{C},\ \overline{BN} \equiv \overline{CN},\ \hat{N}$ o.p.v.$)$ $\overset{ALA}{\Longrightarrow}$

$\overset{ALA}{\Longrightarrow}$ $\triangle BEN \equiv \triangle CDN \Rightarrow \overline{EN} \equiv \overline{DN}$ (1)

e $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ (2)

No $\triangle ADE$, em vista de (1), M e N são pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente.

Logo,

1º) $\overline{MN} \parallel \overline{AE} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

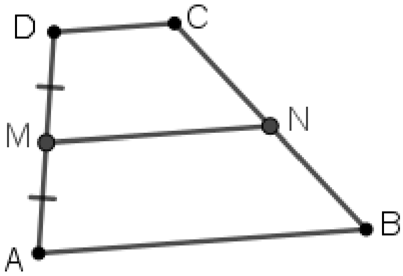
2º) $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AE}}{2} \Rightarrow \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BE}}{2} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$

Se $ABCD$ for paralelogramo, a propriedade é imediata.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.113).

T3: Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então esta extremidade é ponto médio deste lado.

Figura 23 – Base média do trapézio (2)

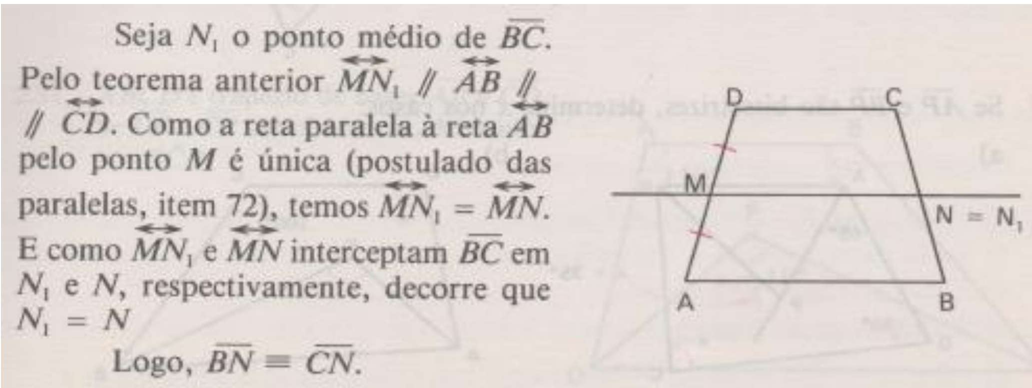


Fonte: Produção da autora

Nessa demonstração considera-se, na Figura 23, que N é o ponto médio do segmento CB e sabe-se que os segmentos CB, AB e MN são paralelos. Ao traçar uma reta paralela ao segmento AB que passa pelo ponto M obtendo um ponto N´. Como essa reta é única vem que os pontos N e N´ são coincidentes e os segmentos CN e NB são congruentes.

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 113) quando consideram o trapézio ABCD (Figura 24), como hipótese que "($\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ //$\overline{CD}$, $\overline{AM} \equiv \overline{DM}, N \in \overline{BC}$)" e como tese que "$\overline{BN} \equiv \overline{CN}$".

Figura 24 – Demonstração da base média do trapézio 2



Seja N_1 o ponto médio de $\overline{BC}$.

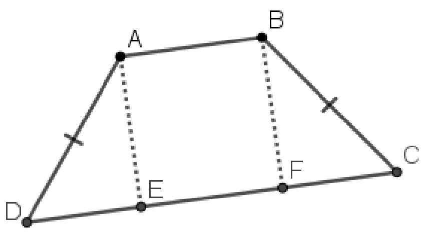
Pelo teorema anterior $\overleftrightarrow{MN_1} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Como a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto M é única (postulado das paralelas, item 72), temos $\overleftrightarrow{MN_1} = \overleftrightarrow{MN}$. E como $\overleftrightarrow{MN_1}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ interceptam $\overline{BC}$ em N_1 e N, respectivamente, decorre que $N_1 = N$

Logo, $\overline{BN} \equiv \overline{CN}$.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.113).

TI1: os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

Figura 25 – Medidas de ângulos das bases de um trapézio isósceles



Fonte: Produção da autora

Nessa demonstração considera-se, na Figura 25, que dado o trapézio isósceles ABCD ao traçar, por A e B, perpendiculares ao lado DC determina-se neste os pontos E e F. Pelo fato de os segmentos AB e CD serem paralelos pode-se concluir que os segmentos AE e BF são congruentes. Ao considerar os triângulos retângulos AED e BFC observa-se que são congruentes por terem os catetos AE e BF congruentes e as hipotenusas congruentes e, portanto os ângulos C e D são congruentes. Como os ângulos A e D são suplementares, assim como os ângulos B e C tem-se que os ângulos A e B são congruentes.

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 102) considera-se o trapézio ABCD (Figura 26), como hipótese que “$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são bases do trapézio isósceles” e como tese que ($\hat{C} \equiv \hat{D}$ e $\hat{A} \equiv \hat{B}$)”.

Figura 26 - Demonstração para ângulos da base de trapézio isósceles

1) Tracemos as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A' e B' na base maior $\overline{CD}$. Notemos que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ por serem distâncias entre retas paralelas.

2) Os triângulos retângulos $AA'D$ e $BB'C$ são congruentes pelo caso especial visto que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ (cateto) e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ (hipotenusa). Daí obtemos $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

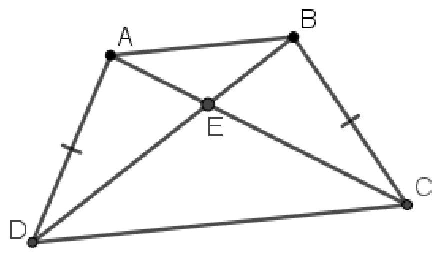
3) Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares de $\hat{D}$ e $\hat{C}$, respectivamente, temos: $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.102).

TI2: as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Se o trapézio da Figura 24 é isósceles pode-se dizer que os segmentos AD e BC são congruentes. Ao considerar os triângulos ADC e BCD sabe-se que os segmentos AD e BC são congruentes, que o lado DC é comum aos dois triângulos e que os ângulos D e C são congruentes. Assim, pode-se dizer que pelo caso LAL os triângulos são congruentes e, portanto, as diagonais AC e BD são congruentes.

Figura 27 – Congruência das diagonais de um trapézio isósceles



Fonte: Produção da autora

Baseados em Dolce e Pompeo (1993, p. 103) considera-se o trapézio ABCD (Figura 22), como hipótese que “ABCD é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$” e como tese que “$\overline{AC} \equiv \overline{BD}$”.

Observa -se os triângulos ADC e BCD:

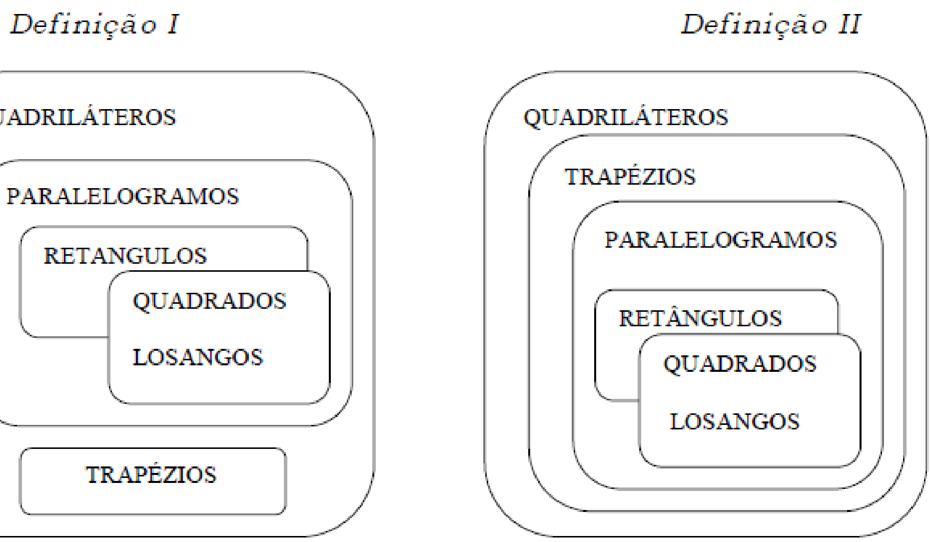
$$(\overline{AD} \equiv \overline{BC}, \hat{D} \equiv \hat{C}, DC = CD) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \Delta ADC \equiv \Delta BCD \;\Longrightarrow\; \overline{AC} \equiv \overline{BD}$$

3.7 A definição de trapézio e a classificação dos quadriláteros

Maioli (2002, p. 64) apresenta duas definições para trapézio, a primeira que afirma: “um trapézio é um quadrilátero que tem exatamente um par de lados paralelos” e a segunda que foi a assumida na seção anterior e nomeada de DT1.

De acordo com a definição de trapézio se assume classificações diferentes para os quadriláteros.

Figura 28 – Classificação dos quadriláteros



Fonte: Maioli (2002, p. 67)

Na Figura 28, para a primeira definição, tem-se que considerar que o trapézio tem exatamente um par de lados paralelos e, portanto, é um quadrilátero que não pode ser considerado um paralelogramo. No entanto, considerar que o trapézio tem um par de lados paralelos, DT1, não impede que o segundo par também seja paralelo e, nesse caso, os paralelogramos, os retângulos, os quadrados e os losangos seriam trapézios, segunda definição da Figura 28.

4 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

As coleções escolhidas para essa análise foram duas coleções aprovadas no PNLD 2023 dos anos iniciais, Coleção Ápis Mais Matemática (2021) e no PNLD 2024 dos anos finais Teláris Essencial Matemática (2022), de autoria de Fernando Viana e Luiz Roberto Dante, que foram projetadas para auxiliar no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos dos estudantes. Embora não haja uma referência direta ao quadro teórico de Bernard Parzysz (2006) nessas coleções o utilizamos nas análises aqui apresentadas, que tiveram início com a ferramenta de busca disponível, no livro eletrônico, para verificar as quantidades de incidência dos termos quadriláteros, quadrados, quadradas, retângulos, retangulares, paralelogramos, losangos e trapézios.

Os livros utilizados para as análises foram os livros destinados ao professor, em que foi possível analisar as respostas esperadas na cor rosa sugeridas ao professor e os encaminhamentos e orientações sobre os conceitos matemáticos e as atividades propostas para o professor.

Em seguida, serão apresentadas as análises realizadas em conteúdos e atividades dos livros escolhidos baseados em Parzysz (2006).

4.1 Coleção Ápis Mais Matemática (anos iniciais)

A tabela 3 mostra a incidência dos termos, relacionados à quadriláteros, em cada ano escolar. No 1º ano vemos o predomínio de termos relacionados a “quadrados” e “retângulos” (em azul); no 2º ano há um aumento considerável na utilização desses dois termos e aparece uma vez a palavra “quadriláteros” (verde); mas no 3º ano essa palavra é citada 27 vezes; continua predominando os termos relacionados a “quadrados” e “retângulos”, mas aparece 20 vezes a palavra “paralelogramos” (em laranja) e 18 vezes a palavra “trapézios” (em vermelho). No 4º ano continua o predomínio dos termos relacionados a quadrados e retângulos, cai as citações de “quadriláteros” para 15 e as palavras “paralelogramos” e “trapézios” são referidas apenas uma vez, no entanto elas aumentam para 25 e 21, respectivamente, no livro do 5º ano, o que também ocorre com “quadriláteros” com 61 citações, além de paralelogramos e trapézios e aparece o termo “losangos” (roxo) citado 15 vezes. Com base nesses dados podemos dizer que o foco de ensino de quadriláteros nos anos iniciais está em quadrados e retângulos; depois quadriláteros, seguidos de paralelogramos, trapézios e losangos, nessa ordem.

Tabela 3 – Termos pesquisados para análise dos livros didáticos da coleção Ápis Mais (Anos Iniciais)

Termo pesquisado	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Quadriláteros	0	**1**	**27**	**15**	**61**
Quadrados	**10**	**42**	**52**	**46**	**79**
Quadradas	**21**	**67**	**49**	**60**	**63**
Retângulos	**4**	**25**	**37**	**21**	**60**
Retangulares	**30**	**139**	**115**	**90**	**143**
Paralelogramos	0	0	**20**	**1**	**25**
Losangos	0	0	0	0	**15**
Trapézios	0	0	**18**	**1**	**21**

Fonte: produção da autora

Durante as análises verificaremos a utilização de um material complementar chamado “meu bloquinho”, em que é possível encontrar peças para recortar, montar e manipular, de modo que os estudantes aprendam fazendo e brincando. Com esse material, os estudantes podem desenvolver concretamente diversas atividades relacionadas a figuras geométricas, medidas, dinheiro, sistema de numeração, jogos, quebra-cabeças, etc.

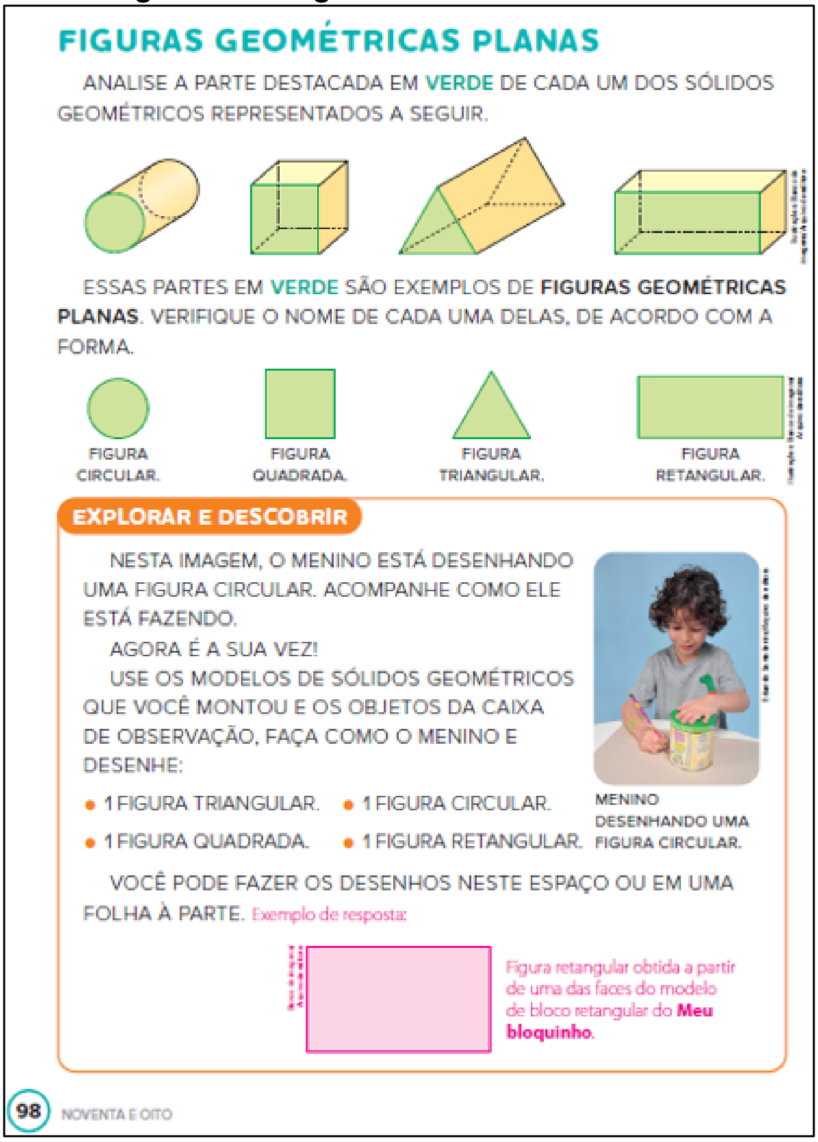
Assim, no que segue buscamos analisar as principais atividades que envolvem quadriláteros para identificar as geometrias a que se relacionam.

4.1.1 Ápis Mais Matemática – 1º, 2º e 3º anos

No volume do 1º ano da Coleção Ápis Mais Matemática, o maior enfoque em quadriláteros tem início na p. 98, em que é possível verificar, na Figura 29, que os autores fazem uma explicação para que o estudante observe, em representações de superfícies de alguns sólidos, que as verdes representam “figuras geométricas planas” que são nomeadas de acordo com sua forma. Cabe aqui comentar que as figuras apresentadas induzem à transparência e por isso que se trata apenas de representar superfícies de sólidos, modelos ocos, embora os autores os identifiquem como sólidos. A seguir em “explorar e descobrir” os autores solicitam que os estudantes usem modelos construídos por eles (sugeridos no “meu bloquinho” e desenhem uma forma triangular, uma circular, uma quadrada e uma retangular.

Nessa página podemos identificar a geometria G0 – geometria concreta, quando os estudantes em “explorar e descobrir trabalha com modelos concretos construídos por eles para que identifiquem alguns tipos de figuras com base em características visuais, mas na atividade o trabalho se dá em G1 – geometria espaço gráfica, pois é solicitada a representação de figuras com base em suas formas.

Figura 29 – Figuras Geométricas Planas


FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

ANALISE A PARTE DESTACADA EM VERDE DE CADA UM DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS REPRESENTADOS A SEGUIR.

ESSAS PARTES EM VERDE SÃO EXEMPLOS DE **FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS**. VERIFIQUE O NOME DE CADA UMA DELAS, DE ACORDO COM A FORMA.

FIGURA CIRCULAR. FIGURA QUADRADA. FIGURA TRIANGULAR. FIGURA RETANGULAR.

EXPLORAR E DESCOBRIR

NESTA IMAGEM, O MENINO ESTÁ DESENHANDO UMA FIGURA CIRCULAR. ACOMPANHE COMO ELE ESTÁ FAZENDO.

AGORA É A SUA VEZ!

USE OS MODELOS DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS QUE VOCÊ MONTOU E OS OBJETOS DA CAIXA DE OBSERVAÇÃO, FAÇA COMO O MENINO E DESENHE:

- 1 FIGURA TRIANGULAR.
- 1 FIGURA CIRCULAR.
- 1 FIGURA QUADRADA.
- 1 FIGURA RETANGULAR.

MENINO DESENHANDO UMA FIGURA CIRCULAR.

VOCÊ PODE FAZER OS DESENHOS NESTE ESPAÇO OU EM UMA FOLHA À PARTE. Exemplo de resposta:

Figura retangular obtida a partir de uma das faces do modelo de bloco retangular do **Meu bloquinho**.

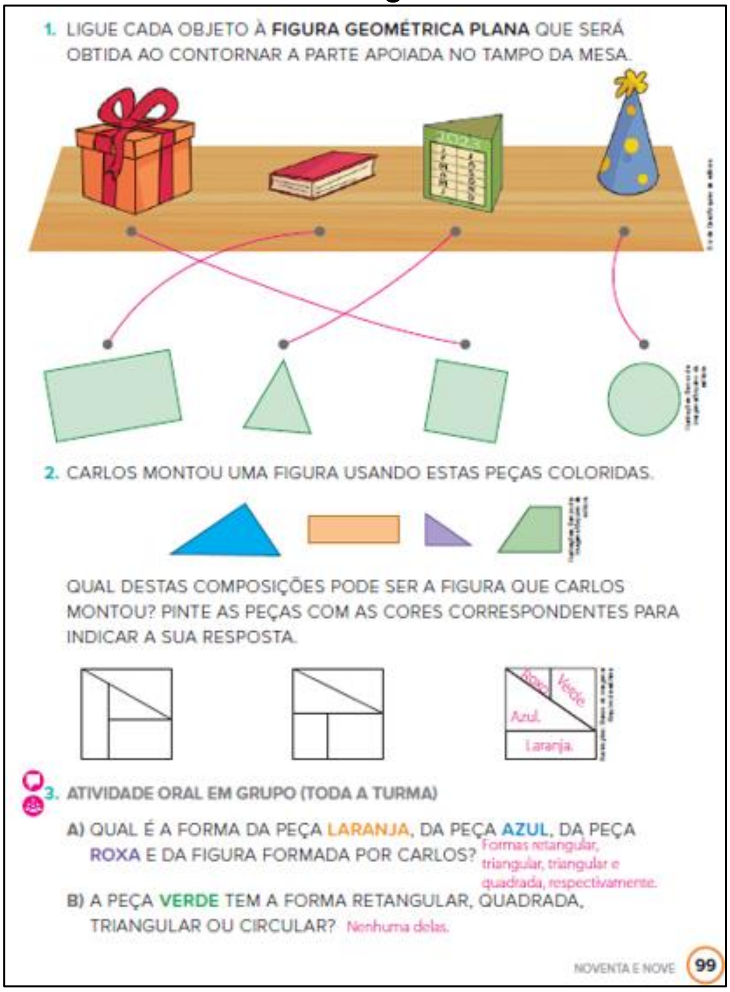
98 NOVENTA E OITO

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 98), referente ao livro do 1º ano.

A seguir o livro apresenta três atividades, Figura 30. Na primeira devem relacionar quatro imagens de objetos cotidianos com figuras geométricas planas; na segunda apresentam quatro figuras, dois triângulos, um retângulo e um trapézio, de cores diferentes, e, a seguir três composições com essas figuras para que os estudantes identifiquem a que utilizou as figuras anteriores, e as pinte da mesma cor. Na terceira os autores sugerem uma atividade oral em grupo ou com toda a turma, mediada pelo professor, em que solicitam a identificação das formas das peças de acordo com as cores, mas não citam a cor verde (trapézio), mas em seguida perguntam se a verde tem forma retangular, quadrada, triangular ou circular, para que respondam nenhuma delas, sem que o nome trapézio seja citado.

Nessas atividades podemos perceber o trabalho com G1 – geometria espaço gráfica, pois nas três atividades os estudantes trabalham com representações e identificação de figuras geométricas como retângulo, triângulo, quadrado e círculo.

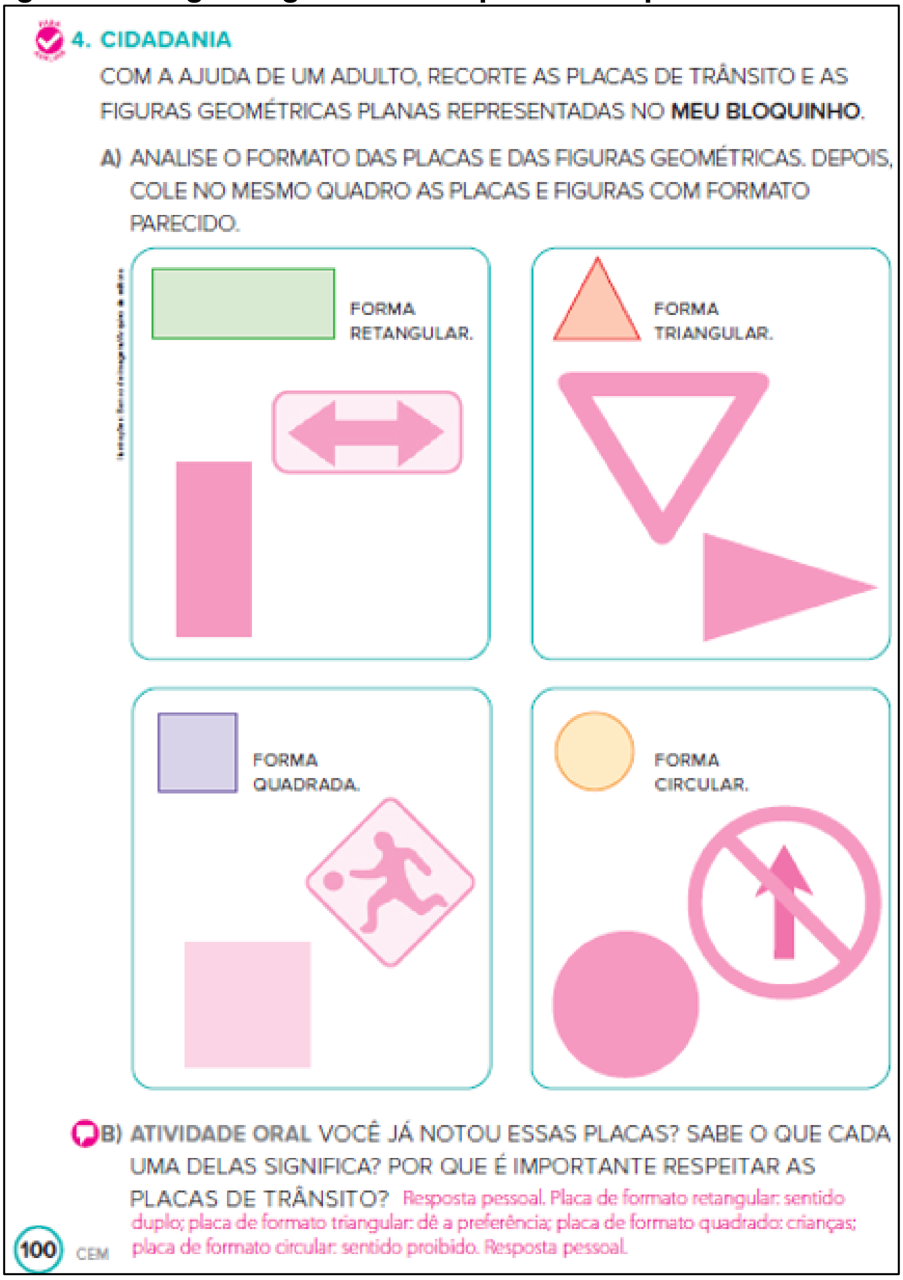
Figura 30 – Atividade sobre Figuras Geométricas Planas I



Fonte: Dante e Viana (2021, p. 99), referente ao livro do 1º ano.

Na atividade seguinte, Figura 31, os autores solicitam o recorte de placas de trânsito do “meu bloquinho” para que associem a elas formas geométricas, além de informações a respeito dessas placas, em uma atividade oral entre o professor e seus estudantes, em um trabalho em G1, geometria espaço gráfica, pois o foco está nas representações das figuras geométricas e o recorte das placas não se configura em uma atividade concreta para geometria.

Figura 31 –Figuras geométricas planas em placas de trânsito



Fonte: Dante e Viana (2021, p. 100), referente ao livro do 1º ano.

Na p. 101 são apresentadas atividades de pintura, verificação de quantidades de formas geométricas (quadrados e triângulos), além de análise de padrões e formatos.

Na atividade 8, apresentada na Figura 32, os autores apresentam uma pintura e solicitam que nela, os estudantes, organizados em grupos, identifiquem figuras planas. Nessa atividade o trabalho está focado em G1, geometria espaço gráfica, pois os estudantes precisam apenas reconhecer formas e responder figuras quadradas, retangulares, triangulares e circulares.

Figura 32 –Figuras geométricas planas em uma pintura


8. FIGURAS GEOMÉTRICAS E ARTE

ATIVIDADE ORAL EM GRUPO PINTORES E ESCULTORES MUITAS VEZES USAM FIGURAS GEOMÉTRICAS EM SUAS OBRAS.

CONFIRA, POR EXEMPLO, ESTA OBRA DO PINTOR HÚNGARO VICTOR VASARELY (1908-1997).

ALPHABET A. B. C. (ALFABETO A. B. C.). 1965. VICTOR VASARELY. ACRÍLICO SOBRE TELA, 103 cm × 97 cm. COLEÇÃO PARTICULAR.

COM OS COLEGAS, IDENTIFIQUE NESSA OBRA FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS QUE VOCÊS CONHECEM.

Figuras quadradas, circulares, triangulares e retangulares.

SUGESTÃO

LIVRO

CLACT... CLACT... CLACT... LILIANA E MICHELE IACOCCA. SÃO PAULO: ÁTICA, 2015.

102 CENTO E DOIS

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 102), referente ao livro do 1º ano.

Vemos então que, no livro para o primeiro ano, o ensino de quadriláteros foca em representações figurais para que os estudantes comecem a reconhecer os quadriláteros e os identifique por sua forma visualmente. Os quadriláteros trabalhados são o retângulo e o quadrado, embora tenha aparecido um trapézio sem identificação. Assim, podemos concluir que no livro para o 1º ano as atividades propõem o trabalho com G0, com a transição entre G0 e G1 e, com mais frequência, G1.

No livro do 2º ano, iniciamos a análise na p. 75 (Figura 33), com a atividade “explorar e descobrir” que está em G0, geometria concreta, porque os autores solicitam que os estudantes manipulem uma embalagem de creme dental, para que seja associada a um sólido geométrico, no caso um bloco retangular ou paralelepípedo. Na sequência, com o desmonte da embalagem, os estudantes devem verificar a quantidade de figuras planas por contagem, com exceção das abas, necessárias para construir essa embalagem.

Na atividade 5, baseada na atividade anterior, os autores solicitam a quantidade por contagem e a forma das faces de um bloco retangular, em uma clara transição de G0 para G1. Cabe ressaltar que os autores tomam cuidado para não identificar a embalagem de creme dental como um sólido, quando perguntam aos estudantes, em “explorar e descobrir”, com qual sólido geométrico “se parece” a caixa de creme dental. E na atividade 5 quando afirmam que “a caixa de creme dental tem o formato de um bloco retangular” (diferente da Figura 29). Isto é importante, porque os estudantes, no decorrer de sua aprendizagem geométrica, devem perceber que um sólido tem volume, enquanto a embalagem representa apenas sua superfície e, portanto, tem capacidade.

Figura 33 – Atividade sobre Figuras Geométricas Planas III

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 75), referente ao livro do 2º ano.

Nas atividades 6 e 7, Figura 34, sem citar qualquer uso de material concreto, os autores focam na quantidade e forma das faces de um cubo, como na atividade anterior e, na atividade 8 apresentam um painel, identificado por cores, para que os estudantes foquem na quantidade por contagem e forma das regiões coloridas, que podemos dizer que é um trabalho em G1 – geometria espaço gráfica.

Figura 34 – Atividade sobre as faces de um cubo

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 76), referente ao livro do 2º ano.

Na p. 77, Figura 35, continua o estudo com “saiba mais”, em que os autores apresentam as pirâmides do Egito, para então em “explorar e descobrir” os estudantes serem apresentados a essa figura geométrica. Assim, os autores solicitam que os estudantes recortem e montem a figura do “meu bloquinho” que representa a superfície de uma pirâmide. No entanto, os autores a identificam como um sólido, o que não é o caso, e solicitam aos estudantes que quantifiquem e identifiquem as faces de uma pirâmide. Na atividade 9 os autores caracterizam uma pirâmide de base quadrada por sua representação no espaço e a planificação de sua superfície.

Em todas explicações e ações dos estudantes, nessa página, percebemos a transição de G0 para G1, e que as figuras já não se "parecem" com um sólido, mas são identificadas como um sólido, quando o próprio estudante pode perceber que se trata de uma figura oca, que não tem volume e, portanto, não é um sólido. O quadrilátero aqui tratado é o quadrado como base da pirâmide.

Figura 35 – Atividade sobre Figuras Geométricas Planas IV

SAIBA MAIS

AS PIRÂMIDES DO EGITO ERAM TUMBAS GIGANTES, CONSTRUÍDAS PARA SEPULTAR OS FARAÓS. ELAS FORAM ERGUIDAS COM BLOCOS DE PEDRA MUITOS ANOS ATRÁS.

PIRÂMIDES DO EGITO, NO CONTINENTE AFRICANO. FOTO DE 2020.

EXPLORAR E DESCOBRIR

AGORA, É HORA DE VOCÊ MONTAR UM SÓLIDO GEOMÉTRICO CHAMADO **PIRÂMIDE**.

COM A AJUDA DE UM ADULTO, RECORTE E MONTE A FIGURA DO **MEU BLOQUINHO**.

NA PIRÂMIDE, TAMBÉM PODEMOS IDENTIFICAR FACES, VÉRTICES E ARESTAS.

VÉRTICE

FACE

ARESTA

- QUANTAS FACES ESTA PIRÂMIDE TEM? 5 faces.
- EXPLORE A PIRÂMIDE E RESPONDA: TODAS AS FACES SÃO IGUAIS? Não.
- NESTA PIRÂMIDE, UMA DAS FACES TEM O FORMATO DE UMA REGIÃO PLANA DIFERENTE DAS DEMAIS. COMO SE CHAMA ESSA REGIÃO PLANA? Região quadrada.

9. A PIRÂMIDE QUE VOCÊ MONTOU É CHAMADA **PIRÂMIDE DE BASE QUADRADA**. AO DESMONTAR UMA PIRÂMIDE DE BASE QUADRADA OBTEMOS ALGUMAS REGIÕES PLANAS CHAMADAS **REGIÕES TRIANGULARES** E UMA **REGIÃO QUADRADA**.

ANALISE ESTA PIRÂMIDE E RESPONDA.

A) QUANTAS FACES ELA TEM?

5 faces.

B) QUANTAS FACES SÃO TRIANGULARES?

4 faces.

PIRÂMIDE.

REGIÕES TRIANGULARES E REGIÃO QUADRADA.

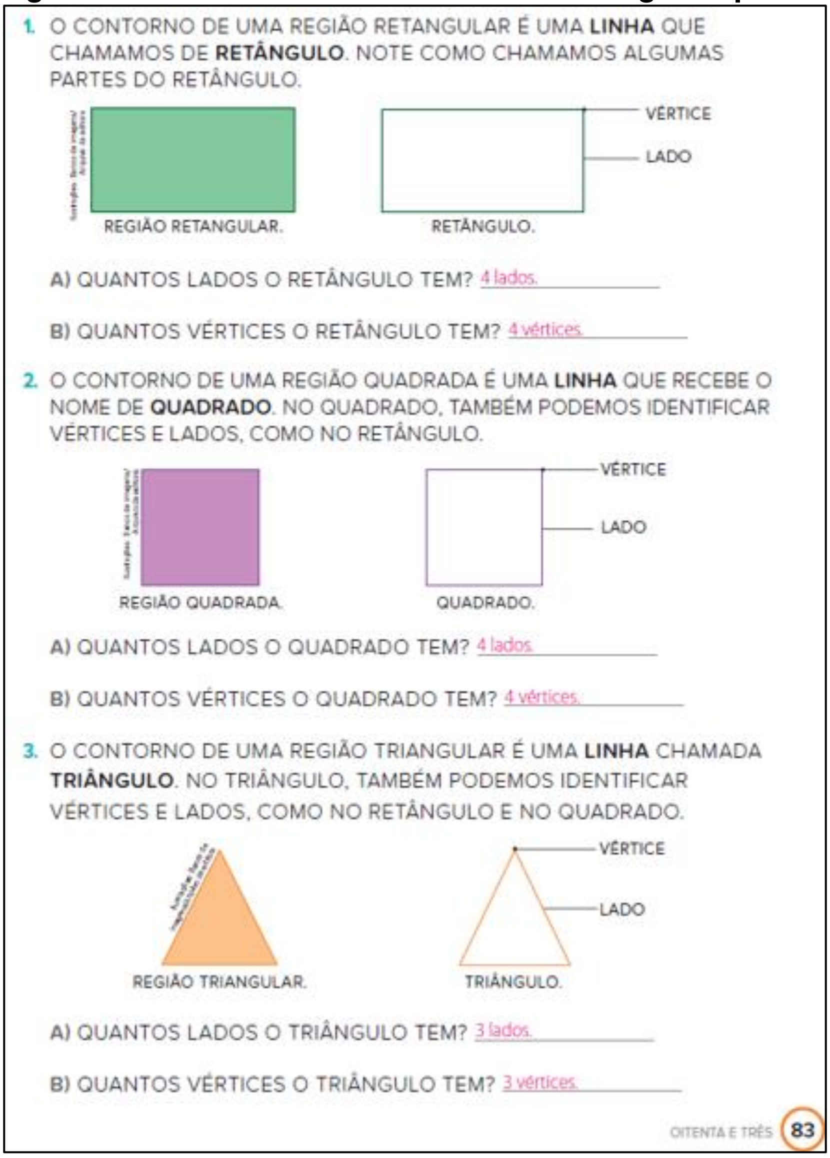
SETENTA E SETE 77

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 77), referente ao livro do 2º ano.

Nas páginas seguintes, os enfoques são em atividades com regiões planas circulares e regiões planas triangulares.

Na p. 83, Figura 36, o ensino de quadriláteros é aprofundado nas atividades 1 e 2 em que os autores apresentam a diferença entre uma região e seu contorno. Nesse ponto o autor aponta que tanto o retângulo, quanto o quadrado são apenas os contornos de regiões retangulares ou quadradas e, nelas podemos identificar lados e vértices. Ao estudante cabe apenas contar a quantidade de vértices e lados nessas figuras. Aqui podemos observar que, a definição implícita de retângulos e quadrados, implicará, mais à frente, que essas figuras têm apenas comprimento (perímetro) e que suas regiões além do perímetro, também têm área.

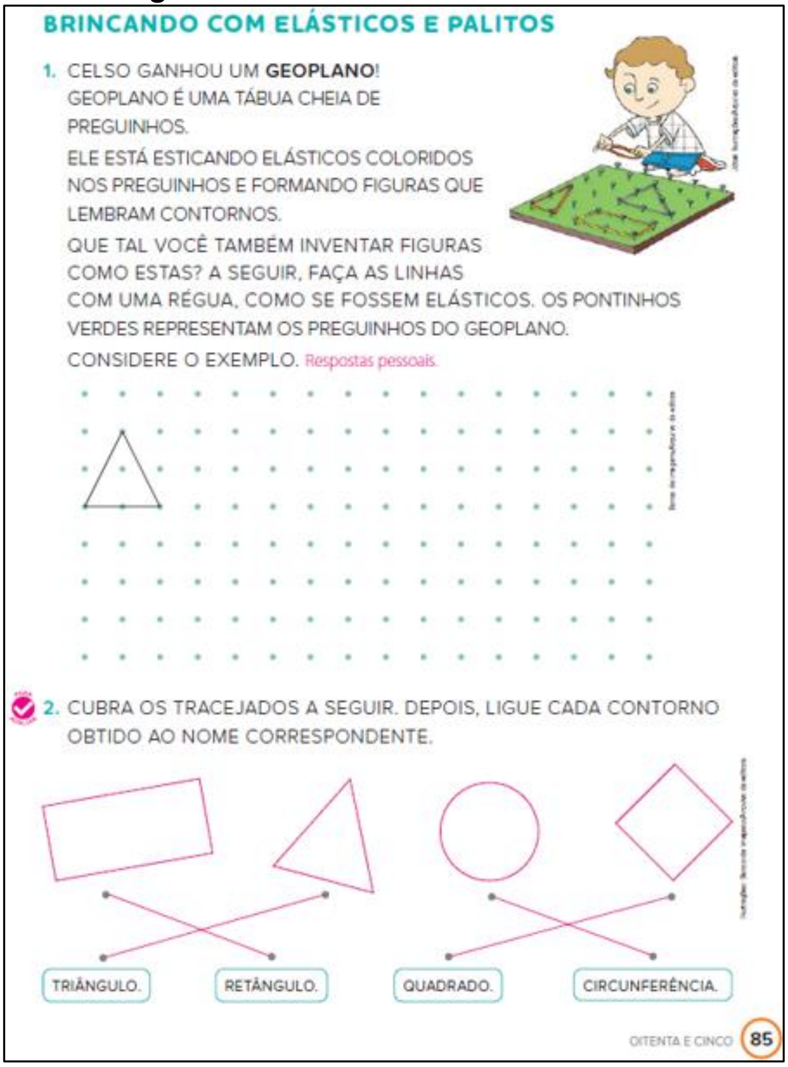
Figura 36 – Atividade sobre contorno de figuras planas



Fonte: Dante e Viana (2021, p. 83), referente ao livro do 2º ano.

Na p. 85 (Figura 37), na atividade 1, os autores apresentam a imagem de uma criança que brinca com o geoplano, depois uma figura de pontilhados equidistantes e a figura de um triângulo como exemplo e solicitam aos estudantes que liguem pontos, como se fossem os elásticos do geoplano, para representar figuras. Nessa atividade se configura o trabalho em G1, pois os estudantes representam figuras planas no papel e não concretamente no geoplano com elásticos.

Figura 37– Brincando com elásticos



Fonte: Dante e Viana (2021, p. 85), referente ao livro do 2º ano.

Na atividade 2, os estudantes precisam completar o tracejado e relacionar o contorno determinado ao nome das figuras geométricas, entre elas um retângulo e um quadrado, o que configura um claro trabalho em G1.

Na p. 86 são propostas atividades com palitos de sorvete para formar figuras que lembram contornos e na p. 87 é proposto um jogo relacionando sólidos geométricos, regiões planas e contornos.

Na p. 88, como mostra a Figura 38, os autores apresentam mais duas atividades em G1 – geometria espaço gráfica. Na primeira, baseados na imagem de um porta-retratos e de sua relação com ideias de região plana e contorno, os estudantes devem apenas completar frases. Na atividade 2, sem muito sentido, os autores exibem regiões quadrangulares, circulares, triangulares e retangulares em que estão inseridas figuras de abacaxi, cenoura, alface e açaí, cujos nomes aparecem em um quadro. A ação dos estudantes se resume a preencher esse quadro com a identificação das figuras como fruta, legume ou verdura; a forma das regiões e a quantidade de cada uma por contagem.

Figura 38 – Mais atividades

MAIS ATIVIDADES

1. REGIÃO PLANA E CONTORNO

A FOTO E A MOLDURA DO PORTA-RETRATOS SÃO OBJETOS QUE DÃO IDEIA DE REGIÃO PLANA E DE CONTORNO. COMPLETE AS AFIRMAÇÕES.

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

A) A FOTO DÁ IDEIA DE região plana.

B) A MOLDURA DO PORTA-RETRATOS DÁ IDEIA DE contorno.

C) AMBAS TÊM FORMATO retangular.

2. CONSIDERE OS DESENHOS DE FRUTAS, VERDURAS E LEGUMES DENTRO DE ALGUMAS REGIÕES PLANAS. EM SEGUIDA, COMPLETE O QUADRO.

PRODUTO	FRUTA, VERDURA OU LEGUME?	FORMA DA REGIÃO PLANA	QUANTIDADE DE UNIDADES DO PRODUTO
ABACAXI	Fruta.	Quadrada.	10
CENOURA	Legume.	Circular.	8
ALFACE	Verdura.	Triangular.	6
AÇAÍ	Fruta.	Retangular.	12

88 OITENTA E OITO

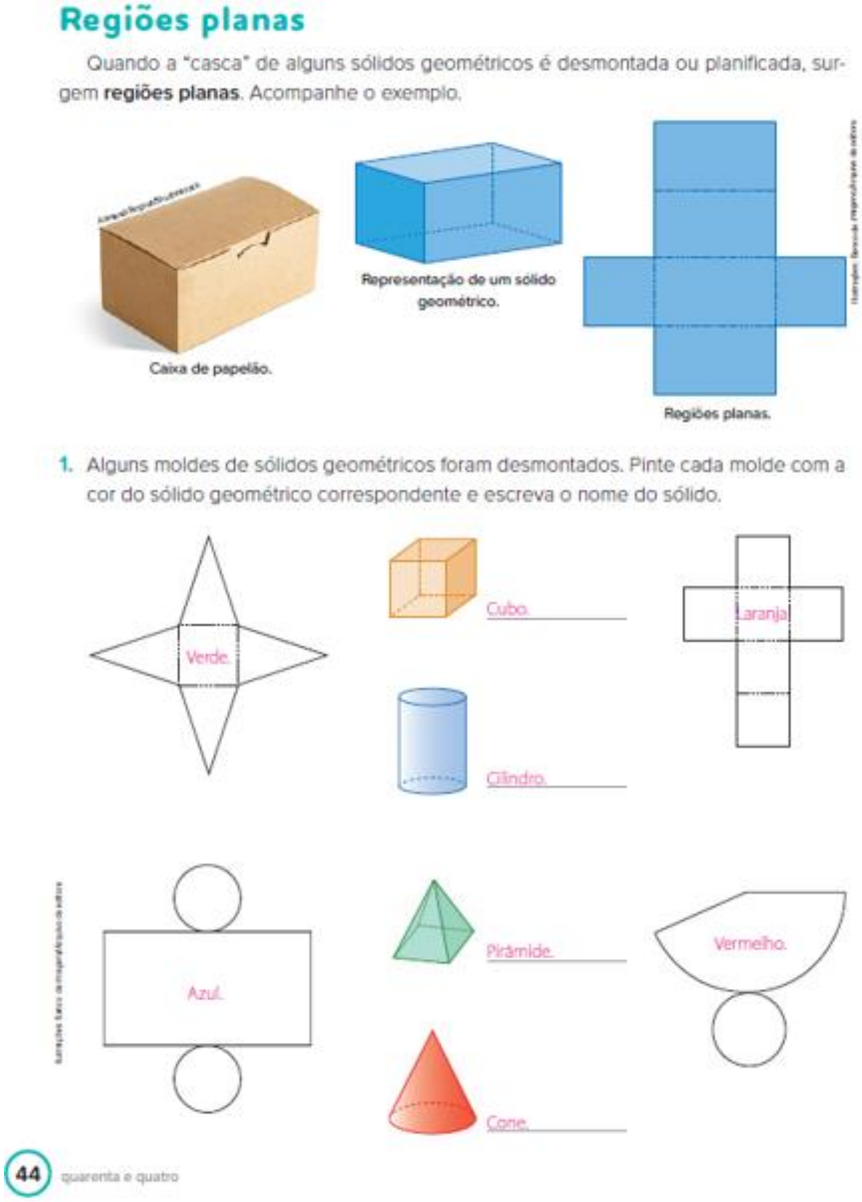
Fonte: Dante e Viana (2021, p. 88), referente ao livro do 2º ano

Podemos concluir que, no livro do 2º ano, em relação aos quadriláteros os autores focam no quadrado e no retângulo, em um trabalho principalmente em G1, baseada na percepção visual do estudante, talvez falte mais atividades com a transição entre G0 e G1.

No livro do 3º ano, o ensino do quadrilátero é retomado na p. 44, Figura 39, com a informação inicial de que a “casca” de alguns sólidos, quando desmontados fazem surgir regiões planas. Não entendemos a utilização do termo “casca”, quando poderiam utilizar superfície já que se trata de ensino de geometria. A seguir aparece a imagem de uma caixa de papelão, a representação de um “sólido” geométrico que, visivelmente não é sólido, e a representação de sua superfície planificada.

Na atividade 1 exibem quatro representações de figuras no espaço, em cores diferentes e quatro planificações de superfícies de sólidos para que os estudantes os relacionem e pintem da mesma cor, o que caracteriza um trabalho em G1. Quanto aos quadriláteros apresentam um cubo e a planificação de sua superfície com a mesma forma que apresentaram na Figura 34, embora outras sejam possíveis.

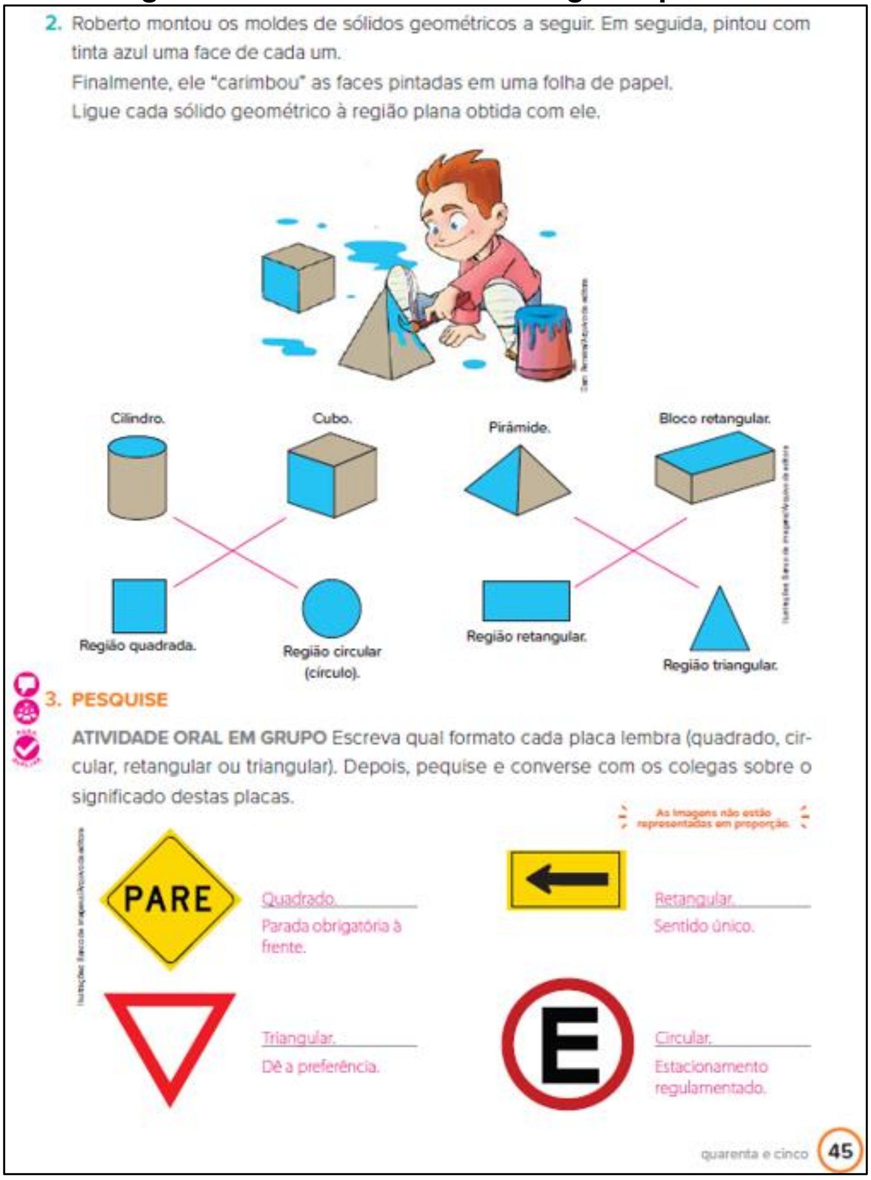
Figura 39 – Regiões planas



Fonte: Dante e Viana (2021, p. 44), referente ao livro do 3º ano

Na p. 45, Figura 40, apresentam duas atividades que tratam de regiões planas em uma geometria espaço gráfica – G1. Na primeira apresentam representações de sólidos geométricos com uma das faces em azul para que os estudantes os relacionem com figuras de regiões planas azuis, por exemplo, associar a um cubo uma região quadrada e a um bloco retangular uma região retangular. Na atividade “pesquise” sugere uma atividade em grupo, em que apresentam quatro placas de trânsito, entre elas uma de forma retangular e outra quadrangular, para que os estudantes descubram seus significados e as relacionem a regiões planas específicas.

Figura 40 – Atividades com regiões planas



2. Roberto montou os moldes de sólidos geométricos a seguir. Em seguida, pintou com tinta azul uma face de cada um.
Finalmente, ele "carimbou" as faces pintadas em uma folha de papel.
Ligue cada sólido geométrico à região plana obtida com ele.

Cilindro. Cubo. Pirâmide. Bloco retangular.

Região quadrada. Região circular (círculo). Região retangular. Região triangular.

3. PESQUISE

ATIVIDADE ORAL EM GRUPO Escreva qual formato cada placa lembra (quadrado, circular, retangular ou triangular). Depois, pesquise e converse com os colegas sobre o significado destas placas.

As imagens não estão representadas em proporção.

PARE

Quadrado. Parada obrigatória à frente.

Retangular. Sentido único.

Triangular. Dê a preferência.

E

Circular. Estacionamento regulamentado.

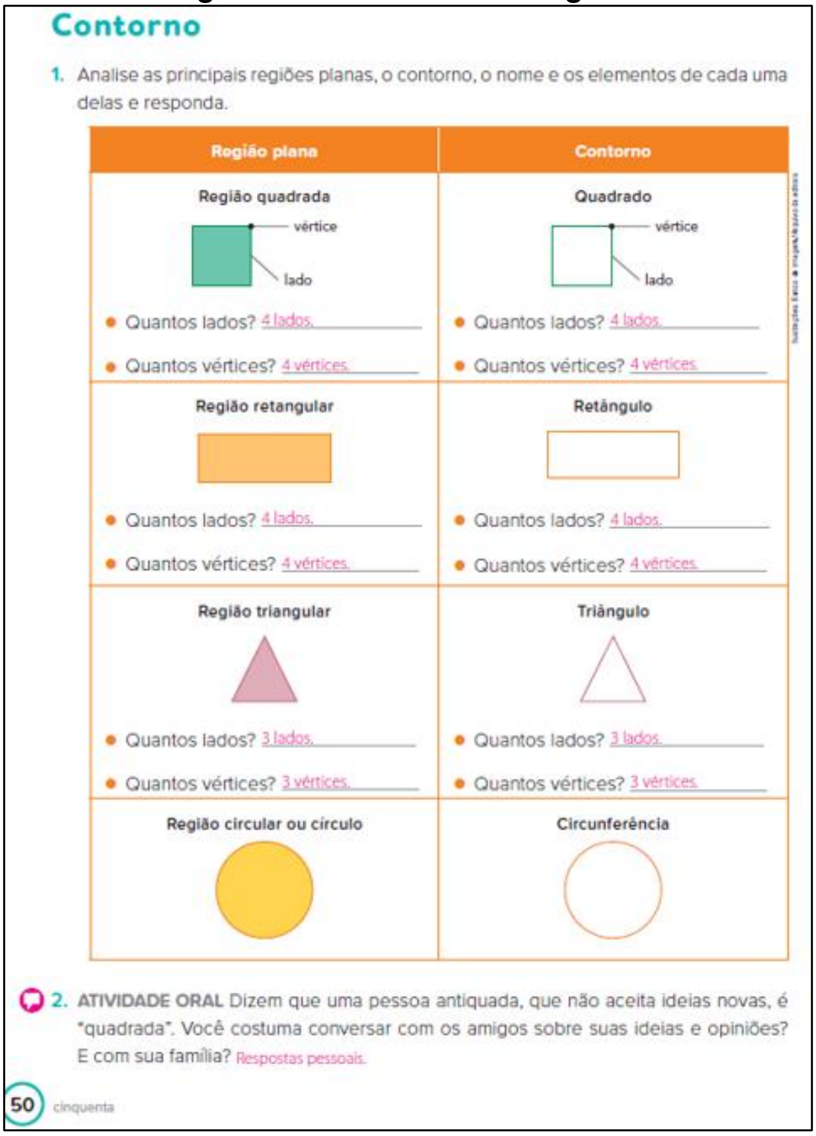
quarenta e cinco 45

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 45), referente ao livro do 3º ano

Nas páginas seguintes são propostas atividades com as peças do tangram e o desenvolvimento de habilidades de visões parciais e percepção de espaço no estudo de cartografia (conhecimento geográfico dos estudantes).

Na p. 50, com o título “Contorno” (Figura 41) apenas retomam a relação entre regiões e contornos, já apresentadas no segundo ano na Figura 36, mas aqui acrescentam uma região circular para ser trabalhada em G1. Os autores solicitam a quantificação, por contagem, de vértices e lados, para as três primeiras que tratam de quadrado, retângulo e triângulo, mas não pedem qualquer resposta para a região circular. Na sequência sugerem uma atividade oral, motivada pelo fato de uma pessoa antiquada ser identificada como "quadrada" e conduzem as discussões para a exposição de ideias e opiniões entre amigos e com a família. Não sugerem qualquer discussão a respeito da região circular não ter lados, nem vértices e perderam a oportunidade de talvez explicar o tom desrespeitoso que pode estar implícito em chamar uma pessoa conservadora de "quadrada". Uma atividade que pouco contribuiu para melhor compreensão do quadrado.

Figura 41 – Contorno de figuras



Contorno

1. Analise as principais regiões planas, o contorno, o nome e os elementos de cada uma delas e responda.

Região plana	Contorno
Região quadrada (vértice, lado) • Quantos lados? 4 lados. • Quantos vértices? 4 vértices.	Quadrado (vértice, lado) • Quantos lados? 4 lados. • Quantos vértices? 4 vértices.
Região retangular • Quantos lados? 4 lados. • Quantos vértices? 4 vértices.	Retângulo • Quantos lados? 4 lados. • Quantos vértices? 4 vértices.
Região triangular • Quantos lados? 3 lados. • Quantos vértices? 3 vértices.	Triângulo • Quantos lados? 3 lados. • Quantos vértices? 3 vértices.
Região circular ou círculo	Circunferência

2. ATIVIDADE ORAL Dizem que uma pessoa antiquada, que não aceita ideias novas, é "quadrada". Você costuma conversar com os amigos sobre suas ideias e opiniões? E com sua família? Respostas pessoais.

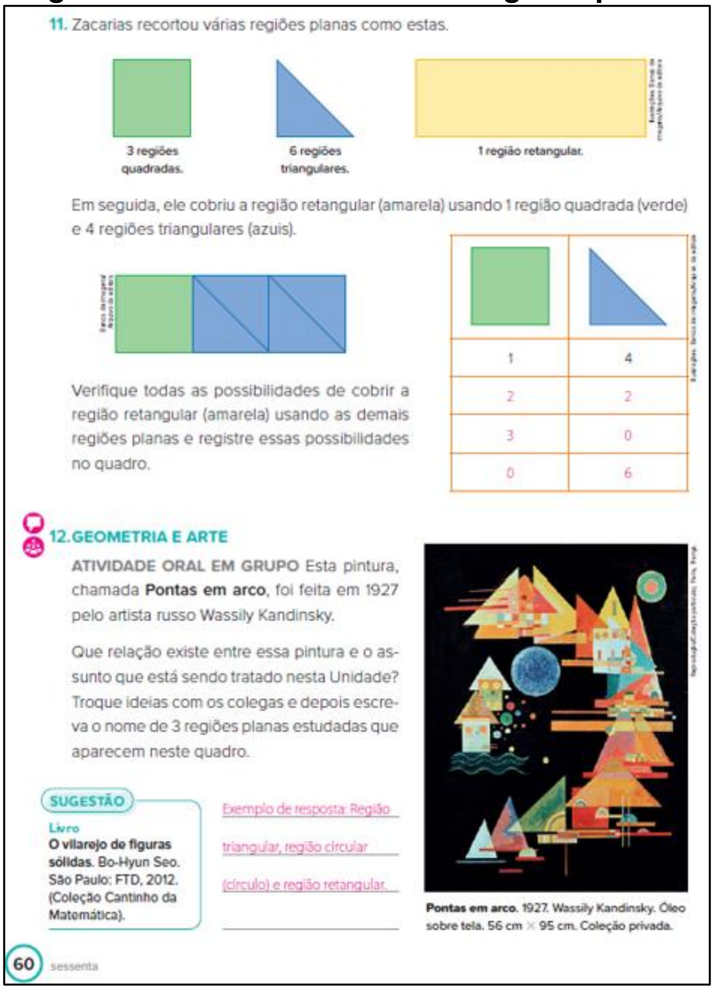
50 cinquenta

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 50), referente ao livro do 3º ano

Na p. 60, Figura 42, continua o trabalho em G1 – geometria espaço gráfica em que os autores apresentam duas atividades. Na primeira apresentam regiões quadradas e triangulares nas cores verde e azul, respectivamente, para recobrir uma região retangular, além de um exemplo e solicitam o preenchimento de um quadro com as possibilidades de recobrimento da região. Na segunda, geometria e arte, apresentam a imagem de uma pintura de Kandisky para nela, os estudantes identificarem as formas das regiões apresentadas. Como vemos não há qualquer trabalho em G0 – geometria concreta, mas apenas com G1 por meio de figuras.

Ao final da p. 60, Figura 42, é possível notar a sugestão do livro, O vilarejo de figuras sólidas, proposta para os estudantes.

Figura 42 – Atividades sobre regiões planas



11. Zacarias recortou várias regiões planas como estas.

3 regiões quadradas.

6 regiões triangulares.

1 região retangular.

Em seguida, ele cobriu a região retangular (amarela) usando 1 região quadrada (verde) e 4 regiões triangulares (azuis).

Verifique todas as possibilidades de cobrir a região retangular (amarela) usando as demais regiões planas e registre essas possibilidades no quadro.

Quadrado	Triângulo
1	4
2	2
3	0
0	6

12. GEOMETRIA E ARTE

ATIVIDADE ORAL EM GRUPO Esta pintura, chamada **Pontas em arco**, foi feita em 1927 pelo artista russo Wassily Kandinsky.

Que relação existe entre essa pintura e o assunto que está sendo tratado nesta Unidade? Troque ideias com os colegas e depois escreva o nome de 3 regiões planas estudadas que aparecem neste quadro.

Exemplo de resposta: Região triangular, região circular (círculo) e região retangular.

SUGESTÃO
Livro
O vilarejo de figuras sólidas. Bo-Hyun Seo. São Paulo: FTD, 2012. (Coleção Cantinho da Matemática).

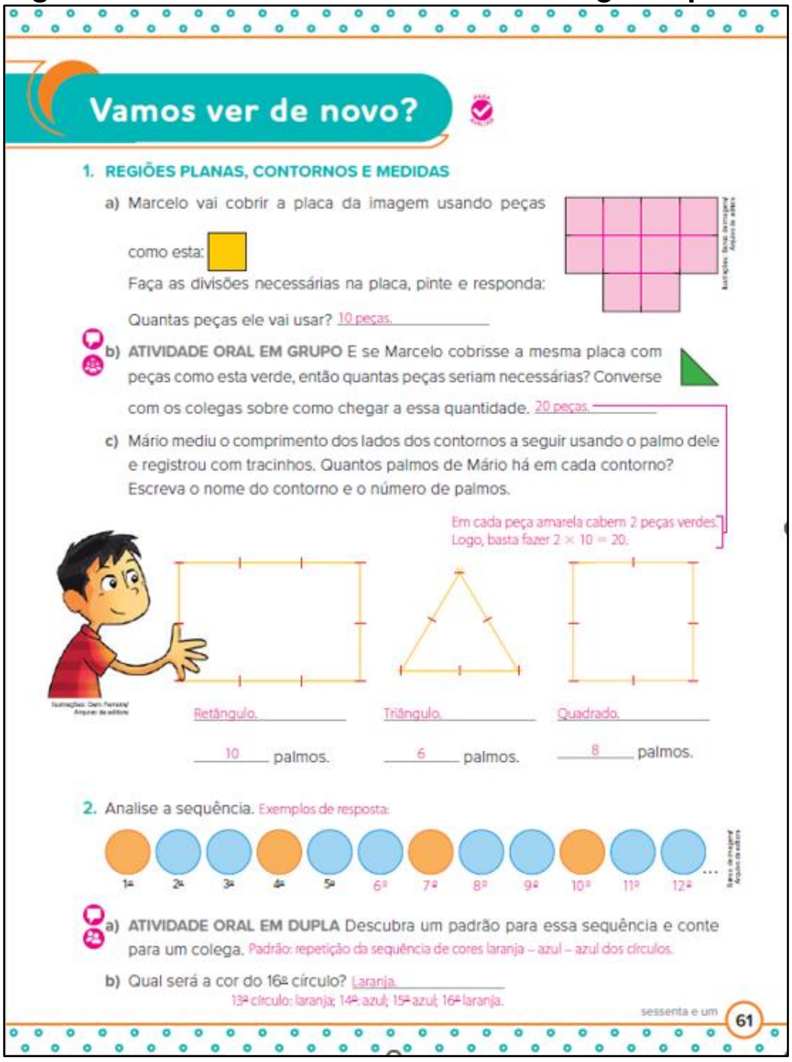
Pontas em arco. 1927. Wassily Kandinsky. Óleo sobre tela. 56 cm × 95 cm. Coleção privada.

60 sessenta

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 60), referente ao livro do 3º ano

Por fim, na p. 61 (Figura 43) os autores retomam os conteúdos trabalhados em geometria plana no 3º ano em duas atividades que envolvem o trabalho em G1. O item (a) da primeira trata de recobrir a imagem de uma placa com regiões quadrangulares com peças quadrangulares para que os estudantes respondam a quantidade de peças necessárias. No item (b) sugere uma atividade oral em grupo em que solicita o recobrimento da mesma placa com peças triangulares para que os estudantes discutam e respondam a quantidade de peças necessárias. No item (c) apresentam a representação de um retângulo, um triângulo e um quadrado, em cujos lados estão explicitados as divisões em palmos para se referir à medida de comprimento de cada lado, para que os estudantes identifiquem as figuras e a quantidade de palmos em seus contornos, o que mostra um início do ensino da noção de perímetro de polígonos. Não entendemos que em uma atividade com três itens seja sugerido uma individual, uma em grupo e outra individual, seria interessante se as três fossem em grupo com material concreto e fosse solicitada a representação da solução no final, pois seria uma boa situação de transição de G0 para G1.

Figura 43 – Atividades de revisão de regiões planas



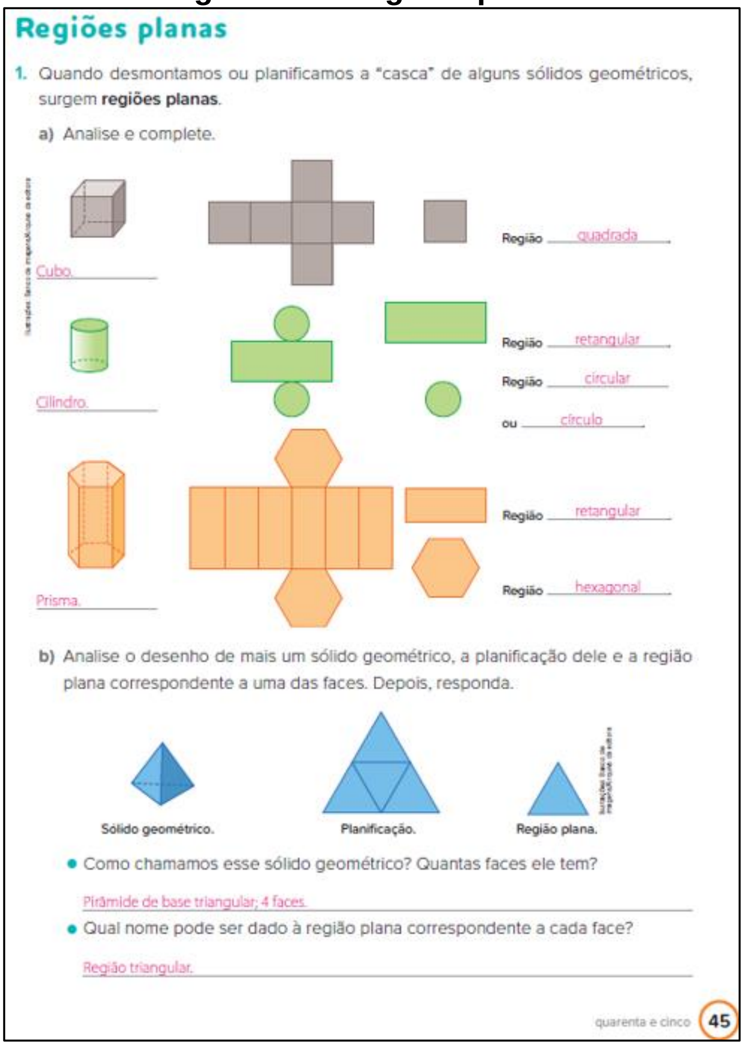
Fonte: Dante e Viana (2021, p. 61), referente ao livro do 3º ano

Como pudemos ver, no livro do 3º ano, nas atividades propostas, que tratam de quadriláteros, há o predomínio do trabalho com retângulos e quadrados e, todas mobilizam a geometria espaço gráfica, G1, baseada na percepção do estudante, embora algumas pudessem ser apresentadas com apoio de material concreto e fazer a transição entre G0 e G1.

4.1.2 Ápis Mais Matemática – 4º e 5º anos

No volume do 4º ano da Coleção Ápis Mais Matemática o ensino de quadriláteros tem início na p. 45 (Figura 44) com regiões planas e uma atividade em que constam representações de um cubo, um cilindro e um prisma hexagonal, seguidas de representações da planificação de suas superfícies identificadas como “o desmonte da casca”, seguidas da representação de regiões que representam a forma de suas faces, para que os estudantes apenas identifiquem os sólidos (que não são sólidos, porque visualmente são transparentes) e as regiões de suas faces. No item (b) se repete o mesmo tipo de atividade para apresentar aos estudantes a pirâmide de base triangular. Os dois itens dessa atividade requerem o trabalho em G1, baseada apenas em representações figurais.

Figura 44 – Regiões planas



Fonte: Dante e Viana (2021, p. 45), referente ao livro do 4º ano.

Na página seguinte apresentam três atividades identificadas como “regiões planas no dia a dia. Na 2, uma atividade oral os estudantes são solicitados a observar dois conjuntos com três imagens para identificar aquelas que representam regiões planas; na 3, uma atividade em grupo os estudantes devem identificar em objetos da sala de aula aqueles que dão “ideia” de regiões planas e na 3 os autores apresentam, como exemplo, uma figura, que parece representar uma árvore de natal, composta de regiões triangulares, circulares, quadrangulares e retangulares e solicitam que os estudantes desenhem uma outra figura com esses tipos de regiões. Essa atividade é resolvida baseada na percepção e identificação de regiões planas em um trabalho com G1, geometria espaço gráfica.

Figura 45 – Regiões planas no dia a dia


2. REGIÕES PLANAS NO DIA A DIA

ATIVIDADE ORAL Analise a foto de alguns objetos do dia a dia que lembram regiões planas.

As imagens não estão representadas em proporção.

Fotografia. Placa de trânsito. Cédula de 5 reais.

Quais objetos das fotos a seguir lembram regiões planas? Selo dos Correios e bandeira.

Selo dos Correios. Balão ou bexiga. Bandeira.

3. ATIVIDADE EM GRUPO Localize com os colegas objetos da sala de aula que dão a ideia de regiões planas. Escreva o nome de pelo menos 2 deles.

Exemplos de resposta: Parede, tampo da mesa, vidro da janela e capa do livro.

4. No espaço a seguir, desenhe e pinte uma figura na qual apareça pelo menos 1 região quadrada, 1 retangular, 1 triangular e 1 circular. Analise o exemplo.

Exemplos de resposta:

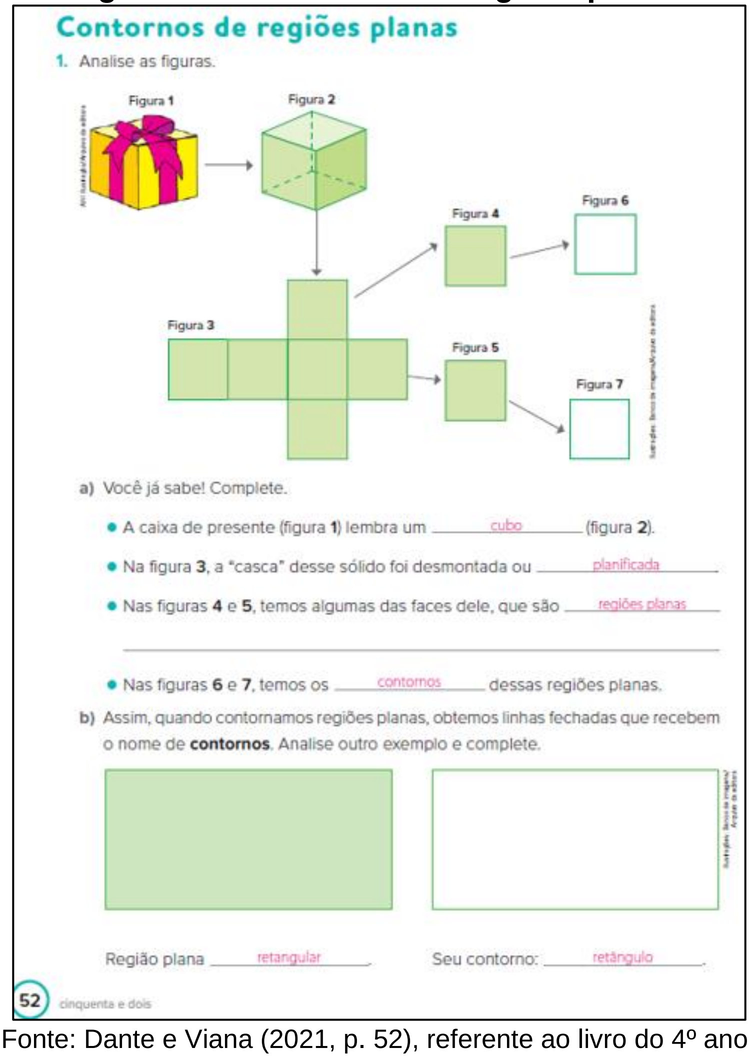
46 quarenta e seis

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 46), referente ao livro do 4º ano.

Nas páginas seguintes são propostas atividades de análise de obras de artes com figuras geométricas planas e o estudo de simetria com propostas de atividades com figuras simétricas e eixo de simetria.

Na p. 52 (Figura 46) os autores retomam o trabalho com contornos de regiões planas em uma atividade que se apoia na identificação de 7 figuras. A primeira é a imagem de uma caixa de presente; a segunda é a imagem de um cubo com faces transparentes; a terceira é a planificação da superfície desse cubo; a quarta e a quinta representam duas de suas faces e a sexta e a sétima o contorno dessas faces. No item (a) solicitam o completamento de frases baseado nas figuras numeradas. No item (b) os autores buscam a percepção do estudante da diferença entre região e contorno de figuras. Como nas anteriores o trabalho é realizado na geometria espaço gráfica, G1.

Figura 46 – Contornos de regiões planas



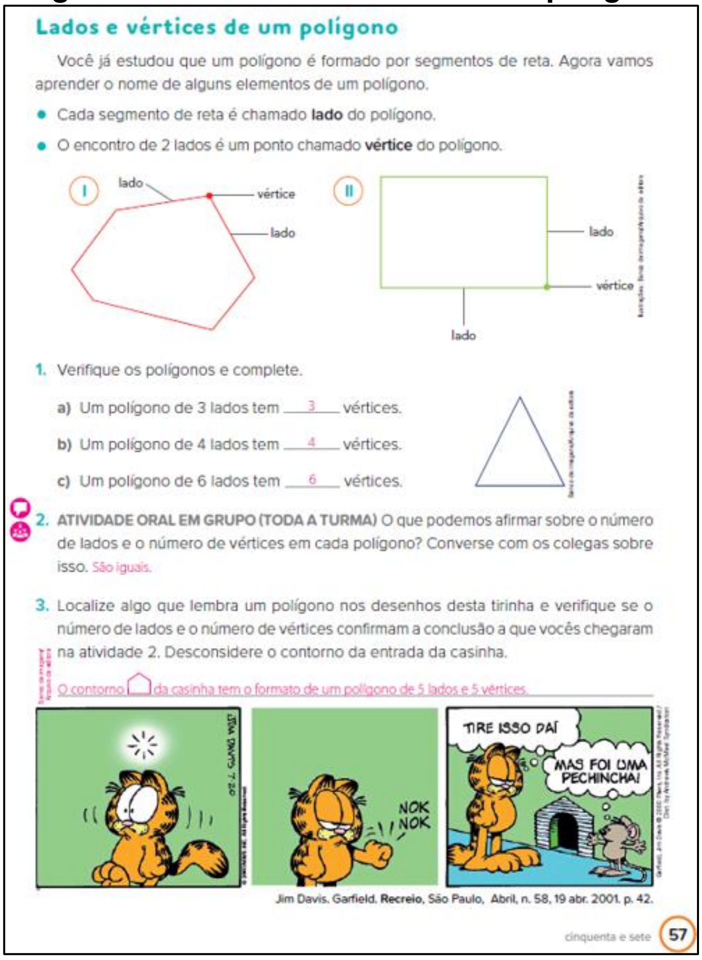
Fonte: Dante e Viana (2021, p. 52), referente ao livro do 4º ano.

Nas páginas seguintes são propostas atividades com contornos de regiões planas convexas e não convexas e são trabalhados o conceito de segmentos de reta e atividades que estimulam os estudantes a identificarem e verificarem “caminhos mais curtos” que ligam 2 pontos.

Na p. 56 os autores introduzem a ideia de polígono como contorno, ou seja, como uma linha fechada, formado apenas por segmentos de reta que não se cruzam.

Na p. 57 (Figura 47) os autores retomam o estudo de polígonos ao lembrar que são formados por segmentos de reta e, com a representação de um polígono não regular de sete lados e de um retângulo identificam lados e vértices. Na atividade 1, apoiada na figura de um triângulo, os estudantes devem responder a quantidade de vértices de polígonos que tem 3, 4 e 6 lados. Na atividade 2, em grupo, devem relacionar as quantidades de vértices e lados de um polígono para concluir que elas são iguais. Aqui podemos identificar o início de uma transição de G1 para G2, porque os estudantes deduzem intuitivamente a resposta apoiados na incorporação de elementos estudados de G0 e G1, além do início de um trabalho mais formal com geometria. Na atividade 3, em G1, os estudantes devem observar uma tirinha do Garfield e identificar “algo que lembra um polígono” e a quantidade de lados e vértices.

Figura 47 – Lados e vértice de um polígono



Lados e vértices de um polígono

Você já estudou que um polígono é formado por segmentos de reta. Agora vamos aprender o nome de alguns elementos de um polígono.

- Cada segmento de reta é chamado **lado** do polígono.
- O encontro de 2 lados é um ponto chamado **vértice** do polígono.

1. Verifique os polígonos e complete.

a) Um polígono de 3 lados tem 3 vértices.

b) Um polígono de 4 lados tem 4 vértices.

c) Um polígono de 6 lados tem 6 vértices.

2. **ATIVIDADE ORAL EM GRUPO (TODA A TURMA)** O que podemos afirmar sobre o número de lados e o número de vértices em cada polígono? Converse com os colegas sobre isso. São iguais.

3. Localize algo que lembra um polígono nos desenhos desta tirinha e verifique se o número de lados e o número de vértices confirmam a conclusão a que vocês chegaram na atividade 2. Desconsidere o contorno da entrada da casinha.

O contorno da casinha tem o formato de um polígono de 5 lados e 5 vértices.

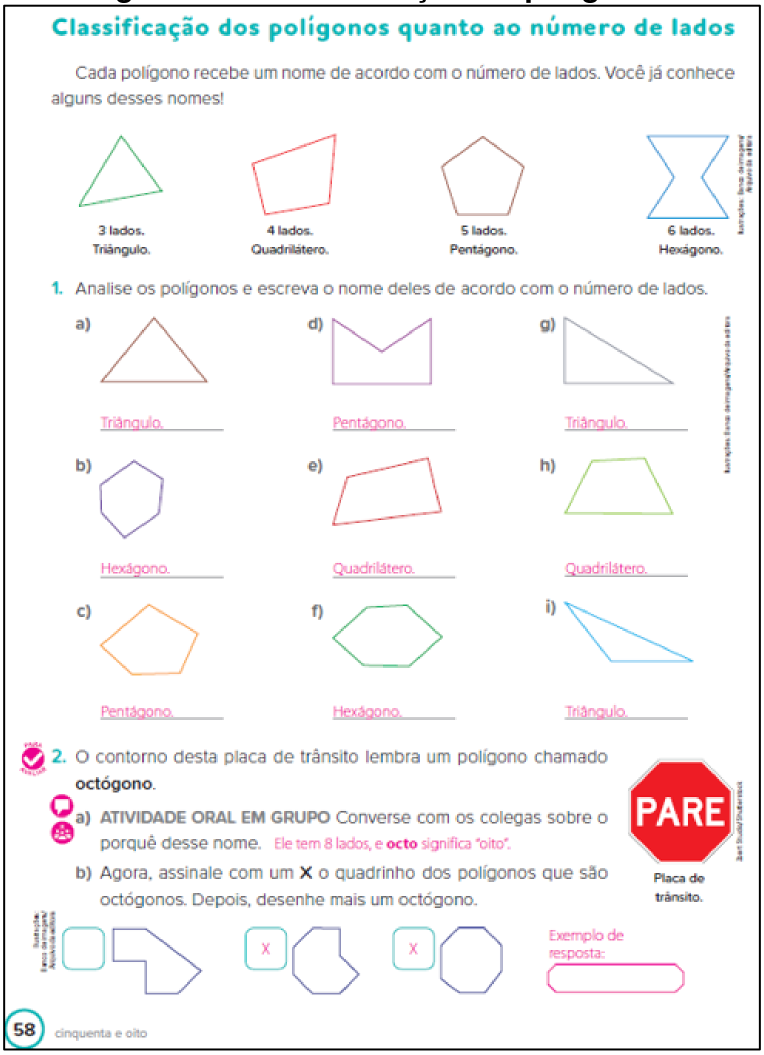
Jim Davis. Garfield. **Recreio**, São Paulo, Abril, n. 58, 19 abr. 2001. p. 42.

cinquenta e sete 57

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 57), referente ao livro do 4º ano.

Na página seguinte os autores apresentam a classificação de polígonos pela quantidade de lados e apresentam as figuras de um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e um hexágono. A seguir, na atividade 1, apresentam várias figuras de polígonos para que os estudantes os nomeiem pela quantidade de lados. Na atividade 2, baseada na figura de uma placa de trânsito em que seu contorno é identificado como sendo um octógono, os estudantes devem, em grupos, discutir o porquê do nome desse polígono e, depois, identificá-la entre três figuras. Nessas duas atividades continua a transição entre G1, geometria espaço gráfica, e G2, geometria proto-axiomática na identificação de polígonos por sua quantidade de lados, apoiados ainda na percepção.

Figura 48 – Classificação de polígonos



Classificação dos polígonos quanto ao número de lados

Cada polígono recebe um nome de acordo com o número de lados. Você já conhece alguns desses nomes!

3 lados. Triângulo.
4 lados. Quadrilátero.
5 lados. Pentágono.
6 lados. Hexágono.

1. Analise os polígonos e escreva o nome deles de acordo com o número de lados.

a) Triângulo.
d) Pentágono.
g) Triângulo.
b) Hexágono.
e) Quadrilátero.
h) Quadrilátero.
c) Pentágono.
f) Hexágono.
i) Triângulo.

2. O contorno desta placa de trânsito lembra um polígono chamado **octógono**.

a) ATIVIDADE ORAL EM GRUPO Converse com os colegas sobre o porquê desse nome. Ele tem 8 lados, e **octo** significa "oito".

b) Agora, assinale com um **X** o quadrinho dos polígonos que são octógonos. Depois, desenhe mais um octógono.

X X Exemplo de resposta:

PARE
Placa de trânsito.

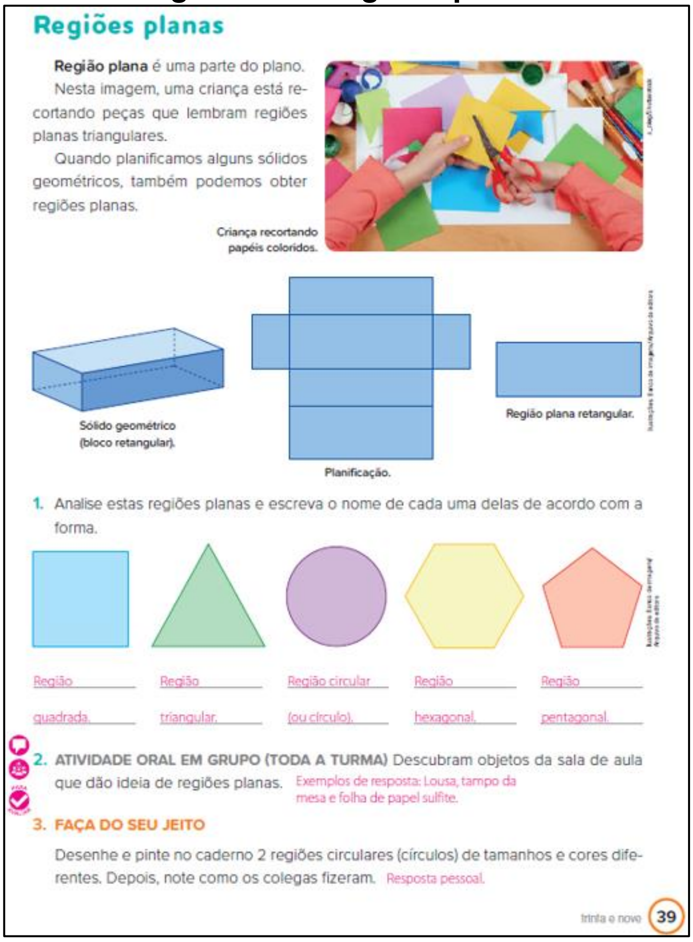
58 cinquenta e oito

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 58), referente ao livro do 4º ano

Podemos então concluir que, no livro do 4º ano, o ensino de quadriláteros começa a ser formalizado em algumas atividades que mostram a transição entre G1 e G2, pois os polígonos começam a ser tratados como objetos geométricos e aceitos pelos estudantes de forma intuitiva, embora a maioria das atividades tenham sido trabalhadas em G1.

No livro do 5º ano o ensino de quadriláteros é retomado na p. 39, (Figura 49) com a definição de que uma região plana é uma parte do plano, apoiada em uma imagem de crianças cortando peças de regiões planas triangulares. A seguir, os autores apresentam a figura de um bloco retangular, com faces transparentes e o identificam como um sólido geométrico; a figura da planificação de sua superfície e a figura de uma de suas faces identificada como região plana retangular. Na atividade 1 apresentam cinco figuras para que os estudantes identifiquem a forma de suas regiões; na atividade 2, em grupos, devem identificar na sala de aula objetos que "dão ideia de regiões planas" e na atividade 3 são solicitados a desenhar, em seus cadernos, duas regiões circulares de "tamanhos" e cores diferentes. Vemos que voltamos ao trabalho apenas com a percepção do estudante, em G1, ao usar a palavra "tamanho" do senso comum e cores, que não interferem na aprendizagem de geometria.

Figura 49 – Regiões planas



Regiões planas

Região plana é uma parte do plano.
Nesta imagem, uma criança está recortando peças que lembram regiões planas triangulares.
Quando planificamos alguns sólidos geométricos, também podemos obter regiões planas.

1. Analise estas regiões planas e escreva o nome de cada uma delas de acordo com a forma.

2. ATIVIDADE ORAL EM GRUPO (TODA A TURMA) Descubram objetos da sala de aula que dão ideia de regiões planas. Exemplos de resposta: Lousa, tampo da mesa e folha de papel sulfite.

3. FAÇA DO SEU JEITO

Desenhe e pinte no caderno 2 regiões circulares (círculos) de tamanhos e cores diferentes. Depois, note como os colegas fizeram. Resposta pessoal.

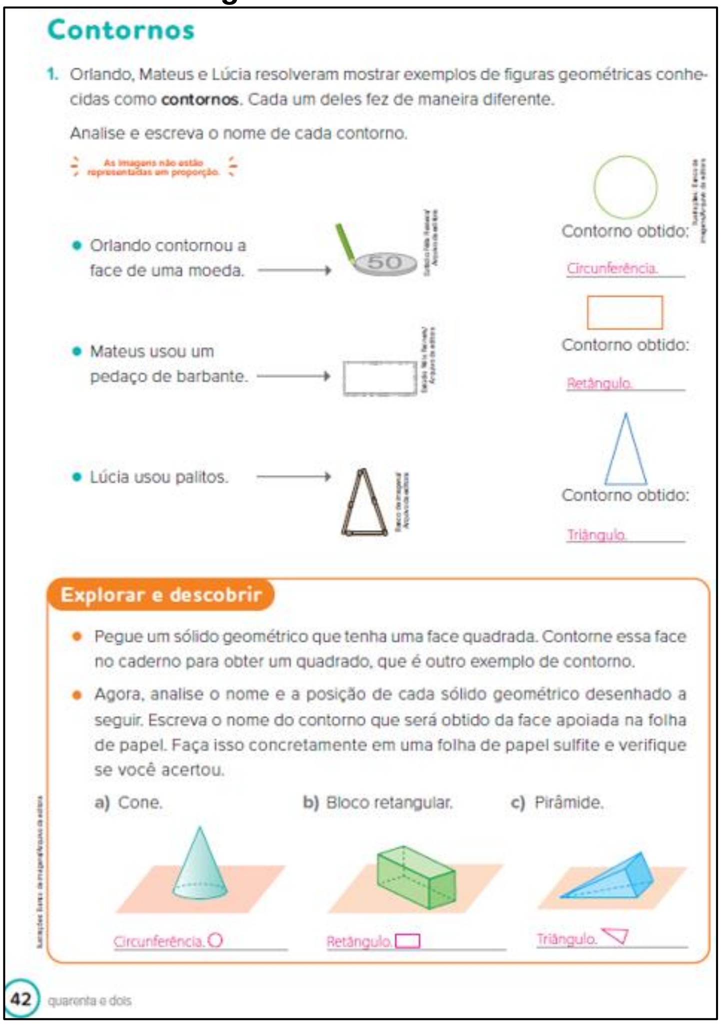
trinta e nove 39

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 39), referente ao livro do 5º ano

Na p. 40 os autores propõem uma atividade de aplicação dos conceitos de figuras simétrica, de eixo de simetria e de tipos de simetrias.

Na p. 41 (Figura 50) os autores retomam as discussões a respeito de contornos apoiadas em uma situação que envolve três representações de contornos obtidas de maneiras diferentes, por contornar o próprio objeto, com uso de barbante e de palitos. Associadas a elas seus contornos para que sejam identificados, como circunferência, retângulo e triângulo. Na sequência, em explorar e descobrir, os autores solicitam que os estudantes “peguem um sólido geométrico que tenha uma face quadrada para que contornem essa face em seu caderno. Aqui, vemos a transição entre G0, a manipulação do sólido, e G1 a representação de uma figura. Depois, apresentam as figuras de um cone, um bloco retangular e uma pirâmide com uma das faces apoiadas em um plano para que os estudantes identifiquem o contorno que elas produzem nesse plano, o que evidencia um trabalho em G1, pois voltam a se referir a contornos em vez de polígonos, talvez por conta da figura circular.

Figura 50 – Contornos



Contornos

1. Orlando, Mateus e Lúcia resolveram mostrar exemplos de figuras geométricas conhecidas como **contornos**. Cada um deles fez de maneira diferente.

Analise e escreva o nome de cada contorno.

As imagens não estão representadas em proporção.

- Orlando contornou a face de uma moeda. Contorno obtido: Circunferência.
- Mateus usou um pedaço de barbante. Contorno obtido: Retângulo.
- Lúcia usou palitos. Contorno obtido: Triângulo.

Explorar e descobrir

- Pegue um sólido geométrico que tenha uma face quadrada. Contorne essa face no caderno para obter um quadrado, que é outro exemplo de contorno.
- Agora, analise o nome e a posição de cada sólido geométrico desenhado a seguir. Escreva o nome do contorno que será obtido da face apoiada na folha de papel. Faça isso concretamente em uma folha de papel sulfite e verifique se você acertou.

a) Cone. Circunferência.
b) Bloco retangular. Retângulo.
c) Pirâmide. Triângulo.

42 quarenta e dois

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 42), referente ao livro do 5º ano

Na p. 44 (Figura 51), os autores voltam a relacionar regiões planas e contornos com sinais de trânsito. Após uma breve introdução, apresentam imagens de 9 placas identificadas por letras de A à I, para que os estudantes pesquisem seus significados e completem um quadro com a identificação de seus contornos e seu significado, em um claro trabalho perceptivo em G1.

Figura 51 – Regiões planas, contornos e sinais de trânsito

5. REGIÕES PLANAS, CONTORNOS E SINAIS DE TRÂNSITO

As imagens não estão representadas em proporção.

Para a segurança de todos, é importante conhecer e respeitar os sinais de trânsito.

Nos anos anteriores, você já viu que alguns sinais de trânsito aparecem em placas que lembram regiões planas e contornos conhecidos. Analise alguns deles.

Placas de trânsito.

Pesquise e complete o quadro a seguir. Para cada placa, você vai escrever o nome do contorno que ela lembra e o significado dela de acordo com o Código de Trânsito Brasileiro, como o exemplo na primeira linha.

Placa	Nome do contorno	Significado
A	Octógono	Parada obrigatória.
B	Triângulo.	Dê a preferência.
C	Circunferência.	Siga em frente.
D	Quadrado.	Saliência ou lombada.
E	Retângulo.	Pré-sinalização ou Bauru: siga em frente; Jaú: vire à direita.
F	Quadrado.	Ponte estreita.
G	Circunferência.	Estacionamento regulamentado.
H	Circunferência.	Proibido ultrapassar.
I	Quadrado.	Altura limitada a 3,20 m.

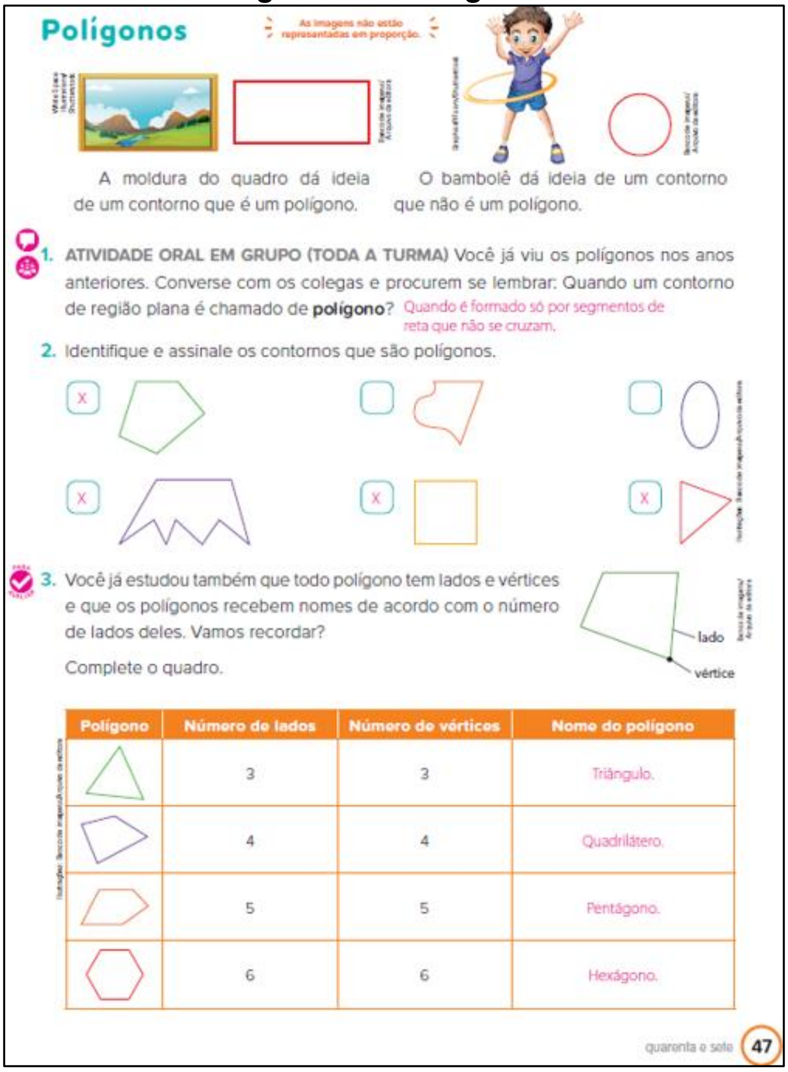
44 quarenta e quatro

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 44), referente ao livro do 5º ano

Nas p. 45 e 46, os autores formalizam o conceito de segmento de reta e são exploradas atividades de identificação de segmentos de reta, de traçados de segmentos de retas com a utilização de réguas e de retomada do conceito de aresta associando-o ao conceito de segmento de reta.

Na Figura 52 que mostra a p. 47 do livro os autores retomam o tema polígonos com uma apresentação breve com duas imagens, em que a moldura de um quadro dá a ideia de um polígono e a outra em que o bambolê dá ideia de um contorno que não é um polígono. Depois, na atividade oral 1, com toda a classe, para recuperar a definição de polígono, quando a figura é formada apenas por segmentos de retas que não se cruzam, diferente da apresentada no 4º ano (figura 47) em que não menciona que os segmentos não devem se cruzar. Podemos entender que essa atividade requer a transição entre G1, geometria espaço gráfica e G2, geometria proto-axiomática por buscar uma definição, pelos estudantes, para polígonos. Na atividade 2, apresenta várias figuras para que os estudantes identifiquem as que representam polígonos e na atividade 3, os autores, com a representação de um quadrilátero em que identificam um lado e um vértice, lembram os estudantes desses elementos para solicitar o preenchimento de um quadro em que apresentam figuras para que eles quantifiquem vértices e lados e as identifiquem. Em ambas o trabalho está em G1, baseada em representações figurais.

Figura 52 – Polígonos



Polígonos

As imagens não estão representadas em proporção.

A moldura do quadro dá ideia de um contorno que é um polígono.

O bambolê dá ideia de um contorno que não é um polígono.

1. ATIVIDADE ORAL EM GRUPO (TODA A TURMA) Você já viu os polígonos nos anos anteriores. Converse com os colegas e procurem se lembrar: Quando um contorno de região plana é chamado de **polígono**? Quando é formado só por segmentos de reta que não se cruzam.

2. Identifique e assinale os contornos que são polígonos.

X X X X

3. Você já estudou também que todo polígono tem lados e vértices e que os polígonos recebem nomes de acordo com o número de lados deles. Vamos recordar?

lado

vértice

Complete o quadro.

Polígono	Número de lados	Número de vértices	Nome do polígono
	3	3	Triângulo.
	4	4	Quadrilátero.
	5	5	Pentágono.
	6	6	Hexágono.

quarenta e sete 47

Fonte: Dante e Viana (2021, p. 47), referente ao livro do 5º ano

No volume para o 5º ano da Coleção Ápis Mais Matemática foi possível identificar uma atividade em que acontece a transição de G0 e G1, e indícios da transição de G1 para G2 com a definição de polígono e da propriedade que garante que a quantidade de vértices e lados é a mesma em um polígono, que ainda estão baseadas na percepção intuitiva dos estudantes. No restante das atividades prevalece o trabalho com G1.

Após analisar os cinco volumes, foi possível verificar a progressão dos conteúdos e sua apresentação em espiral. No entanto, nesse processo, sempre que retomam conteúdos já trabalhados, os autores os “relembram” aos estudantes, o que impede que eles, por si só, mobilizem e explicitem o que realmente aprenderam ou não, e o professor tenha clareza do que ocorre com cada um de seus estudantes.

Por outro lado, pudemos identificar no trabalho com quadrilátero, algumas atividades em G0, geometria concreta, que consideramos poucas para que os estudantes por conta própria construa conhecimentos. O foco esteve no trabalho com G1, geometria espaço gráfica, que focavam em imagens e representações de figuras geométricas em que que o conhecimento é construído por suas percepções intuitivamente. Se verificou também atividades em que ocorreram a transição de G0 para G1 e de G1 para G2, geometria proto-axiomática, mas de forma muito tímida, pois apenas uma propriedade de polígonos foi observada. O que nos leva a concluir que o trabalho com G2 ocorrerá nos Anos Finais do Ensino Fundamental, para que os estudantes comecem a reconhecer outras propriedades para os quadriláteros e com isso aprofundem seus conhecimentos a respeito desse conteúdo.

Assim, no que segue apresentamos as análises realizadas nos volumes para os anos finais.

4.2 Coleção Teláris Essencial Matemática (anos finais)

A tabela 4 nos mostra a incidência de alguns termos geométricos nos livros para os Anos Finais. Nela vemos que, da mesma forma que nos Anos Iniciais, a predominância esteve em termos referentes a quadrados e retângulos, seguido do ermo quadriláteros, paralelogramos, trapézios e losangos, nessa ordem. O que nos leva a pensar do porquê de o ensino focar muito mais, justamente nas figuras que são mais comuns à realidade dos estudantes e menos nas que não são tão comuns como os trapézios e os losangos.

Tabela 4 – Termos pesquisados para análise dos livros didáticos da coleção Teláris Essencial (Anos Finais)

Termo pesquisado	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Quadriláteros	**104**	**77**	**151**	**30**
Quadrados	**262**	**171**	**209**	**317**
Quadradas	**108**	**66**	**129**	**174**
Retângulos	**129**	**88**	**125**	**237**
Retangulares	**173**	**99**	**61**	**99**
Paralelogramos	**51**	**27**	**128**	**11**
Losangos	**34**	**4**	**94**	**17**
Trapézios	**22**	**16**	**143**	**10**

Fonte: produção da autora

Com essas constatações apresentamos, no que segue as analises em dois tópicos, o primeiro que trata dos livros do 6º e 7º anos e o segundo dos livros de 8º e 9º anos.

4.2.1 Teláris Essencial Matemática – 6º e 7º anos

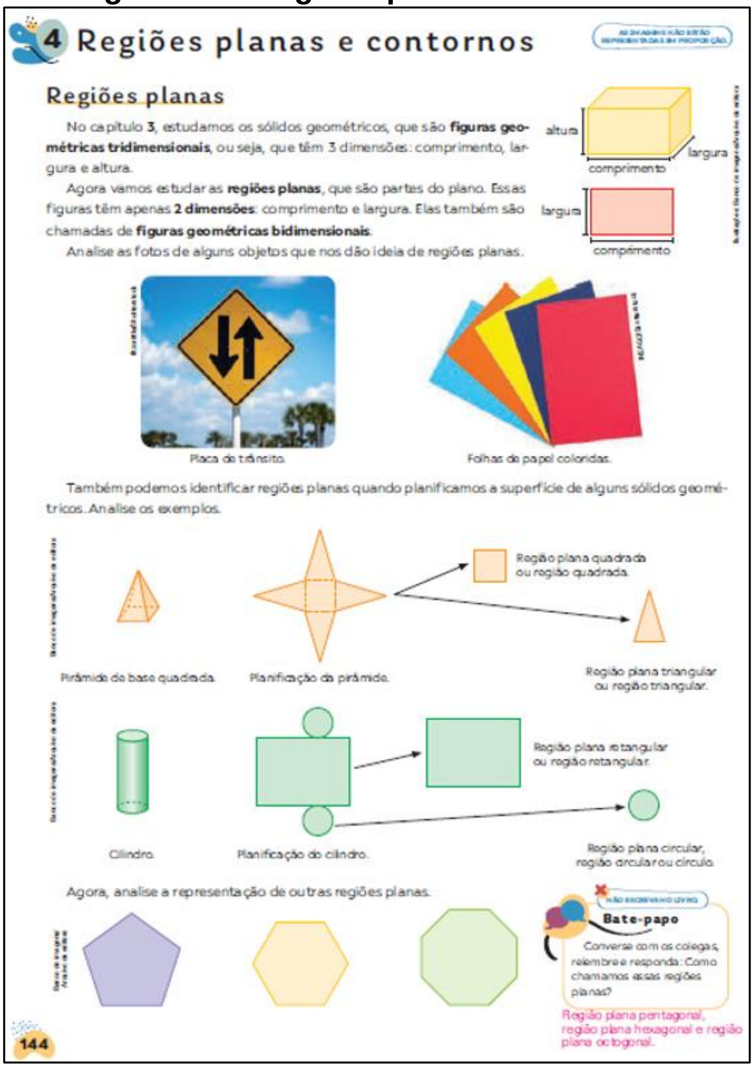
O ensino de quadriláteros para o 6º ano tem enfoque a partir da p. 144 (Figura 53), anteriormente são apresentados os sólidos geométricos, ponto, plano, reta, ângulos, retas paralelas e retas concorrentes.

Na p. 144 (Figura 53) os autores retomam o trabalho com regiões planas e contornos, com a revisão de que um sólido geométrico são figuras tridimensionais que se caracterizam por terem comprimento, altura e largura, para então identificar as regiões planas como figuras que têm apenas duas dimensões, comprimento e largura, ou seja, são bidimensionais. Para o primeiro caso apresentam um bloco retangular, com faces opacas (sólido) em que identificam as dimensões, no caso das regiões apresentam uma superfície retangular com a identificação das duas dimensões.

No entanto, acreditamos que essas definições conduzem os estudantes a se confundirem quanto ao que é realmente um sólido geométrico, tendo em vista que existem figuras geométricas que têm comprimento, altura e largura que não são sólidos, como é o caso de embalagens, por exemplo. Da mesma forma existem figuras que têm comprimento e largura e não são regiões planas, como é o caso de (não consegui dar um exemplo, estou pensando).... que só tem o contorno. A questão é que os sólidos têm volume e nenhuma capacidade, já as embalagens têm capacidade e, por isso, podem vir a ter volume ou não. O mesmo para as regiões que possuem área, enquanto os contornos só têm comprimento.

Depois desses lembretes, os autores apresentam a imagem de uma placa de trânsito e de folhas de papel coloridas para que sejam identificadas como regiões planas, a seguir apresentam e identificam a figura de uma pirâmide de base quadrada e de um cilindro, com as faces transparentes, associadas a duas figuras identificada como "planificação da pirâmide" e "planificação do cilindro" e das respectivas regiões de suas faces. No final os autores apresentam três figuras de regiões planas para que os estudantes, em conversa com os colegas, as identifiquem pelos nomes.

Figura 53 – Regiões planas e contornos



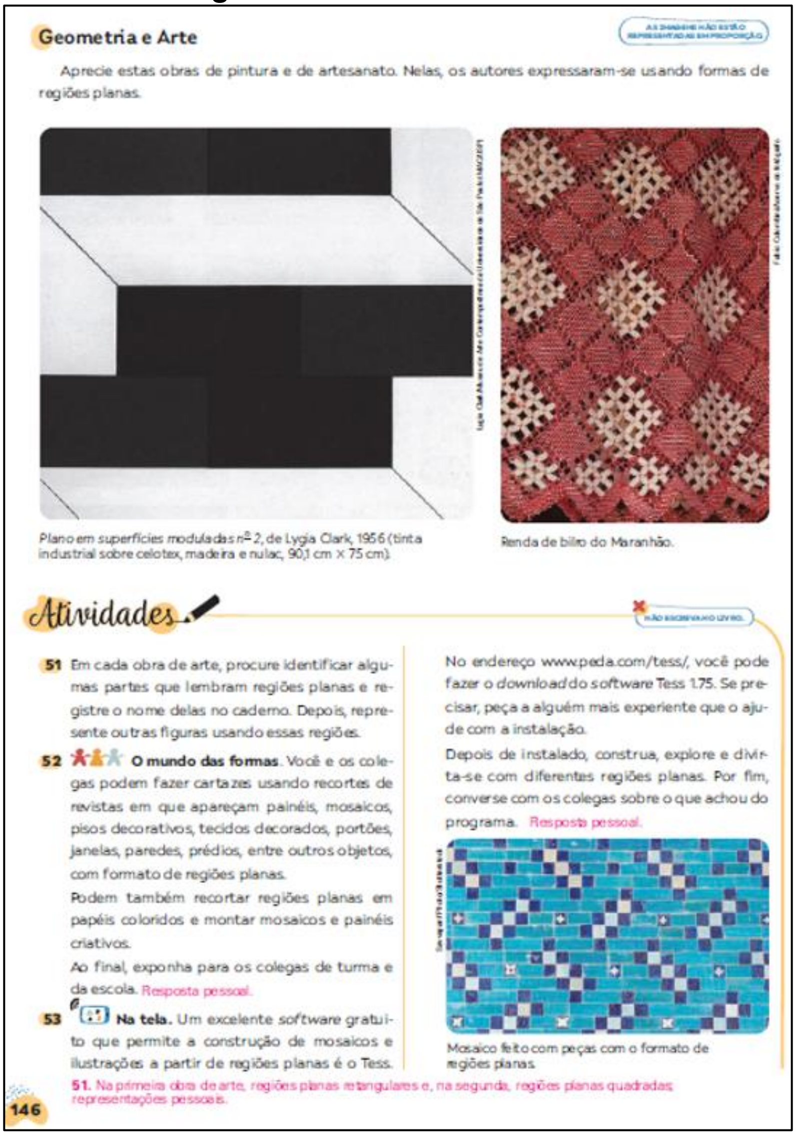
Fonte: Dante e Viana (2022, p. 144), referente ao livro do 6º ano.

Nesse ponto cabe apontar que os estudantes do 6º ano conseguem diferenciar o que é sólido do que é oco e, portanto diferenciar objetos que têm volume daqueles que têm capacidade e, portanto, o que está apresentado no livro conduz à confundir porque o autor ora apresenta as figura tridimensionais com faces opacas, que induz à percepção de que se trata de um sólido que não pode ser planificado, apenas fatiado, e ora apresenta as faces dessas figuras com transparência o que conduz a entender que representam figuras ocas, que têm capacidade e que facilmente podem ser desmontadas para obter sua planificação. Essa diferença entre essas representações não é explicitada e é muito sutil para que os estudantes a percebam, além de os autores as tratarem sempre como sólidos geométricos. Essa retomada de regiões planas está apoiada em G1, geometria espaço gráfica, embora mencionem algumas definições.

Na p. 145 são exploradas atividades com as regiões planas do tangram.

Na p. 146 (Figura 54) os autores, na seção geometria e arte, apresentam imagens de uma obra de pintura e de uma de artesanato, para que o estudante as observe e identifique regiões planas.

Figura 54 – Geometria e arte



Geometria e Arte

Aprecie estas obras de pintura e de artesanato. Nelas, os autores expressaram-se usando formas de regiões planas.

Plano em superfícies moduladas nº 2, de Lygia Clark, 1956 (tinta industrial sobre celotex, madeira e nulac, 90,1 cm × 75 cm).

Renda de bilro do Maranhão.

Atividades

51 Em cada obra de arte, procure identificar algumas partes que lembram regiões planas e registre o nome delas no caderno. Depois, represente outras figuras usando essas regiões.

52 **O mundo das formas.** Você e os colegas podem fazer cartazes usando recortes de revistas em que apareçam painéis, mosaicos, pisos decorativos, tecidos decorados, portões, janelas, paredes, prédios, entre outros objetos, com formato de regiões planas.

Podem também recortar regiões planas em papéis coloridos e montar mosaicos e painéis criativos.

Ao final, exponha para os colegas de turma e da escola. Resposta pessoal.

53 **Na tela.** Um excelente *software* gratuito que permite a construção de mosaicos e ilustrações a partir de regiões planas é o Tess. No endereço www.peda.com/tess/, você pode fazer o *download* do *software* Tess 1.75. Se precisar, peça a alguém mais experiente que o ajude com a instalação.

Depois de instalado, construa, explore e divirta-se com diferentes regiões planas. Por fim, converse com os colegas sobre o que achou do programa. Resposta pessoal.

Mosaico feito com peças com o formato de regiões planas.

51. Na primeira obra de arte, regiões planas retangulares e, na segunda, regiões planas quadradas; representações pessoais.

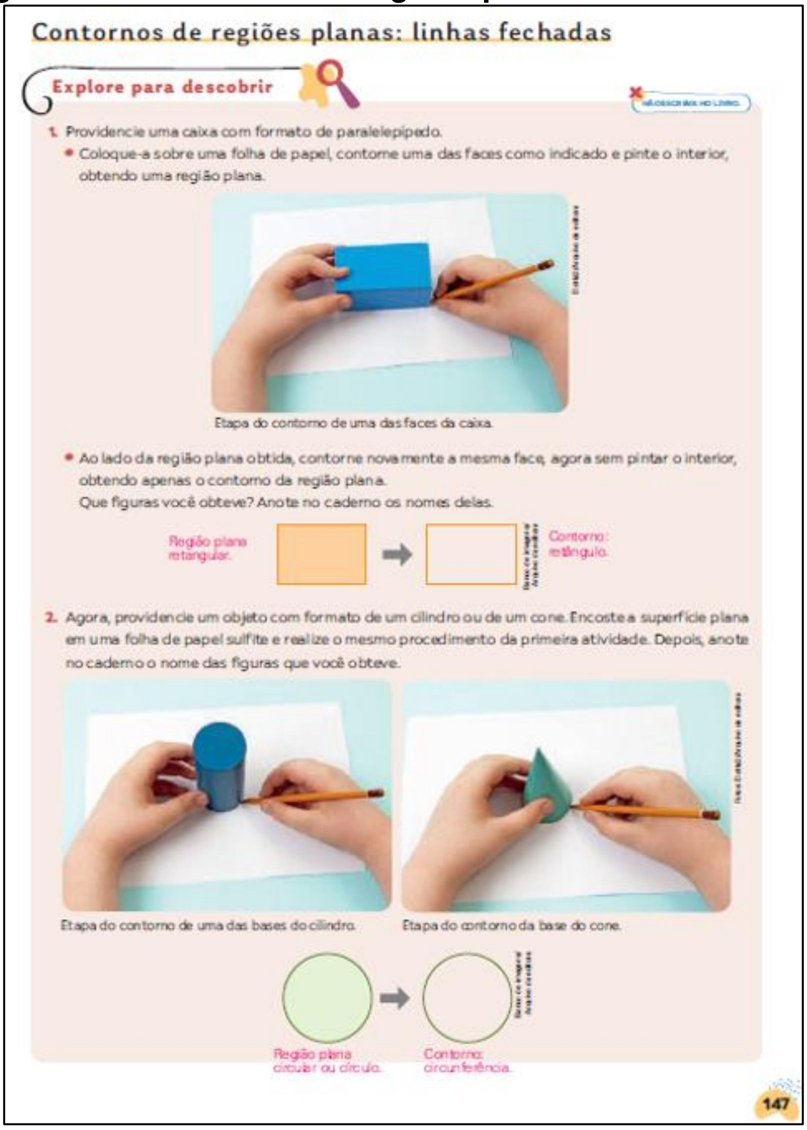
146

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 146), referente ao livro do 6º ano.

A seguir, apresentam quatro atividades. Na primeira solicitam que os estudantes identifiquem, em cada obra, “partes que lembram regiões planas” para que respondam regiões planas retangulares, para a primeira e regiões planas quadradas para a segunda, além de construírem outras figuras com regiões desses tipos. Na segunda atividade, em grupo, pedem para os estudantes construírem cartazes com recortes de revistas em que apareçam objetos com formas de regiões planas. Na terceira atividade os autores sugerem, o *software* gratuito Tess, para que os estudantes construam ilustrações com regiões planas. Além de apresentarem o endereço para fazer o *download*, sugerem sua exploração, a troca de ideias com os colegas e apresentam um exemplo de mosaico construído com esse *software*. Nessas atividades o trabalho está em G1.

Na p. 147, (Figura 55) os autores retomam o estudo de contornos de regiões.

Figura 55 – Contornos de regiões planas: linhas fechadas


Contornos de regiões planas: linhas fechadas

Explore para descobrir

1. Providencie uma caixa com formato de paralelepípedo.
   - Coloque-a sobre uma folha de papel, contorne uma das faces como indicado e pinte o interior, obtendo uma região plana.

Etapa do contorno de uma das faces da caixa.

   - Ao lado da região plana obtida, contorne novamente a mesma face, agora sem pintar o interior, obtendo apenas o contorno da região plana.
   Que figuras você obteve? Anote no caderno os nomes delas.

Região plana retangular. → Contorno: retângulo.

2. Agora, providencie um objeto com formato de um cilindro ou de um cone. Encoste a superfície plana em uma folha de papel sulfite e realize o mesmo procedimento da primeira atividade. Depois, anote no caderno o nome das figuras que você obteve.

Etapa do contorno de uma das bases do cilindro.

Etapa do contorno da base do cone.

Região plana circular ou círculo. → Contorno: circunferência.

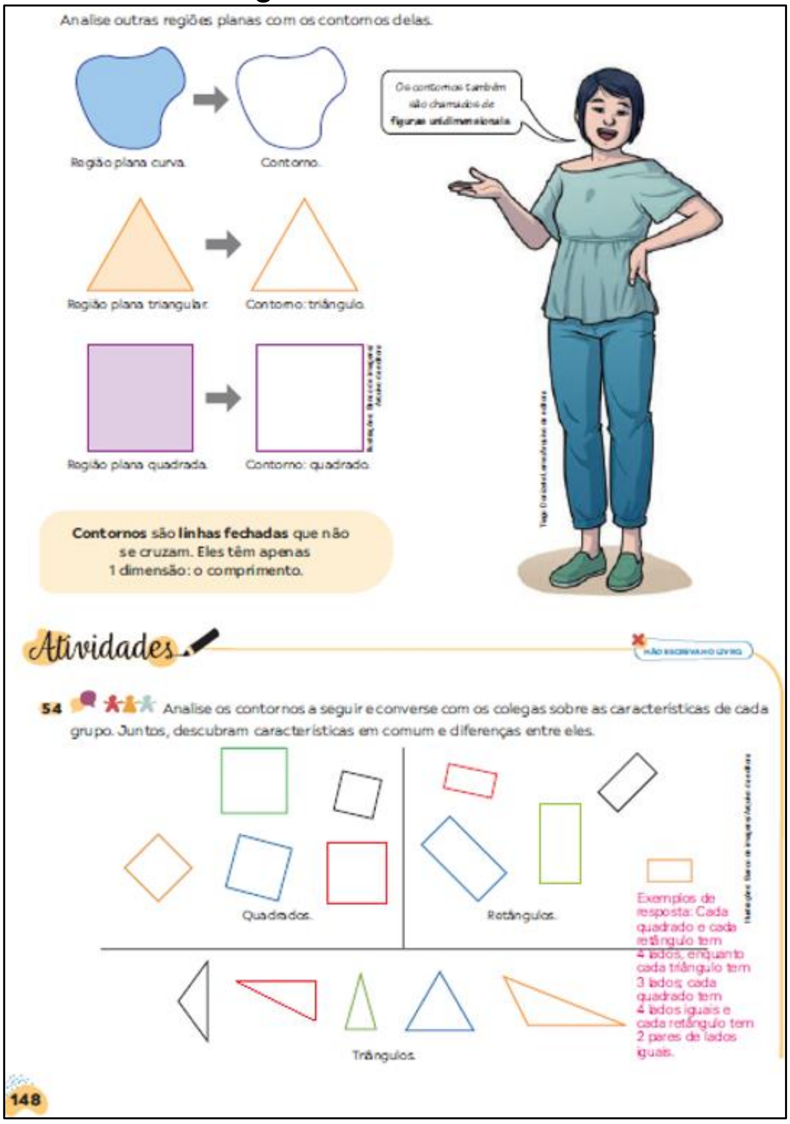
147

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 147), referente ao livro do 6º ano.

Como vemos na Figura 55, apresentam duas atividades, para que os estudantes utilizem objetos em forma de paralelepípedo, cilindro e cone para representar, em papel uma das faces desses objetos que será pintada e outra só com o contorno. Depois solicitam que essas figuras sejam identificadas como: região plana retângulas cujo contorno é um retângulo e região plana circular ou círculo cujo contorno é uma circunferência. Como os estudantes devem usar materiais concreto, nessas atividades, o trabalho foca na transição entre G0 e G1.

A seguir, na p. 148 (Figura 56), os autores retomam o tema contornos e apresentam uma atividade.

Figura 56 – Contornos



Fonte: Dante e Viana (2022, p. 148), referente ao livro do 6º ano.

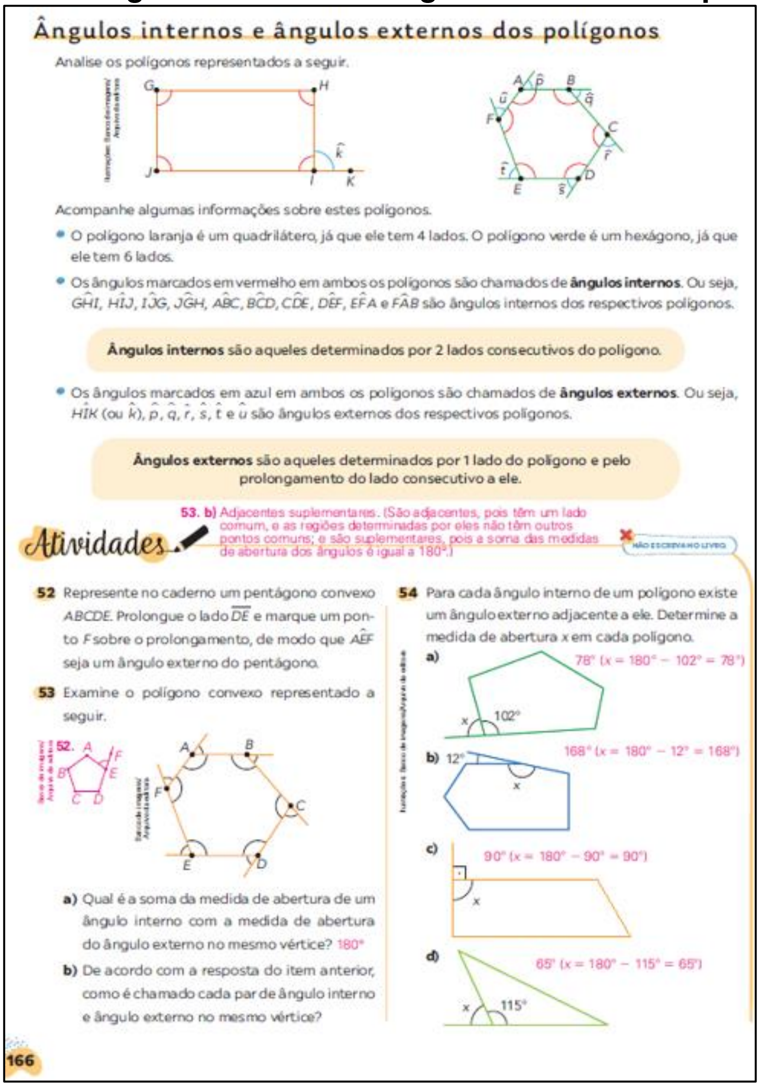
Na Figura 56 os autores três regiões planas, seus respectivos contornos e os nomeiam. E acrescentam que os “contornos são linhas fechadas que não se cruzam” e, ainda, que têm apenas uma dimensão, o comprimento. Na atividade, mostram três grupos de contornos de quadrados, retângulos e triângulos de medidas e posições diferentes, para que os estudantes, em grupos, identifiquem características semelhantes e diferentes para essas figuras. Nesta atividade os estudantes mobilizam conhecimentos de G1, mas já indícios para definições e propriedades para quadrados e retângulos.

Vemos que, no livro do 6º ano, o trabalho com quadriláteros apresenta uma atividade cuja solução ocorre na transição de G0 para G1 e, as atividades restantes, estão em G1.

No livro do 7º ano, alguns conceitos geométricos são abordados a partir da p. 144 como: circunferência e círculo, ideia de ângulos, tipos de ângulos, construções geométricas e polígonos convexos e não convexos.

Na sequência, na p. 166 (Figura 57) os autores apresentam o estudo de ângulos internos e externos de polígonos.

Figura 57 – Ângulos internos e ângulos externos de polígonos



Ângulos internos e ângulos externos dos polígonos

Analise os polígonos representados a seguir.

Acompanhe algumas informações sobre estes polígonos.

- O polígono laranja é um quadrilátero, já que ele tem 4 lados. O polígono verde é um hexágono, já que ele tem 6 lados.
- Os ângulos marcados em vermelho em ambos os polígonos são chamados de **ângulos internos**. Ou seja, $G\hat{H}I$, $H\hat{I}J$, $I\hat{J}G$, $J\hat{G}H$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$, $D\hat{E}F$, $E\hat{F}A$ e $F\hat{A}B$ são ângulos internos dos respectivos polígonos.

Ângulos internos são aqueles determinados por 2 lados consecutivos do polígono.

- Os ângulos marcados em azul em ambos os polígonos são chamados de **ângulos externos**. Ou seja, $H\hat{I}K$ (ou $\hat{k}$), $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{r}$, $\hat{s}$, $\hat{t}$ e $\hat{u}$ são ângulos externos dos respectivos polígonos.

Ângulos externos são aqueles determinados por 1 lado do polígono e pelo prolongamento do lado consecutivo a ele.

53. b) Adjacentes suplementares. (São adjacentes, pois têm um lado comum, e as regiões determinadas por eles não têm outros pontos comuns; e são suplementares, pois a soma das medidas de abertura dos ângulos é igual a 180°.)

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO

52 Represente no caderno um pentágono convexo *ABCDE*. Prolongue o lado $\overline{DE}$ e marque um ponto *F* sobre o prolongamento, de modo que $A\hat{E}F$ seja um ângulo externo do pentágono.

53 Examine o polígono convexo representado a seguir.

a) Qual é a soma da medida de abertura de um ângulo interno com a medida de abertura do ângulo externo no mesmo vértice? 180°

b) De acordo com a resposta do item anterior, como é chamado cada par de ângulo interno e ângulo externo no mesmo vértice?

54 Para cada ângulo interno de um polígono existe um ângulo externo adjacente a ele. Determine a medida de abertura *x* em cada polígono.

a) 78° ($x = 180° - 102° = 78°$)

b) 168° ($x = 180° - 12° = 168°$)

c) 90° ($x = 180° - 90° = 90°$)

d) 65° ($x = 180° - 115° = 65°$)

166

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 166), referente ao livro do 7º ano.

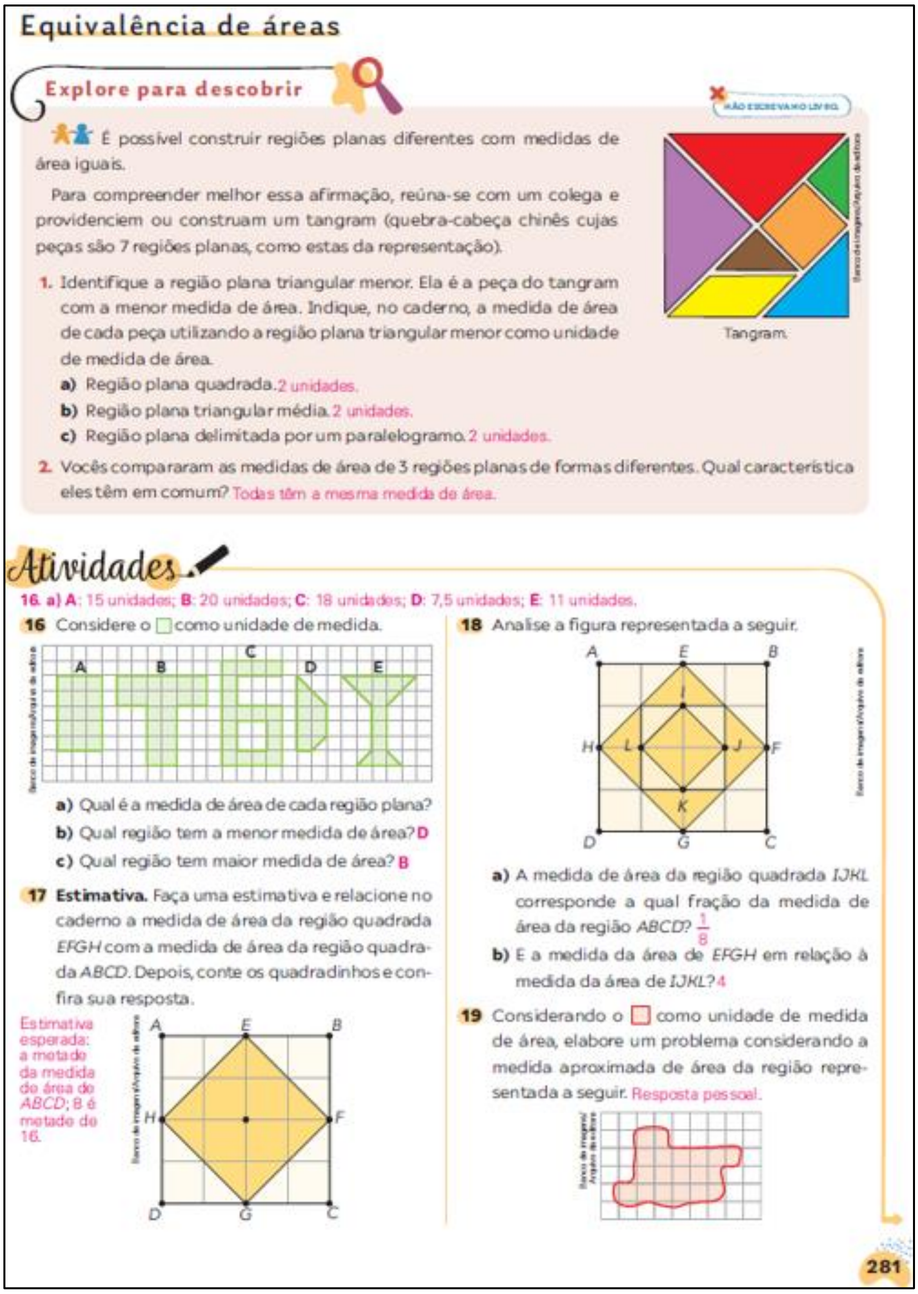
Vemos, na Figura 57, uma primeira explicação em que apresentam a representação de duas figuras geométricas, um retângulo e um hexágono, com identificação de vértices e ângulos. Baseados nas cores de cada polígono identificam seus lados e seus ângulos. A seguir, definem ângulos internos e ângulos externos para um polígono e três atividades. Na primeira atividade é solicitado que o estudante desenhe um pentágono ABCDE e identifique um ângulo externo. Na segunda, no item (a), apresentam a figura de um hexágono ABCDEF e solicitam a medida da soma das medidas de um ângulo interno e um ângulo externo. Neste item faltou apontar que esses ângulos deveriam se referir a um mesmo vértice, tendo em vista que o polígono não é regular, além disso não entendemos o porquê dos autores se referirem à medida de um ângulo como “a medida de abertura de um ângulo”, pois sendo uma grandeza pode ser medido e a questão de abertura está relacionada à sua definição. No item (b) pedem que os estudantes percebam que dois ângulos adjacentes, nas condições apresentadas, são adjacentes. Na terceira atividade, vemos três polígonos com a medida de um de seus ângulos internos identificada e, seu ângulo externo apontado com a medida “x” para que esta fosse determinada. Infelizmente, uma atividade que poderia ser resolvida aritmeticamente, ou mesmo mentalmente, foi transformada, sem qualquer sentido, em uma atividade algébrica. Claramente, nessa página o trabalho está em G1, agora com figuras geométricas com legendas para identificar, vértices, lados e ângulos, e alguns indícios de G2, mas apenas no que se refere a algumas definições.

Da p. 167 a p. 189 são abordados os conceitos de triângulos e soma das medidas dos ângulos internos e externos de polígonos convexos. Na sequência são trabalhados os capítulos sobre proporcionalidade, noções de estatística e probabilidade e o de simetria.

Na p. 281 (Figura 58) o assunto é equivalência de áreas, sendo abordados anteriormente sobre perímetro e equivalência de perímetros. Em “explore para descobrir” os autores iniciam afirmando que regiões planas diferentes podem ter medidas iguais. A seguir, apresentam a figura de um tangram e solicitam que os estudantes, em duplas, providenciem ou construam um, para responder duas questões. Na primeira, indicam que a menor figura, um triângulo é uma unidade de medida e que com ela devem medir a área da região do quadrado, do triângulo e do paralelogramo. Na segunda, perguntam o que essas regiões têm em comum, para que percebam que elas têm mesma medida de área. É interessante notar que os autores fazem questão de falar em “medida de área” para diferenciar a medida da grandeza.

Nesta seção, como os estudantes manipulam o tangran para responder as questões, suas ações se apoiam na transição entre G0 e G1.

Figura 58 – Equivalência de área



Equivalência de áreas

Explore para descobrir

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

É possível construir regiões planas diferentes com medidas de área iguais.

Para compreender melhor essa afirmação, reúna-se com um colega e providenciem ou construam um tangram (quebra-cabeça chinês cujas peças são 7 regiões planas, como estas da representação).

Tangram.

1. Identifique a região plana triangular menor. Ela é a peça do tangram com a menor medida de área. Indique, no caderno, a medida de área de cada peça utilizando a região plana triangular menor como unidade de medida de área.
   a) Região plana quadrada. 2 unidades.
   b) Região plana triangular média. 2 unidades.
   c) Região plana delimitada por um paralelogramo. 2 unidades.
2. Vocês compararam as medidas de área de 3 regiões planas de formas diferentes. Qual característica eles têm em comum? Todas têm a mesma medida de área.

Atividades

16. a) A: 15 unidades; B: 20 unidades; C: 18 unidades; D: 7,5 unidades; E: 11 unidades.

16 Considere o □ como unidade de medida.

A B C D E

a) Qual é a medida de área de cada região plana?
b) Qual região tem a menor medida de área? D
c) Qual região tem maior medida de área? B

17 Estimativa. Faça uma estimativa e relacione no caderno a medida de área da região quadrada *EFGH* com a medida de área da região quadrada *ABCD*. Depois, conte os quadradinhos e confira sua resposta.

Estimativa esperada: a metade da medida de área de *ABCD*; 8 é metade de 16.

A E B H F D G C

18 Analise a figura representada a seguir.

A E B I H L J F K D G C

a) A medida de área da região quadrada *IJKL* corresponde a qual fração da medida de área da região *ABCD*? $\frac{1}{8}$
b) E a medida da área de *EFGH* em relação à medida da área de *IJKL*? 4

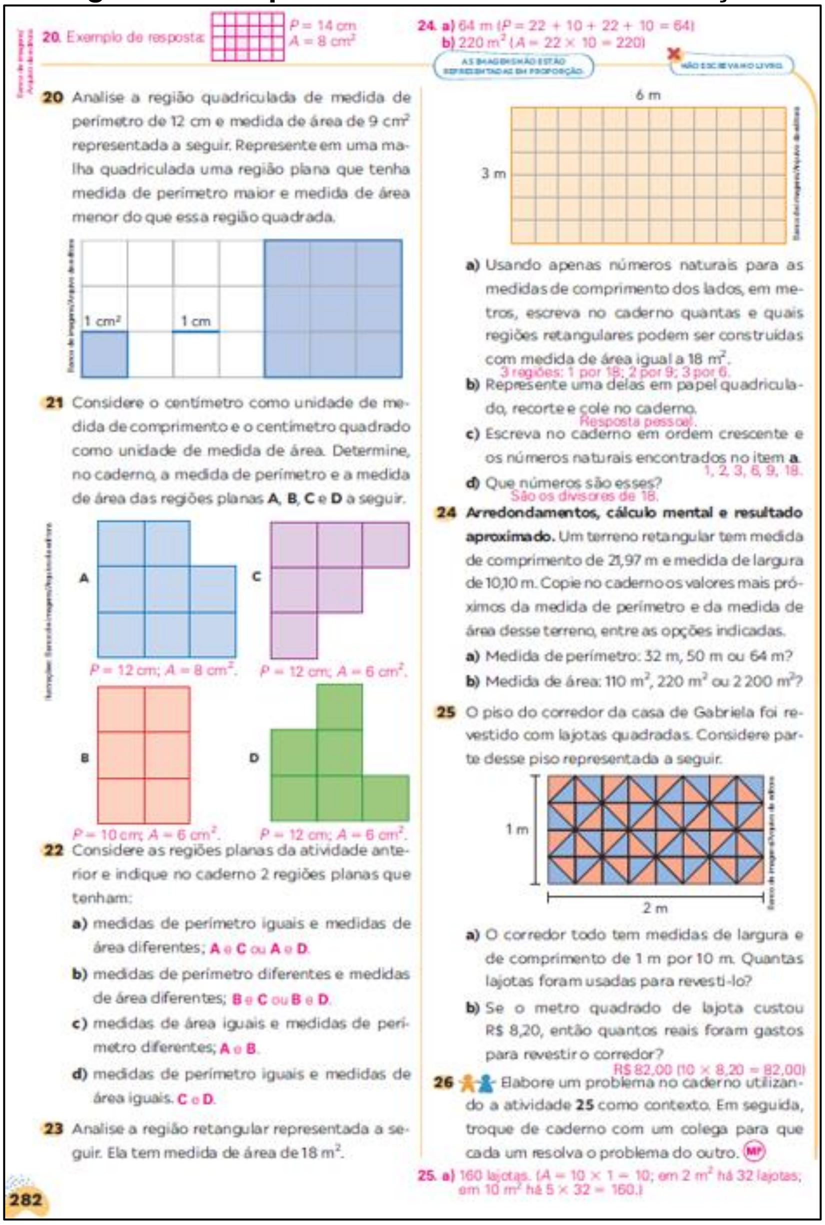
19 Considerando o □ como unidade de medida de área, elabore um problema considerando a medida aproximada de área da região representada a seguir. Resposta pessoal.

281

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 281), referente ao livro do 7º ano.

Na sequência os autores apresentam quatro atividades, cada uma com uma ou mais figuras, todas representadas em malhas quadriculadas. Na primeira os estudantes devem indicar a medida da área de cinco figuras e identificar a maior e a menor na segunda devem estimar a medida da área da figura e depois confirmar ou não sua estimativa; na terceira devem calcular a medida da área de duas regiões e relacioná-las com outras partes e na quarta apresentam uma figura com curvas para que identifiquem, aproximadamente a medida de sua área. Todas as atividades são resolvidas por contagem das malhas, diretamente nas figuras e, por isso o trabalho estão em G1.

Figura 59 – Equivalência de área - continuação


20. Exemplo de resposta: $P = 14$ cm $A = 8$ cm²

24. a) 64 m ($P = 22 + 10 + 22 + 10 = 64$)
b) 220 m² ($A = 22 \times 10 = 220$)

20 Analise a região quadriculada de medida de perímetro de 12 cm e medida de área de 9 cm² representada a seguir. Represente em uma malha quadriculada uma região plana que tenha medida de perímetro maior e medida de área menor do que essa região quadrada.

21 Considere o centímetro como unidade de medida de comprimento e o centímetro quadrado como unidade de medida de área. Determine, no caderno, a medida de perímetro e a medida de área das regiões planas **A**, **B**, **C** e **D** a seguir.

22 Considere as regiões planas da atividade anterior e indique no caderno 2 regiões planas que tenham:

a) medidas de perímetro iguais e medidas de área diferentes; **A** e **C** ou **A** e **D**.

b) medidas de perímetro diferentes e medidas de área diferentes; **B** e **C** ou **B** e **D**.

c) medidas de área iguais e medidas de perímetro diferentes; **A** e **B**.

d) medidas de perímetro iguais e medidas de área iguais. **C** e **D**.

23 Analise a região retangular representada a seguir. Ela tem medida de área de 18 m².

a) Usando apenas números naturais para as medidas de comprimento dos lados, em metros, escreva no caderno quantas e quais regiões retangulares podem ser construídas com medida de área igual a 18 m². 3 regiões: 1 por 18; 2 por 9; 3 por 6.

b) Represente uma delas em papel quadriculado, recorte e cole no caderno. Resposta pessoal.

c) Escreva no caderno em ordem crescente e os números naturais encontrados no item **a**. 1, 2, 3, 6, 9, 18.

d) Que números são esses? São os divisores de 18.

24 **Arredondamentos, cálculo mental e resultado aproximado.** Um terreno retangular tem medida de comprimento de 21,97 m e medida de largura de 10,10 m. Copie no caderno os valores mais próximos da medida de perímetro e da medida de área desse terreno, entre as opções indicadas.

a) Medida de perímetro: 32 m, 50 m ou 64 m?

b) Medida de área: 110 m², 220 m² ou 2 200 m²?

25 O piso do corredor da casa de Gabriela foi revestido com lajotas quadradas. Considere parte desse piso representada a seguir.

a) O corredor todo tem medidas de largura e de comprimento de 1 m por 10 m. Quantas lajotas foram usadas para revesti-lo?

b) Se o metro quadrado de lajota custou R$ 8,20, então quantos reais foram gastos para revestir o corredor? R$ 82,00 ($10 \times 8,20 = 82,00$)

26 Elabore um problema no caderno utilizando a atividade **25** como contexto. Em seguida, troque de caderno com um colega para que cada um resolva o problema do outro. MP

25. a) 160 lajotas. ($A = 10 \times 1 = 10$; em 2 m² há 32 lajotas; em 10 m² há $5 \times 32 = 160$.)

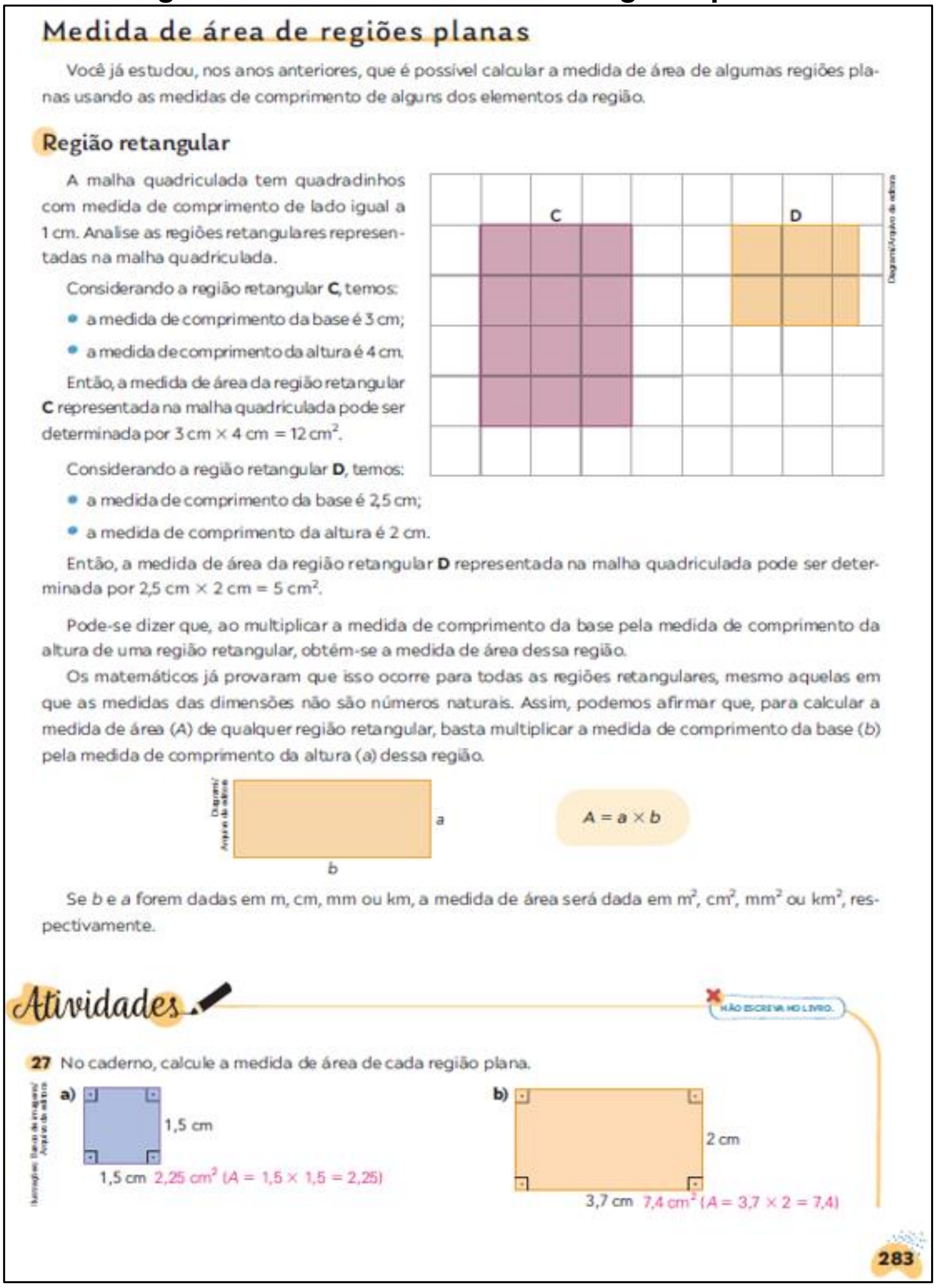
282

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 282), referente ao livro do 7º ano.

Na página seguinte (Figura 60) os autores retomam conhecimentos anteriores para continuar o trabalho com medidas de áreas. Explicam, com base na representação de duas regiões retangulares, representadas em uma malha quadriculada, com cada quadrado tendo 1cm de lado para afirmarem que a primeira tem “3cm x 4cm = 12cm²” e a segunda “2,5cm x 2cm = 5cm²”. O problema aqui é que, em matemática, não se define a multiplicação de cm por cm, pois a unidade de área é cm². Primeiro se faz a multiplicação e depois, na resposta se identifica a unidade de medida. Na sequência os autores generalizam a fórmula para o cálculo de medida de área de regiões retangulares como $A = a \times b$, mas não explicitam que A representa a medida da área, o que pode levar os estudantes a entenderem que a área é um número, poderia apresentar a fórmula como $m(A) = a \times b$ para especificar que se trata da medida da área, como os autores a tratam em todo o texto.

A seguir, apresentam uma atividade com a figura de um quadrado e de um retângulo, agora com a identificação dos ângulos retos e das medidas dos lados, para que os estudantes calculem as medidas de suas áreas.

Figura 60 – Medida de área de regiões planas



Medida de área de regiões planas

Você já estudou, nos anos anteriores, que é possível calcular a medida de área de algumas regiões planas usando as medidas de comprimento de alguns dos elementos da região.

Região retangular

A malha quadriculada tem quadradinhos com medida de comprimento de lado igual a 1 cm. Analise as regiões retangulares representadas na malha quadriculada.

Considerando a região retangular **C**, temos:

- a medida de comprimento da base é 3 cm;
- a medida de comprimento da altura é 4 cm.

Então, a medida de área da região retangular **C** representada na malha quadriculada pode ser determinada por 3 cm × 4 cm = 12 cm².

Considerando a região retangular **D**, temos:

- a medida de comprimento da base é 2,5 cm;
- a medida de comprimento da altura é 2 cm.

Então, a medida de área da região retangular **D** representada na malha quadriculada pode ser determinada por 2,5 cm × 2 cm = 5 cm².

Pode-se dizer que, ao multiplicar a medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura de uma região retangular, obtém-se a medida de área dessa região.

Os matemáticos já provaram que isso ocorre para todas as regiões retangulares, mesmo aquelas em que as medidas das dimensões não são números naturais. Assim, podemos afirmar que, para calcular a medida de área (*A*) de qualquer região retangular, basta multiplicar a medida de comprimento da base (*b*) pela medida de comprimento da altura (*a*) dessa região.

a
b

A = a × b

Se *b* e *a* forem dadas em m, cm, mm ou km, a medida de área será dada em m², cm², mm² ou km², respectivamente.

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

27 No caderno, calcule a medida de área de cada região plana.

a) 1,5 cm; 1,5 cm 2,25 cm² (A = 1,5 × 1,5 = 2,25)

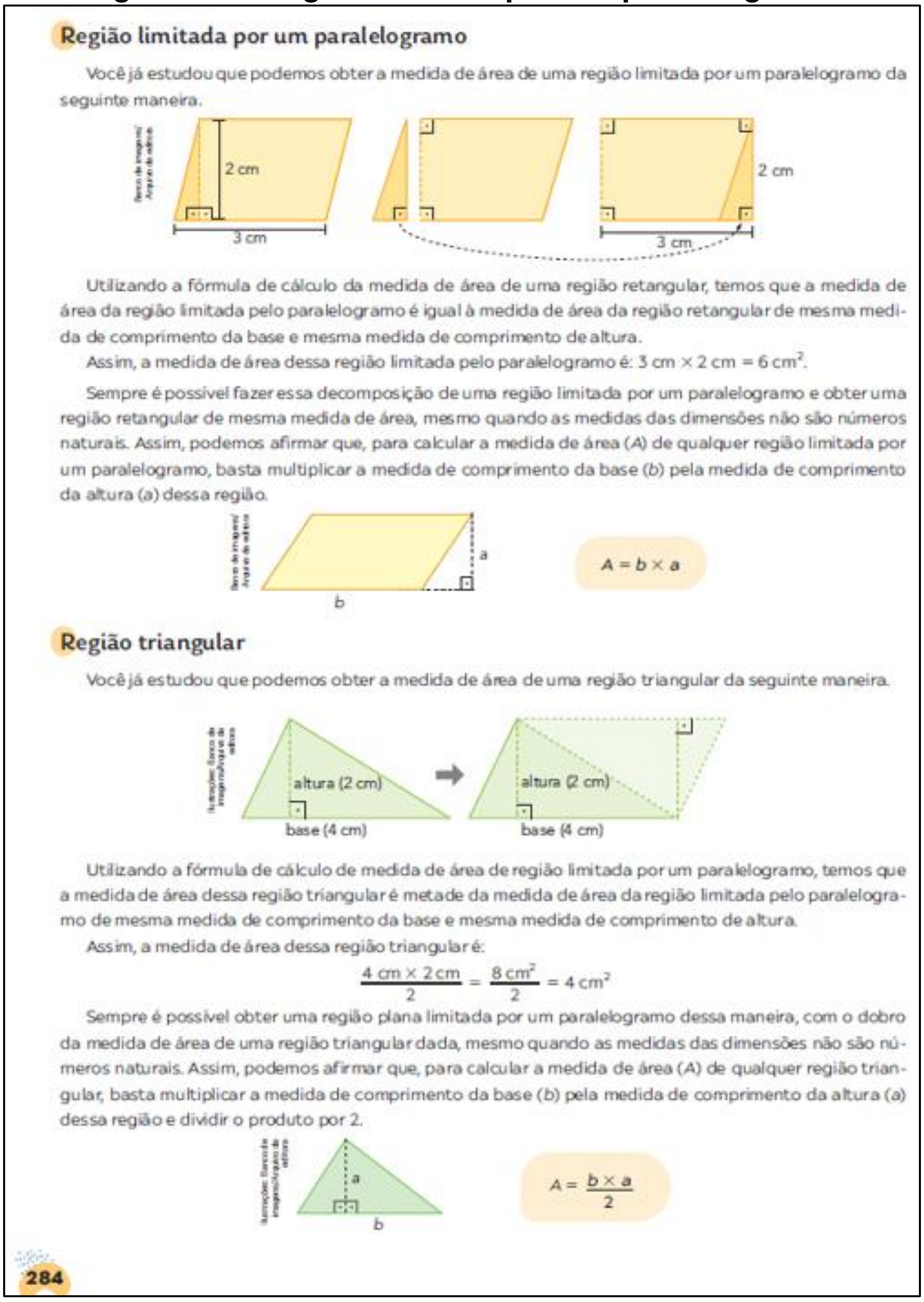
b) 2 cm; 3,7 cm 7,4 cm² (A = 3,7 × 2 = 7,4)

283

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 283), referente ao livro do 7º ano.

Na página seguinte (Figura 61) introduzem o cálculo de medida de área de regiões delimitadas por paralelogramos, por meio da decomposição dessa região e sua composição em um retângulo e, com isso, apresentar a fórmula. Na sequência, fazem algo semelhante para uma região triangular. Nesta exposição o trabalho é realizado em uma transição de G1 – geometria espaço gráfica para G2 – geometria proto-axiomática, pois se apoiam em representações figurais para que os estudantes, apoiados em sua intuição cheguem às fórmulas.

Figura 61 – Região limitada por um paralelogramo



Região limitada por um paralelogramo

Você já estudou que podemos obter a medida de área de uma região limitada por um paralelogramo da seguinte maneira.

Utilizando a fórmula de cálculo da medida de área de uma região retangular, temos que a medida de área da região limitada pelo paralelogramo é igual à medida de área da região retangular de mesma medida de comprimento da base e mesma medida de comprimento de altura.

Assim, a medida de área dessa região limitada pelo paralelogramo é: $3\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$.

Sempre é possível fazer essa decomposição de uma região limitada por um paralelogramo e obter uma região retangular de mesma medida de área, mesmo quando as medidas das dimensões não são números naturais. Assim, podemos afirmar que, para calcular a medida de área (*A*) de qualquer região limitada por um paralelogramo, basta multiplicar a medida de comprimento da base (*b*) pela medida de comprimento da altura (*a*) dessa região.

$A = b \times a$

Região triangular

Você já estudou que podemos obter a medida de área de uma região triangular da seguinte maneira.

Utilizando a fórmula de cálculo de medida de área de região limitada por um paralelogramo, temos que a medida de área dessa região triangular é metade da medida de área da região limitada pelo paralelogramo de mesma medida de comprimento da base e mesma medida de comprimento de altura.

Assim, a medida de área dessa região triangular é:

$$\frac{4\text{ cm} \times 2\text{ cm}}{2} = \frac{8\text{ cm}^2}{2} = 4\text{ cm}^2$$

Sempre é possível obter uma região plana limitada por um paralelogramo dessa maneira, com o dobro da medida de área de uma região triangular dada, mesmo quando as medidas das dimensões não são números naturais. Assim, podemos afirmar que, para calcular a medida de área (*A*) de qualquer região triangular, basta multiplicar a medida de comprimento da base (*b*) pela medida de comprimento da altura (*a*) dessa região e dividir o produto por 2.

$$A = \frac{b \times a}{2}$$

284

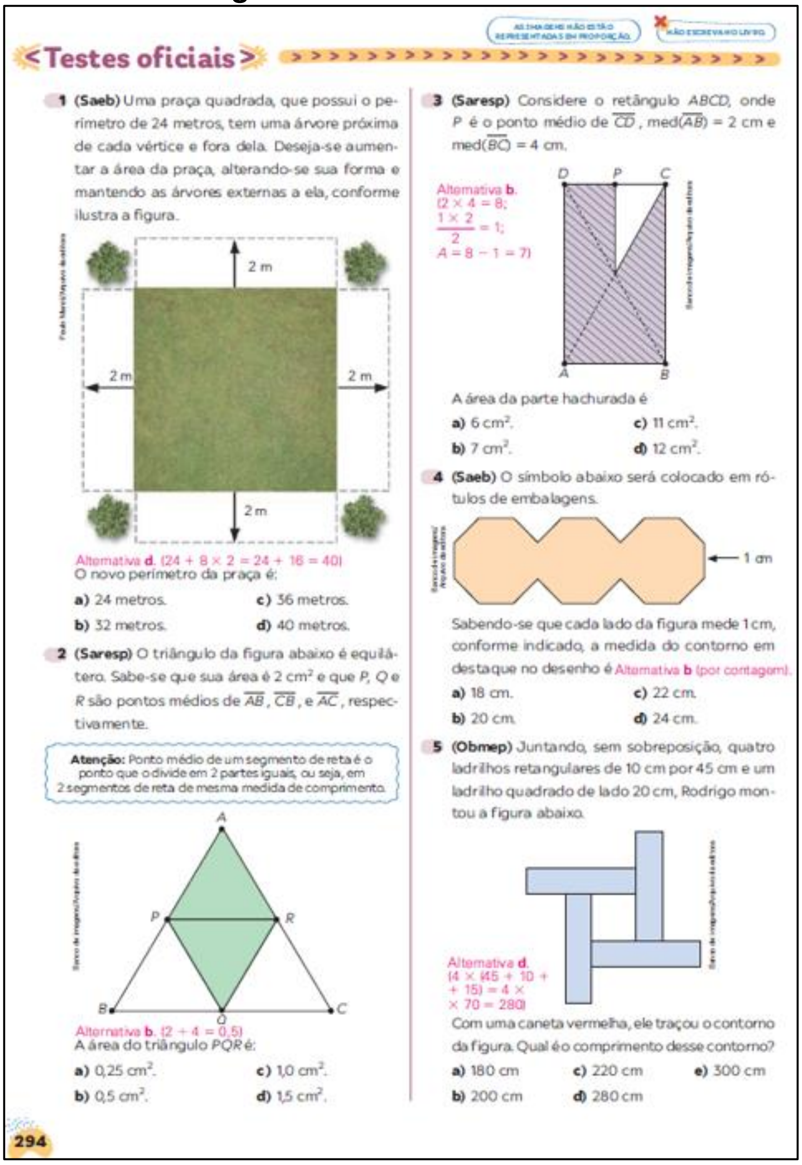
Fonte: Dante e Viana (2022, p. 284), referente ao livro do 7º ano.

Nas páginas seguintes são abordados os assuntos de volume e equivalência de volumes.

Na p. 294 (Figura 62) apresentam “testes oficiais” para apresentarem questões do SAEB, SARESP e OBMEP.[11]

Essas atividades têm como objetivo a aplicação dos conhecimentos construídos em figuras, mais complexas das que foram apresentadas anteriormente, para que os estudantes indiquem uma alternativa. O trabalho aqui é realizado em G2, pois os estudantes perceptivamente estão validando as fórmulas já trabalhadas.

Figura 62 – Testes oficiais



AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Testes oficiais

1 (Saeb) Uma praça quadrada, que possui o perímetro de 24 metros, tem uma árvore próxima de cada vértice e fora dela. Deseja-se aumentar a área da praça, alterando-se sua forma e mantendo as árvores externas a ela, conforme ilustra a figura.

Alternativa **d**. $(24 + 8 \times 2 = 24 + 16 = 40)$

O novo perímetro da praça é:

a) 24 metros. **c)** 36 metros.
b) 32 metros. **d)** 40 metros.

2 (Saresp) O triângulo da figura abaixo é equilátero. Sabe-se que sua área é 2 cm^2 e que P, Q e R são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, e $\overline{AC}$, respectivamente.

Atenção: Ponto médio de um segmento de reta é o ponto que o divide em 2 partes iguais, ou seja, em 2 segmentos de reta de mesma medida de comprimento.

Alternativa **b**. $(2 \div 4 = 0{,}5)$

A área do triângulo PQR é:

a) 0,25 cm^2. **c)** 1,0 cm^2.
b) 0,5 cm^2. **d)** 1,5 cm^2.

3 (Saresp) Considere o retângulo $ABCD$, onde P é o ponto médio de $\overline{CD}$, med($\overline{AB}$) = 2 cm e med($\overline{BC}$) = 4 cm.

Alternativa **b**.
$(2 \times 4 = 8;$
$\frac{1 \times 2}{2} = 1;$
$A = 8 - 1 = 7)$

A área da parte hachurada é

a) 6 cm^2. **c)** 11 cm^2.
b) 7 cm^2. **d)** 12 cm^2.

4 (Saeb) O símbolo abaixo será colocado em rótulos de embalagens.

Sabendo-se que cada lado da figura mede 1 cm, conforme indicado, a medida do contorno em destaque no desenho é Alternativa **b** (por contagem).

a) 18 cm. **c)** 22 cm.
b) 20 cm. **d)** 24 cm.

5 (Obmep) Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo.

Alternativa **d**.
$(4 \times (45 + 10 + 15) = 4 \times 70 = 280)$

Com uma caneta vermelha, ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?

a) 180 cm **c)** 220 cm **e)** 300 cm
b) 200 cm **d)** 280 cm

294

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 294), referente ao livro do 7º ano.

Ao observar os conteúdos e atividades apresentadas no livro do 7º ano pode-se identificar uma atividade realizada na transição de G0 para G1, várias em G1,

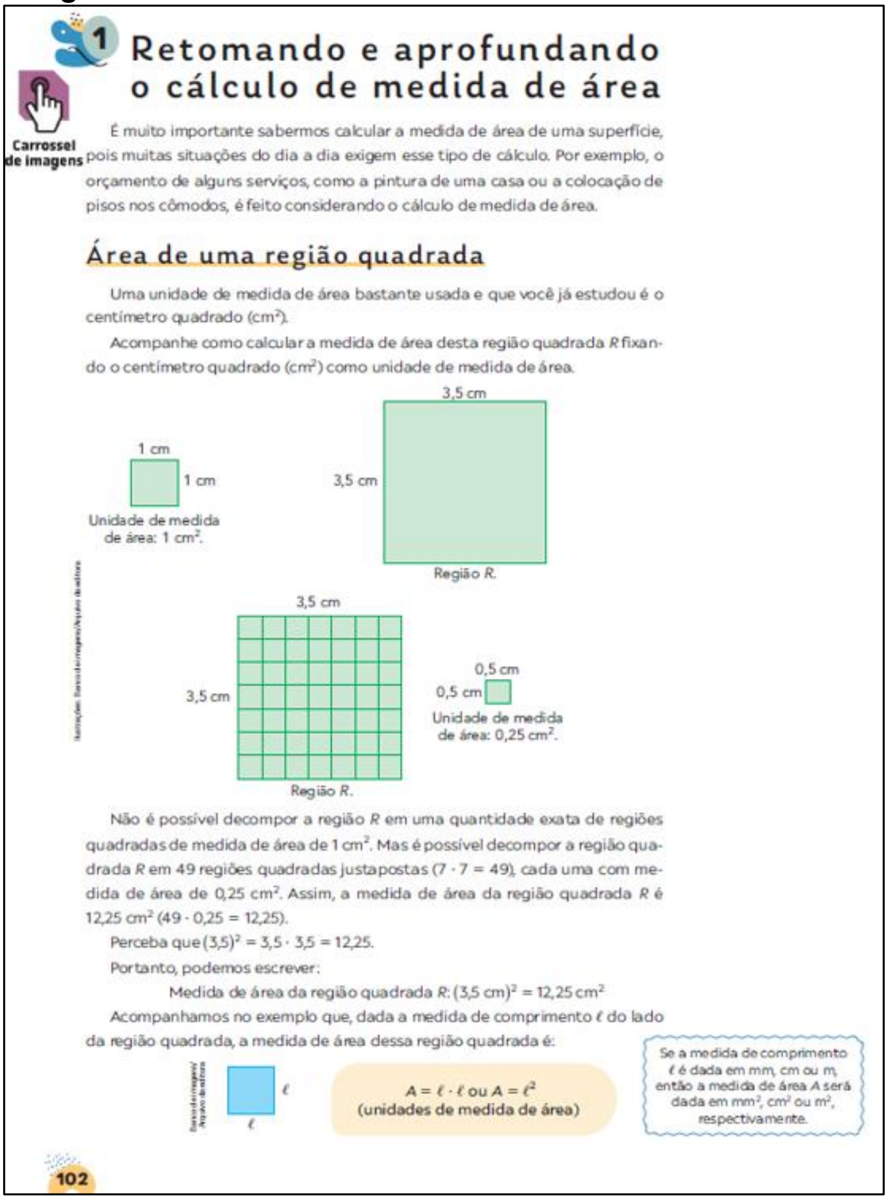
[11] SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica, sistema de avaliação nacional; SARESP – Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo; OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

algumas na transição de G1 para G2 e outras em G2. Percebe-se que o ensino de quadriláteros foi desenvolvida de maneira gradual.

4.2.2 Teláris Essencial Matemática – 8º e 9º anos

No livro do 8º ano, p. 102 (Figura 63) os autores retomam o estudo do cálculo de medidas de áreas.

Figura 63 – Retomando o cálculo de medidas de áreas



1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Carrossel de imagens

É muito importante sabermos calcular a medida de área de uma superfície, pois muitas situações do dia a dia exigem esse tipo de cálculo. Por exemplo, o orçamento de alguns serviços, como a pintura de uma casa ou a colocação de pisos nos cômodos, é feito considerando o cálculo de medida de área.

Área de uma região quadrada

Uma unidade de medida de área bastante usada e que você já estudou é o centímetro quadrado (cm²).

Acompanhe como calcular a medida de área desta região quadrada *R* fixando o centímetro quadrado (cm²) como unidade de medida de área.

Não é possível decompor a região *R* em uma quantidade exata de regiões quadradas de medida de área de 1 cm². Mas é possível decompor a região quadrada *R* em 49 regiões quadradas justapostas (7 · 7 = 49), cada uma com medida de área de 0,25 cm². Assim, a medida de área da região quadrada *R* é 12,25 cm² (49 · 0,25 = 12,25).

Perceba que $(3{,}5)^2 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$.

Portanto, podemos escrever:

Medida de área da região quadrada *R*: $(3{,}5 \text{ cm})^2 = 12{,}25 \text{ cm}^2$

Acompanhamos no exemplo que, dada a medida de comprimento ℓ do lado da região quadrada, a medida de área dessa região quadrada é:

$A = \ell \cdot \ell$ ou $A = \ell^2$ (unidades de medida de área)

Se a medida de comprimento ℓ é dada em mm, cm ou m, então a medida de área *A* será dada em mm², cm² ou m², respectivamente.

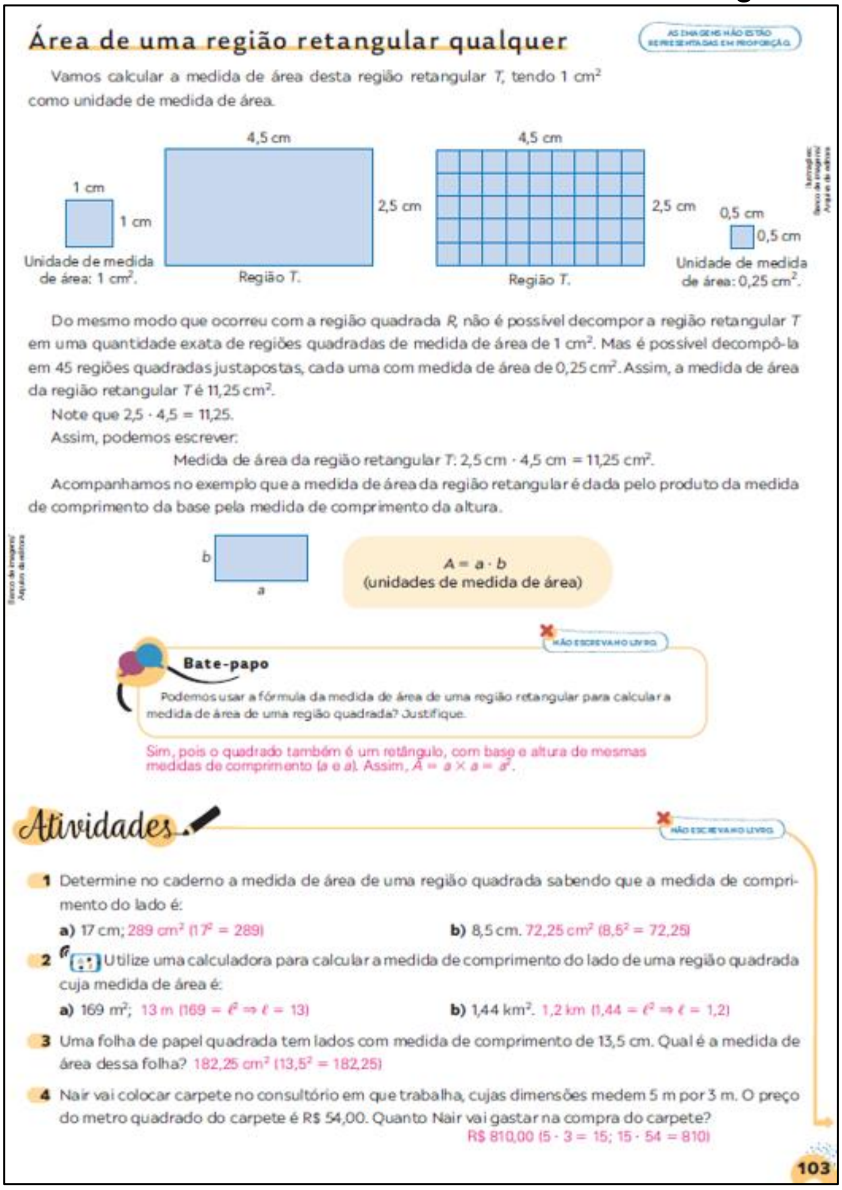
102

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 102), referente ao livro do 8º ano.

Nessa retomada os autores focam na generalização da fórmula para o cálculo da medida de áreas de regiões delimitadas por quadrados, ao apresentar uma região em que o quadrado tem lado de medida 3,5 cm, a mesma região em malha quadriculada, com cada quadradinho tendo 0,5 cm de lado, cuja medida de área resulta em 49 e, a seguir, a transformam em cm². No entanto escrevem $(3{,}5\ cm)^2 = 12{,}25\ cm^2$, outra vez levando o estudante a entender que existe a multiplicação de centímetro por centímetro. Nesta página é mobilizada G2 – geometria proto-axiomática, porque intuitivamente os estudantes são conduzidos à fórmula para o cálculo de medidas de áreas de regiões quadradas.

Na página seguinte (Figura 64) os autores retomam, da mesma forma que na página anterior, o estudo do cálculo de medidas de áreas de regiões retangulares.

Figura 64 – Retomando o cálculo de medidas de áreas de regiões retangulares



Área de uma região retangular qualquer

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO

Vamos calcular a medida de área desta região retangular T, tendo 1 cm² como unidade de medida de área.

Do mesmo modo que ocorreu com a região quadrada R, não é possível decompor a região retangular T em uma quantidade exata de regiões quadradas de medida de área de 1 cm². Mas é possível decompô-la em 45 regiões quadradas justapostas, cada uma com medida de área de 0,25 cm². Assim, a medida de área da região retangular T é 11,25 cm².

Note que $2{,}5 \cdot 4{,}5 = 11{,}25$.

Assim, podemos escrever:

Medida de área da região retangular T: $2{,}5\ cm \cdot 4{,}5\ cm = 11{,}25\ cm^2$.

Acompanhamos no exemplo que a medida de área da região retangular é dada pelo produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura.

$A = a \cdot b$
(unidades de medida de área)

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Bate-papo

Podemos usar a fórmula da medida de área de uma região retangular para calcular a medida de área de uma região quadrada? Justifique.

Sim, pois o quadrado também é um retângulo, com base e altura de mesmas medidas de comprimento (a e a). Assim, $A = a \times a = a^2$.

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1 Determine no caderno a medida de área de uma região quadrada sabendo que a medida de comprimento do lado é:

a) 17 cm; 289 cm² ($17^2 = 289$)　　b) 8,5 cm. 72,25 cm² ($8{,}5^2 = 72{,}25$)

2 Utilize uma calculadora para calcular a medida de comprimento do lado de uma região quadrada cuja medida de área é:

a) 169 m²; 13 m ($169 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 13$)　　b) 1,44 km². 1,2 km ($1{,}44 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 1{,}2$)

3 Uma folha de papel quadrada tem lados com medida de comprimento de 13,5 cm. Qual é a medida de área dessa folha? 182,25 cm² ($13{,}5^2 = 182{,}25$)

4 Nair vai colocar carpete no consultório em que trabalha, cujas dimensões medem 5 m por 3 m. O preço do metro quadrado do carpete é R$ 54,00. Quanto Nair vai gastar na compra do carpete?
R$ 810,00 ($5 \cdot 3 = 15$; $15 \cdot 54 = 810$)

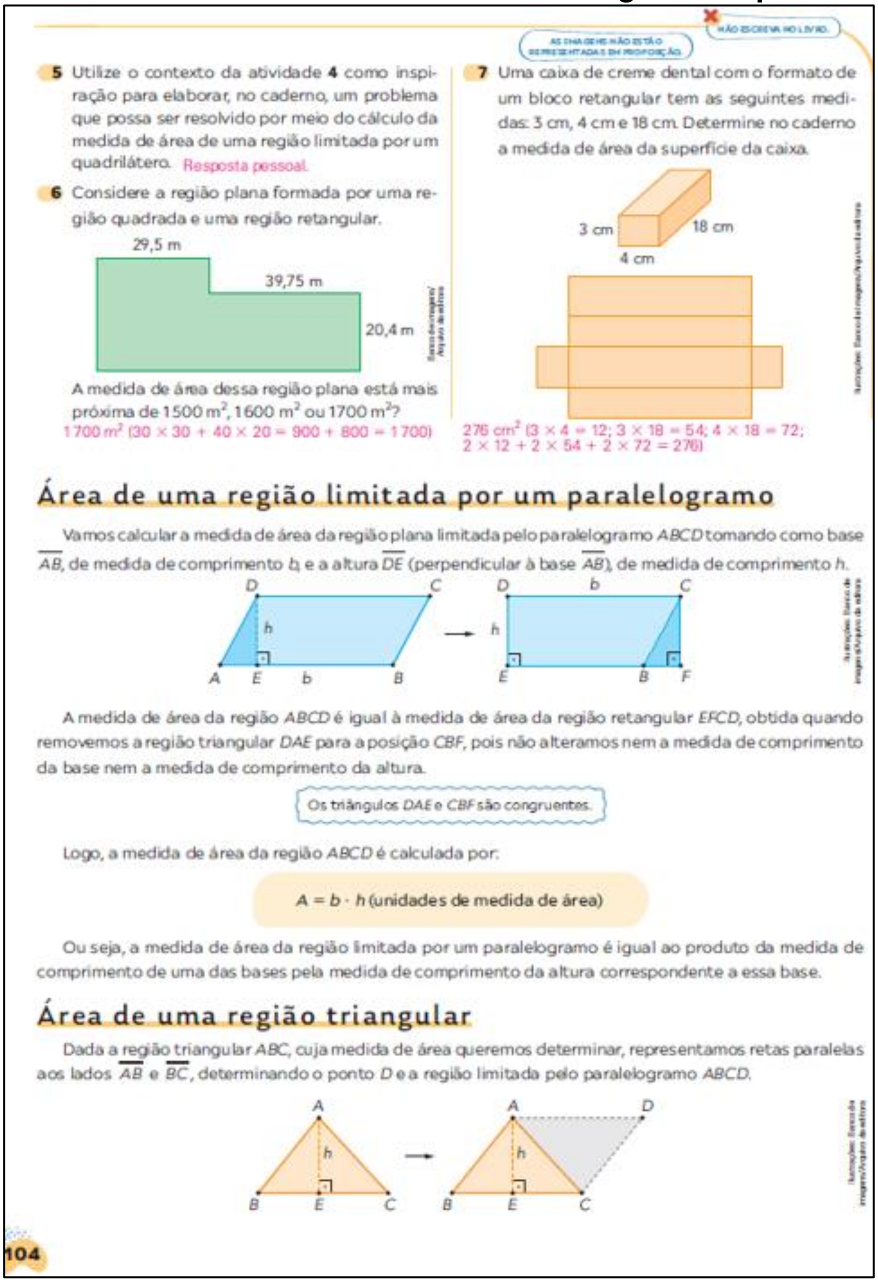
103

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 103), referente ao livro do 8º ano.

Depois da explicitação da fórmula os autores apresentam quatro atividades, sem qualquer figura, em que três se referem a regiões quadradas e uma à uma região retangular com as respectivas medidas de lado, para que os estudantes apliquem as fórmulas e calculem as medidas de suas áreas. Nesta o trabalho continua em G2.

A seguir (Figura 65), as atividades continuam, com uma que se baseia na atividade 4 da figura 64, para que os estudantes calculem a medida da área de uma região retangular qualquer; na outra apresentam uma figura, composta por uma região quadrada e uma retangular, com suas medidas de lados para o cálculo da medida de sua área e a última associam a um bloco retangular, uma caixa de creme dental e apresentam sua planificação para o cálculo de sua medida de área. Claramente, apoiados nas fórmulas deduzidas intuitivamente os estudantes trabalham em G2.

Figura 65 – O cálculo de medidas de áreas de regiões de paralelogramos


NÃO ESCREVA NO LIVRO.

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

5 Utilize o contexto da atividade **4** como inspiração para elaborar, no caderno, um problema que possa ser resolvido por meio do cálculo da medida de área de uma região limitada por um quadrilátero. Resposta pessoal.

6 Considere a região plana formada por uma região quadrada e uma região retangular.

A medida de área dessa região plana está mais próxima de 1500 m², 1600 m² ou 1700 m²?
1700 m² (30 × 30 + 40 × 20 = 900 + 800 = 1700)

7 Uma caixa de creme dental com o formato de um bloco retangular tem as seguintes medidas: 3 cm, 4 cm e 18 cm. Determine no caderno a medida de área da superfície da caixa.

276 cm² (3 × 4 = 12; 3 × 18 = 54; 4 × 18 = 72; 2 × 12 + 2 × 54 + 2 × 72 = 276)

Área de uma região limitada por um paralelogramo

Vamos calcular a medida de área da região plana limitada pelo paralelogramo *ABCD* tomando como base $\overline{AB}$, de medida de comprimento *b*, e a altura $\overline{DE}$ (perpendicular à base $\overline{AB}$), de medida de comprimento *h*.

A medida de área da região *ABCD* é igual à medida de área da região retangular *EFCD*, obtida quando removemos a região triangular *DAE* para a posição *CBF*, pois não alteramos nem a medida de comprimento da base nem a medida de comprimento da altura.

Os triângulos *DAE* e *CBF* são congruentes.

Logo, a medida de área da região *ABCD* é calculada por:

$A = b \cdot h$ (unidades de medida de área)

Ou seja, a medida de área da região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de comprimento de uma das bases pela medida de comprimento da altura correspondente a essa base.

Área de uma região triangular

Dada a região triangular *ABC*, cuja medida de área queremos determinar, representamos retas paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto *D* e a região limitada pelo paralelogramo *ABCD*.

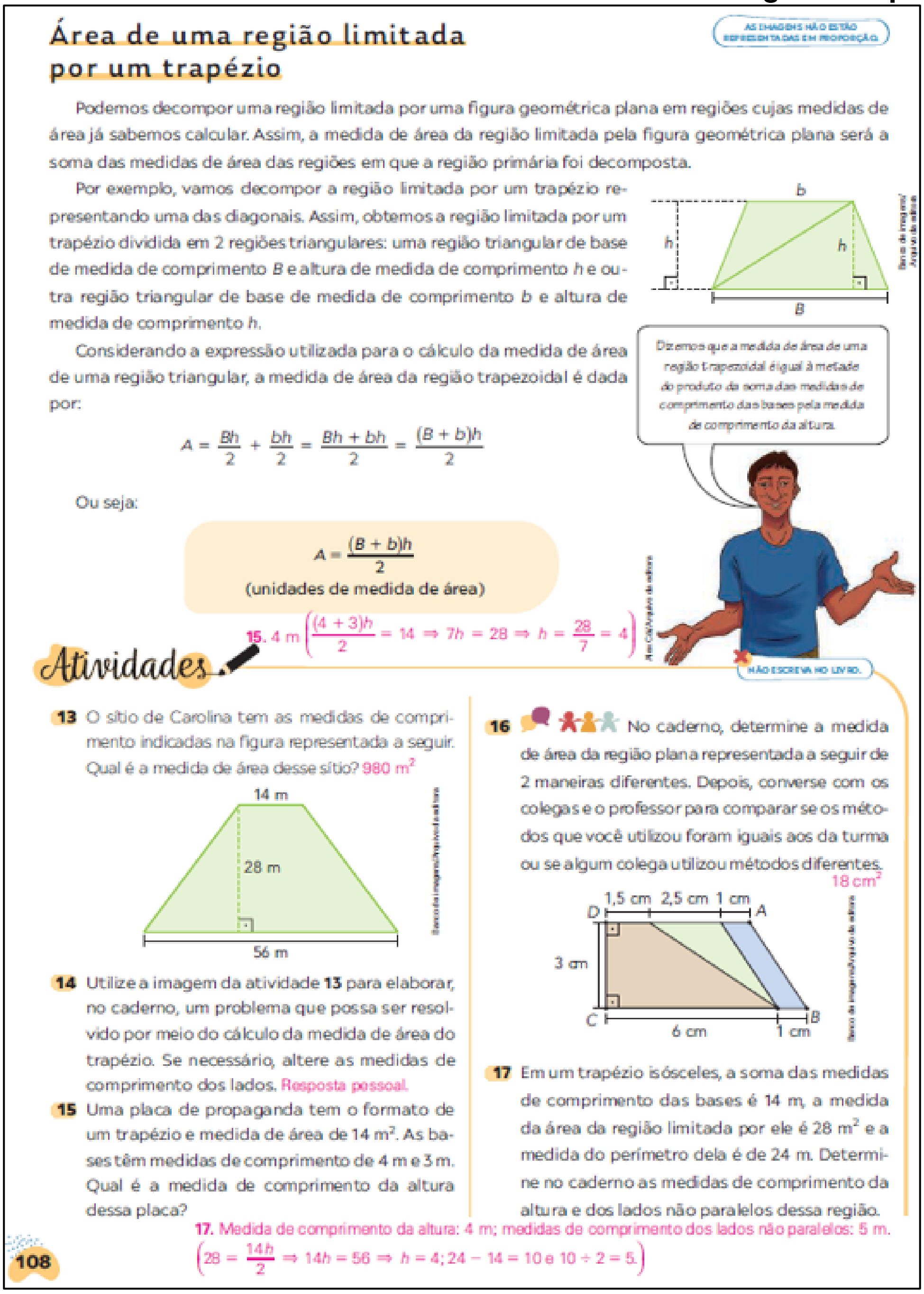
104

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 104), referente ao livro do 8º ano.

Na mesma página os autores voltam às fórmulas para o cálculo de medidas de áreas de regiões delimitadas por paralelogramos e triângulos, de forma semelhante a apresentada para as regiões já tratadas.

A p. 108 (Figura 66) tem início com explicações a respeito do cálculo de medidas de áreas para regiões delimitadas por trapézios, em que apoiados em uma figura, cujas medidas estão indicadas por letras, os autores deduzem algebricamente a fórmula para o cálculo dessas medidas, baseados na decomposição do trapézio em dois triângulos. O trabalho continua em G2.

Figura 66 – Retomando o cálculo de medidas de áreas de regiões trapezoidais



Área de uma região limitada por um trapézio

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

Podemos decompor uma região limitada por uma figura geométrica plana em regiões cujas medidas de área já sabemos calcular. Assim, a medida de área da região limitada pela figura geométrica plana será a soma das medidas de área das regiões em que a região primária foi decomposta.

Por exemplo, vamos decompor a região limitada por um trapézio representando uma das diagonais. Assim, obtemos a região limitada por um trapézio dividida em 2 regiões triangulares: uma região triangular de base de medida de comprimento B e altura de medida de comprimento h e outra região triangular de base de medida de comprimento b e altura de medida de comprimento h.

Considerando a expressão utilizada para o cálculo da medida de área de uma região triangular, a medida de área da região trapezoidal é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b)h}{2}$$

Ou seja:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

(unidades de medida de área)

Dizemos que a medida de área de uma região trapezoidal é igual à metade do produto da soma das medidas de comprimento das bases pela medida de comprimento da altura.

15. 4 m $\left(\frac{(4 + 3)h}{2} = 14 \Rightarrow 7h = 28 \Rightarrow h = \frac{28}{7} = 4\right)$

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

13 O sítio de Carolina tem as medidas de comprimento indicadas na figura representada a seguir. Qual é a medida de área desse sítio? 980 m²

14 m; 28 m; 56 m

14 Utilize a imagem da atividade **13** para elaborar, no caderno, um problema que possa ser resolvido por meio do cálculo da medida de área do trapézio. Se necessário, altere as medidas de comprimento dos lados. Resposta pessoal.

15 Uma placa de propaganda tem o formato de um trapézio e medida de área de 14 m². As bases têm medidas de comprimento de 4 m e 3 m. Qual é a medida de comprimento da altura dessa placa?

16 No caderno, determine a medida de área da região plana representada a seguir de 2 maneiras diferentes. Depois, converse com os colegas e o professor para comparar se os métodos que você utilizou foram iguais aos da turma ou se algum colega utilizou métodos diferentes. 18 cm²

1,5 cm; 2,5 cm; 1 cm; 3 cm; 6 cm; 1 cm; A; B; C; D

17 Em um trapézio isósceles, a soma das medidas de comprimento das bases é 14 m, a medida da área da região limitada por ele é 28 m² e a medida do perímetro dela é de 24 m. Determine no caderno as medidas de comprimento da altura e dos lados não paralelos dessa região.

17. Medida de comprimento da altura: 4 m; medidas de comprimento dos lados não paralelos: 5 m. $\left(28 = \frac{14h}{2} \Rightarrow 14h = 56 \Rightarrow h = 4; 24 - 14 = 10 \text{ e } 10 \div 2 = 5\right)$

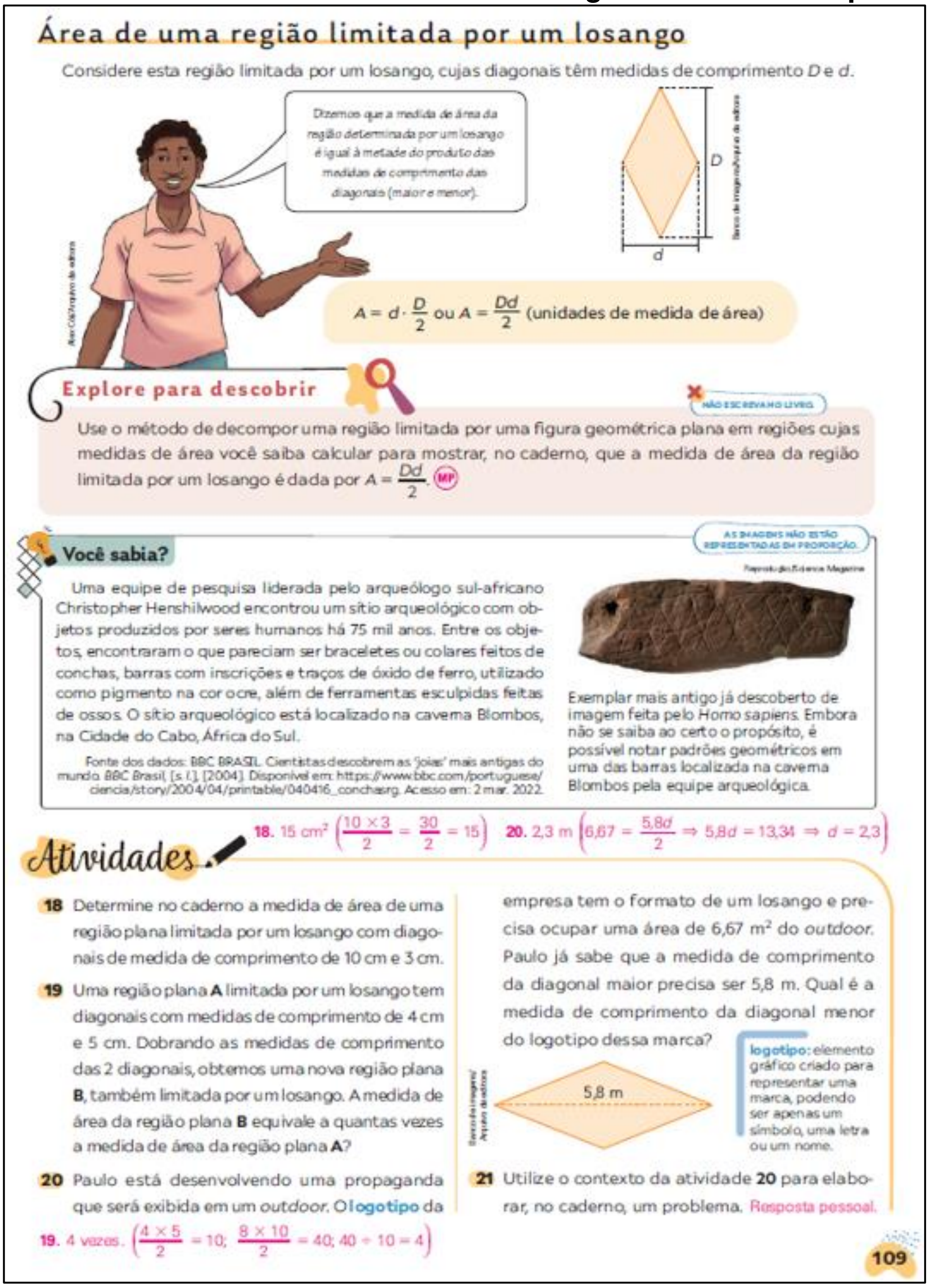
108

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 108), referente ao livro do 8º ano.

Na sequência os autores apresentam cinco atividades, duas apoiadas em figuras e outras apenas com enunciado para que calculem medidas de áreas de regiões trapezoidais, que continuam com um trabalho em G2.

Na p. 109 (Figura 67), da mesma forma, os autores apresentam a dedução da fórmula para o cálculo de medidas de áreas de regiões delimitadas por um losango, apoiados em uma figura em que identificam as medidas das diagonais por letras. A seguir sugerem que os estudantes a deduzam no caderno por meio da decomposição do losango em figuras que eles já saibam calcular a medida de área.

Figura 67 – O cálculo de medidas de áreas de regiões delimitadas por losangos



Área de uma região limitada por um losango

Considere esta região limitada por um losango, cujas diagonais têm medidas de comprimento D e d.

$A = d \cdot \frac{D}{2}$ ou $A = \frac{Dd}{2}$ (unidades de medida de área)

Explore para descobrir

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Use o método de decompor uma região limitada por uma figura geométrica plana em regiões cujas medidas de área você saiba calcular para mostrar, no caderno, que a medida de área da região limitada por um losango é dada por $A = \frac{Dd}{2}$. MP

Você sabia?

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

Uma equipe de pesquisa liderada pelo arqueólogo sul-africano Christopher Henshilwood encontrou um sítio arqueológico com objetos produzidos por seres humanos há 75 mil anos. Entre os objetos, encontraram o que pareciam ser braceletes ou colares feitos de conchas, barras com inscrições e traços de óxido de ferro, utilizado como pigmento na cor ocre, além de ferramentas esculpidas feitas de ossos. O sítio arqueológico está localizado na caverna Blombos, na Cidade do Cabo, África do Sul.

Fonte dos dados: BBC BRASIL. Cientistas descobrem as 'joias' mais antigas do mundo. *BBC Brasil*, [s. l.], [2004]. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/ciencia/story/2004/04/printable/040416_conchasrg. Acesso em: 2 mar. 2022.

Exemplar mais antigo já descoberto de imagem feita pelo *Homo sapiens*. Embora não se saiba ao certo o propósito, é possível notar padrões geométricos em uma das barras localizada na caverna Blombos pela equipe arqueológica.

Atividades

18. $15\ cm^2$ $\left(\frac{10 \times 3}{2} = \frac{30}{2} = 15\right)$ 20. $2{,}3\ m$ $\left(6{,}67 = \frac{5{,}8d}{2} \Rightarrow 5{,}8d = 13{,}34 \Rightarrow d = 2{,}3\right)$

18 Determine no caderno a medida de área de uma região plana limitada por um losango com diagonais de medida de comprimento de 10 cm e 3 cm.

19 Uma região plana **A** limitada por um losango tem diagonais com medidas de comprimento de 4 cm e 5 cm. Dobrando as medidas de comprimento das 2 diagonais, obtemos uma nova região plana **B**, também limitada por um losango. A medida de área da região plana **B** equivale a quantas vezes a medida de área da região plana **A**?

20 Paulo está desenvolvendo uma propaganda que será exibida em um *outdoor*. O **logotipo** da empresa tem o formato de um losango e precisa ocupar uma área de 6,67 m² do *outdoor*. Paulo já sabe que a medida de comprimento da diagonal maior precisa ser 5,8 m. Qual é a medida de comprimento da diagonal menor do logotipo dessa marca?

logotipo: elemento gráfico criado para representar uma marca, podendo ser apenas um símbolo, uma letra ou um nome.

21 Utilize o contexto da atividade **20** para elaborar, no caderno, um problema. Resposta pessoal.

19. 4 vezes. $\left(\frac{4 \times 5}{2} = 10;\ \frac{8 \times 10}{2} = 40;\ 40 \div 10 = 4\right)$

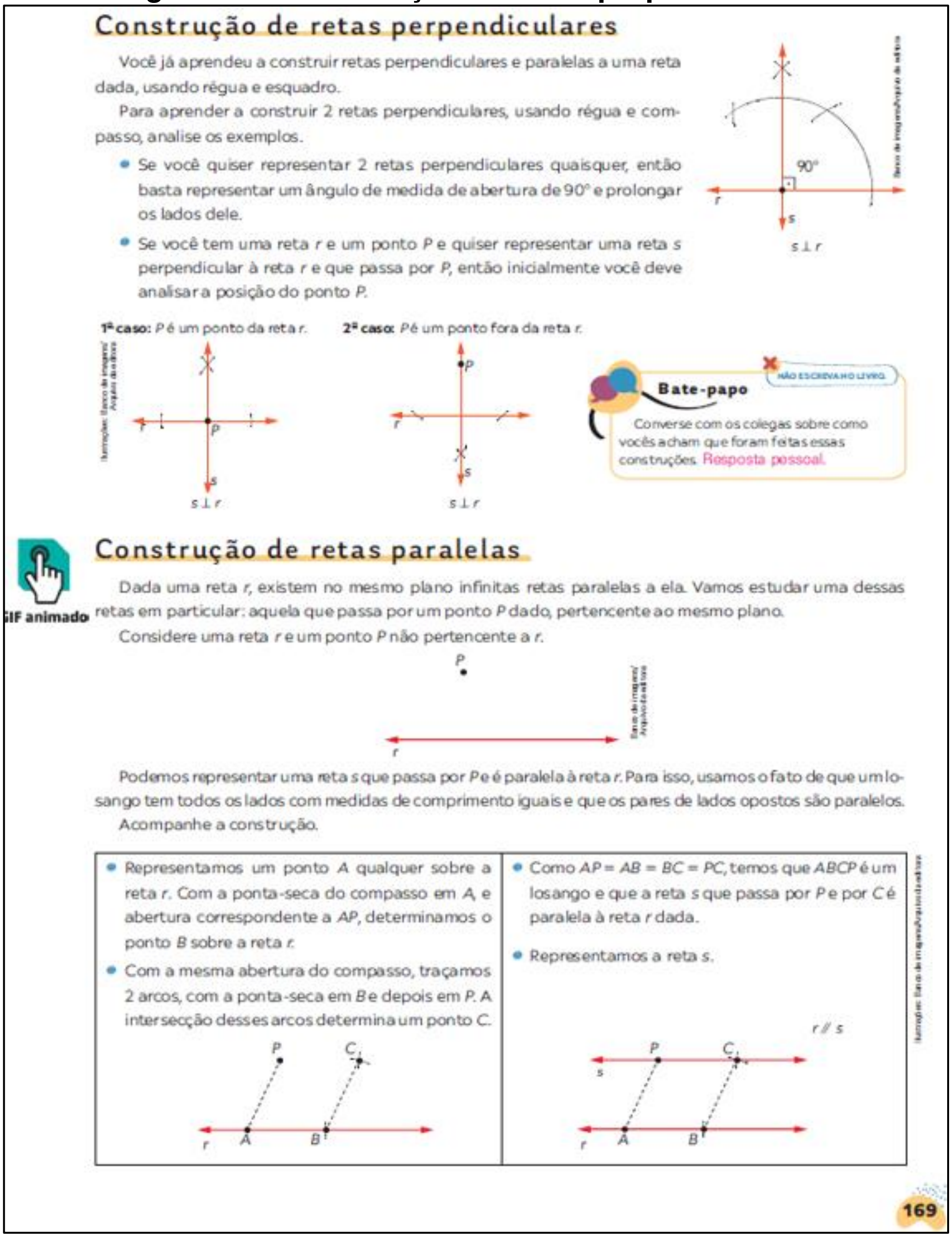
109

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 109), referente ao livro do 8º ano.

Depois apresentam uma curiosidade histórica para mostrar que em objetos arqueológicos de 75 mil anos podem ser identificados padrões geométricos e, a seguir propõem quatro atividades para que os estudantes apliquem a fórmula que acabaram de deduzir. Em uma apresentam uma figura, nas outras apenas o enunciado com os dados. Continuam com o trabalho em G2 – geometria proto-axiomática.

Na p. 169 (Figura 68) os autores apresentam os processos de construção de retas perpendiculares e retas paralelas com régua e compasso, o que é fundamental para a compreensão de geometria e a construção de figuras geométricas em geral.

Figura 68 – Construção de retas perpendiculares



Construção de retas perpendiculares

Você já aprendeu a construir retas perpendiculares e paralelas a uma reta dada, usando régua e esquadro.

Para aprender a construir 2 retas perpendiculares, usando régua e compasso, analise os exemplos.

- Se você quiser representar 2 retas perpendiculares quaisquer, então basta representar um ângulo de medida de abertura de 90° e prolongar os lados dele.
- Se você tem uma reta *r* e um ponto *P* e quiser representar uma reta *s* perpendicular à reta *r* e que passa por *P*, então inicialmente você deve analisar a posição do ponto *P*.

1º caso: *P* é um ponto da reta *r*.

2º caso: *P* é um ponto fora da reta *r*.

$s \perp r$

Bate-papo

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Converse com os colegas sobre como vocês acham que foram feitas essas construções. Resposta pessoal.

Construção de retas paralelas

GIF animado

Dada uma reta *r*, existem no mesmo plano infinitas retas paralelas a ela. Vamos estudar uma dessas retas em particular: aquela que passa por um ponto *P* dado, pertencente ao mesmo plano.

Considere uma reta *r* e um ponto *P* não pertencente a *r*.

Podemos representar uma reta *s* que passa por *P* e é paralela à reta *r*. Para isso, usamos o fato de que um losango tem todos os lados com medidas de comprimento iguais e que os pares de lados opostos são paralelos.

Acompanhe a construção.

- Representamos um ponto *A* qualquer sobre a reta *r*. Com a ponta-seca do compasso em *A*, e abertura correspondente a *AP*, determinamos o ponto *B* sobre a reta *r*.
- Com a mesma abertura do compasso, traçamos 2 arcos, com a ponta-seca em *B* e depois em *P*. A intersecção desses arcos determina um ponto *C*.
- Como $AP = AB = BC = PC$, temos que *ABCP* é um losango e que a reta *s* que passa por *P* e por *C* é paralela à reta *r* dada.
- Representamos a reta *s*.

$r \parallel s$

169

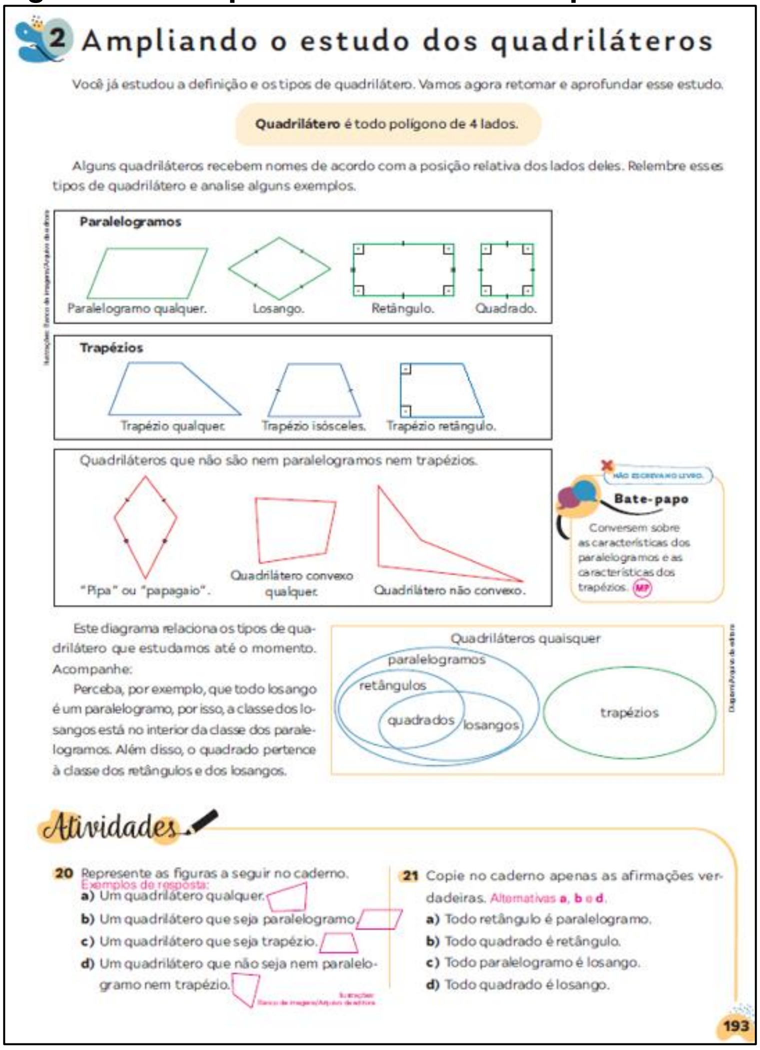
Fonte: Dante e Viana (2022, p. 169), referente ao livro do 8º ano.

Nas p. 171 e 172 são abordadas construções geométricas envolvendo a Etnomatemática.

Nas páginas seguintes são trabalhadas construções geométricas com régua, esquadro, transferidos e compasso, lugares geométricos, construções geométricas com régua não graduada e compasso, construções geométricas envolvendo Etnomatemática, figuras congruentes, congruência de triângulos e mediana, bissetriz, altura e mediatriz relacionadas a um triângulo.

Na p. 193 (Figura 69) os autores ampliam o estudo de quadriláteros, com sua definição e a apresentação de três grupos de figuras: paralelogramos, trapézios e figuras que não são nem um, nem outro para conduzir os estudantes a uma classificação para os quadriláteros por meio de um diagrama de Venn, em que o trapézio é considerado como um quadrilátero que tem exatamente um par de lados paralelos, conforme definido no 6º ano.

Figura 69 – Ampliando o estudo dos quadriláteros



2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Você já estudou a definição e os tipos de quadrilátero. Vamos agora retomar e aprofundar esse estudo.

Quadrilátero é todo polígono de **4** lados.

Alguns quadriláteros recebem nomes de acordo com a posição relativa dos lados deles. Relembre esses tipos de quadrilátero e analise alguns exemplos.

Bate-papo

Conversem sobre as características dos paralelogramos e as características dos trapézios. MP

Este diagrama relaciona os tipos de quadrilátero que estudamos até o momento. Acompanhe:

Perceba, por exemplo, que todo losango é um paralelogramo, por isso, a classe dos losangos está no interior da classe dos paralelogramos. Além disso, o quadrado pertence à classe dos retângulos e dos losangos.

Atividades

20 Represente as figuras a seguir no caderno.
Exemplos de resposta:
a) Um quadrilátero qualquer.
b) Um quadrilátero que seja paralelogramo.
c) Um quadrilátero que seja trapézio.
d) Um quadrilátero que não seja nem paralelogramo nem trapézio.

21 Copie no caderno apenas as afirmações verdadeiras. Alternativas **a**, **b** e **d**.
a) Todo retângulo é paralelogramo.
b) Todo quadrado é retângulo.
c) Todo paralelogramo é losango.
d) Todo quadrado é losango.

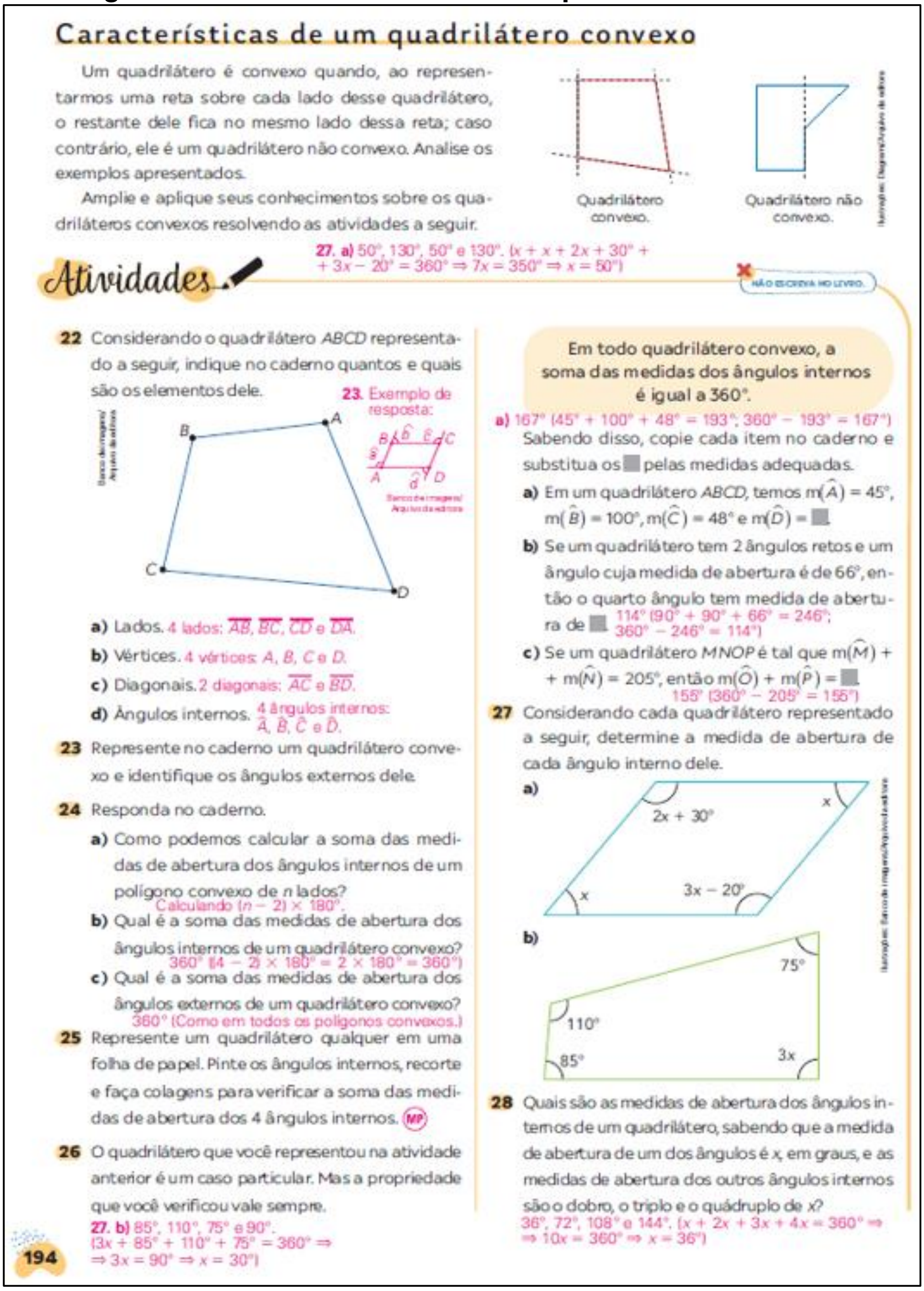
193

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 193), referente ao livro do 8º ano.

A seguir os autores apresentam duas atividades, a primeira para que representem figuras e a outra para que identifiquem afirmações verdadeiras, ambas apoiadas na classificação realizada. O trabalho continua em G2.

Na p. 194 (Figura 70) os autores apresentam as definições de quadriláteros convexos e não convexos seguidas de sete atividades para que os estudantes mobilizem diversos conhecimentos, como quantidades de lados, vértices, diagonais e ângulos.

Figura 70 – Características de um quadrilátero convexo



Características de um quadrilátero convexo

Um quadrilátero é convexo quando, ao representarmos uma reta sobre cada lado desse quadrilátero, o restante dele fica no mesmo lado dessa reta; caso contrário, ele é um quadrilátero não convexo. Analise os exemplos apresentados.

Amplie e aplique seus conhecimentos sobre os quadriláteros convexos resolvendo as atividades a seguir.

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

22 Considerando o quadrilátero *ABCD* representado a seguir, indique no caderno quantos e quais são os elementos dele.

a) Lados. 4 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

b) Vértices. 4 vértices: *A*, *B*, *C* e *D*.

c) Diagonais. 2 diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

d) Ângulos internos. 4 ângulos internos: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

23 Represente no caderno um quadrilátero convexo e identifique os ângulos externos dele.

23. Exemplo de resposta:

24 Responda no caderno.

a) Como podemos calcular a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados? Calculando $(n - 2) \times 180°$.

b) Qual é a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo? 360° $((4 - 2) \times 180° = 2 \times 180° = 360°)$

c) Qual é a soma das medidas de abertura dos ângulos externos de um quadrilátero convexo? 360° (Como em todos os polígonos convexos.)

25 Represente um quadrilátero qualquer em uma folha de papel. Pinte os ângulos internos, recorte e faça colagens para verificar a soma das medidas de abertura dos 4 ângulos internos. MP

26 O quadrilátero que você representou na atividade anterior é um caso particular. Mas a propriedade que você verificou vale sempre.

Em todo quadrilátero convexo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°.

Sabendo disso, copie cada item no caderno e substitua os ■ pelas medidas adequadas.

a) Em um quadrilátero *ABCD*, temos $m(\hat{A}) = 45°$, $m(\hat{B}) = 100°$, $m(\hat{C}) = 48°$ e $m(\hat{D}) =$ ■. 167° $(45° + 100° + 48° = 193°; 360° - 193° = 167°)$

b) Se um quadrilátero tem 2 ângulos retos e um ângulo cuja medida de abertura é de 66°, então o quarto ângulo tem medida de abertura de ■. 114° $(90° + 90° + 66° = 246°; 360° - 246° = 114°)$

c) Se um quadrilátero *MNOP* é tal que $m(\hat{M}) + m(\hat{N}) = 205°$, então $m(\hat{O}) + m(\hat{P}) =$ ■. 155° $(360° - 205° = 155°)$

27 Considerando cada quadrilátero representado a seguir, determine a medida de abertura de cada ângulo interno dele.

a)

b)

27. a) 50°, 130°, 50° e 130°. $(x + x + 2x + 30° + 3x - 20° = 360° \Rightarrow 7x = 350° \Rightarrow x = 50°)$

27. b) 85°, 110°, 75° e 90°. $(3x + 85° + 110° + 75° = 360° \Rightarrow 3x = 90° \Rightarrow x = 30°)$

28 Quais são as medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero, sabendo que a medida de abertura de um dos ângulos é *x*, em graus, e as medidas de abertura dos outros ângulos internos são o dobro, o triplo e o quádruplo de *x*? 36°, 72°, 108° e 144°. $(x + 2x + 3x + 4x = 360° \Rightarrow 10x = 360° \Rightarrow x = 36°)$

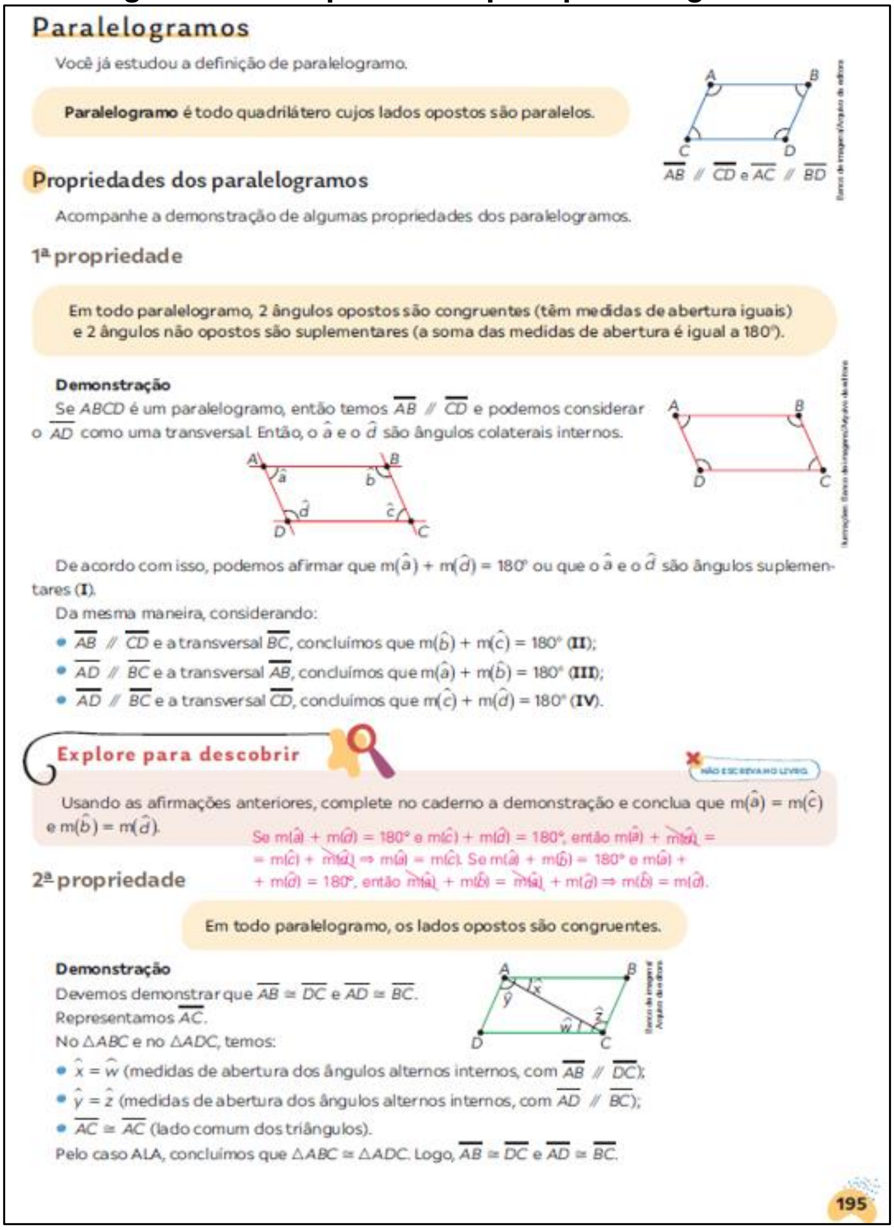
194

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 194), referente ao livro do 8º ano.

Nessas atividades nota-se a relação entre geometria e cálculo algébrico para a identificação da medida de ângulos internos de um quadrilátero convexo (atividades 24, 26, 27 e 28). Além disso, é importante ainda observar que, no caso de medida de ângulos, eles a representam por $m(\hat{A})$ para que os estudantes não confundam o ângulo com sua medida, o que não fazem para as medidas de áreas. O trabalho continua em G2.

Na p. 195 (Figura 71) é retomado o estudo de paralelogramos com a reapresentação de sua definição em língua natural e em linguagem matemática, apoiadas em uma figura com vértices e ângulos identificados, para apresentar duas de suas propriedades.

Figura 71 – Propriedades para paralelogramos



Paralelogramos

Você já estudou a definição de paralelogramo.

Paralelogramo é todo quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

$\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ e $\overline{AC} \mathbin{/\!/} \overline{BD}$

Propriedades dos paralelogramos

Acompanhe a demonstração de algumas propriedades dos paralelogramos.

1ª propriedade

Em todo paralelogramo, 2 ângulos opostos são congruentes (têm medidas de abertura iguais) e 2 ângulos não opostos são suplementares (a soma das medidas de abertura é igual a 180°).

Demonstração

Se $ABCD$ é um paralelogramo, então temos $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ e podemos considerar o $\overline{AD}$ como uma transversal. Então, o $\hat{a}$ e o $\hat{d}$ são ângulos colaterais internos.

De acordo com isso, podemos afirmar que $m(\hat{a}) + m(\hat{d}) = 180°$ ou que o $\hat{a}$ e o $\hat{d}$ são ângulos suplementares (**I**).

Da mesma maneira, considerando:

- $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ e a transversal $\overline{BC}$, concluímos que $m(\hat{b}) + m(\hat{c}) = 180°$ (**II**);
- $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ e a transversal $\overline{AB}$, concluímos que $m(\hat{a}) + m(\hat{b}) = 180°$ (**III**);
- $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ e a transversal $\overline{CD}$, concluímos que $m(\hat{c}) + m(\hat{d}) = 180°$ (**IV**).

Explore para descobrir

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Usando as afirmações anteriores, complete no caderno a demonstração e conclua que $m(\hat{a}) = m(\hat{c})$ e $m(\hat{b}) = m(\hat{d})$.

Se $m(\hat{a}) + m(\hat{d}) = 180°$ e $m(\hat{c}) + m(\hat{d}) = 180°$, então $m(\hat{a}) + \cancel{m(\hat{d})} = m(\hat{c}) + \cancel{m(\hat{d})} \Rightarrow m(\hat{a}) = m(\hat{c})$. Se $m(\hat{a}) + m(\hat{b}) = 180°$ e $m(\hat{a}) + m(\hat{d}) = 180°$, então $\cancel{m(\hat{a})} + m(\hat{b}) = \cancel{m(\hat{a})} + m(\hat{d}) \Rightarrow m(\hat{b}) = m(\hat{d})$.

2ª propriedade

Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

Demonstração

Devemos demonstrar que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Representamos $\overline{AC}$.

No $\triangle ABC$ e no $\triangle ADC$, temos:

- $\hat{x} = \hat{w}$ (medidas de abertura dos ângulos alternos internos, com $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{DC}$);
- $\hat{y} = \hat{z}$ (medidas de abertura dos ângulos alternos internos, com $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$);
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum dos triângulos).

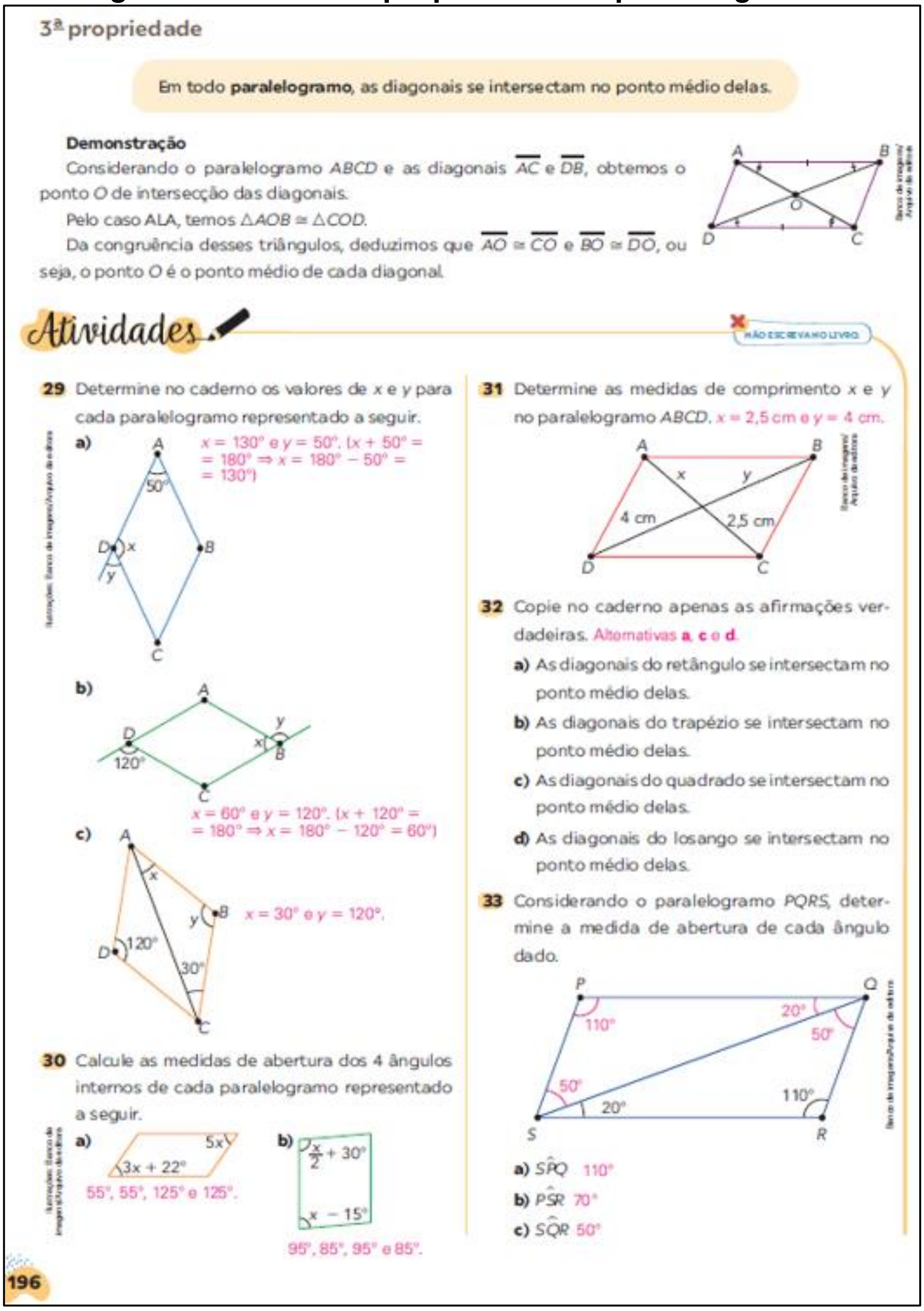
Pelo caso ALA, concluímos que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. Logo, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

195

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 195), referente ao livro do 8º ano.

Para a primeira propriedade os autores apresentam seu enunciado e uma figura de um paralelogramo com vértices e ângulos nomeados para evidenciar relações entre o paralelismo de lados e as medidas de ângulos, para que os estudantes concluam a demonstração para conclui-la. Nessa atividade vemos que os estudantes são levados a agir em uma demonstração, apoiados em uma figura e em hipóteses explícitas, o que caracteriza um trabalho em G2, porque sua validação ainda se dá por meios perceptivos. Já na segunda propriedade os autores a enunciam e a demonstram totalmente.

Figura 72 – Terceira propriedade de paralelogramos



3ª propriedade

Em todo **paralelogramo**, as diagonais se intersectam no ponto médio delas.

Demonstração

Considerando o paralelogramo *ABCD* e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$, obtemos o ponto *O* de intersecção das diagonais.

Pelo caso ALA, temos $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

Da congruência desses triângulos, deduzimos que $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ e $\overline{BO} \cong \overline{DO}$, ou seja, o ponto *O* é o ponto médio de cada diagonal.

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO

29 Determine no caderno os valores de *x* e *y* para cada paralelogramo representado a seguir.

a) $x = 130°$ e $y = 50°$. $(x + 50° = 180° \Rightarrow x = 180° - 50° = 130°)$

b) $x = 60°$ e $y = 120°$. $(x + 120° = 180° \Rightarrow x = 180° - 120° = 60°)$

c) $x = 30°$ e $y = 120°$.

30 Calcule as medidas de abertura dos 4 ângulos internos de cada paralelogramo representado a seguir.

a) 55°, 55°, 125° e 125°.

b) 95°, 85°, 95° e 85°.

31 Determine as medidas de comprimento *x* e *y* no paralelogramo *ABCD*. $x = 2,5$ cm e $y = 4$ cm.

32 Copie no caderno apenas as afirmações verdadeiras. Alternativas **a**, **c** e **d**.

a) As diagonais do retângulo se intersectam no ponto médio delas.

b) As diagonais do trapézio se intersectam no ponto médio delas.

c) As diagonais do quadrado se intersectam no ponto médio delas.

d) As diagonais do losango se intersectam no ponto médio delas.

33 Considerando o paralelogramo *PQRS*, determine a medida de abertura de cada ângulo dado.

a) $S\hat{P}Q$ 110°

b) $P\hat{S}R$ 70°

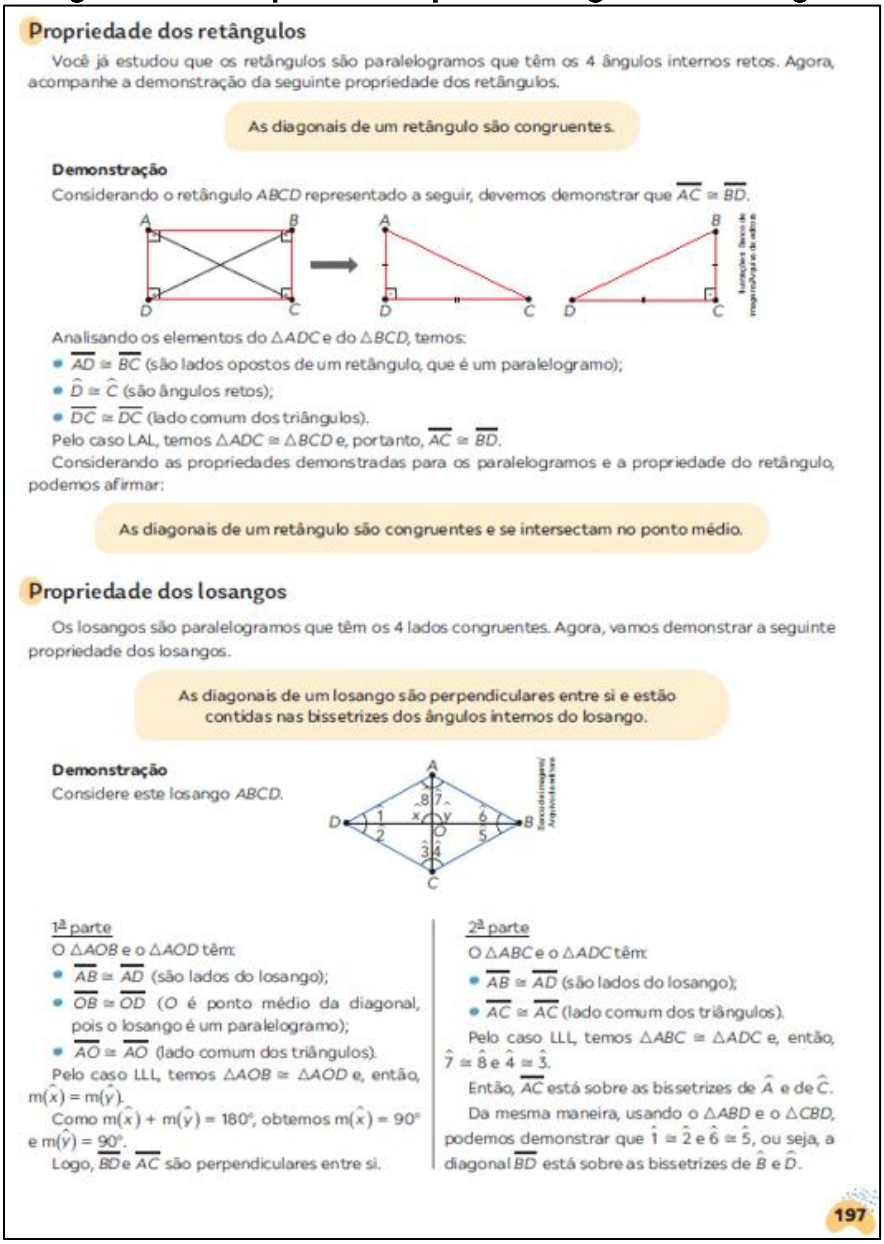
c) $S\hat{Q}R$ 50°

196

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 196), referente ao livro do 8º ano.

Na página seguinte (Figura 73) os autores apresentam uma propriedade para retângulos e uma para losangos. Na primeira, as diagonais de um retângulo são congruentes, apresentam a figura de um retângulo com a identificação dos ângulos retos e de suas diagonais para que sejam considerados dois triângulos. No entanto, utilizam o símbolo de implicação para relacionar essa figura com os dois triângulos separadamente, provavelmente para facilitar a compreensão dos estudantes, mas que é desnecessário por impedir a compreensão efetiva de figuras geométricas, pois os casos de sobreposição são comuns em geometria.

Figura 73 – Propriedades para retângulos e losangos



Propriedade dos retângulos

Você já estudou que os retângulos são paralelogramos que têm os 4 ângulos internos retos. Agora, acompanhe a demonstração da seguinte propriedade dos retângulos.

As diagonais de um retângulo são congruentes.

Demonstração

Considerando o retângulo $ABCD$ representado a seguir, devemos demonstrar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Analisando os elementos do $\triangle ADC$ e do $\triangle BCD$, temos:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (são lados opostos de um retângulo, que é um paralelogramo);
- $\hat{D} \cong \hat{C}$ (são ângulos retos);
- $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso LAL, temos $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ e, portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Considerando as propriedades demonstradas para os paralelogramos e a propriedade do retângulo, podemos afirmar:

As diagonais de um retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio.

Propriedade dos losangos

Os losangos são paralelogramos que têm os 4 lados congruentes. Agora, vamos demonstrar a seguinte propriedade dos losangos.

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango.

Demonstração

Considere este losango $ABCD$.

1ª parte

O $\triangle AOB$ e o $\triangle AOD$ têm:

- $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (são lados do losango);
- $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ (O é ponto médio da diagonal, pois o losango é um paralelogramo);
- $\overline{AO} \cong \overline{AO}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso LLL, temos $\triangle AOB \cong \triangle AOD$ e, então, $m(\hat{x}) = m(\hat{y})$.

Como $m(\hat{x}) + m(\hat{y}) = 180°$, obtemos $m(\hat{x}) = 90°$ e $m(\hat{y}) = 90°$.

Logo, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares entre si.

2ª parte

O $\triangle ABC$ e o $\triangle ADC$ têm:

- $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (são lados do losango);
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso LLL, temos $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ e, então, $\hat{7} \cong \hat{8}$ e $\hat{4} \cong \hat{3}$.

Então, $\overline{AC}$ está sobre as bissetrizes de $\hat{A}$ e de $\hat{C}$.

Da mesma maneira, usando o $\triangle ABD$ e o $\triangle CBD$, podemos demonstrar que $\hat{1} \cong \hat{2}$ e $\hat{6} \cong \hat{5}$, ou seja, a diagonal $\overline{BD}$ está sobre as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

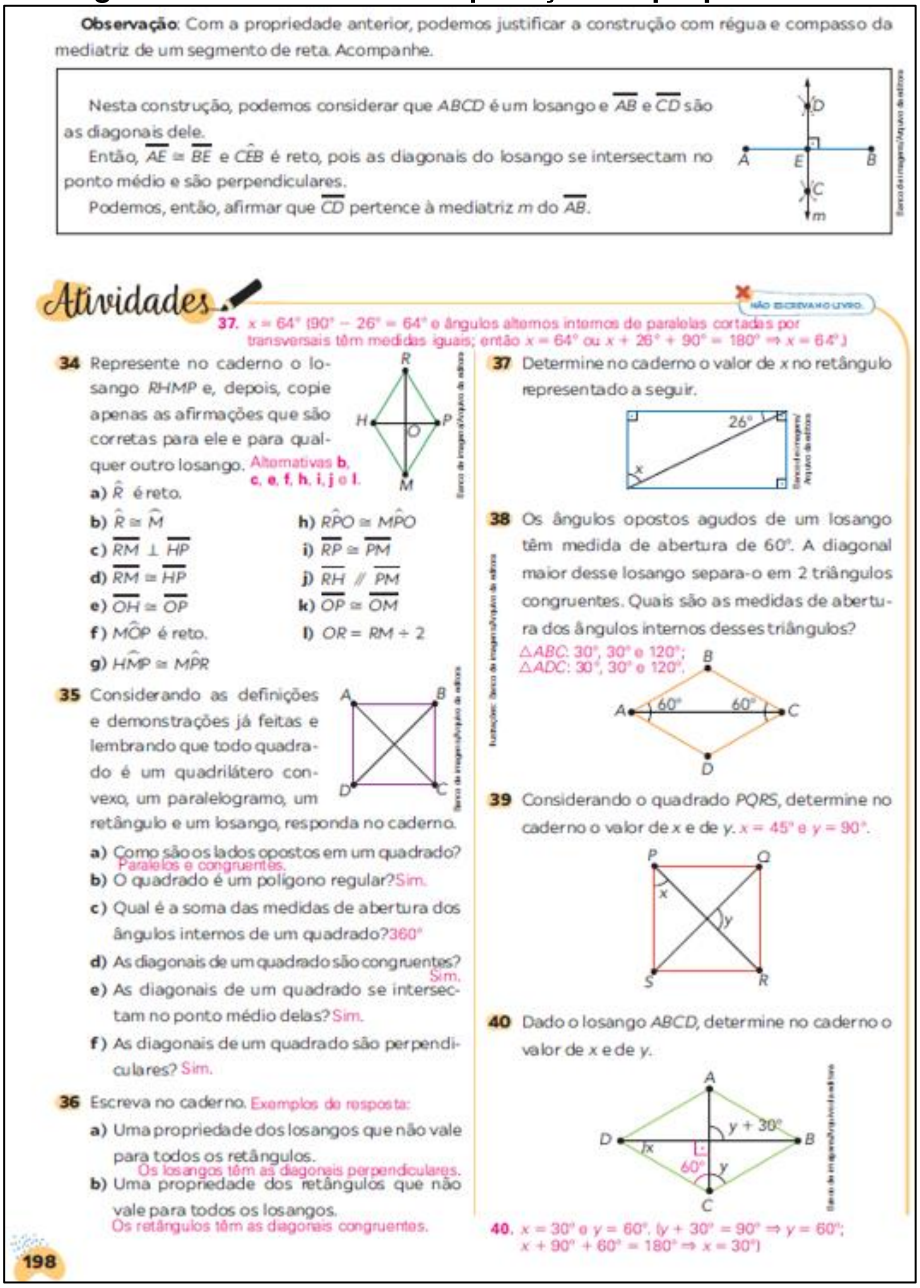
197

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 197), referente ao livro do 8º ano.

Após a demonstração, realizada com uma linguagem mais formal da matemática, como consequência afirmam que “as diagonais de um retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio” sem qualquer demonstração. Para os losangos, enunciam a propriedade, apresentam uma figura com suas diagonais e os ângulos numerados, o que pode levar à confusão com suas medidas, poderiam utilizar letras como já fizeram em situações anteriores. A seguir apresentam a demonstração em duas partes.

Na p. 198 (Figura 74) os autores encerram a explicação a respeito de propriedades e apresentam a construção com régua e compasso da mediatriz de um segmento, baseada na última propriedade de retângulo citada no parágrafo anterior.

Figura 74 –Atividades de aplicação de propriedades


Observação: Com a propriedade anterior, podemos justificar a construção com régua e compasso da mediatriz de um segmento de reta. Acompanhe.

Nesta construção, podemos considerar que $ABCD$ é um losango e $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as diagonais dele.

Então, $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ e $C\hat{E}B$ é reto, pois as diagonais do losango se intersectam no ponto médio e são perpendiculares.

Podemos, então, afirmar que $\overline{CD}$ pertence à mediatriz m do $\overline{AB}$.

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

37. $x = 64°$ ($90° - 26° = 64°$ e ângulos alternos internos de paralelas cortadas por transversais têm medidas iguais; então $x = 64°$ ou $x + 26° + 90° = 180° \Rightarrow x = 64°$.)

34 Represente no caderno o losango $RHMP$ e, depois, copie apenas as afirmações que são corretas para ele e para qualquer outro losango. Alternativas **b**, **c**, **e**, **f**, **h**, **i**, **j** e **l**.

a) $\hat{R}$ é reto.
b) $\hat{R} \cong \hat{M}$
c) $\overline{RM} \perp \overline{HP}$
d) $\overline{RM} \cong \overline{HP}$
e) $\overline{OH} \cong \overline{OP}$
f) $M\hat{O}P$ é reto.
g) $H\hat{M}P \cong M\hat{P}R$
h) $R\hat{P}O \cong M\hat{P}O$
i) $\overline{RP} \cong \overline{PM}$
j) $\overline{RH} \parallel \overline{PM}$
k) $\overline{OP} \cong \overline{OM}$
l) $OR = RM \div 2$

35 Considerando as definições e demonstrações já feitas e lembrando que todo quadrado é um quadrilátero convexo, um paralelogramo, um retângulo e um losango, responda no caderno.

a) Como são os lados opostos em um quadrado? Paralelos e congruentes.
b) O quadrado é um polígono regular? Sim.
c) Qual é a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrado? 360°
d) As diagonais de um quadrado são congruentes? Sim.
e) As diagonais de um quadrado se intersectam no ponto médio delas? Sim.
f) As diagonais de um quadrado são perpendiculares? Sim.

36 Escreva no caderno. Exemplos de resposta:

a) Uma propriedade dos losangos que não vale para todos os retângulos. Os losangos têm as diagonais perpendiculares.
b) Uma propriedade dos retângulos que não vale para todos os losangos. Os retângulos têm as diagonais congruentes.

37 Determine no caderno o valor de x no retângulo representado a seguir.

38 Os ângulos opostos agudos de um losango têm medida de abertura de 60°. A diagonal maior desse losango separa-o em 2 triângulos congruentes. Quais são as medidas de abertura dos ângulos internos desses triângulos? $\triangle ABC$: 30°, 30° e 120°; $\triangle ADC$: 30°, 30° e 120°.

39 Considerando o quadrado $PQRS$, determine no caderno o valor de x e de y. $x = 45°$ e $y = 90°$.

40 Dado o losango $ABCD$, determine no caderno o valor de x e de y.

40. $x = 30°$ e $y = 60°$. ($y + 30° = 90° \Rightarrow y = 60°$; $x + 90° + 60° = 180° \Rightarrow x = 30°$)

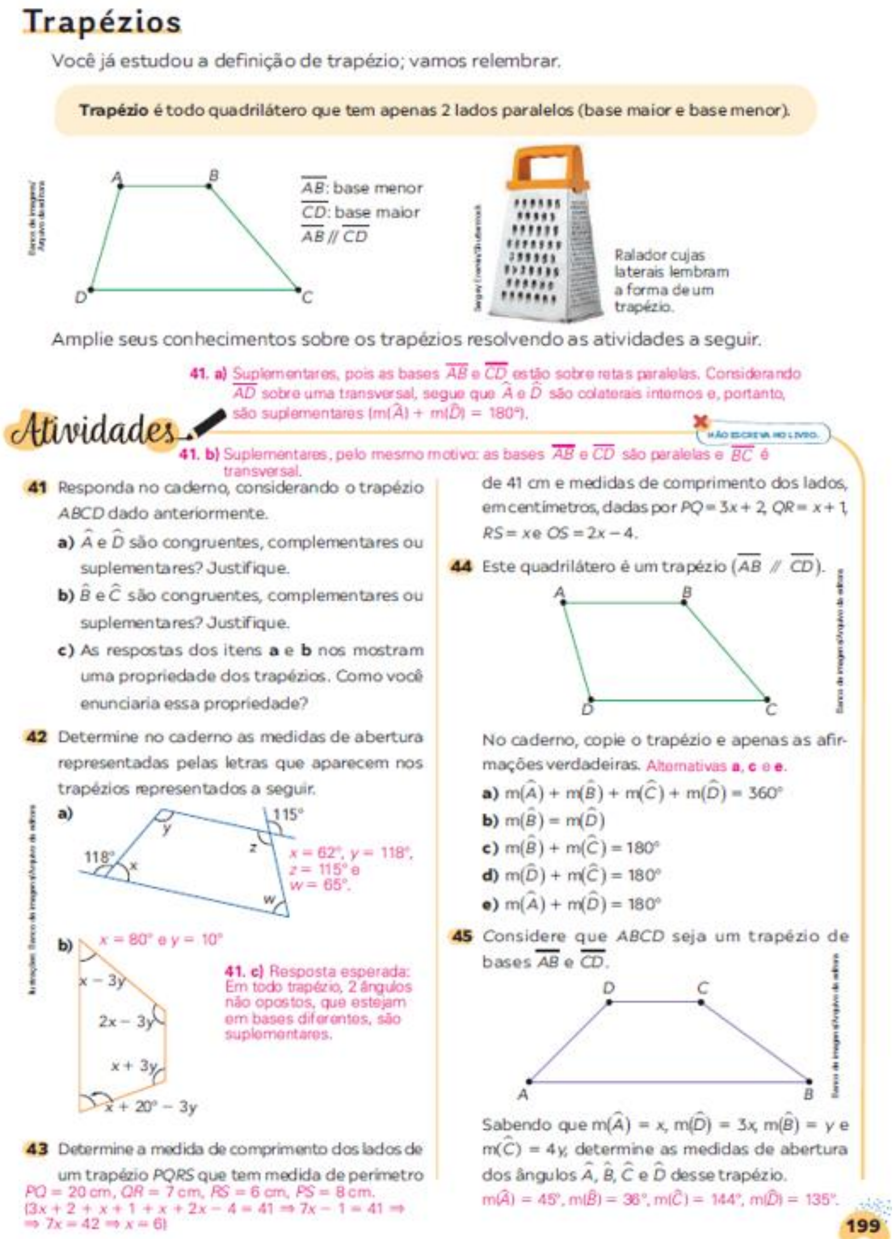
198

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 198), referente ao livro do 8º ano.

Depois dessa explicação apresentam sete atividades que envolvem elementos, características e propriedades de quadriláteros, em que uma envolve cálculo algébrico em sua solução e uma não está baseada em uma figura. A solução dessas atividades se dá em G2 – geometria proto-axiomática porque envolve ainda as validações perceptivas das figuras localmente, pois ainda não é explicitado um sistema axiomático.

Na p. 199 (Figura 75) os autores relembram a definição de trapézio e o associam a um ralador, par então apresentar atividades a respeito desse quadrilátero.

Figura 75 – Trapézios

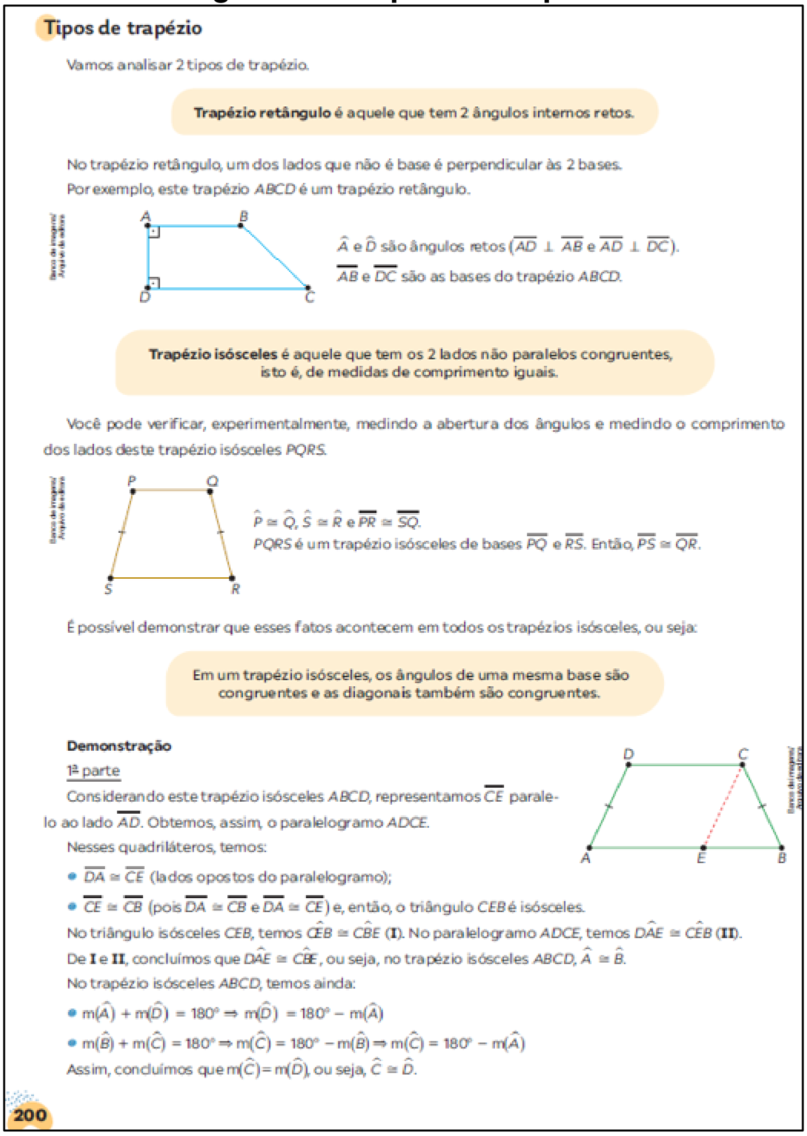


Fonte: Dante e Viana (2022, p. 199), referente ao livro do 8º ano.

Nas cinco atividades propostas os estudantes devem mobilizar, principalmente, as medidas de ângulos internos e externos. Em três delas os estudantes se apoiam em figuras e em duas delas a resolução é sugerida por cálculo algébrico. Essas atividades recuperam conteúdos anteriores que servem de base para o tópico seguinte.

Na página seguinte (Figura 76) os autores se voltam para os tipos de trapézios ao definir os trapézios retângulo e isósceles, baseados em figuras e legendas. Depois sugerem que os estudantes meçam os lados e os ângulos da figura do trapézio isósceles para confirmarem a definição. A seguir apresentam a figura de um trapézio isósceles e a primeira parte da demonstração da propriedade “em um trapézio isósceles, os ângulos de uma mesma base são congruentes e as diagonais também são congruentes.”

Figura 76 – Tipos de trapézio



Tipos de trapézio

Vamos analisar 2 tipos de trapézio.

Trapézio retângulo é aquele que tem 2 ângulos internos retos.

No trapézio retângulo, um dos lados que não é base é perpendicular às 2 bases.
Por exemplo, este trapézio $ABCD$ é um trapézio retângulo.

$\hat{A}$ e $\hat{D}$ são ângulos retos ($\overline{AD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \perp \overline{DC}$).
$\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são as bases do trapézio $ABCD$.

Trapézio isósceles é aquele que tem os 2 lados não paralelos congruentes, isto é, de medidas de comprimento iguais.

Você pode verificar, experimentalmente, medindo a abertura dos ângulos e medindo o comprimento dos lados deste trapézio isósceles $PQRS$.

$\hat{P} \cong \hat{Q}$, $\hat{S} \cong \hat{R}$ e $\overline{PR} \cong \overline{SQ}$.
$PQRS$ é um trapézio isósceles de bases $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$. Então, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$.

É possível demonstrar que esses fatos acontecem em todos os trapézios isósceles, ou seja:

Em um trapézio isósceles, os ângulos de uma mesma base são congruentes e as diagonais também são congruentes.

Demonstração

1ª parte

Considerando este trapézio isósceles $ABCD$, representamos $\overline{CE}$ paralelo ao lado $\overline{AD}$. Obtemos, assim, o paralelogramo $ADCE$.

Nesses quadriláteros, temos:

- $\overline{DA} \cong \overline{CE}$ (lados opostos do paralelogramo);
- $\overline{CE} \cong \overline{CB}$ (pois $\overline{DA} \cong \overline{CB}$ e $\overline{DA} \cong \overline{CE}$) e, então, o triângulo CEB é isósceles.

No triângulo isósceles CEB, temos $C\hat{E}B \cong C\hat{B}E$ (**I**). No paralelogramo $ADCE$, temos $D\hat{A}E \cong C\hat{E}B$ (**II**).

De **I** e **II**, concluímos que $D\hat{A}E \cong C\hat{B}E$, ou seja, no trapézio isósceles $ABCD$, $\hat{A} \cong \hat{B}$.

No trapézio isósceles $ABCD$, temos ainda:

- $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180° \Rightarrow m(\hat{D}) = 180° - m(\hat{A})$
- $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180° \Rightarrow m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{B}) \Rightarrow m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{A})$

Assim, concluímos que $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$, ou seja, $\hat{C} \cong \hat{D}$.

200

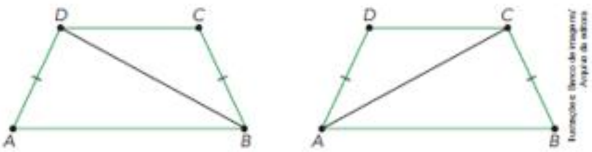
Fonte: Dante e Viana (2022, p. 200), referente ao livro do 8º ano.

Na página seguinte (Figura 77) é apresentada a segunda parte da demonstração apoiada em duas figuras, quando poderiam representar em apenas uma as duas diagonais. A seguir em “atividade resolvida passo a passo” os estudantes recebem uma questão da OBMEP, cuja solução é apresentada passo a passo simplesmente para que o estudante a entenda, ou seja, os estudantes não são solicitados a mobilizarem seus próprios conhecimentos, mas no final ampliam a atividade e sugerem uma variação para que resolvam sozinhos.

Figura 77 – Atividades com trapézios

2ª parte

Considerando o mesmo trapézio isósceles $ABCD$, representamos as diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$. Obtemos, assim, os triângulos DBC e ACD.



Nesses triângulos, temos que:

- $\overline{DC}$ é lado comum;
- $D\hat{C}B \cong A\hat{D}C$ (como demonstrado na 1ª parte);
- $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (pois o trapézio $ABCD$ é isósceles).

Então, pelo caso LAL, os triângulos DBC e ACD são congruentes e concluímos que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

Atividade resolvida passo a passo

(Obmep) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?

a) 4 **b)** 4,5 **c)** 5 **d)** 5,5 **e)** 6

Lendo e compreendendo

As bases dos trapézios são paralelas e, na figura dada, os trapézios são idênticos, ou seja, são congruentes. Dada a medida de comprimento da base maior, o enunciado pede a medida de comprimento da base menor.

Planejando a solução

Nos paralelogramos, os lados paralelos são congruentes. Vamos identificar paralelogramos na figura geométrica plana representada e comparar as medidas de comprimento dos lados.

Executando o que foi planejado

Como os trapézios são congruentes entre si, temos $AE = FD$. Analisando o paralelogramo $FECD$, concluímos que $FD = EC$.

Temos: $AC = AE + EC \Rightarrow AC = AE + FD \Rightarrow AC = FD + FD \Rightarrow AC = 2 \cdot FD$

Agora, no paralelogramo $ACNM$, temos $AC = MN$ e, então:

$$MN = 2 \cdot FD \Rightarrow 10 = 2 \cdot FD \Rightarrow FD = 5$$

Verificando

$$FD = 5 \Rightarrow EC = 5 \Rightarrow AC = AE + EC \Rightarrow 5 + 5 = 10$$

Se $AC = 10$, então $MN = 10$ (pois são lados opostos de um paralelogramo). Logo, se a base menor tem a medida de comprimento de 5 cm, então a base maior tem medida de comprimento de 10 cm, o que confirma a solução.

Emitindo resposta

Alternativa **c**.

Ampliando a atividade

Na figura geométrica plana representada, podemos identificar 2 hexágonos regulares. Qual é a medida de comprimento da maior diagonal do maior hexágono?

Solução

O segmento de reta $\overline{AQ}$ é uma das diagonais de maior medida de comprimento do maior hexágono.

Temos: $AE = EC = CP = PQ = 5$.

Então: $AQ = AE + EC + CP + PQ = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

201

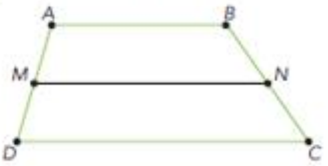
Fonte: Dante e Viana (2022, p. 201), referente ao livro do 8º ano.

Na página 202 (Figura 78) apresentam o teorema da base média sem assim identificá-lo. Apresentam uma figura e a descrevem, para então enunciar o teorema e explicitar a fórmula, sem qualquer justificativa ou demonstração, apenas solicitando a observação de que os segmentos AB, MN e DC são paralelos.

Figura 78 – Base média de um trapézio

Base média de um trapézio

Considere o trapézio $ABCD$ representado a seguir, no qual $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases e M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.



O segmento de reta $\overline{MN}$, que liga o ponto M (ponto médio do $\overline{AD}$) e o ponto N (ponto médio do $\overline{BC}$), é chamado de **base média** do trapézio $ABCD$. Perceba que $\overline{MN} /\!/ \overline{AB}$ e $\overline{MN} /\!/ \overline{CD}$.

Em todo trapézio, a medida de comprimento da base média é igual à média aritmética das medidas de comprimento das bases maior e menor do trapézio.

Assim, neste trapézio $ABCD$, temos:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Atividades

NÃO ESCREVA NO LIVRO

46 Em um trapézio retângulo, um dos ângulos internos tem medida de abertura de 53°. Quais são as medidas de abertura dos outros 3 ângulos internos? 90°, 90° e 127°. (53° + 90° + 90° = = 233°; 360° − 233° = 127°)

47 Considere um trapézio isósceles $PQRS$ tal que $\overline{PS} \cong \overline{QR}$. Represente-o no caderno e mostre que as afirmações a seguir são verdadeiras. MP

a) $\overline{PQ} /\!/ \overline{RS}$

b) $\overline{PR} \cong \overline{SQ}$

c) $\hat{P} \cong \hat{Q}$

d) $\hat{P} + \hat{S} = 180°$

48 Analise as afirmações referentes aos trapézios.

I. Têm apenas 2 lados paralelos.
II. Têm 2 ângulos retos.
III. Os 2 lados que não são bases são congruentes.
IV. Têm 2 pares de ângulos suplementares.
V. Têm as 2 diagonais congruentes.
VI. Têm os 2 ângulos de cada base congruentes.
VII. Têm um lado perpendicular às 2 bases.

Agora, responda no caderno.

a) Quais afirmações valem para todos os trapézios? I e IV.

b) Quais afirmações valem apenas para trapézios retângulos? II e VII.

c) Quais afirmações valem apenas para trapézios isósceles? III, V e VI.

49 Determine a medida de comprimento da base média de um trapézio em que a medida de comprimento da base maior é 8,25 cm e a medida de comprimento da base menor é 6,15 cm. 7,2 cm $\left(\frac{8,25 + 6,15}{2} = 7,2\right)$

50 Sabendo que a base média de um trapézio tem medida de comprimento de 6,5 cm e a base maior tem medida de comprimento de 8 cm, qual é a medida de comprimento da base menor?

5 cm $\left(6,5 = \frac{8 + x}{2} \Rightarrow 8 + x = 13 \Rightarrow x = 5\right)$

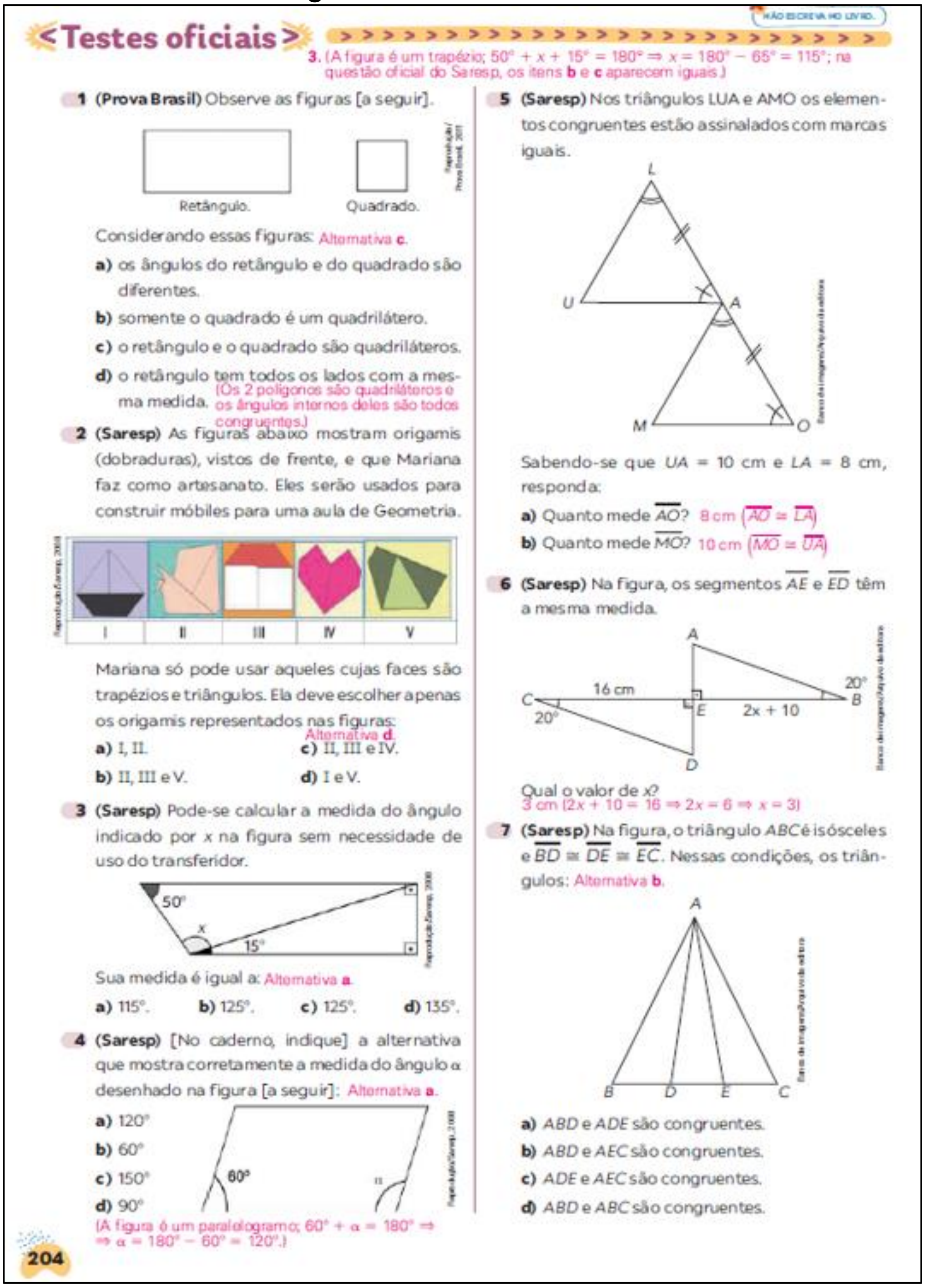
202

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 202), referente ao livro do 8º ano.

Na sequência apresentam cinco atividades que requerem conhecimentos de medidas de ângulos, de lados, de diagonais, perpendicularidade, paralelismo, congruência e de base média de trapézios. Em uma delas sugerem a solução algébrica, mas ela poderia ser resolvida aritmeticamente. Nas últimas quatro paginas analisadas o trabalho apresentado se refere à G2 – geometria proto-axiomática.

Na p. 203 (Figura 79), em testes oficiais, os autores apresentam questões desses testes para que os estudantes resolvam.

Figura 79 – Testes oficiais



NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Testes oficiais

3. (A figura é um trapézio; 50° + x + 15° = 180° ⇒ x = 180° − 65° = 115°; na questão oficial do Saresp, os itens **b** e **c** aparecem iguais.)

1 (Prova Brasil) Observe as figuras [a seguir].

Retângulo. Quadrado.

Considerando essas figuras: Alternativa **c**.

a) os ângulos do retângulo e do quadrado são diferentes.

b) somente o quadrado é um quadrilátero.

c) o retângulo e o quadrado são quadriláteros.

d) o retângulo tem todos os lados com a mesma medida. (Os 2 polígonos são quadriláteros e os ângulos internos deles são todos congruentes.)

2 (Saresp) As figuras abaixo mostram origamis (dobraduras), vistos de frente, e que Mariana faz como artesanato. Eles serão usados para construir móbiles para uma aula de Geometria.

I II III IV V

Mariana só pode usar aqueles cujas faces são trapézios e triângulos. Ela deve escolher apenas os origamis representados nas figuras: Alternativa **d**.

a) I, II.

b) II, III e V.

c) II, III e IV.

d) I e V.

3 (Saresp) Pode-se calcular a medida do ângulo indicado por *x* na figura sem necessidade de uso do transferidor.

50° x 15°

Sua medida é igual a: Alternativa **a**.

a) 115°. **b)** 125°. **c)** 125°. **d)** 135°.

4 (Saresp) [No caderno, indique] a alternativa que mostra corretamente a medida do ângulo α desenhado na figura [a seguir]: Alternativa **a**.

a) 120°

b) 60°

c) 150°

d) 90°

60° α

(A figura é um paralelogramo; 60° + α = 180° ⇒ α = 180° − 60° = 120°.)

5 (Saresp) Nos triângulos LUA e AMO os elementos congruentes estão assinalados com marcas iguais.

L U A M O

Sabendo-se que *UA* = 10 cm e *LA* = 8 cm, responda:

a) Quanto mede $\overline{AO}$? 8 cm ($\overline{AO} \cong \overline{LA}$)

b) Quanto mede $\overline{MO}$? 10 cm ($\overline{MO} \cong \overline{UA}$)

6 (Saresp) Na figura, os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{ED}$ têm a mesma medida.

A C 16 cm 20° E 2x + 10 20° B D

Qual o valor de *x*? 3 cm (2x + 10 = 16 ⇒ 2x = 6 ⇒ x = 3)

7 (Saresp) Na figura, o triângulo *ABC* é isósceles e $\overline{BD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EC}$. Nessas condições, os triângulos: Alternativa **b**.

A B D E C

a) *ABD* e *ADE* são congruentes.

b) *ABD* e *AEC* são congruentes.

c) *ADE* e *AEC* são congruentes.

d) *ABD* e *ABC* são congruentes.

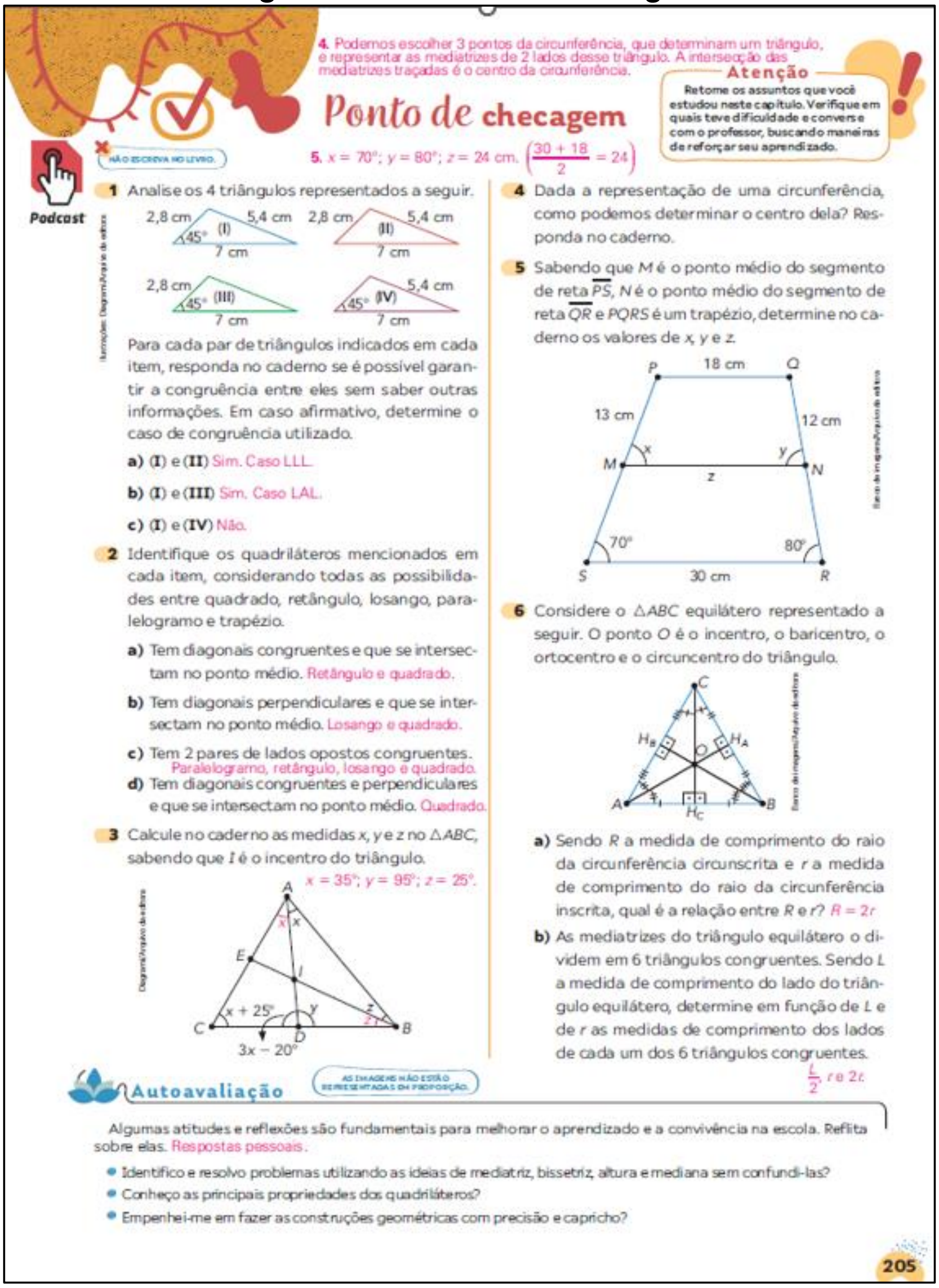
204

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 204), referente ao livro do 8º ano.

Nessas atividades os estudantes devem mobilizar seus conhecimentos, não só de quadriláteros, mas também de triângulos e podem ser entendidas como preparação para esses testes, quando forem realizados por esses estudantes.

Na p. 205 (Figura 80) em “ponto de checagem” os estudantes devem resolver seis atividades.

Figura 80 – Ponto de checagem



Ponto de checagem

4. Podemos escolher 3 pontos da circunferência, que determinam um triângulo, e representar as mediatrizes de 2 lados desse triângulo. A interseção das mediatrizes traçadas é o centro da circunferência.

5. $x = 70°$; $y = 80°$; $z = 24$ cm. $\left(\frac{30 + 18}{2} = 24\right)$

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

Podcast

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1 Analise os 4 triângulos representados a seguir.

Para cada par de triângulos indicados em cada item, responda no caderno se é possível garantir a congruência entre eles sem saber outras informações. Em caso afirmativo, determine o caso de congruência utilizado.

a) (I) e (II) Sim. Caso LLL.

b) (I) e (III) Sim. Caso LAL.

c) (I) e (IV) Não.

2 Identifique os quadriláteros mencionados em cada item, considerando todas as possibilidades entre quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio.

a) Tem diagonais congruentes e que se intersectam no ponto médio. Retângulo e quadrado.

b) Tem diagonais perpendiculares e que se intersectam no ponto médio. Losango e quadrado.

c) Tem 2 pares de lados opostos congruentes. Paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

d) Tem diagonais congruentes e perpendiculares e que se intersectam no ponto médio. Quadrado.

3 Calcule no caderno as medidas x, y e z no $\triangle ABC$, sabendo que I é o incentro do triângulo. $x = 35°$; $y = 95°$; $z = 25°$.

4 Dada a representação de uma circunferência, como podemos determinar o centro dela? Responda no caderno.

5 Sabendo que M é o ponto médio do segmento de reta $\overline{PS}$, N é o ponto médio do segmento de reta $\overline{QR}$ e $PQRS$ é um trapézio, determine no caderno os valores de x, y e z.

6 Considere o $\triangle ABC$ equilátero representado a seguir. O ponto O é o incentro, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro do triângulo.

a) Sendo R a medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita e r a medida de comprimento do raio da circunferência inscrita, qual é a relação entre R e r? $R = 2r$

b) As mediatrizes do triângulo equilátero o dividem em 6 triângulos congruentes. Sendo L a medida de comprimento do lado do triângulo equilátero, determine em função de L e de r as medidas de comprimento dos lados de cada um dos 6 triângulos congruentes. $\frac{L}{2}$, r e $2r$.

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Identifico e resolvo problemas utilizando as ideias de mediatriz, bissetriz, altura e mediana sem confundi-las?
- Conheço as principais propriedades dos quadriláteros?
- Empenhei-me em fazer as construções geométricas com precisão e capricho?

205

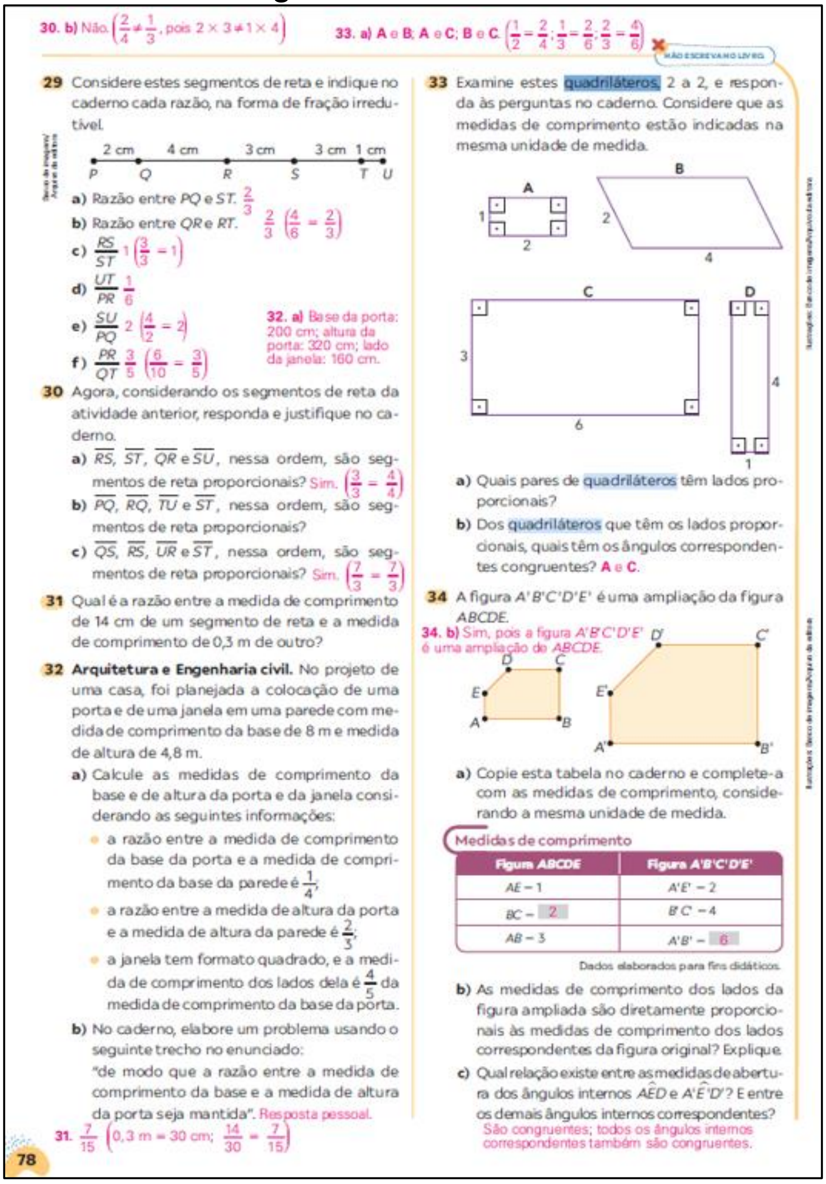
Fonte: Dante e Viana (2022, p. 205), referente ao livro do 8º ano.

Nessas atividades temos duas que tratam de triângulos, duas de quadriláteros, uma de circunferência e outra que relaciona triângulo equilátero e a circunferência circunscrita. Os autores chamam a atenção para que os estudantes, em caso de dificuldade, conversem com o professor e, na sequência, apresentam três questões que envolvem elementos do triângulo, propriedades de quadriláteros e construções geométricas, como autoavaliação.

Podemos dizer que o ensino de quadriláteros para o 8º ano focou na transição de G-1 – geometria espaço gráfica para G2 – geometria proto-axiomática com predominância desta, pois os estudantes foram apresentados a propriedades e demonstrações, geralmente apoiadas em figuras, cuja validação ocorreu localmente de modo intuitivo, embora com dedução formal. Os autores, em vários momentos, relembram conteúdos anteriores para que os estudantes mobilizem as percepções desenvolvidas anteriormente.

No livro do 9º ano os autores retomam o estudo de quadriláteros, na p. 78 (Figura 81) com atividades que os relacionam com o estudo de razão e proporção.

Figura 81 – Atividades



30. b) Não. $\left(\frac{2}{4} \neq \frac{1}{3}\text{, pois } 2 \times 3 \neq 1 \times 4\right)$

33. a) A e B; A e C; B e C. $\left(\frac{1}{2} = \frac{2}{4}; \frac{1}{3} = \frac{2}{6}; \frac{2}{3} = \frac{4}{6}\right)$

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

29 Considere estes segmentos de reta e indique no caderno cada razão, na forma de fração irredutível.

a) Razão entre PQ e ST. $\frac{2}{3}$

b) Razão entre QR e RT. $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$

c) $\frac{RS}{ST}$ 1 $\left(\frac{3}{3} = 1\right)$

d) $\frac{UT}{PR}$ $\frac{1}{6}$

e) $\frac{SU}{PQ}$ 2 $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$

f) $\frac{PR}{QT}$ $\frac{3}{5}$ $\left(\frac{6}{10} = \frac{3}{5}\right)$

32. a) Base da porta: 200 cm; altura da porta: 320 cm; lado da janela: 160 cm.

30 Agora, considerando os segmentos de reta da atividade anterior, responda e justifique no caderno.

a) $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{QR}$ e $\overline{SU}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais? Sim. $\left(\frac{3}{3} = \frac{4}{4}\right)$

b) $\overline{PQ}$, $\overline{RQ}$, $\overline{TU}$ e $\overline{ST}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais?

c) $\overline{QS}$, $\overline{RS}$, $\overline{UR}$ e $\overline{ST}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais? Sim. $\left(\frac{7}{3} = \frac{7}{3}\right)$

31 Qual é a razão entre a medida de comprimento de 14 cm de um segmento de reta e a medida de comprimento de 0,3 m de outro?

32 **Arquitetura e Engenharia civil.** No projeto de uma casa, foi planejada a colocação de uma porta e de uma janela em uma parede com medida de comprimento da base de 8 m e medida de altura de 4,8 m.

a) Calcule as medidas de comprimento da base e de altura da porta e da janela considerando as seguintes informações:

- a razão entre a medida de comprimento da base da porta e a medida de comprimento da base da parede é $\frac{1}{4}$;
- a razão entre a medida de altura da porta e a medida de altura da parede é $\frac{2}{3}$;
- a janela tem formato quadrado, e a medida de comprimento dos lados dela é $\frac{4}{5}$ da medida de comprimento da base da porta.

b) No caderno, elabore um problema usando o seguinte trecho no enunciado: "de modo que a razão entre a medida de comprimento da base e a medida de altura da porta seja mantida". Resposta pessoal.

31. $\frac{7}{15}$ $\left(0{,}3\text{ m} = 30\text{ cm}; \frac{14}{30} = \frac{7}{15}\right)$

33 Examine estes quadriláteros, 2 a 2, e responda às perguntas no caderno. Considere que as medidas de comprimento estão indicadas na mesma unidade de medida.

a) Quais pares de quadriláteros têm lados proporcionais?

b) Dos quadriláteros que têm os lados proporcionais, quais têm os ângulos correspondentes congruentes? A e C.

34 A figura $A'B'C'D'E'$ é uma ampliação da figura $ABCDE$.

34. b) Sim, pois a figura $A'B'C'D'E'$ é uma ampliação de $ABCDE$.

a) Copie esta tabela no caderno e complete-a com as medidas de comprimento, considerando a mesma unidade de medida.

Medidas de comprimento

Figura ABCDE	Figura A'B'C'D'E'
$AE = 1$	$A'E' = 2$
$BC =$ 2	$B'C' = 4$
$AB = 3$	$A'B' =$ 6

Dados elaborados para fins didáticos.

b) As medidas de comprimento dos lados da figura ampliada são diretamente proporcionais às medidas de comprimento dos lados correspondentes da figura original? Explique.

c) Qual relação existe entre as medidas de abertura dos ângulos internos $A\hat{E}D$ e $A'\hat{E'}D'$? E entre os demais ângulos internos correspondentes? São congruentes; todos os ângulos internos correspondentes também são congruentes.

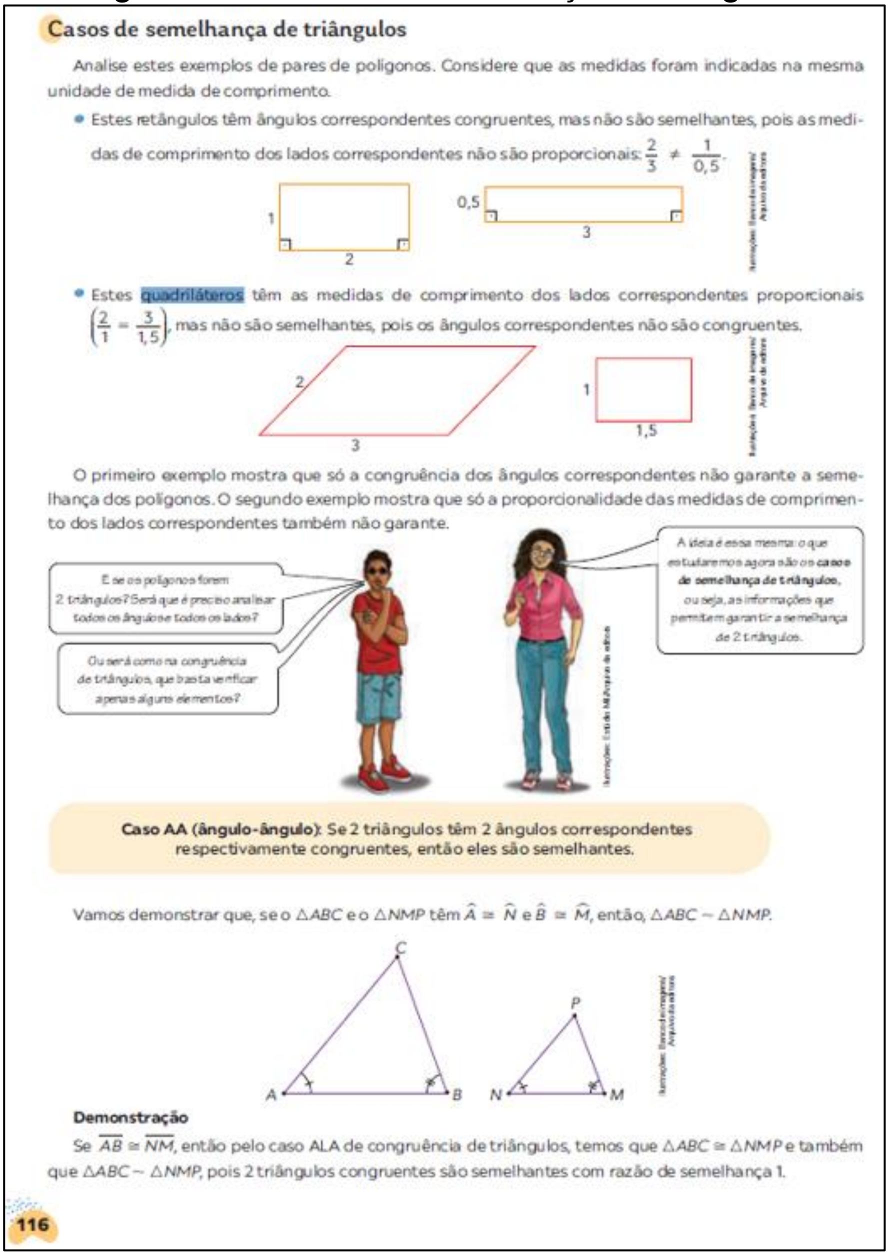
78

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 78), referente ao livro do 9º ano.

Nas páginas seguintes são abordados feixe de retas paralelas, teorema de Tales, Situações envolvendo proporcionalidade em geometria, porcentagem, juros, ampliação e redução de figuras, figuras semelhantes e figuras congruentes e semelhança de polígonos.

Na p. 116 (Figura 82) iniciam a discussão dos casos de semelhança de triângulos baseados na discussão com retângulos e quadriláteros, para que os estudantes observem, em pares de figuras, a congruência ou não de lados e de ângulos. A seguir, questionam a semelhança de triângulos e anunciam o estudo dos casos de semelhança para pares de triângulos.

Figura 82 – Casos de semelhança de triângulos



Casos de semelhança de triângulos

Analise estes exemplos de pares de polígonos. Considere que as medidas foram indicadas na mesma unidade de medida de comprimento.

- Estes retângulos têm ângulos correspondentes congruentes, mas não são semelhantes, pois as medidas de comprimento dos lados correspondentes não são proporcionais: $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{0,5}$.

- Estes quadriláteros têm as medidas de comprimento dos lados correspondentes proporcionais $\left(\frac{2}{1} = \frac{3}{1,5}\right)$, mas não são semelhantes, pois os ângulos correspondentes não são congruentes.

O primeiro exemplo mostra que só a congruência dos ângulos correspondentes não garante a semelhança dos polígonos. O segundo exemplo mostra que só a proporcionalidade das medidas de comprimento dos lados correspondentes também não garante.

Caso AA (ângulo-ângulo): Se 2 triângulos têm 2 ângulos correspondentes respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.

Vamos demonstrar que, se o $\triangle ABC$ e o $\triangle NMP$ têm $\hat{A} \cong \hat{N}$ e $\hat{B} \cong \hat{M}$, então, $\triangle ABC \sim \triangle NMP$.

Demonstração

Se $\overline{AB} \cong \overline{NM}$, então pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos que $\triangle ABC \cong \triangle NMP$ e também que $\triangle ABC \sim \triangle NMP$, pois 2 triângulos congruentes são semelhantes com razão de semelhança 1.

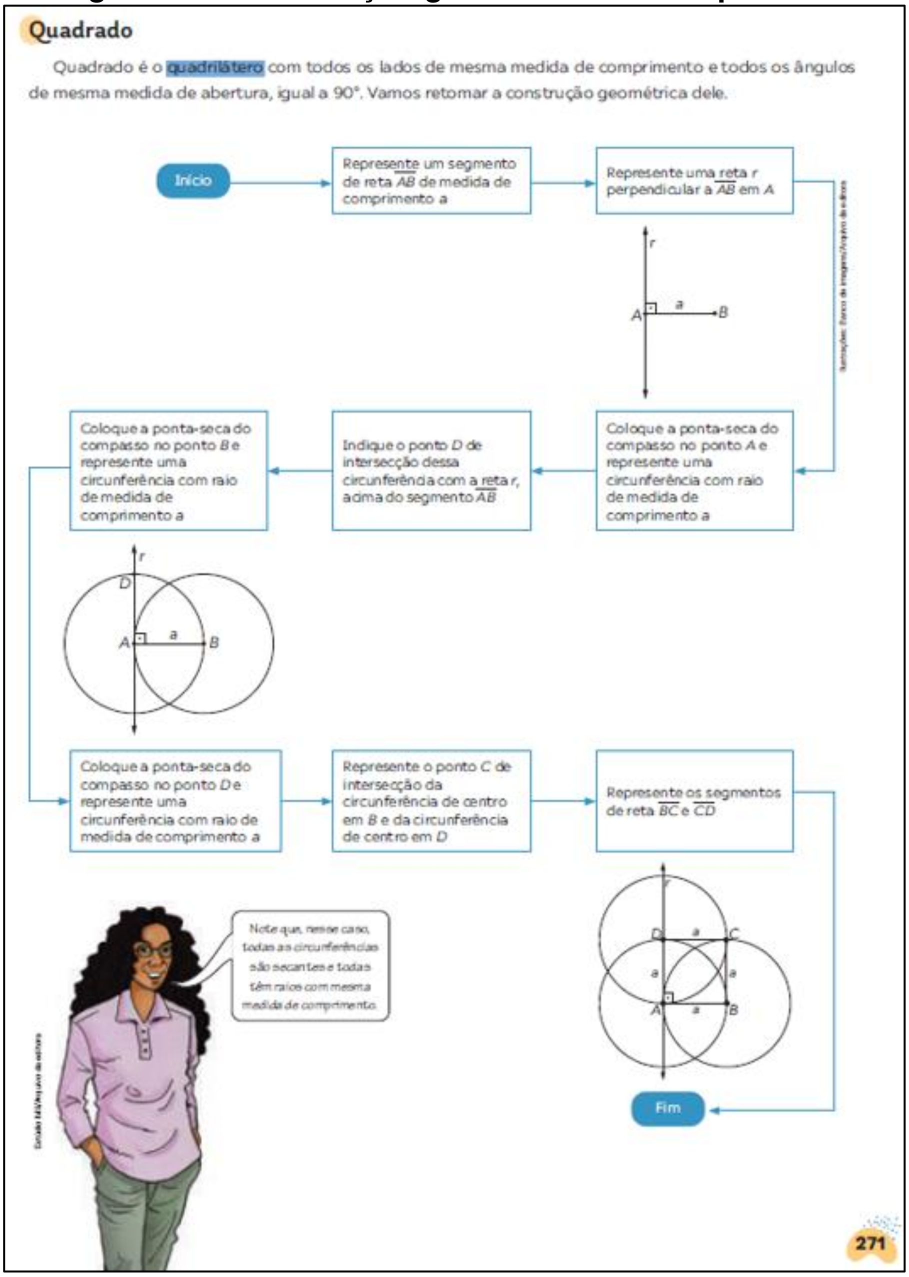
116

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 116), referente ao livro do 9º ano.

Depois enunciam o primeiro caso: ângulo-ângulo e o demonstram. Nas páginas seguintes apresentam os outros casos.

Na p. 271 (Figura 83) mostram como construir geometricamente, com régua e compasso, um quadrado. No final solicitam que os estudantes observem que todas as circunferências são secantes e têm mesma medida de raio.

Figura 83 – Construção geométrica de um quadrado



Fonte: Dante e Viana (2022, p. 271), referente ao livro do 9º ano.

Assim, percebe-se no livro do 9º ano uma quantidade elevada de conteúdos sobre triângulos, como por exemplos, assuntos sobre semelhança de triângulos, relações métricas nos triângulos retângulos, teorema de Pitágoras e altura de triângulo equilátero e somente breves menções aos quadriláteros em atividades e exemplos de outros conteúdos, além da construção geométrica do quadrado. Quanto às geometrias a análise é a mesma realizada para o livro do 8º ano, ou seja, o trabalho em G2.

Após analisar a Coleção Teláris para os anos finais do Ensino Fundamental, foi possível observar uma estrutura que, embora apresente uma progressão nos conteúdos, ainda carece de uma abordagem mais robusta em relação ao ensino de quadriláteros. As atividades relacionadas à geometria concreta (G0) foram escassas, o que limita as oportunidades para que os estudantes construam conhecimentos de forma autônoma. A maior parte do material se concentrou na geometria espaço gráfica (G1), onde as representações visuais e as percepções intuitivas predominam, mas isso não é suficiente para garantir uma compreensão profunda.

Além disso, as transições entre G0, G1 e G2 (geometria proto-axiomática) foram observadas, mas de maneira tímida, com apenas uma propriedade de polígonos sendo abordada. Essa limitação sugere que o desenvolvimento do raciocínio geométrico mais avançado (G2) será mais efetivo nos anos finais do Ensino Fundamental, quando os estudantes poderão começar a explorar e reconhecer outras propriedades dos quadriláteros de forma mais significativa.

Durante as análises das figuras geométricas, percebemos especialmente o ensino das figuras quadrado e retângulo e a importância dessas formas no início da vida escolar dos estudantes. A escolha de apresentar essas figuras é fundamentada em sua simplicidade e na familiaridade que os estudantes já possuem com elas em seu cotidiano. O quadrado, com seus lados iguais e ângulos retos, e o retângulo, que possui lados opostos iguais e também ângulos retos, são figuras que podem ser facilmente visualizadas e manipuladas, facilitando a compreensão inicial de conceitos geométricos. A distinção entre um quadrado e um retângulo é um aspecto crucial no ensino inicial de geometria. Os professores frequentemente enfatizam que, enquanto todo quadrado é um retângulo, nem todo retângulo é um quadrado. Essa diferenciação é vital para que os estudantes compreendam as propriedades específicas de cada figura, promovendo um raciocínio lógico e dedutivo. A utilização de representações visuais, como desenhos e modelos concretos, contribui para que os estudantes internalizem essas diferenças de forma mais eficaz.

Além disso, observamos que o triângulo equilátero é apresentado com mais frequência do que outras formas triangulares, como o triângulo isósceles ou escaleno. Essa escolha pode ser atribuída à simetria e à regularidade do triângulo equilátero, que facilita a compreensão de conceitos como congruência e igualdade de lados e ângulos. A simplicidade do triângulo equilátero permite que os estudantes desenvolvam uma base sólida em geometria antes de avançar para formas mais complexas. Embora a escolha de figuras geométricas como o quadrado, o retângulo e o triângulo equilátero seja prática e pedagógica, é fundamental que os educadores também introduzam uma variedade de formas e suas propriedades ao longo do processo de aprendizagem. Essa diversidade não apenas enriquece o conhecimento dos estudantes, mas também os prepara para uma compreensão mais abrangente da geometria, permitindo que reconheçam e analisem as relações entre diferentes figuras geométricas em contextos variados. A inclusão de uma gama mais ampla de formas geométricas pode contribuir para um aprendizado mais significativo e contextualizado, conectando a matemática à realidade dos estudantes.

Portanto, é evidente que, para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos sobre quadriláteros, é necessário um planejamento mais cuidadoso das atividades, que favoreça a transição entre as diferentes geometrias e promova uma compreensão mais abrangente e crítica do conteúdo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa visou analisar a proposta de ensino de quadriláteros e a organização de atividades, em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, baseado nas geometrias de Parzysz. A pesquisa foi motivada pela necessidade de compreender como as abordagens pedagógicas e os materiais didáticos sugeridos nos livros didáticos influenciam a aprendizagem dos estudantes em geometria, especialmente no que diz respeito aos quadriláteros.

Ao longo das análises, foi possível observar a presença das diferentes geometrias propostas por Parzysz — G0 (geometria concreta), G1 (geometria espaço-gráfica) e G2 (geometria proto-axiomática) — nas atividades e conteúdos abordados nas coleções analisadas. A análise revelou que, nos anos iniciais, a predominância de atividades relacionadas à G0 e G1 é evidente, com um foco significativo em figuras como quadrados e retângulos, que são apresentadas de maneira intuitiva e concreta. Essa abordagem inicial é crucial, pois permite que os estudantes desenvolvam uma compreensão básica e visual das formas geométricas, estabelecendo uma base sólida para o raciocínio geométrico. No entanto, a transição para G2, que envolve a dedução de propriedades e a formalização do conhecimento, foi observada de maneira tímida, indicando a necessidade de um maior aprofundamento nas atividades que promovam essa evolução.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, a presença de G1 e G2 se torna mais evidente, embora ainda haja uma predominância de figuras mais comuns, como quadrados e retângulos, em detrimento de outras formas geométricas. Essa escolha pode impactar a aprendizagem dos estudantes, pois limita a exposição a uma variedade mais ampla de propriedades geométricas e suas inter-relações. A falta de atividades que incentivem a exploração e a dedução de propriedades em um contexto mais amplo pode resultar em uma compreensão superficial da geometria.

Portanto, a presença das geometrias de Parzysz nas coleções analisadas sugere que, embora haja um esforço para abordar a geometria de maneira progressiva, é fundamental que os educadores e autores de materiais didáticos considerem a importância de integrar atividades que promovam a transição entre as diferentes geometrias. Isso não apenas enriquecerá o aprendizado dos estudantes, mas também os preparará para uma compreensão mais profunda e significativa da geometria, capacitando-os a aplicar esses conceitos em contextos diversos e a desenvolver habilidades críticas e analíticas.

A pesquisa destaca a relevância de alinhar as práticas pedagógicas às teorias contemporâneas sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico, contribuindo para a formação de estudantes mais preparados e engajados na aprendizagem da matemática. A análise das coleções de livros didáticos não apenas revela as abordagens atuais, mas também aponta para a necessidade de inovações que possam enriquecer o ensino de geometria e, consequentemente, a formação integral dos estudantes.

Ao analisar toda a coleção para os anos do Ensino Fundamental percebe-se que o trabalho com os quadriláteros percorreu, com mais ou menos ênfase, as geometrias G0, G1 e G2, bem como suas transições. Embora os autores tenham apresentado propriedades e demonstrações em uma linguagem matemática mais formal não há transição para G3, pois nessa faixa etária não seria pertinente. Em G3 os axiomas devem ser explicitados e a ideia de axiomática deve ser iniciada, com a compreensão de que as primeiras definições e teoremas devem ser demonstradas com base nos axiomas e as seguintes com base nos axiomas e no que já foi demonstrado. Talvez essa ideia pudesse ocorrer no Ensino Médio, pois como vimos em Dias (2009), que considera G3 a geometria do rigor, as validações devem ser dedutivas por teoremas e demonstrações de forma abstrata.

A articulação entre atividades práticas e momentos de reflexão teórica também se mostrou essencial. A pesquisa sugere que a combinação de experiências concretas com a formalização de conceitos pode facilitar a compreensão dos estudantes e estimular seu interesse pela Matemática. A utilização de recursos visuais, como diagramas e representações gráficas, pode ser uma estratégia eficaz para ajudar os estudantes a visualizarem e compreender melhor os conceitos geométricos. Além disso, a promoção de discussões em grupo e a troca de ideias entre os estudantes podem enriquecer o processo de aprendizagem, permitindo que eles construam conhecimento de forma colaborativa.

A análise das coleções de livros didáticos também revelou a necessidade de uma revisão crítica dos materiais utilizados nas escolas. É fundamental que os livros didáticos sejam elaborados com base em uma abordagem pedagógica que considere as especificidades do ensino de geometria e as necessidades dos estudantes. A inclusão de atividades que estimulem a curiosidade e o raciocínio lógico-dedutivo é crucial para o sucesso no ensino de quadriláteros. Portanto, a apresentação do conteúdo geométrico e a organização das atividades nos livros didáticos, quando alinhadas às geometrias de Parzysz, têm o potencial de possibilitar a evolução do pensamento geométrico dos estudantes. Contudo, para que essa evolução ocorra de maneira efetiva, é necessário que os materiais didáticos incluam uma variedade de atividades que promovam a transição entre as diferentes geometrias, incentivando a exploração, a dedução e a aplicação dos conceitos em contextos diversos. Essa pesquisa destaca a importância de um planejamento pedagógico que considere as diferentes dimensões do raciocínio geométrico, visando não apenas informar, mas também estimular a curiosidade e a capacidade investigativa dos estudantes. Assim, a formação de estudantes mais críticos e competentes em geometria se torna uma realidade possível, contribuindo para uma educação matemática mais rica e significativa.

Os resultados obtidos indicam que a formação contínua dos professores é fundamental para que possam refletir sobre suas práticas pedagógicas e utilizar recursos didáticos de maneira eficaz. A articulação entre atividades perceptivas e momentos de elaboração conceitual mostrou-se essencial para promover uma compreensão sólida dos conteúdos matemáticos, permitindo que os estudantes desenvolvam habilidades de argumentação e interpretação.

Por fim, este trabalho contribui para o campo da Educação Matemática ao oferecer percepções sobre a prática docente e a utilização de materiais didáticos, além de abrir caminhos para futuras investigações que possam aprofundar a compreensão das concepções dos professores e a eficácia das abordagens pedagógicas no ensino de geometria. A continuidade de investigações nessa área é recomendada, pois pode aprofundar a compreensão das concepções dos professores e a eficácia das metodologias empregadas, além de contribuir para a formação de estudantes mais críticos e reflexivos em relação à Matemática. A busca por um ensino de qualidade, que promova a construção do conhecimento de forma significativa, é um desafio que deve ser constantemente enfrentado por educadores e pesquisadores.

REFERÊNCIAS

BONGIOVANNI, V. **Tópicos de geometria (notas de aulas).** 1. ed. São Paulo, 2007. v. 1. 199p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília (DF): MEC, 2018.

CARVALHO, M. L. O. **Representações planas de corpos geométricos tridimensionais: uma proposta de ensino voltada para a codificação e decodificação de desenhos.** 2010. 243 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

CONCEIÇÃO, G. H. **Uso das tecnologias digitais de informação e comunicação para o estudo dos quadriláteros: uma configuração em tipos de prova e demonstração.** 2022. 233 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

COSTA, A. P. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis.** 2019. 401 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

CRESWELL J. W. **Projeto de pesquisa.** Tradução: Luciana de Oliveira da Rocha. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. 248 p.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Ápis Mais Matemática (anos iniciais: 1º ao 5º ano).** 1 ed. São Paulo: Ática, 2021.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Teláris Essencial Matemática (anos finais: 6º ao 9º ano).** 1 ed. São Paulo: Ática, 2022.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico.** 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar 9: Geometria Plana.** 7 ed. São Paulo: Editora Atual, 2001, 456 p. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B8mPbZnILa3vd1B3aE9RdXZFZ1k/view?resourcekey=0-rP7IYPI6BXl8RfBzJg632w. Acesso em: 29 abr. 2024.

DUARTE, V. F. **Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova**. 2007. 236 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GARCÍA-CUÉLLAR, D. J. **Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros**. 2021. 200 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6 ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008. 200 p.

JESUS, G. B. **Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada.** 2008.

223 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

MAIOLI, M. **Uma oficina para a formação de professores com enfoque em quadriláteros.** 2002. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MENEZES, M. B. **Investigando o processo de transposição didática interna: o caso dos quadriláteros**. 2004. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

MIRANDA, S. S. **O papel da geometria descritiva nos problemas de geometria espacial; um estudo das secções de um cubo**. 2006. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

NAGATA, R. S. **Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do modelo de van Hiele.** 2016. 120 f. Dissertação (Programa PROFMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

OLIVEIRA, L. M. S. **Ensinando geometria com régua e compasso, uma proposta para o 8º ano.** 2015. 99 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2015.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, n. 17, 2006. Department of Mathematics, University of Palermo, Italy. Disponível em: https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/quad17_BParzysz_06.pdf. Acesso em: 29 abr. 2024.

PONTES, J. S. **Conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de geometria espacial elementar: uma engenharia didática com professores que ensinam matemática.** 2021. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

POSSANI, J. F. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.** 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SANTOS, A. A. **Uma sequência de ensino para o estudo das propriedades dos polígonos via pavimentação**. 2007. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SECCO, A. **Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas.** 2007. 198 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico.** São Paulo: Editora Cortez, 2014. 306 p.

SOUZA, W. R. S. **Representações planas de figuras tridimensionais: um estudo envolvendo visualização.** 2010. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

VILACA, M. M. **Desenvolvimento do pensamento geométrico: análise de uma sequência didática vivenciada no GeoGebra para a abordagem dos**

quadriláteros notáveis. 2023. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.